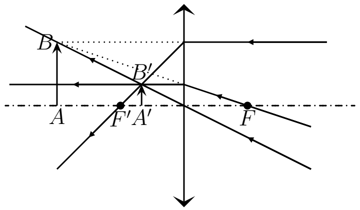
Voir à travers

Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

Le cours

➜ *Figure* ①. Cette situation n'est pas possible car les deux foyers ne sont pas à égale distance du centre de la lentille.

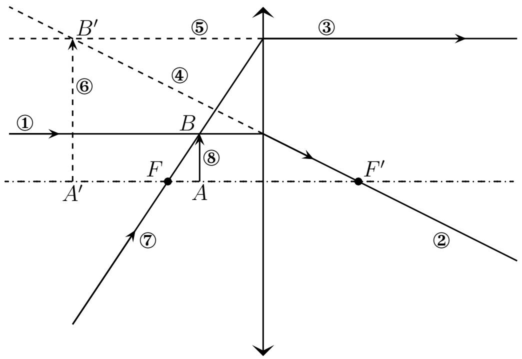
➜ *Figure* ②. Cette situation est possible. Le fait que le foyer principal image F' soit à gauche de cette lentille convergente signifie que la lumière vient de la droite. Les rayons utilisés pour le tracé sont les rayons usuels (celui arrivant en passant par le centre, celui arrivant parallèle à l'axe optique et celui arrivant en direction du foyer principal objet F). Ici l'objet sera donc virtuel et l'image réelle.

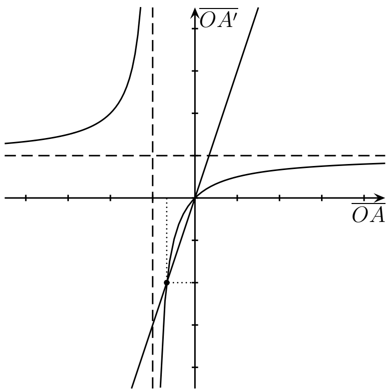


Exercice 1

Les étapes de construction sont représentées ci-dessous :

- ➜ le premier rayon ① est pris arbitrairement mais parallèle à l'axe
- ➜ le rayon ② réfracté par le rayon ① est connu (car tout rayon arrivant sur une lentille parallèlement à l'axe optique est réfracté en direction du foyer principal image)
- ➜ le rayon ③, rayon de l'image, est tracé parallèle à l'axe mais trois fois plus haut, par définition du grandissement
- ➜ les prolongations fictives ④ et ⑤ en arrière des rayons images ② et ③ permettent de trouver la position de l'image ⑥
- ➜ l'origine du rayon ③ est connu car tout rayon arrivant sur une lentille en direction du foyer principal objet est réfracté parallèlement à l'axe optique : nous pouvons donc tracer le rayon ⑦
- ➜ enfin la position de l'objet ⑧ est désormais connu

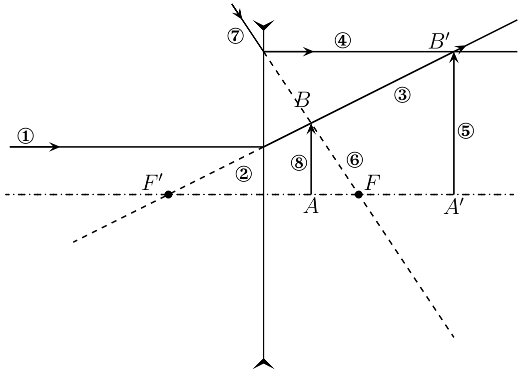


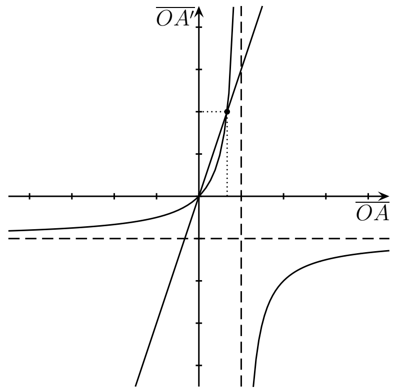


Nous pouvons vérifier la construction avec l'hyperbole de conjugaison (cf. ci-dessus). En effet, en traçant la droite de pente $+3$, nous trouvons un seul point de fonctionnement optique correspondant à :

- ➜ un objet réel placé entre le foyer objet et la lentille
- ➜ une image virtuelle placée avant le foyer objet de la lentille

Faisons de même avec une lentille divergente (la numérotation correspond à l'ordre de construction) tant pour la construction que pour la vérification avec l'hyperbole de conjugaison.





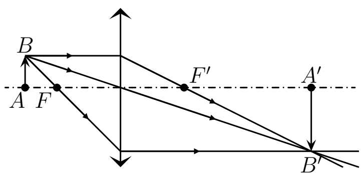
Exercice 2

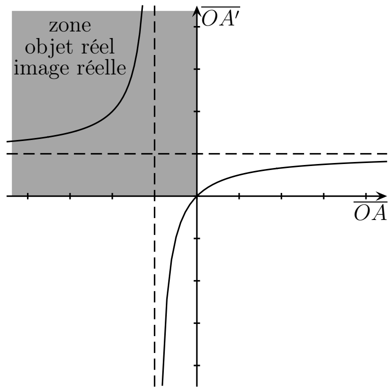
Analysons le problème. Nous désirons projeter une image sur un écran, il s'agit donc d'un objet réel et d'une image réelle. Pour trouver l'image A' de A par une lentille, il faut connaître deux choses : la position de la lentille **et** *sa distance focale. Or nous imposons ici deux contraintes : le grandissement et la place de l'image. Ces deux contraintes vont donc correspondre à un seul choix possible de position de de lentille et de distance focale. En pratique, nous chercherons la position de la lentille au feeling jusqu'à obtenir une image nette de la bonne taille souhaitée au bon endroit souhaité.*

De manière analytique, cela signifie que les deux contraintes de grandissement et de position de l'image permettront de tout trouver : position de la lentille et distance focale. Il ne suffit donc « que » d'écrire ces deux lois et le tour est joué.

Seul détail, nous ne connaissons le grandissement qu'au signe près. Une hyperbole de conjugaison ou une construction graphique nous permet de nous convaincre du fait que lorsqu'une lentille convergente donne une image réelle d'un objet réel, le grandissement est négatif. Autrement dit ici $\gamma = -a < 0$.

La distance focale sera évidemment notée f'. En ce qui concerne la position de la lentille, sachant plus ou moins d'avance que nous allons utiliser la relation de conjugaison de NEWTON *(la plus rapide), nous allons la repérerr par $\overline{FA} = x$.*





Le grandissement, avec vu du foyer, s'écrit

$$\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = +\frac{f'}{\overline{FA}} = -a \qquad \rightsquigarrow \qquad \overline{FA} = -\frac{f'}{a}$$

De plus avec $\overline{F'A'} = \overline{F'F} + \overline{FA} + \overline{AA'} = -2\,f' - \dfrac{f'}{a} + D$, la relation de conjugaison de NEWTON s'écrit :

$$-\frac{f'}{a}\left(D - 2\,f' - \frac{f'}{a}\right) = -f'^2 \quad \rightsquigarrow \quad D - 2\,f' - \frac{f'}{a} = +f'\,a$$

Soit après réarrangement des termes :

$$D = \frac{f'}{a}(2\,a + 1 + a^2) = f'\,\frac{(1+a)}{a} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{f' = \frac{a\,D}{(1+a)^2}}$$

Exercice 3

Le problème revient en fait à chercher le minimum de $\ell = \overline{AA'}$ avec $\overline{OA} < 0$ (objet réel) et $\overline{OA'} > 0$ (image réelle). Notons $x = \overline{OA'}$. Comme il existe des contraintes sur $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$, autant utiliser la relation de conjugaison de DESCARTES.

Relation de conjugaison : $-\dfrac{1}{\overline{OA}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f'}$ donne :

$$\overline{OA} = \frac{x\,f'}{f'-x} \qquad \rightsquigarrow \qquad \ell = \overline{AO} + \overline{OA'} = -\frac{x\,f'}{f'-x} + x = \frac{x^2}{x-f'}$$

Cela donne $\dfrac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}x} = (\cdots) = \dfrac{x\,(x-2\,f')}{(x-f')^2}$ et donc on a un extremum pour $x = 0$ soit $A = A'$ et $\ell = 0$ (cas inintéressant) et pour $x = 2\,f'$ et $\ell = 4\,f'$.

Finalement : $\boxed{\ell_{\min} = 4\,f'}$, d'où l'intérêt de commencer par séparer objet et écran d'au moins $4f'$ lorsque l'on veut projeter une image de l'objet sur l'écran à l'aide d'une lentille convergente.

Exercice 4

$\boxed{1.}$ *Comme nous recherchons à projeter une image, il faut que celle-ci soit réelle, ie.* $\overline{OA'} > 0$.

Comme une condition porte que la distance $\overline{OA'}$, autant prendre la relation de conjugaison de DESCARTES.

En notant $\overline{OA'} = x > 0$ et $\overline{OA} = y < 0$ (objet réel) et en tenant compte de $x - y = D$ (distance objet / image fixée), la relation de conjugaison de DESCARTES s'écrit : $-\dfrac{1}{x-D} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f'}$.

Nous obtenons donc l'équation en x suivante : $x^2 - x\,D + f'\,D = 0$.

Il est ainsi possible de réaliser une image sur l'écran s'il existe une position satisfaisante de la lentille, *ie.* s'il existe une solution pour x.

Il faut donc que le discriminant soit positif, soit : $\Delta = D^2 - 4\,f'\,D \geqslant 0$ qui n'est autre que la condition $\boxed{D \geqslant 4\,f'}$.

$\boxed{2.}$ Les solutions s'écrivent alors $x_1 = \dfrac{D+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{D-\sqrt{\Delta}}{2}$.

La distance entre les deux positions de la lentille n'est autre que $d = x_1 - x_2$ (écart entre les distance écran / image).

Nous avons donc : $d = \sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4\,f'\,D}$.

Après réarrangement, nous trouvons effectivement le résultat proposé : $\boxed{f' = \dfrac{D^2 - d^2}{4\,D}}$.

$\boxed{3.}$ La moyenne des distances focale obtenue est $\boxed{12{,}8911\text{ cm}}$. En ce qui concerne les incertitudes, le TP *Incertitude*, nous permet d'arriver à la formule et aux résultats ci-dessous.

$$\frac{\Delta f'}{f'} = \sqrt{4 \times \frac{(D\,\varepsilon)^2 + (d\,\varepsilon)^2}{(D^2-d^2)^2} + \frac{\varepsilon^2}{D^2}}$$

mesure	1	2	3	4
$\Delta f'$	2,8339 mm	2,8765 mm	2,9211 mm	2,9491 mm
mesure	5	6	7	8
$\Delta f'$	2,9900 mm	3,0190 mm	3,0489 mm	3,0731 mm

Ainsi, finalement, $\boxed{\Delta f'_{\text{moy}} = \dfrac{(\Delta f')_{\max}}{\sqrt{N}} = 1{,}0865\text{ mm}}$ où N est le nombre de mesures, soit ici 8.

Pour trouver graphiquement f', nous pouvons utiliser la relation : $d^2 = D^2 - 4\,f'\,D$ écrite sous la forme : $\dfrac{d^2}{D} = D - 4\,f'$.

En traçant alors d^2/D en fonction de D nous devons obtenir une droite de pente 1 et d'ordonnée à l'origine $-4\,f'$. En notant $\dfrac{d^2}{D} = \alpha D + \beta$, nous trouvons $\alpha = 1{,}001393$ et $\beta = -51{,}66561$ cm avec un coefficient de corrélation de $r = 0{,}9996$.

Cela donne $\boxed{f' = 12{,}91640\text{ cm}}$.

Remarque : le TP *Incertitude* permet de calculer les incertitudes sur α et β : $\Delta\alpha = 1{,}21420 \times 10^{-2}$ et $\Delta\beta = 0{,}891214$ cm, ce qui donne $\Delta f' = 2{,}2280$ mm.

Exercice 5

$\boxed{1.}$ Notons $\infty \xrightarrow{\mathscr{L}} B_0 \xrightarrow{\mathscr{L}_0} B$.

Comme l'objet pour $\mathscr{L}$ est à l'infini, son image sera naturellement $B_0 = F'$.

Et comme le centre de $\mathscr{L}$ est précisément sur le foyer principal objet F_0 de $\mathscr{L}_0$, nous avons $\overline{F_0F'} = f'$.

La relation de conjugaison de NEWTON pour $\mathscr{L}_0$ s'écrit $\overline{F_0B_0}.\overline{F'_0B} = -f_0'^2$.

Or $\overline{F_0B_0} = f'$ et $\overline{F'_0B} = \overline{AB} = \overline{d}$ d'où $\boxed{f' = -\dfrac{f_0'^2}{\overline{d}}}$.

$\boxed{2.}$ Il n'y a *a priori* aucune condition mathématique pour obtenir $f' = -\dfrac{f_0'^2}{\overline{d}}$.

En revanche, nous remarquons que lorsque $f' > 0$, (lentille convergente), nous avons $\overline{d} < 0$, *ie.* l'image à pointer recule.

Ainsi lorsque l'image A est déjà virtuelle ($f'_0 < 0$, lentille $\mathscr{L}_0$ divergente) il faudra faire attention à rester dans un domaine accessible de pointage pour le viseur à frontale fixe.

❀ Exercice 6

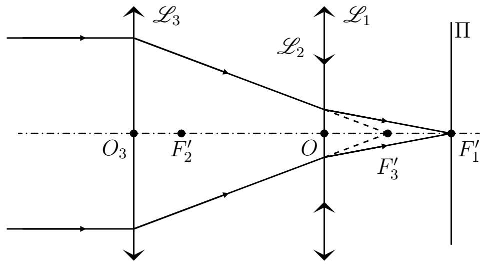
$\boxed{1.}$ *Commençons par bien analyser le problème, ie. par bien préciser par quelles lentilles passe la lumière.*

Notations : $\infty \xrightarrow{\mathscr{L}_3} A_3 \xrightarrow{\mathscr{L}_2} A_2 \xrightarrow{\mathscr{L}_1} \Pi$ (cf. schéma ci-dessous.)

Π est dans le plan focal de L_1, donc $A_2 = \infty$.

A_2 est image à l'infini de A_3, donc $A_3 = F_2$.

A_3 est image de l'infini par L_1 donc $A_3 = F'_3$.

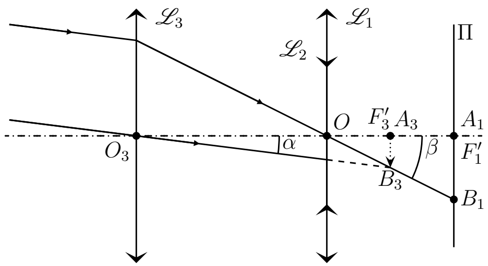


$\boxed{2.}$ Géométriquement nous avons :

$$\overline{O_3\Pi} = \overline{O_3F_2} + \overline{F_2O_2} + \overline{O_2\Pi} = \overline{O_3F'_3} - \overline{O_2F_2} + \overline{O_2F_1} = f'_3 - (-f'_2) + f'_1 = f'_1 + f'_2 + f'_3$$

Numériquement : $\boxed{\overline{O_3\Pi} = \underline{150} \text{ mm}}$.

$\boxed{3.}$ Notations : $B \xrightarrow{\mathscr{L}_3} B_3 \xrightarrow{\mathscr{L}_2} B_2 \xrightarrow{\mathscr{L}_1} B_1$.



B est à l'infini pour la lentille ($|\overline{O_3A}| \gg f'_3$) donc $A_3 = F'_3$.

Comme les lentilles L_2 et L_1 sont accolées, le rayon passant par B_3 et O n'est pas dévié donc O, B_3 et B_1 sont alignés. Notons $\alpha = \widehat{A_3O_3B_3}$ et $\beta = \widehat{A_3OB_1}$.

Nous avons alors, parce que tous les angles sont petits :

$$\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{O_3A}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{O_3A_3}} < 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} < 0$$

Cela permet d'arriver à :

$$\overline{A_1B_1} = \overline{OA_1} \times \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_3}} \times \overline{O_3A_3} \times \frac{\overline{AB}}{\overline{O_3A}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{-f'_2} \times f'_3 \times \frac{\overline{AB}}{\overline{O_3A}} = -\underline{6{,}0} \text{ mm}}$$

$\boxed{4.}$ Une lentille forme l'image d'une tour à 3 km dans son plan focal image si 3 km $\gg f'$, ce que nous supposerons évidemment.

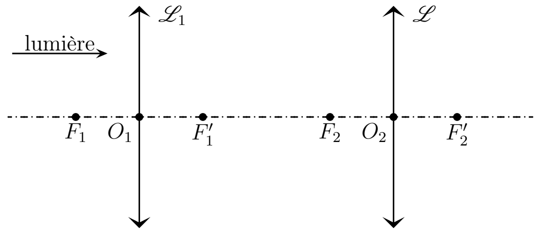
La question revient donc à chercher quelle doit être la distance focale image d'une lentille telle que $\overline{AA'} = 3{,}0$ km et $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\underline{1{,}0} \times 10^{-4}$.

Or $\gamma = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \simeq \dfrac{f'}{\overline{OA}}$ d'où $f' = \gamma\overline{OA}$ et numériquement : $\boxed{f' = \underline{30} \text{ cm}}$. L'hypothèse est vérifiée $f' \ll |\overline{OA}|$.

L'encombrement est double, il est préférable d'utiliser l'objectif précédent.

❀ Exercice 7

Notations : $A \xrightarrow{\mathscr{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathscr{L}_2} A_2$.



$\boxed{1.}$ Ici nous cherchons à calculer $\ell = \overline{O_1O_2}$.

L'œil voit sans accommoder, donc $A_2 = \infty$ et donc $A_1 = F_2$:

Nous n'avons qu'à traduire le fait que A soit l'objet dont F_2 est l'image par $\mathscr{L}$, ce qui donne avec la relation de NEWTON :

$$\overline{F'_1F_2} = -\frac{{f'_1}^2}{\overline{F_1A}} = -\frac{{f'_1}^2}{d - f'_1} = \underline{10} \text{ cm}$$

Nous avons donc alors géométriquement :

$$\overline{O_2O_1} = f'_1 + \overline{F'_1F_2} + f'_2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\overline{O_2O_1}\underline{22} \text{ cm}}$$

$\boxed{2.}$ Notons $O_1 \xrightarrow{\mathscr{L}_1} O'$. La relation de conjugaison pour $\mathscr{L}_2$ donne :

$$-\frac{1}{\overline{O_2O_1}} + \frac{1}{\overline{O_2O'}} = \frac{1}{\overline{O_2F'_2}} \quad \rightsquigarrow \quad \overline{O_2O'} = \frac{\overline{O_2F'_2} \times \overline{O_2O_1}}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_2F'_2}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{O_2O'} = -\frac{f'_2\,\ell}{f'_2 - \ell} = \underline{2{,}2} \text{ cm}}$$

Ou avec la relation de conjugaison de NEWTON :

$$\overline{F'_2O'} \times \overline{F_2O_1} = -{f'_2}^2 \quad \text{et} \quad \overline{O_2O'} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2O'} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{O_2O'} = f'_2 - \frac{{f'_2}^2}{\overline{F_2O_1}} = \underline{2{,}2} \text{ cm}}$$

Notons d' le diamètre du cercle oculaire. Ainsi :

$$|\gamma| = \frac{d'}{d_1} = \left|\frac{\overline{O_2O'}}{\overline{O_2O_1}}\right| \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{d' = d_1 \frac{\overline{O_2O'}}{\ell} = \underline{3{,}0} \text{ mm}}$$

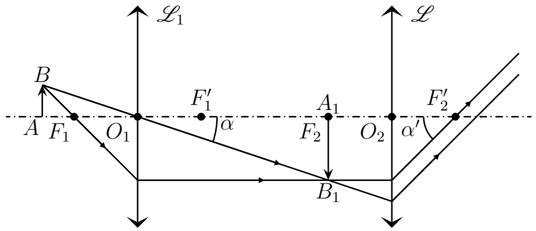
$\boxed{3.}$ Géométriquement nous avons :

$$\alpha' = \frac{\overline{F_2B_1}}{\overline{O_2F_2}} > 0 \text{ (rayons paraxiaux)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{F_2B_1}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1F_2}} \text{ (Thalès)}$$

Donc $\overline{F_2B_1} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{O_1F_2}}{\overline{O_1A}}$.

Et ainsi :

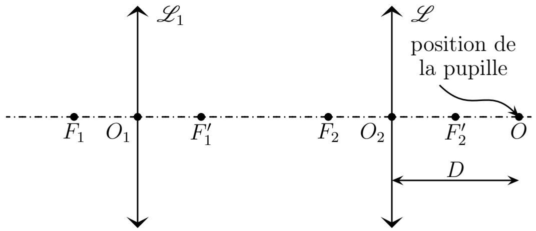
$$\alpha' = \frac{\overline{AB} \times \overline{O_1F_2}}{\overline{O_2F_2} \times \overline{O_1A}} \quad \rightsquigarrow \quad P = \left| \frac{\overline{O_1F_2}}{\overline{O_2F_2} \times \overline{O_1A}} \right| \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{P = \frac{\ell - f_2'}{d\, f_2'} = \underline{50}\ \text{m}^{-1}}$$



$\boxed{4. \text{(a) et (b)}}$ *Comme dans ce problème, nous connaisssons bien la distance entre les centre O_1 et O_2 des lentilles, nous allons privilégier la relation de conjugaison de* DESCARTES. *En revanche, nous n'allons pas essayer de simplifier les expressions car nous savons d'avance qu'elles ne vont pas se simplifier.*

La distance entre l'objet vu par l'œil et la pupille doit être comprise entre d_0 et $+\infty$ (pour un œil normal).

Notons $A \xrightarrow{\mathscr{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathscr{L}_2} A_2$ et cherchons donc la condition sur $\overline{O_1A}$ pour avoir $-\infty < \overline{OA_2} < -d_0$.



➜ *La condition sur la position de l'image A_2.*

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA_2} = \overline{OO_2} + \overline{O_2A_2} = -D + \overline{O_2A_2} \\ \overline{OA_2} < -d_0 \end{array} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad \overline{O_2A_2} < D - d_0 < 0$$

Cette dernière inégalité est valable pour les deux cas envisagés ici, à savoir $D = 0$ et $D = f_2'$.

➜ *La condition sur la position de l'objet A_1 pour $\mathscr{L}_2$*

$$\text{Nous avons donc :} \quad \left. \begin{array}{l} 0 > \dfrac{1}{\overline{O_2A_2}} > \dfrac{1}{D - d_0} \\ -\dfrac{1}{\overline{O_2A_1}} + \dfrac{1}{\overline{O_2A_2}} = \dfrac{1}{f_2'} \end{array} \right\} \quad \rightsquigarrow \quad 0 > \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}} > \frac{1}{D - d_0}$$

Et ainsi :

$$> -\frac{1}{f_2'} > \frac{1}{\overline{O_2A_1}} > \frac{1}{D - d_0} - \frac{1}{f_2'} \overset{\text{not}}{=} \frac{1}{K} \quad \rightsquigarrow \quad -f_2' < \overline{O_2A_1} < K < 0$$

➜ *Position de l'objet A pour $\mathscr{L}_1$.*

Maintenant que nous avons la plage où doit se trouver l'objet A_1 pour $\mathscr{L}_2$, cherchons la plage où doit se trouver l'image A_1 pour $\mathscr{L}_1$ afin d'en déduire la plage où doit se trouver l'objet pour $\mathscr{L}_1$.

Nous avons $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = \overline{O_1A_1} - \ell$, d'où :

$$0 < \ell - f_2' < \overline{O_1A_1} < \ell + K \quad \rightsquigarrow \quad 0 < \frac{1}{\ell + K} < \frac{1}{\overline{O_1A_1}} < \frac{1}{\ell - f_2'}$$

Comme $-\dfrac{1}{\overline{O_1A}} + \dfrac{1}{\overline{O_1A_1}} = \dfrac{1}{f_1'}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\ell + K} - \frac{1}{f_1'} < \frac{1}{\overline{O_1A}} < \frac{1}{\ell - f_2'} - \frac{1}{f_1'} < 0$$

➜ *Finalement . . .*

Cela donne, en remplaçant K :

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\ell + \dfrac{1}{\dfrac{1}{D - d_0} - \dfrac{1}{f_2'}}} - \dfrac{1}{f_1'}} > \overline{O_1A} > \frac{1}{\dfrac{1}{\ell - f_2'} - \dfrac{1}{f_1'}}$$

Numériquement :

➜ $\boxed{\text{Avec } D = 0 : -\underline{19},7315 \text{ cm} > \overline{O_1A} > -\underline{20} \text{ cm}}$

➜ $\boxed{\text{avec } D = f_2' : -\underline{19},6899 \text{ cm} > \overline{O_1A} > -\underline{20} \text{ cm}}$.

Les profondeurs de champ étant identiques, nous choisirons de place notre œil au plus près du cercle oculaire pour que l'œil puisse recevoir tous les rayons lumineux passant par $\mathscr{L}_1$. L'image vue étant ainsi plus lumineuse. Ici $\overline{O_2O'} = 2{,}2$ cm, nous placerons donc notre œil de préférence en F_2' car $\overline{O_2F_2'} = 2$ cm.

$\boxed{5.}$ La présence du réticule oblige l'utilisateur à accomoder sur l'infini. La plage d'accomodation de l'œil est alors très réduite, ce qui implique une diminution de la profondeur de champ. Dès lors, le position du viseur est plus précis et l'incertitude s'en voit diminuée.

❅ Exercice 8

$\boxed{1.}$ En considérant que les rayons sont peu inclinés, nous pouvons écrire dans le triangle idoine $y_{n+1} = y_n + a\alpha_n$. Pour trouver une relation de récurrence entre uniquement les y_n (donc sans les α_n), il faut utiliser « autre chose ».

Ici nous n'avons fait que traduire la propagation rectiligne de la lumière entre *les lentilles, nous pouvons donc utiliser le fait que la lumière passe à travers des lentilles. Autrement dit, nous allons utiliser la relation de conjugaison traduite en y_n et α_n. Ici comme les positions des centres des lentilles est un paramètre important, nous allons plutôt utiliser la relation de conjugaison de* DESCARTES.

En considérant l'objet et l'image formés par les intersections des rayons et de l'axe, la relation de conjugaison de la lentille n s'écrit :

$$\begin{cases} \overline{O_nA} = -\dfrac{y_n}{\alpha_{n-1}} \\ \overline{O_nA'} = -\dfrac{y_n}{\alpha_n} \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad +\frac{\alpha_{n-1}}{y_n} - \frac{\alpha_n}{y_n} = \frac{1}{f'} \quad \rightsquigarrow \quad \alpha_{n-1} - \alpha_n = \frac{y_n}{f'}$$

En éliminant α_n et $\alpha_{n-1} = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{a}$, nous arrivons à $\boxed{y_{n+1} + \left(\dfrac{a}{f'} - 2\right) y_n + y_{n-1} = 0}$.

$\boxed{2.}$ Nous pouvons écrire le développement de TAYLOR de la fonction $y(z)$ pour la lentille n :

$$\begin{cases} y_n = y(z) \\ y_{n+1} = y(z+a) = y(z) + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}(z) \times a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}(z) \times a^2 \\ y_{n-1} = y(z-a) = y(z) - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}(z) \times a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}(z) \times a^2 \end{cases}$$

En remplaçant dans la relation de récurrence, nous trouvons : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}(z) + \dfrac{1}{a\,f'}\,y(z) = 0}$.

Nous reconnaissons une équation dont la solution est connue : $\boxed{y(z) = y_0 \cos(\omega_0\, z) \text{ où } {\omega_0}^2 = \dfrac{1}{a\,f'}}$.

$\boxed{3.}$ Un tel système permet de conserver les rayons proches de l'axe optique : phénomène de stabilisation utilisé dans les périscopes.

Exercice 9

$\boxed{1.}$ En faisant attention aux conventions de signes, nous avons :

$$\frac{1}{f_1'} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(n_\mathrm{D} - 1) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{f_1' = 50{,}42604 \text{ cm}}$$

$\boxed{2.}$ Nous avons :

$$\frac{1}{f_1'(\mathrm{C})} = K\,(n_\mathrm{C} - 1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{f_1'(\mathrm{F})} = K\,(n_\mathrm{F} - 1) \quad \text{avec} \quad K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ainsi : $f'(\mathrm{C}) - f'(\mathrm{F}) = \dfrac{n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C}}{K\,(n_\mathrm{C} - 1)(n_\mathrm{F} - 1)}$.

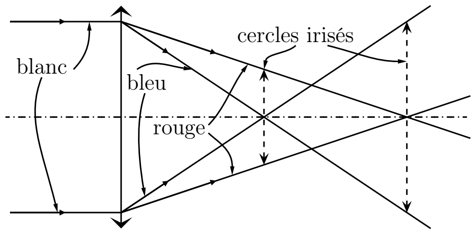
En remplaçant $n_\mathrm{F} - n_\mathrm{C}$ par $\dfrac{n_\mathrm{D} - 1}{\nu_1}$ et K par $\dfrac{1}{f_1'\,(n_\mathrm{D} - 1)}$, nous arrivons à :

$$f'(\mathrm{C}) - f'(\mathrm{F}) = \frac{f_1'\,(n_\mathrm{D} - 1)^2}{\nu\,(n_\mathrm{C} - 1)\,(n_\mathrm{C} - 1)}$$

Ainsi, en faisant l'approximation $n_\mathrm{D} = n_\mathrm{C} = n_\mathrm{F}$, nous obtenons : $\boxed{\Delta f' = \dfrac{f_1'}{\nu} = 7{,}817010 \times 10^{-3} \text{ m}}$.

Les distances focales extrêmes sont séparées de près de 8 mm.

$\boxed{3.}$ Nous pouvons voir sur le schéma que le cercle irisé le plus petit est celui situé dans le plan au milieu des deux foyers.



Avec THALÈS, nous pouvons écrire :

$$\frac{\Delta f'/2}{\rho} = \frac{f'}{D/2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\rho = \frac{D\,\Delta f'}{4\,f'} = 0{,}310039 \text{ mm}}$$

$\boxed{4.\ (a)}$ Lorsque deux lentilles sont accolées, les vergences s'ajoutent, donc $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{f_1'} + \dfrac{1}{f_2'}$. * Pour de petites variations, nous avons ainsi :

$$-\frac{\Delta f'}{f'^2} = -\frac{\Delta f_1'}{f_2'^2} - \frac{\Delta f_2'}{f_2'^2}$$

Comme le but est de réaliser un achromat, il faut $\Delta f' = 0$ et comme $\Delta f_1' = f_1'/\nu_1$ et $\Delta f_2' = f_2'/\nu_2$ nous obtenons, finalement, la condition : $\nu_1 f_1' = -\nu_2 f_2'$.

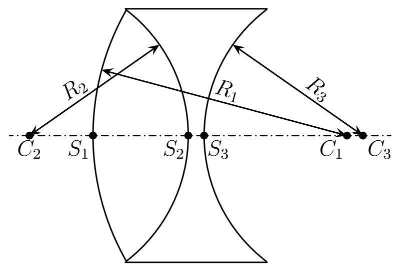
Ainsi, comme ν_1 et ν_2 positifs, f_2' et f_1' sont forcément de signes différents, *ie.* les deux lentilles sont de nature (convergente, divergente) différente.

Numériquement : $\boxed{f_2' = -\dfrac{\nu_1\,f_1'}{\nu_2} = -1{,}015035 \text{ m}}$.

Et ainsi :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{f_1'}\left(1 - \frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{f' = \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} f_1' = 1{,}002090 \text{ m}}$$

$\boxed{4.\ (b)}$ En utilisant les notations ci-dessous, nous avons $\dfrac{1}{f_2'} = (n_\mathrm{D} - 1)\left(\dfrac{1}{\overline{S_2C_2}} - \dfrac{1}{\overline{S_3C_3}}\right)$.



Ainsi si $\overline{S_3C_3} > 0$, la lentille est biconcave.

Numériquement, cela donne : $\boxed{\overline{S_3C_3} = 1{,}050830 \text{ m}}$. La lentille est effectivement biconcave.