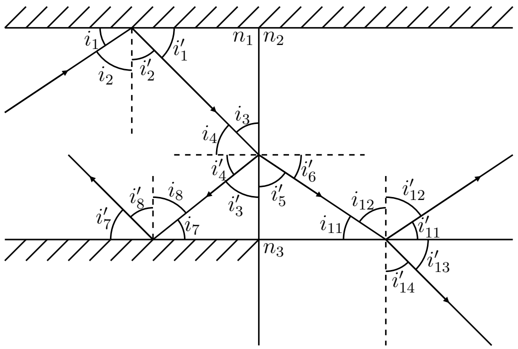
Manipuler la lumière

Le cours

1. Voir schéma ci-dessous.



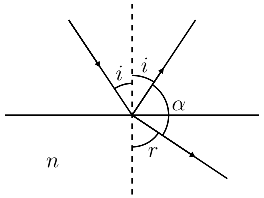
2. La loi de SNELL – DESCARTES pour la réflexion donne, pour tous les angles : $\boxed{i_k = i'_k}$.
Le théorème des angles « alternes – internes » donne :

$$\boxed{i'_2 = i_3} \quad \boxed{i'_1 = i_4} \quad \boxed{i'_4 = i_7} \quad \boxed{i'_3 = i_8} \quad \boxed{i'_6 = i_{11}} \quad \text{et} \quad \boxed{i'_5 = i_{12}}.$$

La loi de SNELL – DESCARTES pour la réfraction donne :

$$\boxed{n_1 \sin i_4 = n_2 \sin i'_6} \quad \text{et} \quad \boxed{n_2 \sin i_{12} = n_3 \sin i'_{14}}$$

Exercice 1



Nous cherchons i tel que $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Or $\alpha = \pi - i - r = \dfrac{\pi}{2}$ donc $i + r = \dfrac{\pi}{2}$. Comme (loi de SNELL-DESCARTES) $\sin i = n \sin r$, nous avons :

$$\sin i = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n \cos i \qquad \rightsquigarrow \qquad n = \tan i$$

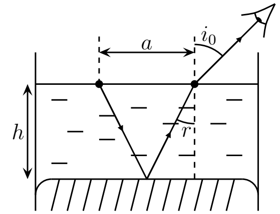
Finalement l'angle recherché vaut $\boxed{i = \arctan n}$.

Remarque : le fait que cette incidence porte un nom attitré (incidence de BREWSTER) n'est pas anodin. C'est parce que cette indicence joue un rôle particulier dans le cadre de l'optique non géométrique. En effet, avec de la lumière correctement « préparée » (*ie.* pas de la lumière naturelle), il n'y a **pas** de réflexion lorsque le rayon est à l'incidence de BREWSTER. Mais vous verrez tout cela en 2e année.

Exercice 2

Le plus difficile dans ces petits exercices d'optique géométrique est de traduire la situation qui correspond à « voir ». Ici si les deux fils sont vus superposés, cela signifie que des rayons lumineux issus du fil de gauche se superposent à des rayons lumineux issus du fil de droite. Comme bien sûr il ne peut s'agir de vision directe, cela signifie que les rayons du fil de gauche se réfléchissent sur le miroir du fond.

La situation correspond à celle représentée ci-dessous.



On a alors $n \sin r = \sin i_0$ et $\sin r = \dfrac{a/2}{\sqrt{a^2/4 + h^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\,h^2/a^2}}$.

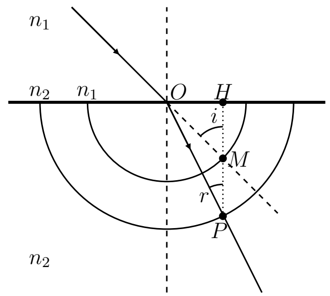
Finalement : $\boxed{n = \sqrt{1 + \dfrac{4\,h^2}{a^2}} \times \sin i_0}$.

Exercice 3

Dans les deux cas nous devons montrer que les rayons réfractés obéissent aux lois de SNELL – DESCARTES, *ie. que* $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

➨ Première méthode

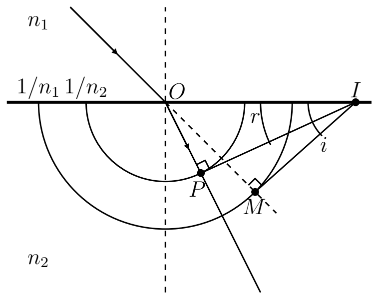
En notant H le point d'intersection de la droite MP et de la surface de séparation, nous avons $\widehat{OMH} = i$ et $\widehat{OPH} = r$.



Alors, dans les triangles rectangles appropriés $OH = OM \sin i = OP \sin r$ et comme $OM = n_1$ et $OP = n_2$ nous obtenons bien le résultat $\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}$.

➨ Deuxième méthode

En remarquant que $\widehat{OMI} = \pi/2$ et $\widehat{OPI} = \pi/2$ (propriété des tangentes) nous avons alors $\widehat{OIM} = i$ et $\widehat{OIP} = r$.

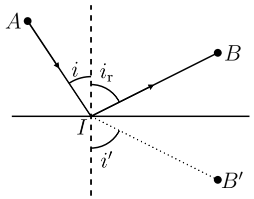


Ainsi dans les triangles rectangles appropriés $OI = OP/\sin r = OM/\sin i$ et comme $OM = 1/n_1$ et $OP = 1/n_2$ nous obtenons bien le résultat $\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}$.

Exercice 4

Loi de la réflexion

Sachant que la lumière va au plus vite et que tout son parcours est compris dans un milieu d'indice n_1, il suffit de rechercher le chemin le plus court entre A et B en passant par I.

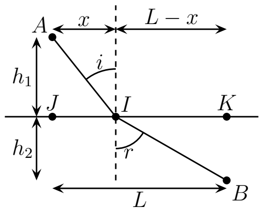


En introduit le point B' symétrique de B par rapport à la surface réfléchissante, pour minimiser le chemin AIB, il suffit de minimiser le chemin AIB'.

Or ce dernier cas est simple : le chemin le plus court est la ligne droite.

Nous obtenons donc $i = i'$ et comme $i' = i_r$ cela donne bien le résultat $\boxed{i = i_r}$.

Loi de la réfraction



La durée t pour aller de A à B s'écrit sous la forme $t = t_1 + t_2$ où $t_1 = \dfrac{AI}{v_1}$ et $t_2 = \dfrac{IB}{v_2}$ sont les durées des parcours pour aller de A à I et de I à B avec $v_1 = \dfrac{c}{n_1}$ vitesse de la lumière dans le milieu 1 et $v_2 = \dfrac{c}{n_2}$ vitesse de la lumière dans le milieu 2.

Nous avons donc $t = \dfrac{n_1}{c}\sqrt{x^2 + {h_1}^2} + \dfrac{n_2}{c}\sqrt{(L-x)^2 + {h_2}^2}$ et nous cherchons à minimiser cette durée de parcours, il faut donc chercher les solutions de $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$. Or :

PCSI1, Fabert (Metz) Optique , TD n°3 2010 – 2011

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1}{c}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + {h_1}^2}} - \frac{n_2}{c}\,\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + {h_2}^2}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1}{c}\,\frac{JI}{AI} - \frac{n_2}{c}\,\frac{IK}{IB}$$

La condition $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$ donne donc $n_1\,\dfrac{JI}{AI} = n_2\,\dfrac{IK}{IB}$, ce qui n'est autre que $\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}$.

Exercice 5

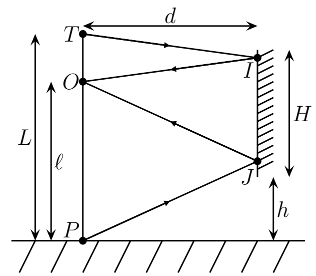
En appliquant la loi de la réfraction aux deux interfaces, nous trouvons $\boxed{i_s = i}$. Cela signifie que si un rayon pénètre dans la lame à faces parallèles il en ressortira obligatoirement. Ce n'est pas le cas, par exemple, du prisme pour lequel il existe des conditions d'émergence sur l'angle d'incidence.

L'application la plus courante est la vitre des fenêtre : cela explique pourquoi lorsque nous ouvrons nos fenêtres, nous pouvons raisonnablement nous attendre à voir le même paysage au même endroit que lorsque la fenêtre était fermée.

Ce résultat est beaucoup moins trivial qu'il n'y paraît : pour de très nombreuses personnes, lorsqu'elles retirent les verres qu'elles portent sur le nez, elles ne voient plus du tout la même chose. Cela ne peut s'expliquer que parce que leurs lunettes ne sont pas, justement, des lames à faces parallèles.

Exercice 6

1. Pour voir le haut de sa tête (point T), il doit y avoir au moins un rayon lumineux issu de la tête de l'homme qui arrive dans son œil (point O). De même il doit y avoir au moins un rayon lumineux issu des pieds (point P) qui arrive dans l'œil.



Les lois de la réflexions impliquent que les triangles PJO et TIO sont isocèles et donc, comme I doit être sur le miroir $z_I \leqslant H + h$ et J aussi $z_J \geqslant h$ nous en déduisons :

$$\boxed{H + h \geqslant \frac{\ell + L}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{h \leqslant \frac{\ell}{2}}$$

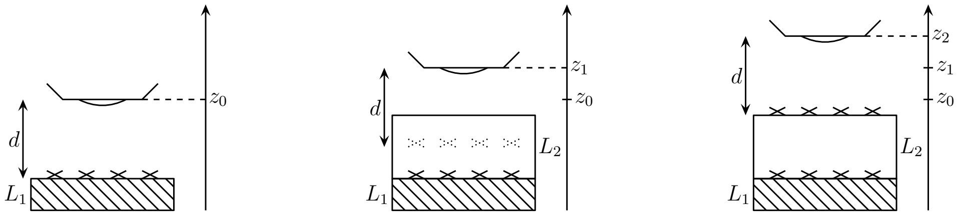
A.N. : $H + h \geqslant 1{,}75$ m et $h \leqslant 85$ cm.

2. Ces conditions ne dépendant pas de d, si elles ne sont pas respectées, l'homme aura beau s'avancer ou reculer, il lui manquera toujours une partie de son image. Seule solution envisageable : changer la hauteur du miroir.

Exercice 7

D'après l'énoncé, le microscope fonctionne exactement comme un viseur à frontale fixe. D'ailleurs, nous le savions déjà car nous avons vu dans le le chapitre sur les lentilles que l'objet observé à travers le microscope doit être positionné dans le plan focal objet de l'objectif.

Une fois ceci bien en tête, il est impératif de faire un schéma afin de bien se représenter qui est repérer par les différentes positions du microscope.



Lors de la seconde mise au point, l'observateur voit l'image virtuelle des poussières à travers le dioptre que constitue la face supérieure de la lame L_2.

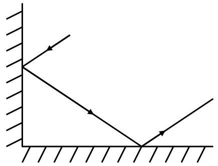
Nous pouvons alors écrire la relation de conjugaison $\dfrac{\overline{OA}}{n} = \dfrac{\overline{OA'}}{1}$ avec O sur la face supérieure de la lame, A les poussières et A' les poussières « vues ».

Cela donne :

$$n = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{n = \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_1} = \underline{1{,}58}8997}$$

Exercice 8

$\boxed{1.}$ Après la première réflexion sur (Ox), le vecteur directeur du rayon devient $(x_i, -y_i)$. Après la deuxième réflexion sur (Oy), le vecteur directeur devient $(-x_i, -y_i)$. Finalement le rayon réfléchi a un vecteur directeur exactement opposé au rayon incident, autrement dit il est renvoyé dans la direction d'où il vient.

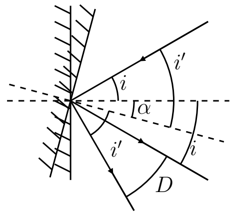


$\boxed{2.}$ En associant à chaque miroir les plan (Oxy), (Oxz) et (Oyz), la réflexion sur le premier transformera un vecteur directeur de rayon lumineux (x,y,z) en $(x,y,-z)$. Pour une réflexion sur le miroir qui définit le plan (Oxz), le vecteur directeur passe de (x,y,z) à $(x,-y,z)$. Enfin le troisième miroir (Oyz) « transforme » un vecteur directeur (x,y,z) en $(-x,y,z)$. Finalement si un rayon se réfléchit sur les trois miroirs, le vecteur directeur du rayon réfléchi sera exactement l'opposé du vecteur directeur du rayon incident. Ici aussi, le miroir renvoie le rayon lumineux d'où il vient.

De tels dispositifs sont disposés sur la Lune afin de renvoyer un faisceau laser sur la Terre. La durée entre l'émission et la réception permet de déterminer précisément la distance Terre-Lune. Avec un miroir plan installé sur la Lune, il aurait été impossible de le régler parfaitement pour qu'il soit orthogonal au rayon incident. Et toute erreur d'une seconde de degré (un degré divisé par 3600) sur le positionnement du miroir sur la Lune fait qu'au retour le rayon laser rate sa cible (*ie.* son point de départ) d'environ 7 km. En revanche, avec un tel dispositif, le positionnement du miroir sur la Lune n'a aucune influence sur la direction finale du rayon. Il « suffit » juste que les trois miroirs plan fassent des angles droit quasi parfaits entre eux.

Exercice 9

Lorsque le miroir tourne de α, le rayon réfléchi tourne de $\boxed{2\,\alpha}$.



Nous avons en effet $D = -i - i + i' + i' = 2(i' - i) = 2\,\alpha$.

Ce dispositif permet de détecter des petites rotations à l'aide d'un laser pointant sur le miroir.

C'est aussi un « petit » résultat extrêment pratique en 2^e^ année.

Exercice 10

$\boxed{1.}$ L'image d'un point par un miroir plan est son symétrique par rapport à ce plan. Ainsi, comme O, centre du repère considéré appartient à chacun des deux miroirs, nous avons directement $\boxed{(r_1,\theta_1) = (r_0, -\theta_0)}$ pour la réflexion sur le miroir 1.

Pour le miroir 2, il suffit de dire que l'angle entre le point initial et le miroir 2, c'est-à-dire $\alpha - \theta$, est le même qu'entre l'image et le miroir, c'est-à-dire $\theta_2 - \alpha$. Nous obtenons alors $\boxed{(r_2,\theta_2) = (r_0, 2\alpha - \theta_0)}$.

$\boxed{2.}$ Images après deux réflexions.

➨ **Miroir 1 puis miroir 2.** L'image de (r_0,θ_0) par le miroir 1 donne $(r_0, -\theta_0)$, puis l'image de ce dernier par le miroir 2 donne $\boxed{(r_0,\theta_0 + 2\,\alpha)}$.

Nous remarquonos que l'image par la source à travers les deux miroirs se situe au point image par la rotation de $2\,\alpha$ du point source. Ce n'est autre que le résultat connu : la composée de deux symétries axiales est une rotation d'angle le double de l'angle entre les deux droites.

➨ **Miroir 2 puis miroir 1.** En utilisant le même raisonnement nous trouvons que l'image finale se situe en $\boxed{(r_0,\theta_0 - 2\,\alpha)}$. Là aussi l'image se situe au point image du point source par la rotation d'angle $2\,\alpha$, mais cette fois la rotation s'effectue dans l'autre sens.

$\boxed{3.}$ Images après un nombre quelconque de réflexions.

➨ **D'abord une réflexion sur le miroir 1.**

➔ *Nombre pair de réflexions.* S'il y a un nombre pair $2\,n$ de réflexions commençant par le miroir 1, alors c'est qu'il y a n fois une rotation d'angle $2\,\alpha$. Nous obtenons ainsi $\boxed{(r,\theta + 2\,n\,\alpha)}$.

➔ *Nombre impair de réflexions.* S'il y a un nombre impair $2\,n+1$ de réflexions commençant par le miroir 1, c'est qu'il y a d'abord $2\,n$ réflexions commençant par le miroir 1 dont on connaît la dernière image avec le résultat précédent. Il ne reste plus qu'à faire une fois l'image par le miroir 1. L'image finale est donc en $\boxed{(r, -\theta - 2\,n\,\alpha)}$.

➨ **D'abord une réflexion sur le miroir 2.**

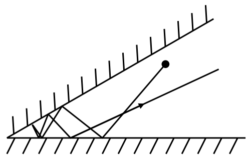
➔ *Nombre pair de réflexions.* Comme ci-dessus, s'il y a un nombre pair $2\,n$ de réflexions commençant par le miroir 2, alors c'est qu'il y a n fois une rotation d'angle $-2\,\alpha$. Nous obtenons ainsi $\boxed{(r,\theta - 2\,n\,\alpha)}$.

➔ *Nombre impair de réflexions.* Comme ci-dessus, s'il y a un nombre impair $2\,n+1$ de réflexions commençant par le miroir 2, c'est qu'il y a d'abord $2\,n$ réflexions commençant par le miroir 1 dont nous connaissons la dernière image avec le résultat précédent. Il ne reste plus qu'à faire une fois l'image par le miroir 2 et nous trouvons $\boxed{(r, -\theta + (2\,n+1)\,\alpha)}$.

$\boxed{4.}$ Si nous prenons $\alpha = \dfrac{\pi}{p}$ avec p entier, alors au bout de $2\,p$ réflexions commençant par le miroir 1, l'image devrait se situer en $\theta + 2\,p\,\alpha$ ce qui n'est autre que θ, puisque $2\,p\,\alpha = 2\,\pi$. Et même si α

n'est pas vraiment égal à $\dfrac{\pi}{p}$, il est possible de s'y approcher suffisamment pour que $\theta + 2\,p\,\pi$ reste compris (modulo $2\,\pi$) entre 0 et α.

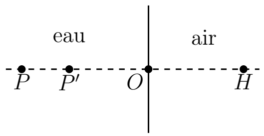
$\boxed{5.}$ L'image d'un faisceau divergent par un miroir plan est un faisceau divergent. Ainsi quel que soit le nombre de réflexion sur le miroir et quelle que soit la première réflexion, le faisceau lumineux issu de M sera toujours divergent. Or pour qu'une image soit située entre les deux miroirs cela implique que le faisceau converge en ce point, ce qui est contradictoire. Une telle image n'existe donc pas.



Si expérimentalement des miroirs pouvant réaliser mathématiquement une telle image étaient construis, sachant que cette image ne peut pas se former, il y aurait un nombre limité d'images, *ie.* il n'y aurait qu'un nombre fini de réflexions sur les miroirs. En fait, quelles que soient les conditions choisies, il y a bien toujours un nombre limité d'images, mais le prouver dans le cas général est assez complexe.

❄ Exercice 11

$\boxed{1.}$ Notons P le poisson et H l'observateur.



Nous savons que $PH = 1{,}00$ m et nous cherche $P'H$ où P' est l'image de P par le dioptre plan eau / air (l'épaisseur de verre de l'aquarium est négligée).

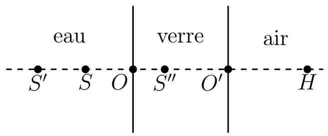
La relation de conjugaison du dioptre eau / air s'écrit

$$\frac{n_{\text{eau}}}{\overline{OP}} = \frac{n_{\text{air}}}{\overline{OP'}} \quad \rightsquigarrow \quad OP' = \underline{61}{,}5385 \text{ cm} \qquad \rightsquigarrow \qquad P'H = \underline{81}{,}5385 \text{ cm}$$

$\boxed{\text{Pour l'observateur le poisson semble être à 80 cm.}}$

$\boxed{2.}$ Notons S le squale. Ici nous ne négligeons plus l'épaisseur de la vitre. Notons :

$$S \xrightarrow{\text{eau / verre}} S' \xrightarrow{\text{verre / air}} S''$$



Nous savons que $SH = 1{,}00$ m et nous cherchons $S''H$ où S'' est l'image de S par les deux dioptres eau / verre et verre / air.

La relation de conjugaison du premier dioptre (eau / verre) s'écrit :

$$\frac{n_{\text{eau}}}{\overline{OS}} = \frac{n_{\text{verre}}}{\overline{OS'}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \overline{OS'} = \overline{OS} \times \frac{n_{\text{verre}}}{n_{\text{eau}}}$$

La relation de conjugaison du dioptre verre / air s'écrit :

$$\frac{n_{\text{verre}}}{\overline{O'S'}} = \frac{n_{\text{air}}}{\overline{O'S''}} \quad \rightsquigarrow \quad \overline{O'S''} = \overline{O'S'} \times \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}$$

Enfin, avec $\overline{O'S'} = \overline{O'O} + \overline{OS'}$, nous trouvons, tous calculs faits $O'S'' = \underline{55}{,}0376$ cm.

$\boxed{\text{Le squale semble donc être à 75 cm devant l'observateur.}}$