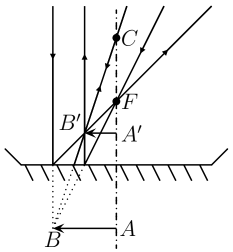
Voir par réflexion

Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

Le cours

➜ *Figure* ①. Cette situation n'est pas possible parce que le foyer du miroir n'est pas au milieu du centre et du sommet.

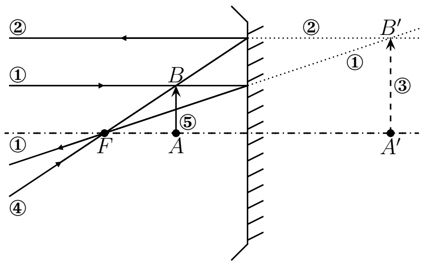
➜ *Figure* ②. Cette situation est tout à fait possible : le miroir n'est « que » vertical. Les rayons utilisés pour le tracé sont les rayons usuels (celui arrivant en direction du centre C, celui arrivant parallèle à l'axe optique et celui arrivant en direction du foyer principal objet F). Ici nous avons un objet virtuel et une image réelle.

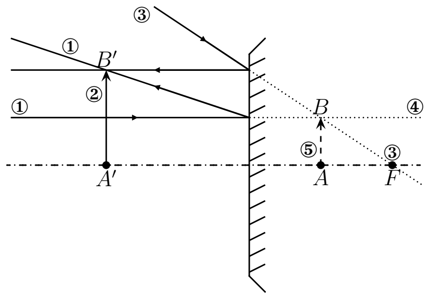


Exercice 1

Le raisonnement est identique à celui utilisé dans le TD OPT1.

Les étapes de construction sont représentées ci-dessous. Le premier rayon est pris arbitrairement mais parallèle à l'axe, le deuxième est défini par le grandissement : à une distance ici deux fois plus grande de l'axe que le rayon 1.



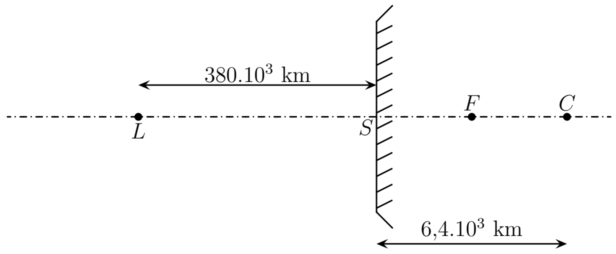


Exercice 2

1. La distance focale valant la moitié du rayon, nous avons $\boxed{f' = \dfrac{R}{2} = 3{,}2.10^3 \text{ km}}$.

La distance focale est positive parce que le miroir est convexe.

2. Schématisons la situation.



Connaissant la position de la Lune et la distance focale, nous pouvons écrire :

$$\overline{FL}.\overline{FL'} = +f'^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{FL'} = +\frac{f'^2}{\overline{FL}} = \underline{26}{,}7223 \text{ km}}$$

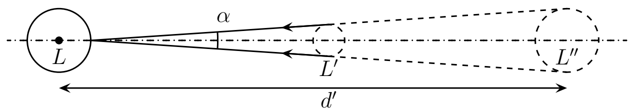
L'image est très très proche du foyer optique. C'est normal étant donné que la Lune peut être considérée comme étant optiquement à l'infini.

3. Utilisons la formule du grandissement avec origine au foyer : $\gamma = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{FL}}$, ce qui donne :

$$\boxed{\gamma = \underline{8{,}35}073 \times 10^{-3}} \quad \text{d'où un diamètre :} \quad \boxed{D' = \gamma\, D = \underline{58}{,}4551 \text{ km}}$$

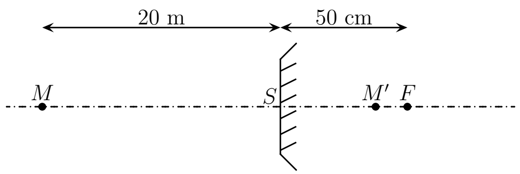
4. Vu de la Lune, son image est vue sous un angle $\alpha = \dfrac{D'}{LL'} = \underline{1{,}52}545 \times 10^{-4} \text{ rad} = \underline{31}{,}4646\ ''$.

Cela correspond à une Lune fictive L'' située à une distance $\boxed{d' = \dfrac{D}{\alpha} = \underline{45}{,}8882 \times 10^6 \text{ km}}$ soit près de 120 fois plus loin que la Lune est vue de la Terre.



Exercice 3

1. Notons M la moto et M' son image donnée par le miroir : $M \xrightarrow{\mathscr{M}} M'$. Nous avons donc :



La relation de conjugaison de NEWTON donne directement, avec $f' = \dfrac{1}{V} = \underline{50}$ cm :

$$\overline{FM'}.\overline{FM} = f'^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{FM'} = -\underline{1{,}21}951 \text{ cm}}$$

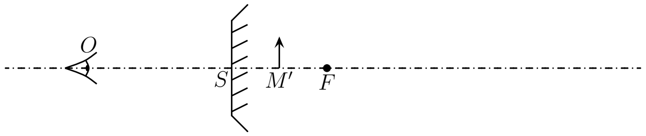
☕ *Remarque* : l'image est très proche du foyer, ce qui est normal étant donné que l'objet est presque à l'infini optique (40 fois la distance focale).

Le grandissement associé vaut $\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{FM}} = \underline{2{,}4}3902 \times 10^{-2}}$.

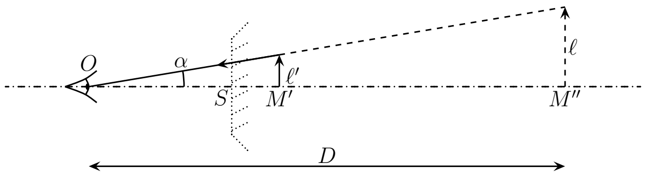
Le grandissement est positif, ce qui signifie que la moto est vue droite dans le rétroviseur. Rien d'extraordinaire à cela puisque c'est l'expérience qui nous le prouve chaque jour (nous voyons « droit » quand nous regardons dans les rétroviseurs) et pourtant, cela n'a rien d'optiquement si évident !

$\boxed{\text{2. (a)}}$ Étant donné que la position de l'image est parfaitement connue, nous pouvons tout de suite écrire (cf. schéma ci-dessous) :

$$\overline{OM'} = \overline{OS} + \overline{SF} + \overline{FM'} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\overline{OM'} = \underline{1{,}4}8780 \text{ m}}$$



$\boxed{\text{2. (b)}}$ La moto est interprétée comme étant à une distance D tel que l'angle α sous lequel elle est vue à travers le rétroviseur soit égal à $\dfrac{\ell}{D}$ où ℓ est la taille **réelle** d'une moto.



Or l'image de la moto est vue sous un angle $\alpha = \dfrac{\ell'}{OM'}$ où ℓ' est la taille de l'image de la moto. Par définition du grandissement, nous avons $\ell' = \gamma\,\ell$ et ainsi :

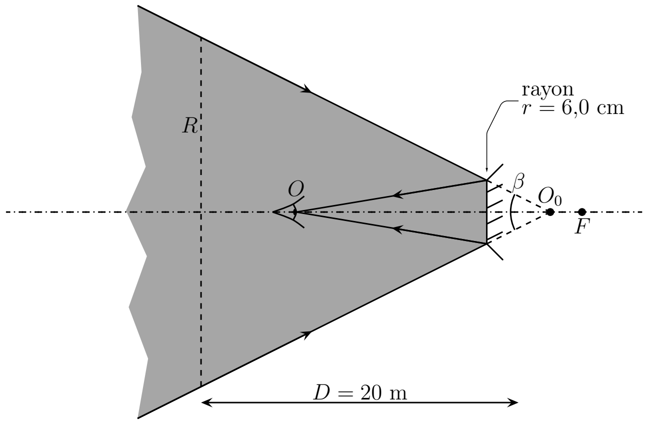
$$\alpha = \frac{\ell}{D} = \frac{\ell'}{OM'} = \frac{\gamma\,\ell}{OM'} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{D = \frac{OM'}{\gamma} = \underline{61} \text{ m}}$$

En regardant dans le rétroviseur la moto est interprétée comme étant trois fois plus loin qu'elle ne l'est réellement. Si elle présente un danger, il est donc plus urgent d'intervenir que ce que le cerveau pourrait croire.

$\boxed{\text{2. (c)}}$ *Dès lors que nous cherchons des rayons lumineux qui ont pour contrainte de passer ici ou là, il faudra souvent penser à la propriété de stigmatisme des systèmes optiques.*

Nous cherchons à déterminer l'ensemble des rayons lumineux qui peuvent passer par O après réflexion dans le miroir. Si nous appelons O_0 l'objet dont l'image est O (l'œil), alors, par stigmatisme, tous les rayons qui peuvent arriver en direction de O_0 en passant par le miroir pourront passer par O, ce qui est le but recherché.

Il n'y a plus qu'à trouver O_0 ce qui se fait sans rayon grâce à la relation de conjugaison de NEWTON (et qui est d'autant plus facile que $FO = 3\,f'$). Le champ visuel à travers le rétroviseur n'est donc autre que la zone grisée limitée par les rayons extrêmes arrivant sur le miroir en direction de O_0.



☕ *Remarque* : comme pour un miroir convexe, tous les objets réels ont une image virtuelle, tout ce qui sera vu à travers le miroir sera vu à au moins une distance $OS = 1{,}0$ m, *ie.* sera visible nettement. Il n'y a donc pas besoin de restreindre le champ visuel à travers le rétroviseur.

$\boxed{\text{2. (d)}}$ Avec le schéma ci-dessus, nous voyons tout de suite que :

$$\tan\beta = \beta = \frac{R}{D + SO_0} = \frac{r}{SO_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{R = r\,\frac{D + SO_0}{SO_0} = \underline{2{,}5}2 \text{ m}}.$$

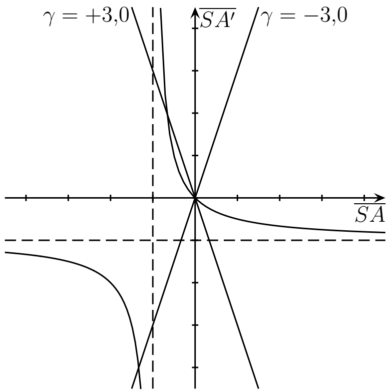
❆ Exercice 4

$\boxed{1.}$ Le cheminement de la lumière est tel qu'elle est d'abord réfléchie par $\mathscr{M}_1$ avant d'être réfléchie par $\mathscr{M}_2$. L'objet observé est un astre, donc optiquement à l'infini. Sachant que son image par $\mathscr{M}_1$ sera en F'_1 et que l'image finale donnée par le télescope est S_1, nous pouvons écrire qu'optiquement la situation est la suivante :

$$\infty \xrightarrow{\mathscr{M}_1} A' = F'_1 \xrightarrow{\mathscr{M}_2} S_1$$

Il faut maintenant chercher la position de $\mathscr{M}_2$ ainsi que sa distance focale. Cela fait deux inconnues. Pour les trouver, il faudra traduire deux lois, deux contraintes. En regardant bien nous voyons qu'il existe effectivement deux contraintes : la position de l'image finale ainsi que le grandissement par $\mathscr{M}_2$.

Cherchons tout d'abord le signe du grandissement. Pour cela, traçons l'hyperbole de conjugaison du miroir concave ainsi que les deux droites correspondant aux grandissements $\gamma = +3{,}0$ et $\gamma = -3{,}0$.



Nous constatons alors que pour chacun des grandissements, il existe une position possible du miroir. Toutefois, étant donné la place de S_1 (l'image finale) vis-à-vis de S_2, il est nécessaire que l'image donnée soit réelle. Dans ces conditions, nous pouvons alors affirmer que le grandissement vaut $\gamma = -3{,}0$. *Ne pas oublier que le grandissement est l'opposé de la pente de la droite passant par l'origine et le point de fonctionnement optique.*

Traduisons maintenant la contrainte de position de l'image finale, *ie.* le fait que $\mathscr{M}_2$ conjugue F_1' et S_1 :

$$\overline{F_2F_1'} \cdot \overline{F_2S_1} = f_2'^2$$

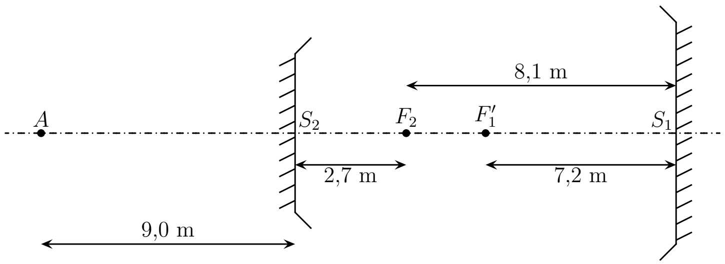
Choisissons de conserver comme inconnue de position $\overline{F_2S_1}$ car elle apparaît directement dans la relation de conjugaison. Nous pouvons alors transformer cette dernière et, surtout, écrire le grandissement en fonction de $\overline{F_2S_1}$: $\gamma = \dfrac{\overline{F_2S_1}}{\overline{F_2S_2}}$. Cela donne :

$$(\overline{F_2S_1} + \overline{S_1F_1'})\,\overline{F_2S_1} = \overline{F_2S_2}^2 \quad \rightsquigarrow \quad (\gamma\,\overline{F_2S_2} + \overline{S_1F_1'})\,\gamma\,\cancel{\overline{F_2S_2}} = \overline{F_2S_2}^{\cancel{2}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{F_2S_2} = \gamma\,\frac{S_1F_1'}{1-\gamma^2} = -\underline{2{,}7}\text{ m}}$$

Pour faire l'application numérique, nous avons orienté l'axe vers la droite. Nous constatons alors que le fait d'avoir $\overline{F_2S_2} < 0$ est cohérent. Nous pouvons alors conclure $\boxed{f_2' = -\underline{2{,}7}\text{ m}}$.

Et ainsi $\boxed{\overline{F_2S_1} = \gamma\,\overline{F_2S_2} = \underline{8{,}1}\text{ m}}$. *Le fait que* $\overline{F_2S_1} > 0$ *est rassurant aussi.*

$\boxed{2.}$ La situation est maintenant optiquement la suivante : $A \xrightarrow{\mathscr{M}_1} A_1 \xrightarrow{\mathscr{M}_2} A_2$. Pour mieux exprimer les relations de conjugaison, refaisons un schéma avec les grandeurs connues.



Nous avons ainsi : $\overline{F_1A}.\overline{F_1A_1} = f_1'^2$ d'où $\boxed{\overline{F_1A_1} = -\underline{4{,}11}429\text{ m}}$ et $\gamma_1 = \dfrac{\overline{F_1S}}{\overline{F_1A}} = -\underline{0{,}57}1429$.

Nous avons alors $\overline{F_2A_1} = -\underline{3{,}2}1429$ m

Et ensuite $\overline{F_2A_1}.\overline{F_2A_2} = f_2'^2$ d'où $\boxed{\overline{F_2A_2} = \underline{2{,}26}8\text{ m}}$ et $\gamma_2 = \dfrac{\overline{F_2S}}{\overline{F_2A_1}} = \underline{0{,}84}$.

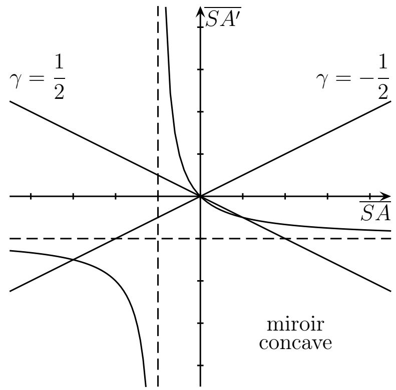
Finalement $\boxed{\gamma = \gamma_1\,\gamma_2 = -\underline{0{,}48}}$.

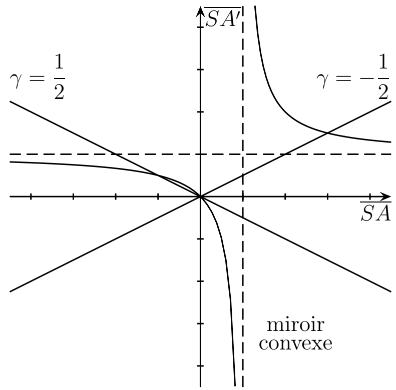
$\boxed{3.}$ Par rapport au montage CASSEGRAIN, ce montage, nommé GRÉGORY est plus encombrant. En effet pour avoir un grandissement de l'image finale par rapport à l'image intermédiaire, il faut que le foyer F_1' soit réel pour $\mathscr{M}_2$ alors que pour le montage CASSEGRAIN (cf. cours) il est réel, ce qui permet aux deux miroirs d'être bien plus rapprochés et donc de gagner en encombrement.

❆ Exercice 5

$\boxed{1.}$ Si nous avons le grandissement, nous aurons facilement la position, sauf que le grandissement est connu au signe près. Cherchons tout d'abord le signe du grandissement et pour cela rien de tel que les hyperboles de conjugaison.

Traçons celle correspondant à un miroir concave et traçons les deux droites correspondant à des grandissements $\pm\dfrac{1}{2}$. Comme l'objet dont nous cherchons à faire l'image est forcément réel, nous voyons alors que le grandissement est négatif.



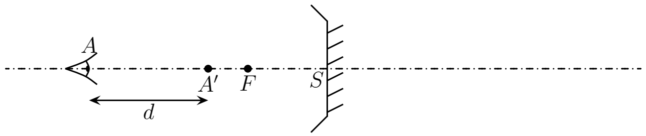


Nous pouvons alors écrire tout de suite avec le point de vue du foyer :

$$\gamma = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\overline{FA} = \frac{\overline{FS}}{\gamma} = -\underline{5{,}0}\text{ cm}}$$

☕ *Remarque* : ne pas oublier que le rayon de courbure SC (sans valeur algébrique) est le double de SF. De plus, comme il s'agit d'un miroir concave, la distance focale est positive.

Dans ces conditions, l'image de l'œil est à $\overline{FA'} = \dfrac{f'^2}{\overline{FA}} = -\underline{1{,}2}5$ cm ce qui fait que la distance entre l'œil et son image est de $\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{FA'} = \underline{3{,}7}5$ cm.



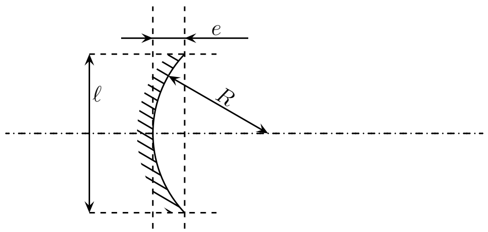
Cette position est bien trop proche de l'œil et seul un œil myope non corrigé pourrait avoir une chance de le voir nettement.

$\boxed{2.}$ De la même manière, nous trouvons que le grandissement doit être positif. Et avec une distance focale négative, nous trouvons aussi :

$$\boxed{\overline{FA} = -\underline{5},0 \text{ cm}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{AA' = \underline{3},75 \text{ cm}}$$

ce qui ne permet pas non plus de voir nettement son œil. De plus loin, peut-être ...

$\boxed{3.}$ Disons que la petite cuillère fait $\ell = 4{,}0$ cm dans sa plus grande longueur.



Pour que le miroir soit considéré comme mince, il faut que $e \ll R$ or

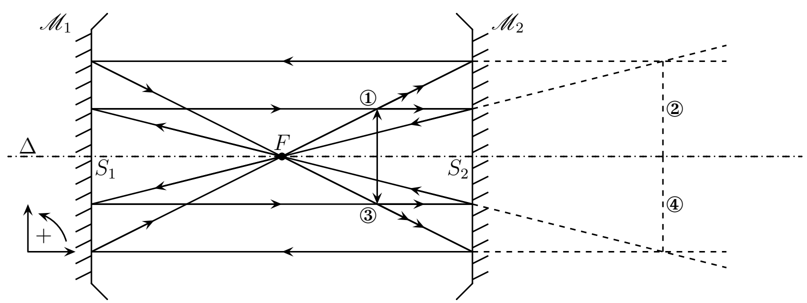
$$e = R - \sqrt{R^2 - \ell^2/4} = \underline{0{,}4}17424 \text{ cm}$$

C'est plus de 10 fois inférieur au rayon de courbure. C'est limite mais en première approximation, nous avons eu raison de considérer que la petite cuillère est effectivement un miroir sphérique mince.

Exercice 6

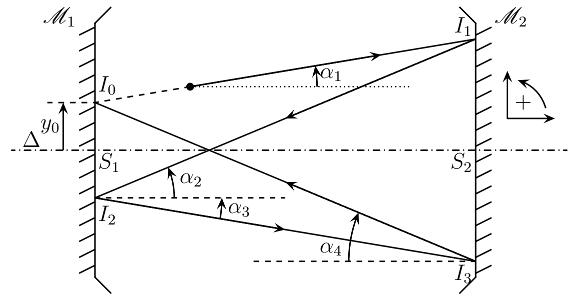
$\boxed{1.}$ Pour tracer les images successives, il faut d'abord placer le foyer. Après, si nous ne nous perdons pas dans tous les rayons lumineux, cela ne pose aucune difficulté. Ici, nous avons :

$$① \xrightarrow{\mathscr{M}_2} ② \xrightarrow{\mathscr{M}_1} ③ \xrightarrow{\mathscr{M}_2} ④$$



$\boxed{2.}$ *Une fois tracé les rayon réfléchis par les miroir, trouver les angles α_2, α_3 et α_4 ne sera plus qu'une question de géométrie.*

Pour tracer le premier rayon réfléchi, nous pouvons utiliser la propriété de stigmatisme en imaginant un objet fictif I_0 **sur** le miroir $\mathscr{M}_1$, *ie.* dans le plan contenant le centre de $\mathscr{M}_2$. Dans ces conditions l'image I_2 est le point symétrique de l'objet par rapport à $C_1 = S_1$ et le rayon réfléchi parvient sur $\mathscr{M}$ en une ordonnée $-y_0$.



Nous avons alors :

$$\overline{S_1I_1} = y_0 + R\,\alpha_1 \quad \text{et} \quad \overline{S_1I_1} = -y_0 + R\,\alpha_2 \quad \leadsto \quad \boxed{\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\,y_0}{R}}$$

$$\overline{S_2I_3} = -y_0 + R\,\alpha_3 \quad \text{et} \quad \overline{S_2I_3} = -\overline{S_2I_1} = -y_0 - R\,\alpha_1 \quad \leadsto \quad \boxed{\alpha_1 = -\alpha_3}$$

$$\overline{S_2I_3} = R\,\alpha_4 + y_0 \quad \leadsto \quad \boxed{\alpha_4 = -\alpha_1 - \frac{2\,y_0}{R}}$$

Nous pouvons alors constater que l'angle que forment les rayons lumineux restent compris entre $-\alpha_1 - \dfrac{2\,y_0}{R}$ et $\alpha_1 + \dfrac{2\,y_0}{R}$, autrement dit même après un grand nombre de réflexion, les angles restent majorés et minorés et comme en plus ils repassent toujours au même endroit toutes les quatre réflexions, nous pouvons dire que les rayons lumineux restent confinés entre les deux miroirs.

$\boxed{3.}$ La première question nous dit qu'après 4 réflexions n'importe quel rayon lumineux repasse par son point de départ, mais rien ne dit *a priori* qu'il repasse avec le même angle. Autrement dit la première question n'exclut pas que les rayons finissent par sortir à un moment ou à un autre de la cavité.

Exercice 7

$\boxed{1.}$ Déterminons tout d'abord les positions de A' et B', images respectives de A et B par le miroir.

Avec la relation de conjugaison de NEWTON, cela donne (sans oublier que $R = 2\,f'$) :

$$\overline{FA'} = \frac{f'^2}{\overline{FS} + D} = -\underline{16},6667 \text{ cm} \qquad \text{et} \qquad \overline{FB'} = \frac{f'^2}{\overline{FS} + D + \ell} = -\underline{16},2338 \text{ cm}$$

Ce qui donne une longueur $\boxed{A'B' = \overline{A'B'} = \underline{0},4329 \text{ mm}}$

☕ *Remarque* : les données ne sont pas suffisamment précises pour laisser plus d'un chiffre significatif dans le résultat final.

$\boxed{2.}$ Cherchons à exprimer $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{FB'} - \overline{FA'}}{\overline{AB}}$ en fonction de γ, ℓ et f uniquement.

Nous avons tout d'abord $\overline{AB} = -\ell$ (attention à l'orientation).

Ensuite, avec l'expression du grandissement vu du foyer, nous avons $\gamma = \dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FS}}$ soit $\overline{FA'} = -\gamma\, f$.

Enfin $\overline{FB} = \dfrac{f^2}{\overline{FA} - \ell}$ or $\gamma = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$ donne $\overline{FA} = -\dfrac{\gamma}{f}$

En remplaçant le tout cela donne :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{1}{-\ell}\left(\frac{f^2}{-\frac{\gamma}{f} - \ell} - (-\gamma\, f)\right) \rightsquigarrow (\cdots) \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\gamma^2\, f}{\gamma\,\ell - f}}$$

3. (a) Cette expression définit le grandissement longitudinal comme étant la façon dont A' bouge lorsque A bouge, autrement dit $\mathrm{d}A' = \gamma_\ell\,\mathrm{d}A$: le petit écart $\mathrm{d}A'$ de A' lorsque A bouge de $\mathrm{d}A$ correspond, par définition, à $\mathrm{d}A' = \gamma_\ell\,\mathrm{d}A$.

L'avantage de cette définition, c'est ce que si l'objet est grand, son image peut être déformée car le grandissement longitudinal peut ne pas avoir la même valeur en tout points. Cette définition permet de voir comment chaque point image est déformé.

3. (b) *Pour trouver l'expression du grandissement longitudinal, il faut trouver la relation entre A' et A. Ce n'est ni plus ni moins qu'une relation de conjugaison et à ce moment là, autant utiliser la plus simple, celle de* Newton.

$$\gamma_\ell = \frac{\mathrm{d}A'}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}\overline{FA'}}{\mathrm{d}\overline{FA}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\overline{FA}}\left(\frac{f^2}{\overline{FA}}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\gamma_\ell = -\frac{f^2}{\overline{FA}^2} = -\gamma^2}$$

Nous pouvons donc interpréter le grandissement longitudinal comme l'opposé au carré du grandissement qui, lui, se voit sur l'hyperbole en traçant la droite de fonctionnement. Mais cela n'est guère commode car imaginer « le carré de la pente d'une droite » n'est pas très parlant à l'esprit.

En fait, nous pouvons remarquer γ_ℓ n'est autre que la dérivée de la position de A' par rapport à la position de A. Et comme position de A' et position de A sont justement ce qui est représenté sur les hyperboles de conjugaison, nous pouvons dire, tout simplement, que :

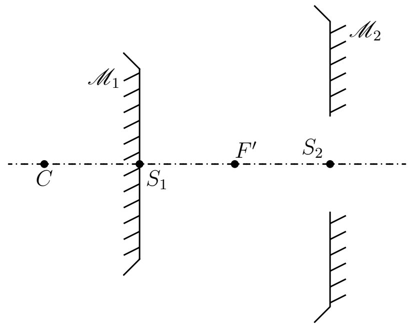
$$\boxed{\gamma_\ell \text{ est la pente de la tangente au point de fonctionnement optique.}}$$

Ce qui est bien plus visuel !

Exercice 8

1. *Étant donné que les deux miroirs ont leurs centres en commun, utiliser la relation de conjugaison avec origine au centre est clairement la méthode naturellle.*

Schématisons la situation.



Notations : $A \xrightarrow{\mathscr{M}_2} A' \xrightarrow{\mathscr{M}_1} A''$.

Nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\overline{CA}} + \dfrac{1}{\overline{CA'}} = \dfrac{2}{\overline{CS_2}} & (☼) \\ \dfrac{1}{\overline{CA'}} + \dfrac{1}{\overline{CA''}} = \dfrac{2}{\overline{CS_1}} & (☾) \end{cases} \xrightarrow{(☾)-(☼)} \quad -\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA''}} = \frac{2}{\overline{CS_1}} - \frac{2}{\overline{CS_2}}$$

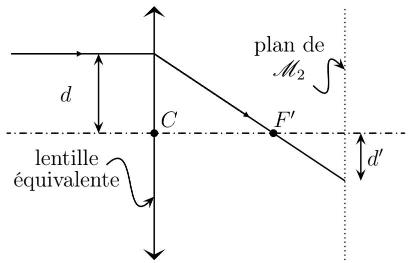
Cette dernière relation est une relation de conjugaison de $\boxed{\text{lentille mince de centre } C}$ telle que :

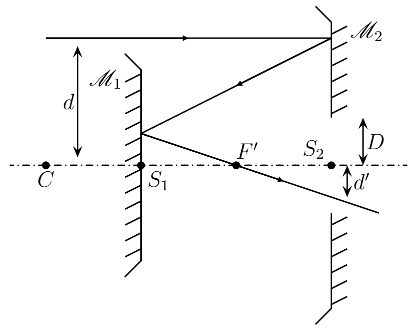
$$\boxed{\frac{1}{\overline{CF'}} = \frac{2}{\overline{CS_1}} - \frac{2}{\overline{CS_2}} = \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} > 0 \; (‼)}$$

$\boxed{\text{Il s'agit donc une lentille convergente.}}$

2. Pour que le rayon incident ne passe pas directement par le trou, il faut $d > D$. Pour que le rayon émergent passe par le trou, il faut $d' < D$. Une condition nécessaire est donc d'avoir $d' < D$.

En rassemblant, cela donne $d' < D < d$ soit $d' < d$.





Et comme $\dfrac{d'}{d} = -\dfrac{\overline{F'S_2}}{\overline{F'C}}$ (Thalès), la condition d'émergence s'écrit alors $\left|\dfrac{\overline{F'S_2}}{\overline{F'C}}\right| < 1$.

Or nous avons :

$$\overline{F'S_2} = \overline{CS_2} - \overline{CF'} = R_2 - \frac{1}{2/R_1 - 2/R_2} = R_2 - \frac{R_1\,R_2}{2\,(R_2 - R_1)}$$

Mais aussi $\overline{F'C} = -\overline{CF'} = -\dfrac{R_1\,R_2}{2\,(R_2-R_1)}$.

Ainsi la condition $-1 < \dfrac{\overline{F'S_2}}{\overline{F'C}} < 1$ donne :

$$-1 < \frac{2\,R_2\,(R_2-R_1)}{R_1\,R_2} - 1 < 1 \quad \rightsquigarrow \quad -1 < \frac{2\,R_2}{R_1} - 3 < 1 \quad \rightsquigarrow \quad 2 < \frac{2\,R_2}{R_1} < 4$$

Ces conditions se traduisent alors par : $R_2 > R_1$ (ce qui est déjà vérifié par hypothèse) et $R_2 < 2\,R_1$.

Nous avons donc bien le résultat : pour qu'un rayon puisse émerger, $\boxed{\text{il faut respecter } R_2 < 2\,R_1}$.

De plus si $2\,R_2 = 3\,R_1$, avec la relation (☁) nous trouvons $\overline{F'S_2} = 0$, soit $d' = 0$ pour tous les rayons car ils vont tous passer, par définition de F', par S_2.

Ainsi $\boxed{\text{tous les rayons peuvent émerger}}$ puisqu'ils passent par le centre du trou D, centre confondu avec S_2.

❆ Exercice 9

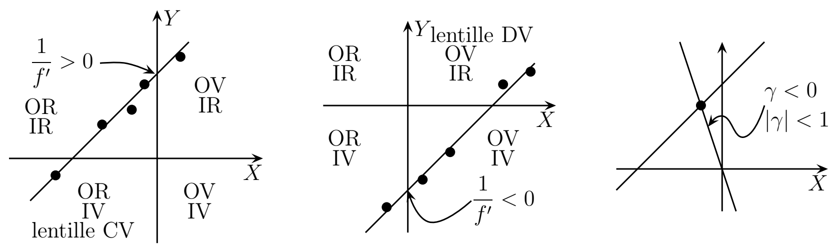
$\boxed{1. (a)}$ La relation de conjugaison, avec les nouvelles variables, s'écrit $-X + Y = \dfrac{1}{f'}$.

Nous avons donc immédiatement $\boxed{Y = X + \dfrac{1}{f'}}$: tous les couples (X_i,Y_i) se regroupent donc sur une droite de $\boxed{\text{pente } 1}$ et $\boxed{\text{d'ordonnée à l'origine } \dfrac{1}{f'}}$.

$\boxed{1. (b)}$ Pour déterminer graphiquement f' nous pouvons placer les points correspondant aux différents couples (X_i,Y_i) et tracer ensuite la droite passant « au mieux » par tous les points. Il ne reste plus qu'à lire l'ordonnée à l'origine de la droite : c'est $\dfrac{1}{f'}$.

Il est aussi possible peut de faire une régression linéaire, comme cela sera vu dans quelques temps dans le TP *Incertitude*; cela évite de tracer le graphique.

Sur les schémas ci-dessous sont représentés les allures de ce que peut donner le graphe « fini ». Sont aussi indiqués, pour chaque cadran, les qualités réelle (R), virtuelle (V) de l'objet (O) et de l'image (I).



$\boxed{1. (c)}$ Le grandissement γ vaut $\gamma = \dfrac{y}{x} = \dfrac{X}{Y}$. γ est donc $\boxed{\text{l'inverse}}$ de la pente de la droite passant par les points (X_i,Y_i) et $(0,0)$. Voir schéma ci-dessus.

$\boxed{2. (a)}$ Il y a une et une seule droite qui passe par $(a,0)$ et $(0,b)$. Vérifions que c'est bien celle proposée.

En prenant $x = a$ et $y = 0$, nous avons bien $\dfrac{a}{a} + 0 = 1$ et avec le couple $x = 0$, $y = b$ nous avons aussi $0 + \dfrac{b}{b} = 1$. Ainsi la droite d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ passe par $(a,0)$ et $(0,b)$. C.Q.F.D.

☕ *Remarque* : il est intéressant et parfois fort utile de se souvenir de la propriété démontrée dans cette question. La droite qui passe par $(a,0)$ et $(0,b)$ a pour équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

$\boxed{2. (b)}$ Montrons que deux droites correspondant à deux couples quelconques de points s'intersectent en un point I dont les coordonnées ne dépendent pas des couples choisis. Dès lors cela implique que tout couple de droite s'intersectera en I ou encore que toutes les droites passent par I.

Notons 1 et 2 les deux couples choisis. Autrement dit :

$$-\frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} = \frac{1}{f'} \;(⚡) \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{x_2} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{f'} \;(◯)$$

Les équations des deux droites tracées s'écrivent $\dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1} = 1$ (●) et $\dfrac{x}{x_2} + \dfrac{y}{y_2} = 1$ (☂). Leur point d'intersection est tel que ces deux dernières équations soient vérifiées en même temps.

L'abscisse du point d'intersection de ces droite est obtenu en faisant y_1(●)$-y_2$(☂).

Nous trouvons $x\left(\dfrac{y_1}{x_1} - \dfrac{y_2}{x_2}\right) = y_1 - y_2$.

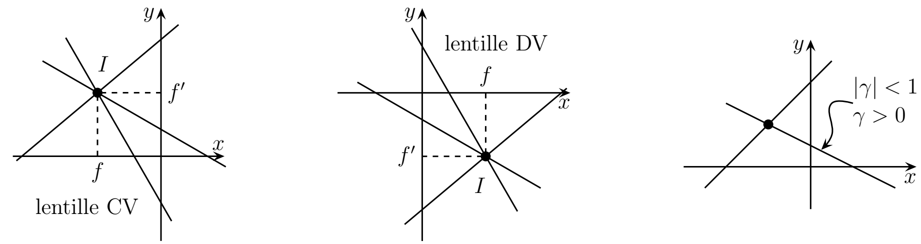
Pour simplifier le résultat, écrivons que ce point vérifie les relations de conjugaison (⚡) $\dfrac{y_1}{x_1} = 1 - \dfrac{y_1}{f'}$ et et (◯) $\dfrac{y_2}{x_2} = 1 - \dfrac{y_1}{f'}$. En remplaçant, cela donne :

$$x\left(1 - \frac{y_1}{f'} - 1 + \frac{y_2}{f'}\right) = y_1 - y_2 \quad \rightsquigarrow \quad (\cdots) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x = -f'}$$

En faisant x_1(●)$-x_2$(☂) nous arrivons à $y\left(\dfrac{x_1}{y_1} - \dfrac{x_2}{y_2}\right) = x_1 - x_2$ et comme $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{1}{f'} + 1$ et $\dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{1}{f'} + 1$ nous obtenons $\boxed{y = f'}$.

Finalement le point d'intersection de ces deux droites est le point $\boxed{I(f,f')}$ dont les coordonnées sont bien indépendantes de x_1, y_1, x_2 et y_2.

$\boxed{2. (c)}$ Il suffit de tracer pour chaque couple (x_i,y_i) la droite passant par $(x_i,0)$ et $(0,y_i)$. le point d'intersection de toutes ces droites n'est autre que le point I de coordonnées $x_I = f$, distance focale objet et $y_I = f'$ distance focale image.



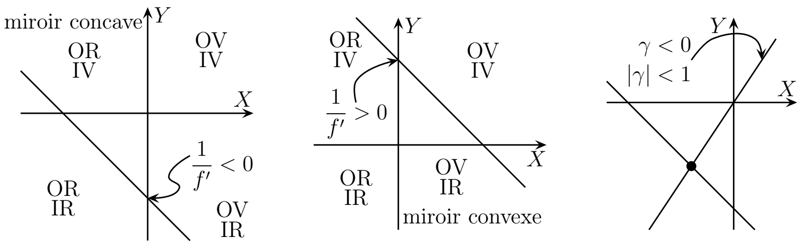
$\boxed{2. (d)}$ Le grandissement s'écrit $\gamma = \dfrac{y_i}{x_i}$. Or la droite tracée a pour équation $\dfrac{x}{x_i} + \dfrac{y}{y_i} = 1$ soit $y = -\dfrac{y_i}{x_i}x + y_i$. Autrement dit la pente de la droite est $\boxed{\text{l'opposée}}$ du grandissement. Voir schéma ci-dessus.

$\boxed{3.}$ La relation de conjugaison des miroirs sphériques avec origine au sommet s'écrit $\dfrac{1}{\overline{SA}}+\dfrac{1}{\overline{SA'}}=\dfrac{1}{\overline{SF}}$. Or, avec les conventions usuelles d'algébrisation on a $\overline{SF}=f'$ (rappelons que l'on a $f'<0$ pour un miroir concave). En notant $x=\overline{SA}$ et $y=\overline{SA'}$, la relation de conjugaison s'écrit $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{f'}$. Il y a donc un signe qui change par rapport à la relation de conjugaison des lentilles : les résultats vont être similaires mais pas identiques.

➨ **Avec une droite.**

Nous avons $Y=\dfrac{1}{f'}-X$. La droite est de $\boxed{\text{pente } -1}$ et $\boxed{\text{d'ordonnée à l'origine } \dfrac{1}{f'}}$.

Le grandissement vaut $\gamma=-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{X}{Y}$: c'est $\boxed{\text{l'inverse de l'opposé}}$ de la droite passant par les points (X_i,Y_i) et $(0,0)$.



➨ **Avec un faisceau de droites.**

En utilisant les mêmes astuces de résolution, on obtient que le point d'intersection est, ici aussi, $\boxed{I(f,f')}$, sauf que pour les miroirs, $f=f'$.

Comme le grandissement s'écrit $\gamma=-\dfrac{y_i}{x_i}$ et que la droite tracée a pour équation $y=-\dfrac{y_i}{x_i}x+y_i$, le grandissement n'est autre que $\boxed{\text{la pente}}$ de la droite.