Thermodynamique

Chapitre 2

Statique des fluides

Statique des fluides

Que l'eau bout à des températures différentes suivant l'altitude à laquelle se trouve l'alpiniste est un phénomène connu. Dans le langage courant, nous pouvons entendre parfois que cela est dû à « la raréfaction de l'air ». En fait de raréfaction, il s'agit plutôt d'une baisse de pression et ce phénomène met en évidence non seulement que la pression est un paramètre important en thermodynamique mais qu'en plus elle varie suivant l'altitude.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser de plus près à la détermination de cette pression au sein d'un fluide étendu (liquide ou gaz) et les conséquences importantes que peuvent avoir ces légères variations. Nous nous limiterons au cas où le fluide est immobile dans le champ de pesanteur.

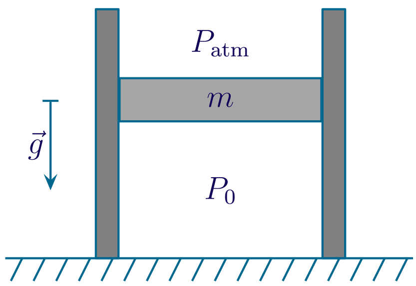
C'est pourquoi dans une première partie, nous commencerons par établir la relation à laquelle doit obéir le champ de pression à l'intérieur d'un fluide juste avant de le déterminer explicitement dans deux cas usuels. Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons aux résultantes de forces que peuvent subir des objets au contact de fluide et nous verrons le cas particulier bien connu de la poussée d'Archimède.

I – Champ de pression dans un fluide

I·1 – Relation fondamentale de la statique des fluide

I·1·*i* – phénoménologie

- Quelques exemples de la vie courante nous amènent à constater l'existence de forces de pression et que celles-ci varient au sein d'un fluide :
  - ➜ mettons la main dans un sachet plastique et plongeons la dans l'eau : le sachet se « colle » véritablement à la main
  - ➜ à la piscine, quand il s'agit d'aller rechercher la clé de son vestiaire au fond du grand bain, nous sentons que quelque chose pousse sur les oreilles
- De plus dans les exemples que nous avons vu jusque là, nous avons pu constater que la pression au sein d'un gaz pouvait dépendre de ce qu'il y avait au-dessus. C'est le cas du cylindre vertical fermé par un piston de masse m. La pression à l'intérieur de la chambre vaut $P_0 = P_{\text{atm}} + \dfrac{m\,g}{S}$ avec S la section du piston.



- Dans la suite nous allons déterminer comment varie exactement la pression au sein d'un fluide.

I·1·*ii* – le fluide considéré . . .

✫ rappel

✧ Lorsque dans une zone de l'espace une grandeur peut prendre différentes valeurs suivant la position du point considéré, nous pouvons dire que cela définit un *champ*.

> Connaître le *champ* d'une grandeur dans une certaine zone de l'espace, c'est connaitre la valeur de la grandeur considérée en chaque point de la zone en question.

✧ Par exemple pour le champ de pression, qui est un nombre, il faudra trouver la valeur de la pression en fonction de la position du point, *ie.* il faudra trouver $P(x,y,z)$.

✯ situation étudiée

✧ Nous nous plaçons dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

✧ Nous étudions un fluide constitué d'une seule phase mais pas forcément homogène ni en température ni, évidemment, en pression.

✧ Le fluide étudié est **immobile** dans le référentiel terrestre.

✯ système utilisé pour le raisonnement

✧ Comme l'ensemble du fluide n'est *a priori* pas homogène, nous allons nous intéresser à une toute petite portion de fluide.

> Une *particule de fluide* (ou *particule fluide*) est une petite portion de fluide délimitée par la pensée.

✧ La particule de fluide doit être de taille :
- ➜ très petite à l'échelle macroscopique, de sorte qu'elle soit homogène
- ➜ très grande à l'échelle microscopique, de sorte qu'il soit possible de lui appliquer les lois de la thermodynamique

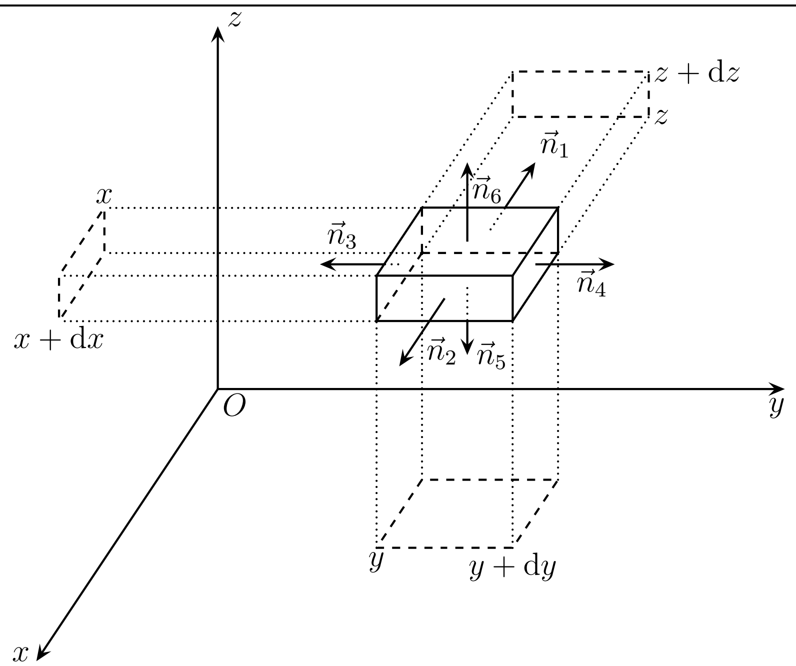
> L'échelle *mésoscopique* est une échelle intermédiaire entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique.

✧ Une longueur mésoscopique typique vaut $\ell = 1\ \mu$m car dans un volume $\mathscr{V} = \ell^3 = 10^{-18}$ m^3, il y a environ :
- ➜ une masse d'eau liquide de 10^{-12} g soit une quantité 5.10^{-10} mol ou encore 3.10^{14} molécules
- ➜ 10^{11} molécules pour un gaz (masse volumique environ 1000 fois inférieure)

> Une particule de fluide est de taille mésoscopique.

✧ D'un point de vue technique, la forme de la particule de fluide est adaptée à la situation :
- ➜ une patatoïde pour les considérations générales ou qualitatives
- ➜ un pavé pour une étude dans un système de repérage cartésien
- ➜ un pavé « arrondi » dans le cas d'un autre système de repérage

✧ Ici, nous allons considérer une particule de fluide pavée comprise entre x et $x+\mathrm{d}x$, entre y et $y+\mathrm{d}y$ et enfin entre z et $z+\mathrm{d}z$.



I·1·*iii* – ... subit deux types de forces ...

✧ La particule de fluide considérée subit deux types de forces :
- ➜ les forces à distance, à savoir le poids $\mathrm{d}\vec{P} = \mathrm{d}m\,\vec{g}$
- ➜ les forces pressantes

✧ Étant donné qu'il y a 6 faces, il va y avoir 6 forces pressantes, chacune dirigée selon une normale $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, ...

I·1·*iv* – ... qui se compensent à l'équilibre

✫ la loi

✧ Appliquons le TCI au système { particule de fluide }.
✧ Comme ce système est au repos, la résultantes des forces est nulle ce qui donne :

$$\mathrm{d}\vec{P} + \mathrm{d}\vec{f_1} + \mathrm{d}\vec{f_2} + \mathrm{d}\vec{f_3} + \mathrm{d}\vec{f_4} + \mathrm{d}\vec{f_5} + \mathrm{d}\vec{f_6} = \vec{0}$$

✫ projection sur $\vec{u}_x$

✧ Il n'y a que les forces $\mathrm{d}\vec{f_1}$ et $\mathrm{d}\vec{f_2}$ qui ont des composantes sur $\vec{u}_x$.
✧ En prenant comme « référence », le centre des faces, nous avons :

$$+P(x,y_0,z_0)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - P(x+\mathrm{d}x,y_0,z_0)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P(x,y_0,z_0) = P(x+\mathrm{d}x,y_0,z_0)$$

✧ Cette relation signifie que quelle que soit la position sur x, la pression ne change pas.
✧ En d'autre termes, la pression n'est pas fonction de x : $P(\cancel{x},y,z) = P(y,z)$.

✫ projection sur $\vec{u}_y$

✧ De même, la projection sur $\vec{u}_y$ ne concerne que deux forces : $\mathrm{d}\vec{f_3}$ et $\mathrm{d}\vec{f_4}$:

$$+P(y,z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z - P(y+\mathrm{d}y,z_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P(y,z_0) = P(y+\mathrm{d}y,z_0)$$

✧ La pression ne dépend donc pas non plus de y : $P(\cancel{y},z) = P(z)$.

✯ projection sur $\vec{u}_z$

✧ Cette fois il ne faut pas oublier le poids :

$$-\mathrm{d}m\,g + P(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - P(z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

✧ En introduisant la masse volumique ρ, nous avons $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\mathscr{V}$ où $\mathrm{d}\mathscr{V} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est le volume de la particule de fluide et ainsi :

$$-\rho\,\cancel{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}z\,g + P(z)\,\cancel{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} - P(z+\mathrm{d}z)\,\cancel{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = 0 \qquad \leadsto \qquad \frac{P(z+\mathrm{d}z)-P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g$$

✧ En faisant tendre $\mathrm{d}z$ vers 0, nous obtenons la relation :

$$\frac{P(z+\mathrm{d}z)-P(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}$$

✧ Notons au passage que cette relation est strictement équivalente à $P(z+\mathrm{d}z) - P(z) = \mathrm{d}P$.

✧ Finalement, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}t} = -\rho\,g$$

✯ la relation fondamentale

> Dans le champ de pesanteur, le champ de pression d'un fluide immobile obéit à la loi :
> $$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)\,g \qquad \text{où :}$$
> ➜ $\rho(z)$ est la masse volumique à l'altitude z
> ➜ z est l'axe vertical **ascendant**

I·1·v – morale

✯ interprétation de la relation

✧ Cette relation ne fait que traduire ce que nous savons plus ou moins intuitivement.

✧ En effet nous pouvons remarquer que $\dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} < 0$, ce qui signifie que la pression baisse quand l'altitude augmente.

> Plus un point s'enfonce dans un fluide immobile, plus la pression en ce point est grande.

☕ *Remarque* : vérifier cette petite loi phénoménologique sur n'importe quelle expression de $P(z)$ permet de détecter (et donc corriger) quasiment toutes les erreurs de signe.

✯ 2$^{\text{e}}$ intérêt de la démonstration

✧ Au delà du fait que cette démonstration aboutisse à la relation fondamentale de la statique des fluides, la démonstration en elle-même est importante.

✧ En effet en 2$^{\text{e}}$ année, de nombreuses démonstrations seront basées sur le même principe, à savoir un raisonnement local à l'échelle mésoscopique.

✧ Ces raisonnements sont extrêmement utilisé pour tout ce qui est diffusion thermique, diffusion de particules, ...

I·2 – Coefficients thermoélastiques

I·2·*i* – deux coefficients

✫ à ne pas oublier

✧ La relation fondamentale de la statique des fluide est fonction de ρ, *ie.* de la masse volumique.
✧ Or cette masse volumique peut très bien varier suivant les conditions de pression et de température.

✫ coefficient de dilatation isobare

Le *coefficient de dilatation isobare* α d'un corps représente la capacité que ce corps a de se dilatater suite à un changement de température et vaut :

$$\alpha = \frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P \qquad \alpha \text{ s'exprime en K}^{-1}.$$

✧ Le fait de mettre le facteur $\dfrac{1}{V}$ devant permet de parler en proportion.

Le coefficient de dilation de l'eau liquide vaut environ $\alpha_{\text{eau}} = 2{,}1.10^{-4}\ \text{K}^{-1}$

✧ Comme la profondeur moyenne des océans est d'environ 1 000 m, une augmentation de la température de 1 K entraine une hausse du niveau de la mer de 0,2 m : la dilatation de l'eau est responsable de 30 à 50 % de la hausse du niveau des eaux qui fait suite au réchauffement climatique !

✫ coefficient de compressibilité isotherme

Le *coefficient de compressibilité isothomer* χ_T d'un corps représente la capacité que ce corps a de se contracter suite à un changement de pression et vaut :

$$\chi_T = \frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T \qquad \chi_T \text{ s'exprime en bar}^{-1}.$$

✧ Le fait de mettre le facteur $\dfrac{1}{V}$ devant permet de parler en proportion et le signe $-$ permet d'avoir un nombre positif.

Le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau liquide vaut environ $\alpha_{\text{eau}} = 5.10^{-5}\ \text{bar}^{-1}$.

✧ Autrement dit, pour que le volume de l'eau change de 1 %, il faut une augmentation de pression de l'ordre de 200 bar : nous avons raison de considérer que l'eau est, en première approximation, incompressible.

I·2·*ii* – intérêt

✫ exemple technique

✧ Les mesures de α et χ_T sont expérimentalement assez simples à faire puisqu'il s'agit « seulement » de mesures de P, V et T.
✧ À partir de là nous pouvons remonter à l'équation d'état $V(P,T)$ d'un fluide.

✧ Prenons par exemple un fluide tel que $\alpha = \dfrac{1}{T}$ et $\chi_T = \dfrac{1}{P}$.
✧ Cherchons d'abord comment s'exprime la fonction **d'une seule variable** $V_0(T)$ définie par :

$$V_0(T) = V(T,P_{\text{réf}}) \qquad \text{où} \qquad P_{\text{réf}} \text{ est une valeur arbitraire fixe de la pression.}$$

✧ Pour cela utilisons la définition de α :

$$\alpha = \frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P = \frac{1}{V_0(T)}\,\frac{\mathrm{d}V_0(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{T} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}V_0(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{V_0(T)}{T}$$

✧ Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables assez aisée à intégrer :

$$\frac{\mathrm{d}V_0}{V_0} = \frac{\mathrm{d}T}{T} \quad \rightsquigarrow \quad \ln\frac{V_0(T)}{V_{\text{réf}}} = \ln\frac{T}{T_{\text{réf}}} \quad \rightsquigarrow \quad V_0(T) = \frac{V_{\text{réf}}}{T_{\text{réf}}} \times T$$

✧ Comme $V_0(T) = V(T,P_{\text{réf}})$, nous pouvons dire que la constante $\dfrac{V_{\text{réf}}}{T_{\text{réf}}}$ qui apparaît dans son expression n'est autre qu'une fonction de $P_{\text{réf}}$.
✧ Ainsi le volume s'exprime sous la forme $V(T,P) = g(P) \times T$.
✧ Pour trouver l'expression de $g(P)$, utilisons la définition de χ_T :

$$\chi_T = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T = \frac{1}{g(P)\cancel{T}}\,\frac{\mathrm{d}g(P)}{\mathrm{d}P}\,\cancel{T} = \frac{1}{P} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}g(P)}{\mathrm{d}P} = -\frac{g(P)}{P}$$

✧ Cette équation différentielle se résout aussi très bien par séparation de variables :

$$\frac{\mathrm{d}g}{g} = -\frac{\mathrm{d}P}{P} \quad \rightsquigarrow \quad \ln\frac{g(P)}{g_{\text{réf}}} = -\ln\frac{P}{P_{\text{réf}}} \quad \rightsquigarrow \quad g(P) = -\frac{g_{\text{réf}}\,P_{\text{réf}}}{P}$$

✧ En regroupant le tout, nous obtenons finalement :

$$V = \frac{g_{\text{réf}}\,P_{\text{réf}}}{P}\,T = \frac{\mathrm{C^{te}}}{P}\,T \qquad \rightsquigarrow \qquad P\,V = \mathrm{C^{te}}\,T$$

✧ Il s'agit là d'un gaz parfait.

✯ en pratique

✧ En pratique nous n'avons pas les expressions formelles de α et χ_T mais uniquement des tableaux de valeurs, nous ne pouvons donc pas faire les mêmes manipulations **formelles** que dans l'exemple précédent.
✧ Toutefois, l'idée reste la même : avec la connaissance de α et χ_T, fut-ce cette connaissance uniquement numérique, nous avons accès à l'équation d'état, *ie.* au comportement thermodynamique, du fluide.
✧ Au delà de son aspect artificiel, cet exemple a permi de montrer comment faire pour retrouver l'expression complète d'une fonction de plusieurs variables à partir de la connaissance de ses dérivées partielles :
- ➜ intégrer les dérivées l'une après l'autre
- ➜ identifier la constante d'intégration obtenue à la première étape à une fonction de la 2e variable

I·3 – Fluide incompressible

I·3·*i* – un cas plus qu'usuel

Un fluide est dit *incompressible* si sa masse volumique ne varie pas en fonction de la pression.

Un fluide est dit *indilatable* si sa masse volumique ne varie pas en fonction de la température.

✧ Nous admettrons la loi suivante :

Un fluide est incompressible si et seulement s'il est indilatable.

✧ En pratique, nous dirons toujours « incompressible » car c'est véritablement la propriété que nous utiliserons lorsque nous chercherons le champ de pression.

En première approximation, tous les liquides sont des fluides incompressibles.

✧ Et même si nous savons que l'eau **est** compressible $\chi_T \simeq 5.10^{-5}$ bar^{-1}, si aucune précision n'est apportée dans un problème, nous considérerons *a priori* qu'elle ne l'est pas ou plutôt que les effets dus à sa compressibilité sont négligeables.

✧ En revanche les gaz sont très nettement compressibles ! Rappelons que pour un gaz parfait, $\chi_T = \dfrac{1}{P}$ ce qui donne, à pression usuelle $\chi_T = 1$ bar^{-1}.

I·3·*ii* – une relation simple

Le champ de pression statique au sein d'un fluide incompressible (liquide) obéit à la relation :

$$P(z) + \rho\, g\, z = \mathrm{C^{te}} \qquad \text{où :}$$

➜ ρ est la masse volumique du fluide
➜ z est la cote sur la verticale ascendante

✧ La démonstration est simple : il suffit d'utiliser la relation fondamentale de la statique des fluides et d'intégrer en tenant compte du fait que, comme le fluide est imcompressible, $\rho(P) = \rho = \mathrm{C^{te}}$. Cela donne :

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho\, g \quad \leadsto \quad P(z) = -\rho\, g\, z + \mathrm{C^{te}} \qquad \leadsto \qquad P(z) + \rho\, g\, z = \mathrm{C^{te}}$$

✧ Numériquement à une profondeur de 5 m, la pression vaut :

$$P(-5) + 1\,000 \times 9{,}8 \times (-5) = P(0) + 0 = 10^5 \qquad \leadsto \qquad P(-5) = 1{,}5 \text{ bar}$$

Dans de l'eau liquide, tous les 10 m (à peu près), la pression augmente de 1 bar.

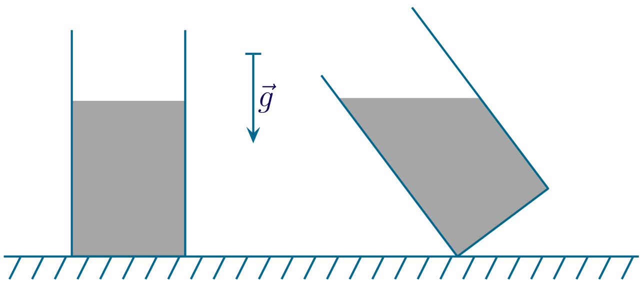
✧ Pour trouver la constante, nous avons dit que la pression **dans l'eau** à la surface était la même que la pression **dans l'air** au niveau de la surface.

> Il n'y a pas de discontinuité de pression à l'interface de deux fluides à l'équilibre thermodynamique et au repos.

I·3·*iii* – utilité

✯ surface d'un liquide

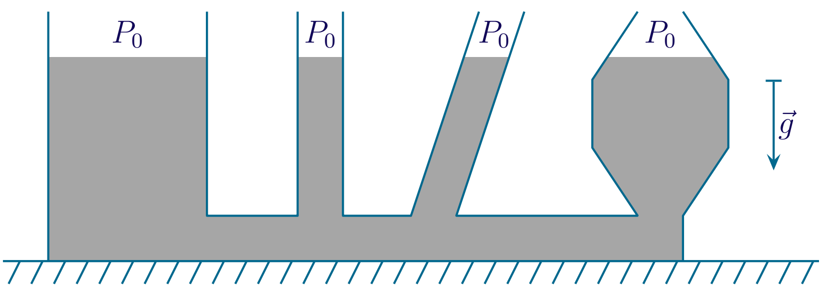
> La surface d'un liquide au repos à l'air libre est un plan horizontal.



✧ En effet, sur des échelles humaines, la pression « au dessus » du liquide considéré est uniforme donc la pression juste à la surface du fluide est aussi uniforme (continuité de la pression).

✧ D'après le champ de pesanteur dans un fluide (compressible ou non), puisque la pression ne dépend que de z, si $P = \text{C}^{\text{te}}$, alors $z = \text{C}^{\text{te}}$.

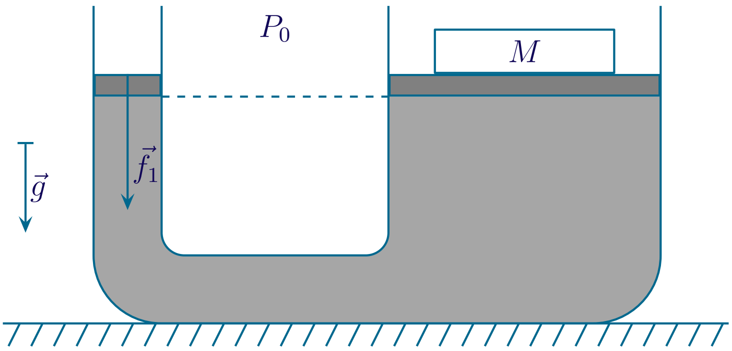
✧ Cela implique notamment que quel que soit la forme d'un récipient, quand bien même celui-ci semblerait morcelé, si le liquide contenu n'est pas cloisonné par des parois, alors la surface libre est partout à la même hauteur.



✧ C'est ce qui est appelé communément l'effet de « vases communicant »

✯ presse hydraulique

✧ Considérons le dispositif ci-dessous.



- Un fluide est enfermé dans deux tubes communicants de section s et $S \gg s$.
- Cherchons quelle doit être la force minimale $\vec{f_1}$ à exercer sur le piston dans le tube de section s pour soulever la masse M posée sur le piston du cylindre de droite.
- La projection des forces s'exerçant sur l'ensemble { piston + masse } de droite donne, dans le cas d'une accélération vers le haut :

$$-M\,g + P(z_0)\,S - P_0\,S > 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P(z_0) > P_0 + \frac{M\,g}{S}$$

- Or comme le fluide est statique (ou presque) nous pouvons dire que la pression $P(z_0)$ qui s'exerce en dessous du piston de droite est la même que celle s'exerçant en dessous du piston de gauche puisqu'ils sont situés tous les deux à la même hauteur.
- En faisant un bilan sur le piston de masse nulle situé à gauche, nous obtenons :

$$-f_1 - P_0\,s + P(z_0)\,s = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P(z_0) = P_0 + \frac{f_1}{s}$$

- En regroupant, cela donne :

$$\cancel{P_0} + \frac{f_1}{s} > \cancel{P_0} + \frac{M\,g}{S} \qquad \rightsquigarrow \qquad f_1 > \frac{s}{S}\,M\,g$$

- Nous pouvons donc voir qu'avec $s \ll S$, même avec de faibles forces il est possible de soulever des choses très lourdes.
- C'est le principe d'une presse hydraulique.
- Cet effet est analogue à celui du levier.

I·4 – Atmosphère isotherme

I·4·*i* – une pression qui varie . . .

- Supposons que la température à l'intérieur de l'atmosphère soit uniforme, *ie.* $T(z) = T_0$, et cherchons le champ de pression dans l'atmosphère en la considérant comme un gaz parfait.
- La relation de la statique des fluides s'écrit toujours $\dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g$ mais ici le fluide n'est **pas** incompressible. Il nous faut donc chercher la relation $\rho(P)$.
- Considérons un petit volume d'atmosphère $\mathrm{d}V$.
- Par définition de la masse volumique, nous avons $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ et donc :

$$\mathrm{d}m = M\,\mathrm{d}n \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}n = \frac{P\,\mathrm{d}V}{R\,T} \qquad \rightsquigarrow \qquad \rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{M\,P\,\mathrm{d}V}{R\,T\,\mathrm{d}V} = \frac{M\,P}{R\,T}$$

- En injectant cette expression dans la relation fondamentale de la statique des fluides, nous obtenons :

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{M\,P(z)}{R\,T}\,g \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} + \frac{M\,g}{R\,T}\,P(z) = 0$$

✧ C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants dont la solution est :

$$P(z) = P_0\,\mathrm{e}^{-z/H} \qquad \text{où} \qquad H \overset{\text{not}}{=} \frac{R\,T}{M\,g} \quad \text{et} \quad P_0 = P(0)$$

I·4·*ii* – … mais pas trop

✧ H représente la distance caractéristique de variation de la pression.
✧ À la hauteur $z = 5\,H$, la pression est pour ainsi dire nulle.
✧ Numériquement, pour $T = 273$ K, $H = 8{,}0$ km.
✧ Ainsi pour des récipients de quelques dizaines de centimètres comme ceux que nous rencontrons usuellement, nous pouvons dire que la pression est uniforme.

Sur des distances de quelques mètres, la pression au sein d'un gaz est uniforme.

I·4·*iii* – un facteur qui reviendra plus tard

La *densité particulaire volumique* notée $n^\star$ représente le nombre de molécules par unité de volume.
$n^\star$ est en m^{-3}.

✧ Il est préférable de noter $n^\star$ et non n pour ne pas confondre avec la quantité de matière.
✧ Cherchons la densité particulaire $n^\star$ dans une atmosphère isotherme.
✧ Dans un petit volume $\mathrm{d}V$, nous avons, par définition :

$$n^\star = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V} = \mathcal{N}_{\mathrm{A}}\,\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}\,P}{R\,T}$$

✧ Et donc, en utilisant $R = k_{\mathrm{B}}\,\mathcal{N}_{\mathrm{A}}$ et $M = \mathcal{N}_{\mathrm{A}}\,m$:

$$n^\star = \underbrace{\frac{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}\,P_0}{R\,T}}_{\overset{\text{not}}{=} n_0} \exp\left(-\frac{M\,g}{R\,T}\,z\right) = n_0^\star \exp\left(-\frac{\cancel{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}}\,m\,g}{\cancel{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}}\,k_{\mathrm{B}}\,T}\,z\right)$$

$$= n_0^\star \exp\left(-\frac{m\,g\,z}{k_{\mathrm{B}}\,T}\right) = n_0^\star \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{pp}}}{k_{\mathrm{B}}\,T}\right)$$

Dans un système où la température est uniforme, le nombre de molécules ayant l'énergie E est proportionnelle à $\exp\left(-\dfrac{E}{k_{\mathrm{B}}\,T}\right)$, appelé *facteur de* Boltzmann.

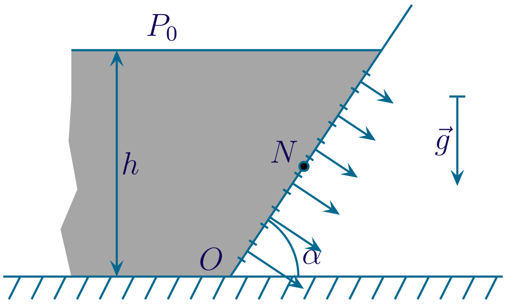
✧ C'est la raison pour laquelle les constantes de vitesse dans les réactions chimiques élémentaires sont proportionnelles à $-\mathrm{e}^{E/(k_{\mathrm{B}}\,T)}$.

II – Théorème d'ARCHIMÈDE

II·1 – Forces exercées sur un barrage

II·1·*i* – résultante

✧ Considérons le barrage incliné et cherchons quelle est la résultante des forces pressantes de part et d'autre du barrage.

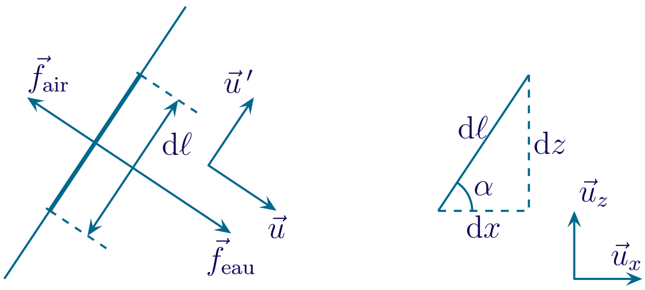


✧ Nous ne pouvons pas écrire que la force exercée par l'eau vaut $P\,S$ où S serait la surface du barrage car la pression **n'est pas uniforme sous l'eau**.

✧ En revanche, pour chaque petite portion de surface suffisamment petite, là oui, nous pouvons écrire $\mathrm{d}\vec{f} = P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$ avec $\vec{n}$ un vecteur normal dirigé dans le bon sens.

✧ L'idée va donc être la suivante :
- ➜ découper par la pensée le barrage en plein de morceaux de surface
- ➜ déterminer la résultantes des forces pressante sur chacun des petits morceaux
- ➜ sommer toutes les contributions

✧ Regardons de près ce qu'il se passe au niveau de la paroi.



✧ Nous avons ainsi :

$$\vec{f}_{\text{air}} = -P_0\,\mathrm{d}S\,\vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{\text{eau}} = P\,\mathrm{d}S\,\vec{u} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}\vec{f} = (P - P_0)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}$$

✧ En notant a la largeur du barrage, nous avons $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\ell$ et la relation fondamentale de la statique des fluides donne :

$$P(z) + \rho\,g\,z = P_0 + \rho\,g\,h \qquad \rightsquigarrow \qquad P(z) = P_0 + \rho\,g\,(h - z)$$

✧ Finalement la résultante totale donne :

$$\vec{R} = \int (P_0 + \rho\,g\,(h - z) - P_0)\,a\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u} = \int \rho\,g\,(h - z)\,a\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}$$

✧ Pour pouvoir faire *techniquement* le calcul, nous devons tout exprimer avec la même variable de description.

✧ Ici nous allons choisir z. Cela donne $\mathrm{d}\ell = \dfrac{\mathrm{d}z}{\sin\alpha}$ et :

$$\vec{R} = \int_0^h \rho\,g\,(h-z)\,a\,\frac{\mathrm{d}z}{\sin\alpha}\,\vec{u} = \left(\frac{\rho\,g\,a}{\sin\alpha}\right)\,\vec{u}\int_0^h (h-z)\,\mathrm{d}z$$
$$= \left(\frac{\rho\,g\,a}{\sin\alpha}\right)\,\vec{u}\left[-\frac{(h-z)^2}{2}\right]_0^h = \frac{h^2}{2}\,\frac{\rho\,g\,a}{\sin\alpha}\,\vec{u}$$

II·1·*ii* – moment

✧ Cherchons le point d'application de la force, *ie.* le point C tel que :

$$\vec{\mathscr{M}}_O(\vec{f}) = \overrightarrow{OC}\wedge\vec{R}$$

✧ Pour déterminer le moment total des forces de pression, nous allons faire comme nous avons fait pour la résultante :
- ➜ découper par la pensée le barrage en plein de morceaux de surface
- ➜ déterminer le moments des forces pressante sur chacun des petits morceaux
- ➜ sommer toutes les moments

✧ Considérons un point N quelconque et cherchons $\mathrm{d}\mathscr{M}_O$ le moment par rapport à O des forces pressantes en N.

✧ Par définition, en notant ℓ la distance ON :

$$\mathrm{d}\vec{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{ON}\wedge(P(z)-P_0)\,\mathrm{d}S\,\vec{u} = \ell\,\vec{u}\,'\wedge\rho\,g\,(h-z)\,a\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u} = \rho\,g\,\ell\,(h-z)\,a\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_y$$

✧ Et ainsi, en sommant toutes les contributions et en transformant tous les ℓ en z :

$$\mathrm{d}\vec{\mathscr{M}}_O = \int\rho\,g\,\ell\,(h-z)\,a\,\mathrm{d}\ell\,\vec{u}_y = \int_0^h\rho\,g\,\frac{z}{\sin\alpha}\,(h-z)\,a\,\frac{\mathrm{d}z}{\sin\alpha}\,\vec{u}_y = \frac{\rho\,g\,a}{\sin^2\alpha}\,\vec{u}_y\int_0^h z\,(h-z)\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{\rho\,g\,a}{\sin^2\alpha}\,\vec{u}_y\int_0^h(h\,z-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{\rho\,g\,a}{\sin^2\alpha}\,\vec{u}_y\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\rho\,g\,a}{\sin^2\alpha}\,\frac{h^3}{6}\,\vec{u}_y$$

✧ En notant $\overrightarrow{OC} = L\,\vec{u}\,'$, nous avons donc :

$$\overrightarrow{OC}\wedge\vec{R} = L\,\vec{u}\,'\wedge\frac{h^2}{2}\,\frac{\rho\,g\,a}{\sin\alpha}\,\vec{u} = L\,\frac{h^2}{2}\,\frac{\rho\,g\,a}{\sin\alpha}$$

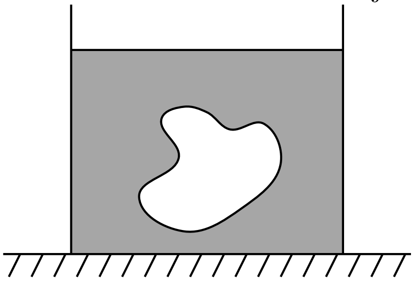
✧ Et par identification avec le résultat précédent, nous trouvons $L = \dfrac{h}{3\,\sin\alpha}$, *ie.* du point de vue de la rotation, tout se passe comme si la totalité des forces pressantes s'exerçait en un point C situé au premier tiers de profondeur de l'eau.

II·2 – L'eurêka

II·2·*i* – énoncé

> Tout corps entièrement immergé dans un fluide au repos subit de la part de celui-ci une force verticale dirigée vers le haut d'intensité égale au poids du fluide remplacé.
> Cette force est appelée *poussée d'*Archimède.

Le *fluide remplacé* est le fluide dont un objet a pris la place.



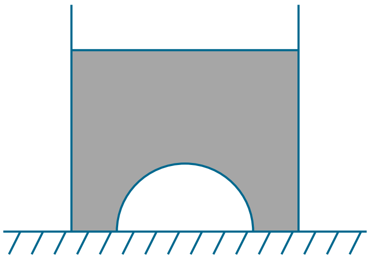
La poussée d'ARCHIMÈDE que subit par un corps de la part d'un fluide est la résultante des forces pressantes que le fluide exerce sur ce corps.

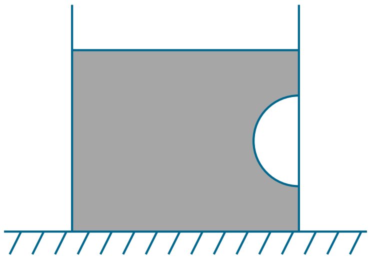
Autrement dit, dans la liste des forces de contact, il **ne faudra pas** compter à la fois les forces pressantes et la poussée d'ARCHIMÈDE.

II·2·*ii* – restriction

Il faut que le corps soit **entièrement immergé**, *ie.* il doit avoir du fluide tout autour de lui.

✧ Dans les deux cas suivants, le corps immergé ne subit pas la poussée d'ARCHIMÈDE car il n'est pas totalement entouré de liquide.

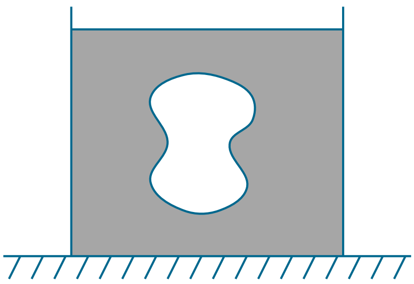


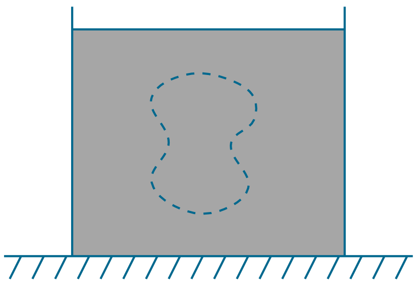


✧ De plus il faut que le fluide soit au repos, donc il faut que l'objet immergé soit **lui aussi** au repos.

II·2·*iii* – démonstration

✧ Considérons un objet entièrement immergé et immobile et notons $\vec{\Pi}$ la résultantes des forces pressantes exercées par le fluide.





✧ Faisons l'hypothèse que la force que le fluide exerce ne dépend pas de l'objet.

✧ C'est une hypothèse « naturelle » car la force exercée par un fluide immobile sur une surface $\mathrm{d}S$ vaut $\mathrm{d}\vec{f} = P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$ avec $\vec{n}$ un vecteur normal à la surface. Supposer que la force change suivant l'objet qui subit la force reviendrait à supposer que ce qui subit la force est capable de changer le champ de pression.

✧ Donc si la force ne dépend pas de l'objet, nous pouvons remplacer ce dernier par du fluide, le même que celui dans lequel il est plongé.

✧ Nous obtenons alors une portion de fluide :
  - ➜ subissant uniquement son poids $\vec{P}_{\text{fr}}$ et la résultante $\vec{\Pi}$
  - ➜ immobile

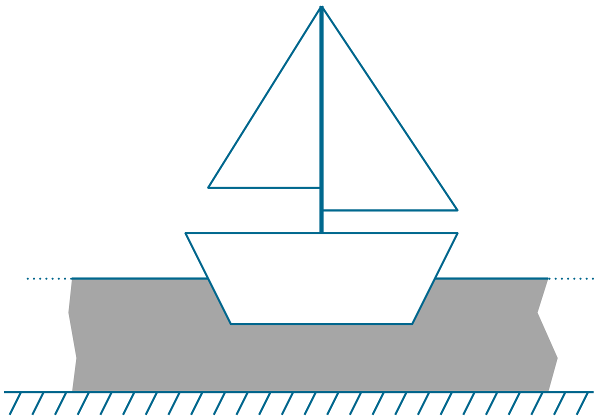
✧ Nous avons alors $\vec{\Pi} + \vec{P}_{\text{fr}} = \vec{0}$ soit $\vec{\Pi} = -P_{\text{fr}}$.

✧ Ce qui démontre l'expression de la poussée d'ARCHIMÈDE.

II·2·*iv* – des restrictions peu restrictives

✯ corps flottant

✧ En toute rigueur, un corps flottant en général et un bateau en particulier ne subit pas la poussée d'ARCHIMÈDE car il n'est pas entièrement immergé.

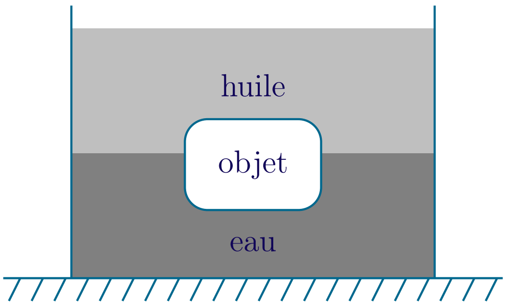


✧ Toutefois, en utilisant la même démonstration que ci-dessus, nous pouvons dire que le bateau subit effectivement la poussée d'ARCHIMÈDE à condition de compter, comme fluide remplacé, non seulement l'eau **mais aussi** l'air.

✧ Dans ces condition, la « bonne » poussée d'ARCHIMÈDE que subit un bateau vaut :

$$\vec{\Pi} = -\vec{P}_{\text{air,remp}} - \vec{P}_{\text{eau,remp}} \simeq -\vec{P}_{\text{eau,remp}}$$

✧ Dans le cas d'un corps flottant entre deux fluides de densités différentes, il faudrait prendre en compte les poids des deux liquides remplacés.



✯ corps en mouvement

✧ L'expression de la poussée d'ARCHIMÈDE n'est valable que pour les fluides au repos **donc** lorsque les objets immergés sont immobiles.

✧ Or les bateaux avancent et nous disons malgré tout qu'ils flottent grâce à la poussée d'ARCHIMÈDE.
✧ En fait, tant que la vitesse de l'objet par rapport au fluide n'est pas trop grande, nous pouvons décomposer la force qu'un fluide exerce sur un objet en :
- ➜ une poussée d'ARCHIMÈDE
- ➜ une force de frottement linéaire

✧ Lorsque la vitesse de l'objet par rapport au fluide devient trop grande, nous dirons plutôt que l'objet subit :
- ➜ une force de traînée (frottement) opposée à la vitesse de l'objet par rapport au fluide
- ➜ une portance, force orthogonale à la traînée

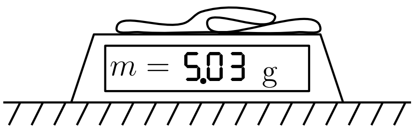
✧ C'est cette portance qui est responsable :
- ➜ du vol des avions
- ➜ du ski nautique
- ➜ de l'hydroptère (le bateau qui se soulève quand il va vite)

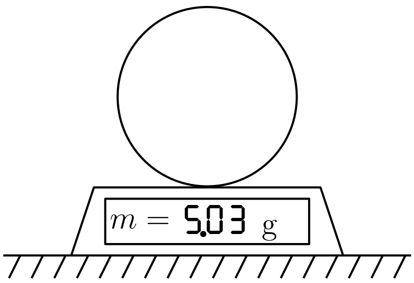
II·3 – Exemples

II·3·i – la pesée de l'air

✯ expérience

✧ Il est tentant de vouloir peser de l'air en l'emprisonnant dans un ballon.
✧ L'expérience est toutefois décevante.





✯ interprétation

☯ 1re expérience

✧ Un bilan de forces sur le balon dégonflé (donc de volume quasi nul) donne :

$$\vec{P} + \vec{f}_{\text{balance}} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad m\,g = f_{\text{bal},1}$$

☯ 2e expérience

✧ Le ballon est tout juste gonflé.
✧ Faisons un nouveau bilan de force sur le ballon gonflé : il y a en plus le poids de l'air contenu ainsi que la poussée d'ARCHIMÈDE.

$$\vec{P} + \vec{P}_{\text{air}} + \vec{f}_{\text{balance},2} + \vec{\Pi} = 0$$

✧ Or la poussée d'ARCHIMÈDE vaut exactement l'opposé du poids de l'air remplacé qui n'est autre que l'air qui a été introduit dans le ballon.
✧ Autrement dit :

$$\vec{P}_{\text{air}} = -\vec{\Pi} \qquad \rightsquigarrow \qquad m\,g = f_{\text{bal},2} = f_{\text{bal},1}$$

◇ Il n'est pas possible de mesurer le poids de l'air avec cette méthode.

en surgonflant

◇ En surgonflant le ballon, il devrait être possible de mesurer des différences de masses.
◇ Imaginons que $\Delta m = 1{,}0$ g. À quelle pression a-t-il fallu gonfler le ballon ?
◇ En supposant que tous les gaz se comportent comme des gaz parfaits, nous avons :

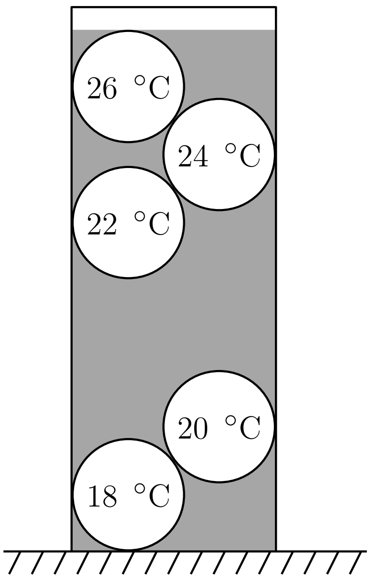
$$\Delta m = n\,M - n_{\text{remp}}\,M = \frac{(P - P_0)\,V\,M}{R\,T} = \Delta m \qquad \rightsquigarrow \qquad \Delta P = \frac{\Delta m}{M}\,\frac{R\,T}{V}$$

◇ Pour un ballon de rayon 15 cm, nous trouvons $\Delta P = 0{,}6$ bar, ce qui est déjà un bon surgonflage.

II·3·*ii* – mouvement dans une colonne d'eau

✫ thermomètre de Galilée

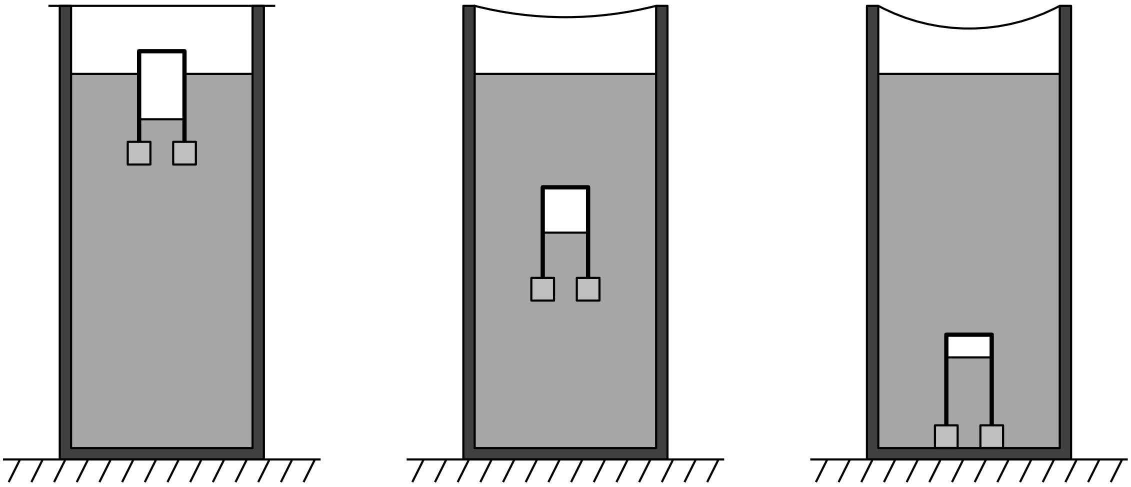
◇ Il s'agit d'un petit dispositif permettant de repérer la température.
◇ Des petites boules marquées sont plongées dans une enceinte scellée. La température de la pièce vaut le numéro indiqué par la plus basse des boules en hauteur.



◇ En se dilatant suite aux variations de température, la poussée d'Archimède que subit chacune des boules varie.
◇ Par un choix judicieux des masses des boules, à quelques degrés près, une boule peut flotter ou couler.
◇ Il suffit de mettre les bonnes valeurs des températures sur les bonnes boules.

✫ instabilité du ludion

◇ Le ludion est un petit objet déformable flottant enfermée dans une enceinte remplie de liquide.
◇ En appuyant sur le haut déformable du récipient, le ludion se met à couler. En relâchant, il remonte.

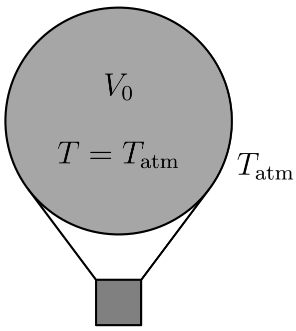


✧ Appuyer sur le haut de l'enceinte augmente la pression au sein du fluide.
✧ Comme le ludion est déformable, une augmentation de pression implique une diminution de volume **donc** une diminution de la poussée d'Archimède, il se met à couler.
✧ Plus le ludion coule, plus la pression augmente, plus il diminue de volume, plus la poussée d'Archimède qu'il subit diminue aussi.
✧ En relâchant en haut, la pression diminue, le ludion regonfle un peu, suffisamment pour remonter un peu, ce qui augmente alors son volume, puis la poussée qu'il subit . . .

II·3·*iii* – aérostats

✯ ballon stratosphérique

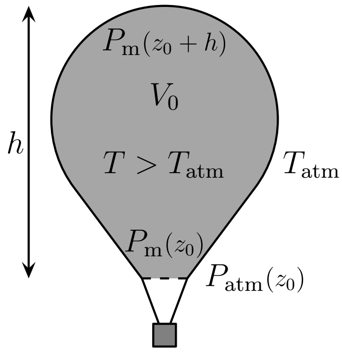
✧ Le ballon stratosphérique est un ballon de volume **fixe** permettant d'élever des charges pas trop lourde.



✧ Le ballon est gonflé à l'hélium de telle sorte que la masse du gaz emprisoné soit inférieur à la masse d'air remplacé et qu'ainsi la poussée d'Archimède puisse soulever non seulement le ballon mais aussi une charge utile.
✧ Plus le ballon monte, plus la densité d'air est faible *ie.* moins la poussée d'Archimède est grande.
✧ Arrivée à une certaine limite, il n'est plus possible pour le ballon de monter : il faut lâcher du lest.
✧ Comme il n'est pas question de larguer la charge utile, un petit dispositif permet de laisser l'hélium s'échapper, le ballon peut alors monter un peu plus haut.

✯ montgolfière

✧ La montgolfière est une enveloppe ouverte contenant de l'air chauffé.



- L'air à l'intérieur étant chaud, sa densité est plus faible que l'air environnant donc sa masse (et son poids) total est plus faible que la masse d'air remplacée (donc de la poussée d'ARCHIMÈDE).
- Si la différence entre le poids de l'air dans la montgolfière et la poussée d'ARCHIMÈDE est suffisamment grande, alors la montgolfière peut s'élever.
- Notons que si les pressions sont identiques entre l'atmosphère et l'intérieur du ballon au niveau de l'ouverture, la pression de l'air contenu dans le ballon à son sommet est plus élevée que celle de l'air environnant.
- En effet, en supposant que l'atmosphère et l'air dans le ballon soient tous de température homogène (resp. T_{atm} et T_{bal}), alors la pression varie en $\mathrm{e}^{-z/H(T)}$ où $H = \dfrac{R\,T}{m\,g}$ est la distance caractéristique de variation de pression.
- La pression variant sur de plus grandes distance quand T est grand, cela confirme bien que la pression dans le ballon est plus grande **bien qu'il y ait moins d'air**.

Statique des fluides

Au niveau du cours

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ champ de pression, particule de fluide, échelle mésoscopique
- ➜ coefficients de dilatation isobare, de compressibilité isotherme
- ➜ densité particulaire
- ➜ fluide remplacé

✯ Les grandeurs

✧ Connaitre les valeurs de la dilatation isobare et de la compressibilité de l'eau liquide dans des conditions usuelles

✯ Les lois

✧ Connaître :
- ➜ la relation fondamentale de la statique des fluides
- ➜ le champ de pression dans un liquide incompressible
- ➜ savoir dessiner la surface libre d'un liquide au repos
- ➜ l'expression du facteur de Boltzmann
- ➜ la poussée d'ARCHIMÈDE et ses conditions d'application

✯ la phénoménologie

✧ Connaître :
- ➜ l'évolution de la pression en fonction de l'altitude
- ➜ le principe de la presse hydraulique
- ➜ le champ de pression dans un gaz peu étendu

✯ les exemples fondamentaux

✧ Savoir :
- ➜ refaire la démonstration de la relation de la statique des fluides
- ➜ retrouver l'expression de la pression dans une atmosphère isotherme

Au niveau des savoir-faire

✯ petits gestes

✧ Il faut connaître et savoir utiliser la méthode permettant de calculer la résultante des forces pressantes qui s'exercent sur un barrage.

✯ exercices classiques

✧ Savoir trouver la résultante des forces qui s'exercent sur un barrage.

Table des matières