

Approche microscopique

☼ Exercice 1

1. La masse molaire du dibrome étant de $M = 160 \text{ g.mol}^{-1}$, nous avons :

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{mRT}{MP} = 0,45 \text{ L}$$

2. Nous avons de même $V_0 = \frac{nRT}{P} = \frac{mRT'}{MP} = 0,97 \text{ L}$.

3. Lorsqu'une molécule de dibrome se dissocie, cela crée deux molécules de Brome. Ainsi, en se dissociant, la quantité de matière totale de gaz augmente ce qui, à P et T fixés, se traduit par une augmentation du volume.

En notant α le coefficient de dissociation, n_0 la quantité de matière initiale en dibrome, αn_0 celle de dibrome dissocié, $n_0(1 - \alpha)$ celle de dibrome qu'il reste, $2\alpha n_0$ celle de Brome formé, alors $n_0(1 + \alpha)$ est la quantité de matière totale de gaz.

En notant V_0 le volume « théorique » lorsqu'il n'y a pas de dissociation (question précédente) et V_1 le volume effectivement observé nous avons :

$$PV_0 = n_0 RT' \quad \text{et} \quad PV_1 = n_0(1 + \alpha) RT' \quad \rightsquigarrow \quad \frac{V_1}{V_0} = 1 + \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{V_1}{V_0} - 1 = 22,8 \%$$

☼ Exercice 2

1. Numériquement, nous obtenons :

$$v_{\ell,T} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,1580 \text{ km.s}^{-1}; \quad v_{\ell,L} = \sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}} = 2,47831 \text{ km.s}^{-1};$$

$$v_{\text{H}_2}^* = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{H}_2}}} = 1,93424 \text{ km.s}^{-1}; \quad v_{\text{N}_2}^* = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{N}_2}}} = 5,16948 \text{ hm.s}^{-1}$$

Le diazote est nettement piégé par l'attraction terrestre car $v^* \ll v_\ell$; le dihydrogène, gaz léger l'est un peu moins; les deux gaz sont encore moins piégés par la Lune à $T = 300 \text{ K}$ (température arbitraire).

2. Il faudrait $v_{\text{N}_2}^* > v_\ell$ soit $T > 1,4 \cdot 10^5 \text{ K}$.

Une température de surface élevée n'est pas l'obstacle principal à l'existence d'une atmosphère sur une planète : c'est surtout la taille et la masse de la planète qui comptent.

☼ Exercice 3

1. (a) Le système \mathcal{S} n'est soumis qu'aux forces extérieures suivantes : les poids des deux particules et les réactions de l'axe. En projection sur \vec{u}_x (vecteur unitaire dans la direction de l'axe), le TCI donne :

$$\frac{dp(\mathcal{S})}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad p(\mathcal{S}) = m_1 v(A) + m_2 v(B) = C^{\text{te}}$$

1. (b) En notant ' les grandeurs après le choc, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (\text{III})$$

Comme le choc est supposé élastique, l'énergie cinétique totale est conservée ce qui donne :

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v'_A{}^2 + m_B v'_B{}^2$$

Ces deux équations de conservations se réécrivent respectivement :

$$m_A (v_A - v'_A) = m_B (v_B - v'_B) \quad (\text{**}) \quad \text{et} \quad m_A (v_A^2 - v'_A{}^2) = m_B (v_B^2 - v'_B{}^2) \quad (\text{**'})$$

En faisant le rapport (**')/(**) nous obtenons : $v_A + v'_A = v_B + v'_B$ (****).

De (III) et (****) nous tirons $(m_A + m_B) v'_A = (m_A - m_B) v_A + 2 m_B v_B$.

Nous pouvons alors calculer $\Delta E_c = \frac{1}{2} m_A v'_A{}^2 - \frac{1}{2} m_A v_A^2$.

On trouve après quelques calculs :

$$\Delta E_c = \frac{2 m_A m_B}{(m_A + m_B)^2} [m_B v_B^2 - m_A v_A^2 + (m_A - m_B) v_A v_B]$$

2. Au bout d'un temps suffisamment long l'énergie cinétique moyenne de A est constante, ce qui revient à dire que la valeur moyenne de la variation d'énergie cinétique de A est nulle.

Nous avons $\langle \Delta E_c \rangle = 0$ soit : $\langle m_B v_B^2 - m_A v_A^2 + (m_A - m_B) v_A v_B \rangle = 0$.

Par linéarité de la moyenne : $\langle m_B v_B^2 \rangle - \langle m_A v_A^2 \rangle + (m_A - m_B) \langle v_A v_B \rangle = 0$.

Comme par hypothèse $\langle v_A v_B \rangle = 0$, nous avons $\langle m_B v_B^2 \rangle - \langle m_A v_A^2 \rangle = 0$ soit $\langle m_B v_B^2 \rangle = \langle m_A v_A^2 \rangle$ et le résultat demandé.

☼ Exercice 4

1. Les molécules susceptibles de traverser la surface s pendant dt de ① vers ② sont celles qui à l'instant t sont contenues dans ① où la densité moléculaire vaut $\frac{N_1}{V}$, et qui possèdent un vecteur vitesse selon $+\vec{u}_x$.

Comme ces molécules ont toutes la même vitesse $v^* \vec{u}_x$, elles parcourent la distance $v^* dt$ parallèlement à \vec{u}_x pendant dt .

Celles qui peuvent franchir s doivent donc aussi être contenues dans le cylindre droit de section s et de hauteur $v^* dt$.

En définitive, les molécules qui conviennent représentent $\frac{1}{6}$ des molécules contenues dans le volume

élémentaire $s v^* dt$, d'où : $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} (s v^* dt) \frac{N_1}{V}$.

Le calcul de $dN_{2 \rightarrow 1}$ est analogue et $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} (s v^* dt) \frac{N_2}{V}$.

2. Entre les instants t et $t + dt$, $dN_{1 \rightarrow 2}$ molécules quittent le compartiment ① et $dN_{2 \rightarrow 1}$ y rentrent. De même $dN_{2 \rightarrow 1}$ molécules quittent le compartiment ② et $dN_{1 \rightarrow 2}$ y entrent.

Nous obtenons donc immédiatement :

$$dN_1 = -dN_2 = -dN_{1 \rightarrow 2} + dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{s v^*}{6 V} (N_2 - N_1) dt$$

En divisant par dt , nous obtenons le système différentiel recherché :

$$\boxed{\frac{dN_1(t)}{dt} = -\frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{sv^*}{6V} (N_2(t) - N_1(t))}$$

3. Il s'agit maintenant de découpler les équations différentielles.

Avec $dN_1 = -dN_2$, le nombre total $N_1(t) + N_2(t)$ de molécules est constant.

La situation à l'instant $t = 0$ où $N_1(0) = \mathcal{N}_A$ et $N_2(0) = 0$ nous donne la valeur de la constante et ainsi : $N_1(t) + N_2(t) = \mathcal{N}_A$.

En remplaçant $N_2(t)$ par $\mathcal{N}_A - N_1(t)$ dans l'expression de $\frac{dN_1(t)}{dt}$, nous obtenons l'équation différentielle du premier ordre dont est solution $N_1(t)$:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = \frac{sv^*}{6V} (\mathcal{N}_A - 2N_1(t))$$

En posant $\tau = \frac{3V}{sv^*}$, l'équation s'écrit sous sa forme canonique : $\frac{dN_1(t)}{dt} + \frac{N_1(t)}{\tau} = \frac{\mathcal{N}_A}{2\tau}$.

Avec la condition initiale $N_1(0) = \mathcal{N}_A$, nous trouvons $N_1(t) = \frac{\mathcal{N}_A}{2} (1 + e^{-t/\tau})$.

Il en résulte qu'à l'instant $t = +\infty$, nous avons $N_1(+\infty) = \frac{\mathcal{N}_A}{2}$ et donc aussi $N_2(+\infty) = \frac{\mathcal{N}_A}{2}$.

Ainsi la densité moléculaire du système global, initialement inhomogène, évolue vers l'uniformité : l'état final est un état d'équilibre thermodynamique.

Avec $T = 293$ K, $V = 20$ L, $s = 1,0$ mm² et $v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$, nous obtenons, pour du diazote N₂ de masse molaire $M = 28$ g.mol⁻¹, un temps caractéristique de 2 minutes.

Cette constante est suffisamment longue pour qu'il soit possible de suivre $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en plaçant un capteur de pression dans chaque compartiment suffisamment loin du trou : l'évolution étant quasistatique, l'équation $PV = nRT$ du gaz parfait est vérifiée dans chaque compartiment et donc les variations de pression sont proportionnelles à celles de $N(t)$.

4. Avec $v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$, la constante de temps est proportionnelle à \sqrt{m} . En particulier la masse de la molécule D₂ étant 4 fois plus élevée que celle de H₂, nous avons $\tau_{D_2} = 2\tau_{H_2}$.

Ainsi l'effusion de D₂ est « deux fois plus lente » que celle de H₂. Si le trou s est obturé bien avant que l'équilibre ne soit atteint pour D₂ et H₂, le compartiment ① se trouvera enrichi en D₂ par rapport à la situation initiale mais la quantité de gaz diminue.

Bien entendu, il faut réitérer l'opération un grand nombre de fois pour obtenir une proportion satisfaisante de D₂. Le gaz s'est alors « enrichi » en D₂ sauf que ... il n'y en a plus beaucoup à l'arrivée!

Exercice 5

Analyse physique. L'ensemble du dispositif est normalement à 5 degrés de descriptions : un pour la position du piston et deux pour les gaz de chaque compartiment. Toutefois comme l'ensemble est thermostaté, cela impose une contrainte aux gaz et il ne reste plus qu'un seul degré de description pour chacun d'eux soit un total de 3. Il faudra donc 3 lois pour décrire l'évolution du système : deux équations d'état pour le GP et une équation mécanique.

1. Notons ① et ② les compartiments respectivement de gauche et de droite du cylindre.

Le piston subit 4 forces :

→ son poids \vec{P} porté par \vec{u}_z

→ la réaction \vec{R} du cylindre sur le piston, portée par \vec{u}_z en considérant que le piston se déplace sans frottement

→ la force pressante exercée par le compartiment ① : $\vec{f}_1 = P_1 S \vec{u}_x$
 → la force pressante exercée par le compartiment ② : $\vec{f}_2 = -P_2 S \vec{u}_x$
 Nous avons $V_1 = S(a+x)$ et $V_2 = S(a-x)$, donc

$$P_1 V_1 = n_0 RT = P_0 S a \quad \text{et} \quad P_2 V_2 = n RT = P_0 V_0$$

$$\text{Ainsi } P_1 = P_0 \frac{a}{a+x} = P_0 \frac{1}{1+x/a}$$

Comme $x \ll a$ (petits mouvements), nous avons

$$P_1 = P_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad \text{et} \quad P_2 = P_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

En utilisant le résultat précédent, ainsi que le PFD appliqué au piston en projection sur l'axe \vec{u}_x , nous trouvons :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = P_0 S \left(1 - \frac{x(t)}{a}\right) - P_0 S \left(1 + \frac{x(t)}{a}\right)$$

Ce qui donne

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{2P_0 S}{ma}}$$

Remarque : nous pouvons remettre en cause l'hypothèse d'isothermicité de la transformation. En effet de telles oscillations peuvent être rapides, trop rapides, pour permettre à l'équilibre thermique de s'établir. Si nous remplaçons cette hypothèse par l'hypothèse d'adiabaticité, alors nous aurons deux degrés de descriptions en plus mais aussi deux lois de Laplace, $PV^\gamma = C^{te}$ en plus. Les calculs sont alors identiques, aux développements limités près, et aboutissent à $\omega_0'^2 = \gamma \omega_0^2$. Des mesures précises de périodes des oscillations peuvent ainsi permettre de dire laquelle des deux modélisations est la meilleure.

2. Analyse technique. Ici, bien que la partie mécanique soit à un seul degré de description, nous n'allons pas utiliser une approche énergétique car l'ensemble du dispositif est, lui, à trois degrés de description. En fait cela revient à dire que nous ne connaissons pas a priori l'expression de l'énergie potentielle associée aux forces pressantes.

Dans le référentiel tournant lié au tube, le piston subit les mêmes forces que précédemment, plus une force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 x(t) \vec{u}_x$.

Ainsi le PFD s'écrit, en projection sur \vec{u}_x et en considérant des mouvements quelconques :

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{P_0 S a}{a+x(t)} - \frac{P_0 S a}{a-x(t)} + m\omega^2 x(t)$$

Équilibre. À l'équilibre, nous avons :

$$\frac{P_0 S a}{a+x_{\text{éq}}} - \frac{P_0 S a}{a-x_{\text{éq}}} + m\omega^2 x_{\text{éq}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -P_0 S a \frac{2x_{\text{éq}}}{a^2 - x_{\text{éq}}^2} + m\omega^2 x_{\text{éq}} = 0$$

$$\text{Et ainsi } -\frac{2P_0 S}{ma} \frac{x_{\text{éq}}/a}{1 - x_{\text{éq}}^2/a^2} + \omega^2 \frac{x_{\text{éq}}}{a} = 0.$$

Ce que nous pouvons écrire sous la forme : $-\omega_0^2 \frac{\xi_{\text{éq}}}{1 - \xi_{\text{éq}}^2} + \omega^2 \xi_{\text{éq}} = 0$ avec $\boxed{\xi = \frac{x}{a}}$.

Ainsi les positions d'équilibre sont solutions de $\xi_{\text{éq}} \left(\omega^2 - \frac{\omega_0^2}{1 - \xi_{\text{éq}}^2} \right) = 0$. Il apparait naturellement la pulsation critique $\omega_c = \omega_0$.

Si $\omega < \omega_0$, la seule solution est $\xi_{\text{éq}} = 0$ soit $x_{\text{éq}} = 0$.

Si $\omega > \omega_0$, il y a en plus les positions d'équilibre $\xi_{\text{éq}} = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ soit $x_{\text{éq}} = \pm a \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$.

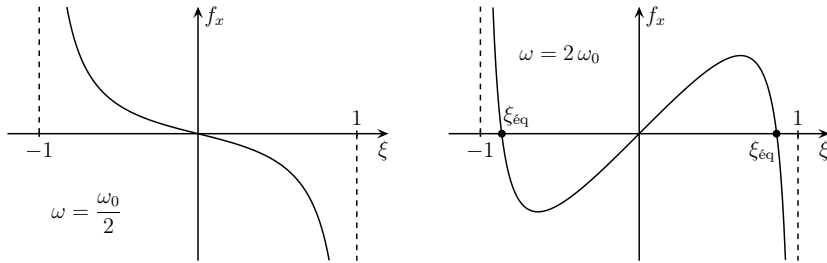
► Stabilité.

Une position d'équilibre est dite stable si, lorsque le système considéré est placé (avec une vitesse nulle) à une position proche de la position d'équilibre, il subit une force tendant à le faire revenir vers cette position.

Ainsi pour $x_{\text{éq}}$ quelconque, il faut que la résultante des forces soit dirigée vers les $x > 0$, *ie.* soit positive, pour $x = x_{\text{éq}}^-$. Mais il faut, en plus, que cette même projection soit orientée vers les $x < 0$, *ie.* soit négative, pour $x = x_{\text{éq}}^+$. Or il s'avère que la projection sur \vec{u}_x de la résultante des forces n'est autre que $f_x(\xi) = \xi \left(\omega^2 - \frac{\omega_0^2}{1 - \xi^2} \right)$.

En traçant $f_x(x)$ pour différentes valeurs de ω , nous constatons que la position d'équilibre $x_{\text{éq}} = 0$ n'est stable que pour $\omega < \omega_0$ et que les positions d'équilibre $x_{\text{éq}} = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ sont toujours stables dès lors qu'elles existent.

☛ *Remarque* : comme ici nous ne traçons pas une énergie potentielle mais une résultante de forces, les positions d'équilibre ne sont pas aux maxima de la courbes, mais aux points où la fonction est nulle.



☛ *Remarque* : ici l'hypothèse s'isothermicité est tout à fait justifiée puisque nous considérons un état à l'équilibre dans le référentiel tournant, *ie.* un état pour lequel les échanges thermiques ont eu le temps de se faire.