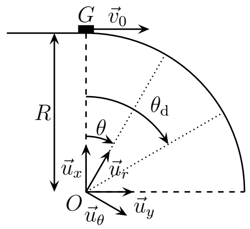
Mécanique des systèmes de points

Exercice 1 Vol plané

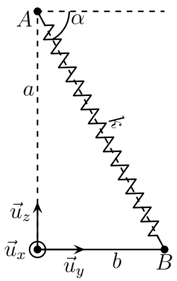
Une luge assimilée à un point matériel G de masse m arrive au niveau d'un profil circulaire avec une vitesse horizontale $\vec{v}_0$. Tant que la luge suit ce profil, elle décrit une trajectoire circulaire de rayon $R = 5{,}0$ m et est repérée par l'angle θ (voir figure). On néglige les frottements. Le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ lié à la Terre est supposé galiléen.



1. Écrire l'équation d'évolution de $\theta(t)$ à l'aide du théorème du moment cinétique.
2. En déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de θ, v_0 et R.
3. À l'aide d'une autre loi de mécanique, déterminer l'expression de la réaction exercée par le sol sur la luge.
4. En déduire l'angle θ_d à partir duquel la luge quitte le profil circulaire.
5. Tracer l'allure de θ_d en fonction de v_0 et faire apparaître une valeur limite v_{lim}. Que se passe-t-il au-delà de cette valeur limite ?

Exercice 2 Gravimètre à ressort

Un gravimètre à ressort est constitué d'une tige OB de masse négligeable pouvant tourner autour d'un axe horizontal (Ox) et supportant en B une masse ponctuelle m. Sous l'action du ressort AB, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0, le dispositif est tel que la tige est horizontale à l'équilibre. On pose alors $OA = a$, $OB = b$, $AB = \ell$ et $\theta = (\vec{u}_y,\overrightarrow{OB})$.



1. À l'aide du théorème du moment cinétique, calculer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre en fonction de k, m, a, g et ℓ_0. À quelle condition cet équilibre existe-t-il ?
2. Toujours à l'aide du TMC, déterminer la période T_0 des petites oscillations de ce pendule. Que se passe-t-il lorsque $k\,a$ est voisin de $m\,g$?

Exercice 3 Système Terre-Lune

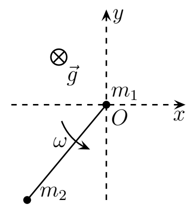
On assimile la Terre et la Lune à deux points matériels, respectivement T et L, de masses respectives m_T et m_L. La distance Terre – Lune est supposée fixe et égale à ℓ ; on admet que ces deux points décrivent des orbites circulaires à la vitesse angulaire constante ω dans le référentiel barycentrique qui leur est associé. Le barycentre G de ces deux astres décrit autour du Soleil, que l'on considère être au point origine O du référentiel héliocentrique, une orbite circulaire de rayon a à la vitesse angulaire constante Ω. Ces deux mouvements sont coplanaires et les rotations ont lieu dans le même sens.

1. Déterminer pour le système Terre – Lune ainsi modélisé l'énergie cinétique dans le référentiel héliocentrique.
2. Déterminer pour ce même système le moment cinétique par rapport à O dans le référentiel héliocentrique.
3. En faisant les approximations nécessaires, simplifier les résultats précédents et en déduire une conséquence importante sur l'étude du mouvement de la Terre autour du Soleil.

Données : $a = 1{,}5.10^{11}$ m ; $\ell = 3{,}8.10^{8}$ m ; $\Omega = 2{,}0.10^{-7}$ rad.s^{-1} ; $\omega = 2{,}7.10^{-6}$ rad.s^{-1} ; $m_T = 6{,}0.0^{24}$ kg ; $m_L = 7{,}4.10^{22}$ kg.

Exercice 4 Points reliés par une tige

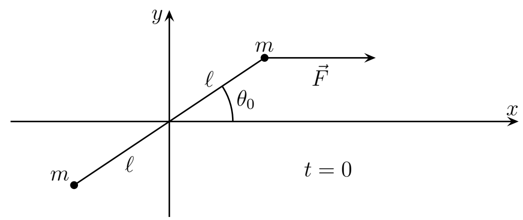
Deux masses m_1 et m_2 reliées par une tige sans masse de longueur ℓ sont astreintes à se déplacer sans frottement sur un plan horizontal (Oxy). Dans un premier temps m_1 est fixe et m_2 décrit un mouvement circulaire autour de m_1 à la vitesse angulaire ω. Au moment où m_2 passe sur l'axe (Oy), instant défini comme origine des dates, on lâche m_1.



Déterminer les équations horaires $x_1(t)$, $y_1(t)$, $x_2(t)$ et $y_2(t)$ des abscisses et des ordonnées de m_1 et m_2.

Exercice 5 Points reliés par un fil

Deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m glissent sans frottements sur un plan horizontal (Oxy). Ils sont reliés par un fil idéal de longueur $2\,\ell$ et M_1 subit une force constante $\vec{F} = F\,\vec{u}_x$.

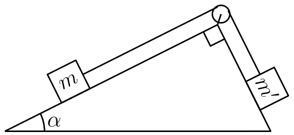


En notant (x_1,y_1) et (x_2,y_2) les coordonnées respectives de M_1 et M_2, les conditions initiales s'écrivent : $x_1(0) = \ell\cos\theta_0$, $y_1(0) = \ell\sin\theta_0$, $x_2(0) = -\ell\cos\theta_0$, $y_2(0) = -\ell\sin\theta_0$ avec $\theta_0 \ll 1$ et toutes les vitesses sont nulles.

Déterminer les équations horaires $x_2(t)$ et $y_2(t)$ du mouvement de M_2.

Exercice 6 Deux masses sur un plan incliné

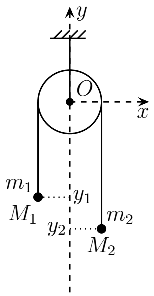
Deux masses m et m', reliées par un fil idéal, sont posées sur deux plan inclinés orthogonaux d'intersection horizontale. Les deux masses et le fil sont donc dans un même plan vertical. Initialement les deux masses sont immobiles et on suppose $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ et la poulie idéale.



1. Déterminer l'accélération des masses dans l'hypothèse où il n'y a aucun frottement.
2. Le contact de m avec le plan est de type un frottement solide caractérisé par un coefficient $f \overset{\text{not}}{=} \tan\varphi$.
   En envisageant les deux cas limites de mouvement dans un sens ou dans l'autre, déterminer le domaine de valeurs de m' qui assurent l'équilibre. On exprimera le résultat en fonction de m, φ et α.

Exercice 7 Machine d'Atwood

On considère un dispositif composé de deux masses m_1 et m_2 suspendues en M_1 et M_2, aux extrémités d'un fil sans masse, inextensible, de longueur ℓ. Ce fil passe dans la gorge d'une poulie idéale, sans masse, de rayon R. Il n'y a aucun frottement (ce qui implique que le fil glisse dans la gorge de la poulie).



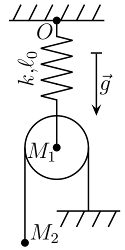
Le référentiel d'étude $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ est supposé galiléen.

1. Exprimer la longueur $\ell(t)$ en fonction de $y_1(t)$, $y_2(t)$, et R.
   En déduire une relation entre $\dot{y}_1(t)$, $\dot{y}_2(t)$ puis entre $\ddot{y}_1(t)$ et $\ddot{y}_2(t)$.
2. À l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué successivement aux deux masses M_1 et M_2, déterminer les accélérations de M_1 et M_2 en fonction des grandeurs caractéristiques du problème.

3. Retrouver ce résultat à partir du théorème du moment cinétique appliqué au système $\mathscr{S} = \{ M_1 + M_2 + \text{fil} \}$.
4. Retrouver ce résultat à partir d'un théorème énergétique appliqué au système $\mathscr{S}$.

Exercice 8 Oscillateur

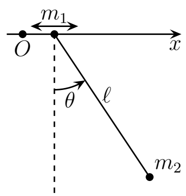
Soit le dispositif représenté ci-dessous. Le ressort est idéal, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Les points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 peuvent se déplacer verticalement. La poulie accrochée en M_1 et le fil sont idéaux.



Montrer que la période des oscillations s'écrit : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 + 4\,m_2}{k}}$.

Exercice 9 Pendule à deux masses

Un pendule double est constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 placées aux extrémités M_1 et M_2 d'une tige sans masse de longueur ℓ. Le point M_1 est assujetti à se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal (Ox). Le pendule peut osciller librement sous l'action de la pesanteur tout en restant dans un même plan vertical contenant l'axe (Ox).

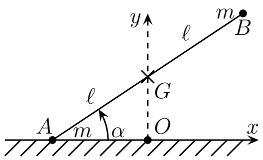


L'ensemble est abandonné sans vitesse initiale, θ ayant la valeur θ_0. Le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ est supposé galiléen.

1. Que peut-on dire du mouvement de G, centre de masse du pendule ?
2. Déterminer, par application du théorème de l'énergie cinétique, une intégrale première du mouvement.
3. Montrer que la pulsation des petites oscillations est $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}\left(\dfrac{m_2}{m_1} + 1\right)}$.

Exercice 10 TIGE TOMBANT SUR LE SOL

On étudie la chute d'une tige sans masse de longueur $2\,\ell$ au bout de laquelle sont fixées deux masses A et B identiques. Le point A est en contact sans frottement avec le sol. Le point B est lâché sans vitesse initiale avec un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. L'équilibre étant instable, le système se met à tomber. On suppose que A est toujours en contact avec le sol.



On note O le point sur le sol à la verticale à l'instant initial du centre de masse G de $\mathscr{S}$, système constitué de la tige et des deux masses.

Le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ est supposé galiléen.

1. Montrer que le mouvement de G est vertical.
2. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de $\alpha(t)$ en fonction uniquement des grandeurs caractéristiques du système.
3. Déterminer l'accélération de G au moment où B touche le sol.
4. Déterminer la vitesse de G au moment où B touche le sol.
5. Montrer que l'hypothèse de contact de A avec le sol est toujours vérifiée.