

## Circuits électroniques

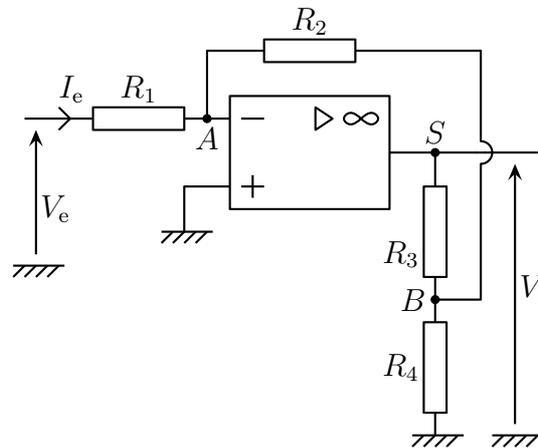
Dans cette police sont écrits les raisonnements menés et autres remarques sur les méthodes employées pour trouver les réponses aux questions posées. C'est à dire à l'oral mais à ne pas écrire en DS.

### ✿ Exercice 1

*Analyse physique.* Il y a bien une rétroaction sur l'entrée inverseuse ici : la suite des dipôles  $R_3$  et  $R_2$  relie effectivement la sortie à l'entrée sans passer par la masse. L'AO est donc en régime linéaire. Comme aucun dipôle n'est relié directement entre la sortie et la masse, il faut s'attendre à ce que les résultats soit fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$ . Comme, enfin, il n'y a pas de bobine ou de condensateur, il y aura une simple relation de proportionnalité entre la tension d'entrée et la tension de sortie.

*Analyse technique.* C'est un AO, approche nodale ! Même pour la seconde question où, pourtant, il va falloir déterminer un courant. Ce courant sera déterminé connaissant tous les potentiels de chaque point à l'aide de la relation constitutive du résistor  $R_1$ .

1. Il y a trois points de potentiels inconnus  $A$ ,  $B$  et  $S$ , il faut donc trois lois.



Comme l'AO est idéal et en régime linéaire, nous avons  $V_- = V_+ = 0$ .

La loi des nœuds en terme de potentiels en  $A$  s'écrit (sans oublier que  $V_- = 0$ ) :

$$\frac{V_e - 0}{R_1} + \frac{V_B - 0}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_B = -\frac{R_2}{R_1} V_e$$

La loi des nœuds en terme de potentiels en  $B$  s'écrit (en n'oubliant pas que  $V_B$  est déjà connu) :

$$\frac{V_s - V_B}{R_3} + \frac{0 - V_B}{R_4} + \frac{0 - V_B}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_s = \left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}\right) V_B$$

Et ainsi 
$$\boxed{\frac{V_s}{V_e} = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}\right)}$$

2. Connaissant tous les potentiels, nous pouvons maintenant écrire la loi constitutive du résistor  $R_1$ . Cela donne  $I_e = \frac{V_e - 0}{R_1}$  puis  $\boxed{R_e = R_1}$ .

3. Pour un inverseur classique, *i.e.* sans les résistances  $R_3$  et  $R_4$ , le gain aurait été de  $-\frac{R_2}{R_1}$ . Ici, il y a un gain multiplicatif supplémentaire de  $\left(1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2}\right)$ .

$$4. \quad \boxed{\text{A.N. : } \frac{V_s}{V_e} = -1,1.10^2}$$

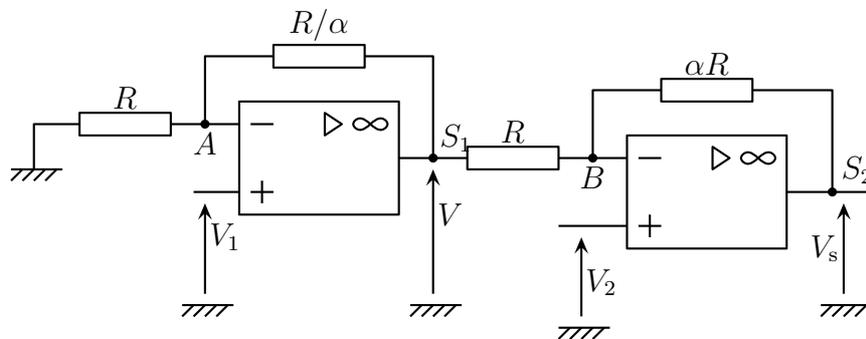
### ✿ Exercice 2

Analyse physique :

- les deux AO possèdent des rétroactions de leurs sorties sur leurs entrées inverseuses, ils sont donc tous les deux en régime linéaire.
- GP :  $R, \alpha$  (composants),  $V_1$  et  $V_2$  (contraintes)
- étant donné la forme du résultat et les résistors en présence, nous pouvons imaginer que le résultat, d'un point de vue dimensionnel sera tel que  $A$  ne dépende que de  $\alpha$  et pas de  $R$ . De plus, parce que l'AO est en régime linéaire, la sortie sera une fonction linéaire des contraintes.

Analyse technique :

- approche nodale, évidemment !
- Nous avons 4 potentiels inconnus, il faudra donc 4 lois dont deux lois de fonctionnement des AO.



L'AO de gauche est idéal et fonctionne en régime linéaire, nous avons donc  $V_A = V_1$ .

La loi des nœuds en terme de potentiel au point  $A$  s'écrit

$$\frac{0 - V_1}{R} + \frac{V - V_1}{R/\alpha} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V = \frac{1 + \alpha}{\alpha} V_1$$

L'AO de droite est idéal et fonctionne en régime linéaire, nous avons donc  $V_B = V_2$ .

La loi des nœuds en terme de potentiel au point  $B$  s'écrit (sans oublier que nous connaissons  $V$ ) :

$$\frac{\frac{1 + \alpha}{\alpha} V_1 - V_2}{R} + \frac{V_s - V_2}{\alpha R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{V_s = (1 + \alpha)(V_2 - V_1)}$$

Il s'agit bien du résultat attendu avec  $\boxed{A = 1 + \alpha}$ .

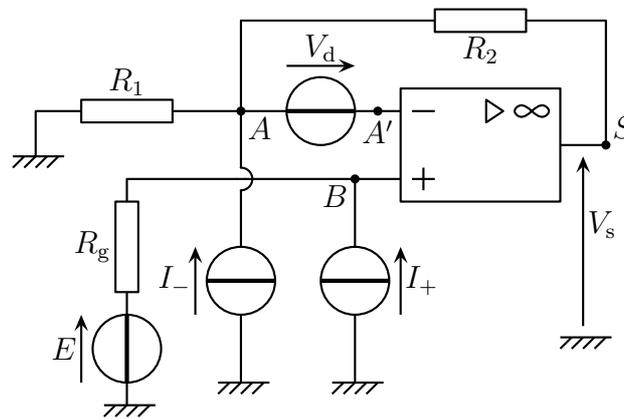
### ✿ Exercice 3

1. Analyse physique :

- l'AO idéal possède une rétroaction sur l'entrée inverseuse, il fonctionne donc en régime linéaire
- les grandeurs pertinentes sont  $R_1, R_2$  (composants)  $I_+, I_-, V_d$  (modélisation AO) et  $E, R_g$  (modélisation de la contrainte)

Analyse technique :

- l'approche nodale, il n'y a que ça de vrai avec les AO
- maintenant il reste trois potentiels inconnus, ça veut dire trois lois



La loi des nœuds en terme de potentiels en  $B$  donne :

$$\frac{E - V_+}{R_g} + I_+ = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_+ = E + R_g I_+$$

L'AO est idéal et en régime linéaire donc  $V_{A'} = V_- = V_+ = E + R_g I_+$ .

La loi constitutive du générateur  $V_d$  donne  $V_{A'} - V_A = V_d$  et donc  $V_A = E + R_g I_+ - V_d$ .

La loi des nœuds en terme de potentiels en  $A$  donne :

$$\frac{0 - V_A}{R_1} + \frac{V_s - V_A}{R_2} + I_- = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_s = V_A \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - R_2 I_-$$

Et avec l'expression de  $V_A$  : 
$$V_s = E \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + (R_g I_+ - V_d) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - R_2 I_-$$

☛ *Remarque.* le modèle d'AO réel n'est pas le même modèle que celui vu en cours, cela n'a pas à choquer.

**2.** Pour un AO idéal, nul n'est besoin de recommencer les calculs : il suffit de reprendre le résultat avec  $I_+ = I_- = 0$  et  $V_d = 0$ , ce qui donne  $V_{s,\text{idéal}} = E \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$ .

L'erreur relative est  $\varepsilon = \left| \frac{V_{s,\text{idéal}} - V_s}{V_{s,\text{idéal}}} \right|$  soit  $\varepsilon = 8,1 \%$ . Cet écart montre que l'erreur commise n'est pas totalement négligeable, mais peut ne pas être considérée pour une première approximation.

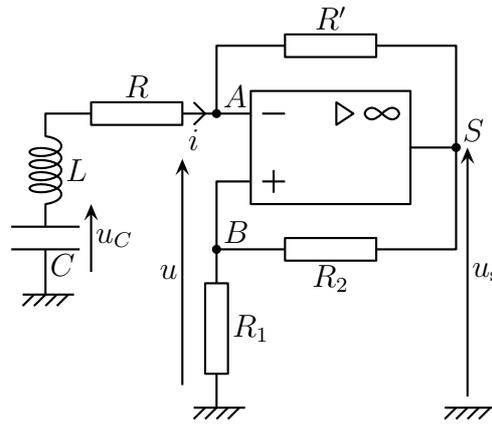
La raison principal de cet écart significatif est que la tension d'entrée  $E$  est sensiblement égale à la tension de décalage. Avec une tension  $E$  plus élevée, nul doute que l'erreur deviendrait bien plus négligeable.

#### ☛ Exercice 4

*Analyse physique.* Il y a deux rétroactions, une sur chaque entrée, mais l'énoncé précise bien que l'AO est en régime linéaire. Tout va bien. La tension  $u(t)$  semble mal définie, mais comme l'AO est idéal et en régime linéaire, cela ne changera pas grand chose que  $u(t)$  soit  $v_+(t)$  ou  $v_-(t)$ . Nous pouvons voir que l'AO est commandé par  $u(t)$  et que son circuit de commande contient  $R'$ ,  $R_1$  et  $R_2$ , les résultats devront en dépendre, mais surtout il n'y aura pas besoin a priori de s'occuper de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

*Analyse technique.* Approche nodale, évidemment ! En ce qui concerne  $i(t)$ , nous chercherons d'abord les potentiels inconnus et utiliserons une loi constitutive adaptée.

**1. (a)** En ce qui concerne l'AO, nous avons deux potentiels inconnus : celui en  $A$  et celui en  $S$ . Il faut donc écrire deux lois pour trouver tous les potentiels.



La loi constitutive de  $R'$  s'écrit  $i(t) = \frac{v_-(t) - v_s(t)}{R'}$ . Reste à déterminer ces deux potentiels.  
 L'AO est idéal et en régime linéaire donc  $v_-(t) = v_+(t) = u(t)$ .  
 La loi des nœuds en  $B$  s'écrit :

$$\frac{0 - u(t)}{R_1} + \frac{v_s(t) - u(t)}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u(t)$$

En remplaçant  $v_-(t)$  et  $v_s(t)$  par leurs expressions, nous arrivons à

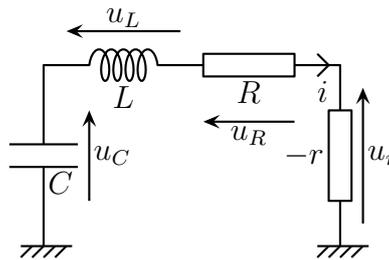
$$u(t) = -\frac{R' R_1}{R_2} i(t)$$

1. (b) Le dipôle constitué par l'AO et les trois résistances est orienté en convention récepteur, donc il se comporte comme un résistor si nous pouvons écrire  $u(t) = R_{eq} i(t)$ .

Compte tenu de la relation précédente, nous pouvons voir que nous avons bien :

$$u(t) = -r i(t) \text{ avec } r = \frac{R' R_1}{R_2}$$

2. (a) Le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Il s'agit d'un circuit  $R,L,C$  série assez classique. L'additivité des tensions donne :

$$u_C(t) = u_r(t) + u_R(t) + u_L(t)$$

Avec les relations constitutives  $i(t) = -C \frac{du_C}{dt}(t)$  ;  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}(t)$  ;  $u_R(t) = R i(t)$  et  $u_r(t) = -r i(t)$  nous arrivons, après substitutions et simplifications à

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2}(t) + \left(\frac{R - r}{L}\right) \frac{du_C}{dt}(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$$

2. (b) Avec les notations canoniques, l'équation caractéristique de cette équation différentielle est

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 = 0$$

Nous avons toujours  $\omega_0 > 0$  mais ici  $Q$  peut être positif ou négatif.

Le discriminant s'écrit  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ .

En choisissant  $|Q|$  suffisamment grand, les solutions de l'équation caractéristique sont imaginaires ce qui implique des oscillations pour  $u_C$ . Les solutions de l'équation caractéristique sont donc

$$x_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} + j\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}}{2} \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_{\text{osc}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} - j\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}}{2} \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_{\text{osc}}$$

Ainsi  $u_C(t) = e^{-\omega_0 t/(2Q)} (\lambda \cos \omega_{\text{osc}} t + \mu \sin \omega_{\text{osc}} t)$ .

Nous pouvons donc voir que si  $Q < 0$ , l'amplitude des oscillations est exponentiellement croissante.

Il faut que  $r$  soit supérieur à  $R$  pour avoir des solutions en exponentielle croissante.

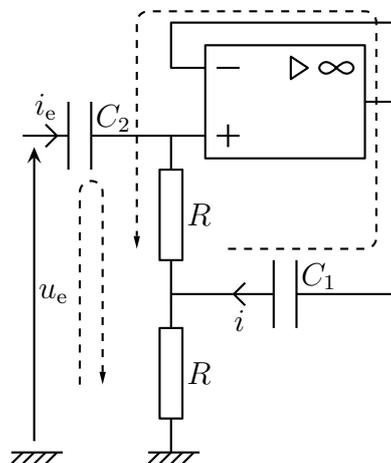
Il y a alors apparition d'oscillations.

☞ *Remarque.* En pratique l'amplitude des oscillations reste limitée par l'AO car la sortie de ce dernier est limitée en courant et en tension. De plus si  $r$  est très grande, autrement dit si  $r$  est nettement différente de  $R$ , les oscillations sont déformées et ne sont plus sinusoïdales, toujours à cause de l'AO.

### ✿ Exercice 5

1. (a) *Analyse physique.* L'AO est en régime linéaire. L'impédance devrait dépendre de  $R$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

*Analyse technique.* L'approche nodale est tentante, par pur réflexe. Toutefois, en comptant bien les potentiels inconnus, cela fait 3. 3 potentiels inconnus sachant qu'après il faudra trouver un courant  $i_e$ . Ce n'est pas très tentant. D'autant plus qu'en introduisant les courants inconnus, nous pouvons voir qu'il n'y en a que deux. L'approche maillère est préférable ici.



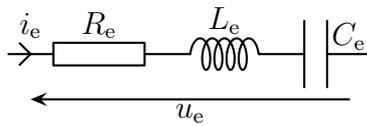
Les deux lois des mailles représentées s'écrivent, en tenant compte de la loi de fonctionnement de l'AO :

$$\begin{cases} \frac{u_e}{jC_2\omega} - \frac{1}{jC_2\omega} i_e - R i_e - R(i_e + i) = 0 \\ \frac{1}{jC_1\omega} i + \underbrace{0}_{=\varepsilon} - R i_e = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{u_e}{jC_2\omega} = \left( \frac{1}{jC_2\omega} + 2R \right) i_e + R i \\ \frac{1}{jC_1\omega} i = R i_e \end{cases}$$

Seule la solution en  $i_e$  nous intéresse et nous trouvons, après calculs :

$$\boxed{u_e = Z_e i_e \text{ avec } Z_e = 2R + \frac{1}{jC_2\omega} + jR^2 C_1 \omega}$$

1. (b) Dans le circuit  $R, L, C$  série représenté ci-dessous, nous avons  $u_e = \left( R_e + jL_e\omega + \frac{1}{jC_e\omega} \right) i_e$ .



En identifiant les coefficients du polynôme en  $j\omega$ , nous constatons que le circuit se comporte effectivement comme un circuit  $R, L, C$  série tel que :  $\boxed{R_e = 2R; C_e = C_2; L_e = R^2 C_1}$ .

2. (a) Par analogie  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_e C_e}}$ , soit  $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}}$ .

2. (b) Par analogie  $Q_0 = L_e \frac{\omega_0}{R_e}$ , soit  $\boxed{Q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}$ , ce qui donne  $\boxed{Q_0 = 5,0 \cdot 10^2}$ . Ce facteur de qualité est considérable. Rappelons qu'en TP avec des composants usuels, nous arrivions au maximum à  $Q \simeq 30$ .

### ✿ Exercice 6

*Aucune difficulté technique avec la première partie, c'est un circuit  $R, L, C$  classique.*

1. Avec une loi des mailles et la relation constitutive du condensateur (attention aux conventions choisies), nous trouvons :

$$\boxed{\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{u(t)}{LC}} \rightsquigarrow \boxed{\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 u(t)}$$

2. Avec la notation complexe, nous arrivons à

$$\frac{U_C}{U} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Nous pouvons ainsi en déduire en prenant le module

$$\boxed{\frac{U_C}{U} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}}}$$

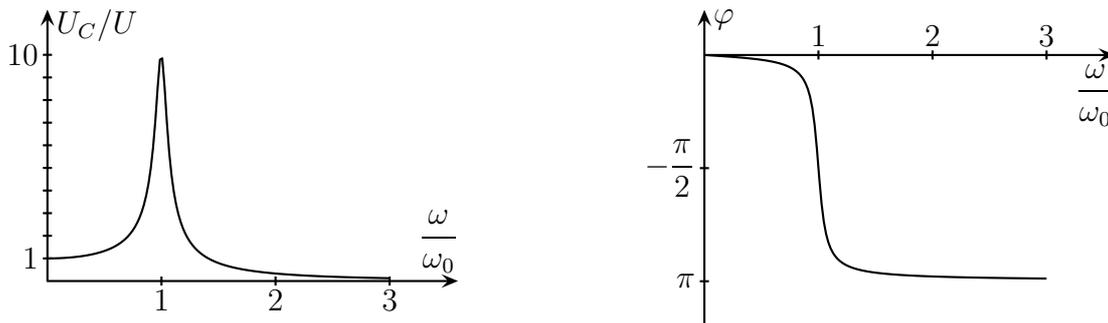
Pour  $\varphi$  utilisons la méthode suivante :

$$\begin{aligned}\varphi = \arg(\underline{U}_C) &= \arg\left(\frac{U}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}\right) = -\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}\right) \\ &= -\arg\left[j \left(\frac{\omega}{Q\omega_0} + j \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)\right)\right] = -\arg(j) - \arg\left(\frac{\omega}{Q\omega_0} + j \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)\right)\end{aligned}$$

Et ainsi  $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\frac{\omega}{Q\omega_0}}\right)$

☞ *Remarque.* rappelons qu'il vaut mieux éviter d'écrire l'argument d'un nombre complexe avec la fonction arctan lorsque la partie réelle du-dit nombre complexe est négative ou change de signe, ce qui est le cas ici. Il vaut mieux alors utiliser la méthode ci-dessus qui fonctionne très bien.

Voici les graphes dans le cas  $Q = 10$ .



Le facteur de qualité représente l'amortissement du circuit : à grand facteur de qualité correspond un faible amortissement et réciproquement. Ainsi avec un facteur de qualité faible  $Q < \frac{1}{2}$  le circuit réagira (en régime transitoire) avec une évolution apériodique, pour  $Q = \frac{1}{2}$  il aura (toujours en régime transitoire) une évolution critique et pour  $Q = \frac{1}{2}$ , l'évolution sera pseudo-périodique.

3. (a) Il est possible de mesurer une inductance (resp. une capacité) en utilisant un échelon de tension dans un circuit  $R, L$  (resp.  $R, C$ ). La mesure de la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$  (resp.  $\tau = RC$ ) ainsi que de la résistance  $R$  (avec un ohmmètre, tout simplement ou, sinon, avec un circuit longue ou courte dérivation, voir [ELCT1.2](#)).

Pour mesurer un facteur de qualité, tout dépend dans quel cas on est :

- pour un amortissement élevé,  $Q \ll 1$  (en pratique  $Q < 0,2$ ), il suffit d'envoyer un échelon de tension et de relèver la tension aux bornes du condensateur qui est, alors, de la forme  $e^{-Q\omega_0 t}$  (un des deux termes en exponentiel est très vite négligeable devant l'autre), *i.e.* c'est une évolution exponentielle de constante de temps  $\tau = \frac{1}{Q\omega_0}$  ;
- pour un amortissement faible,  $Q \gg 1$  (en pratique  $Q > 5$ ), deux méthodes :

- en envoyant un échelon de tension et en observant le régime pseudo périodique : la différence entre les maxima des oscillations et l'asymptote décroissent en  $e^{-\omega_0 t/(2Q)}$
- en faisant le relevé de l'amplitude  $U_C$  de la tension aux bornes du condensateur en fonction de la fréquence : la bande passante  $\Delta\omega$  est telle que  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ .

3. (b) Avec les mesures nous obtenons  $Q' = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 10$ .

Pour vérifier la compatibilité avec les mesures, calculons l'incertitude sur  $Q' = R^{-1} L^{1/2} C^{-1/2}$  :

$$\frac{\Delta Q'}{Q'} = \sqrt{\left(-\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C}\right)^2}$$

Avec  $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta C}{C} = 0,05$ , nous trouvons  $\frac{\Delta Q'}{Q'} = 6,12372\%$  soit  $Q' = 10 \pm 0,7$ .

En rappelant que  $9,3 \leq Q' \leq 10,7$  est un intervalle de confiance (*i.e.* dans lequel on a une chance de trouver  $Q'$ ) et pas un intervalle de certitude, nous pouvons dire que les mesures sont incompatibles car éloignées l'une de l'autre de plus de 4 fois l'incertitude.

☞ *Remarque.* à partir d'un écart entre deux mesures de 3 fois l'incertitude, cela commence à devenir très douteux.

La résistance interne au GBF n'a pas été prise en compte. Or celle-ci vaut généralement  $R_g = 50 \Omega$  ce qui n'est pas négligeable devant  $R$ .

En refaisant les calculs, nous obtenons  $Q'' = \frac{1}{R + R_g} \sqrt{\frac{L}{C}} = 6,66667 \pm 0,7$ , valeur cette fois compatible avec  $Q = 7 \pm 0,5$ .

3. (c) → Pour  $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$  : nous avons  $\varphi = 0$  soit :

$$u_C(t) = U_C \sqrt{2} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t)$$

Le mode XY permet de représenter la courbe paramétrée  $(u(t), u_C(t))$  qui, ici, est une portion rectiligne de pente positive dont les extensions horizontale et verticale dépendent des échelles utilisées.

À  $U$  fixé,  $u_C \rightarrow U$  pour  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$ .

→ Pour  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  : on a  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  soit :

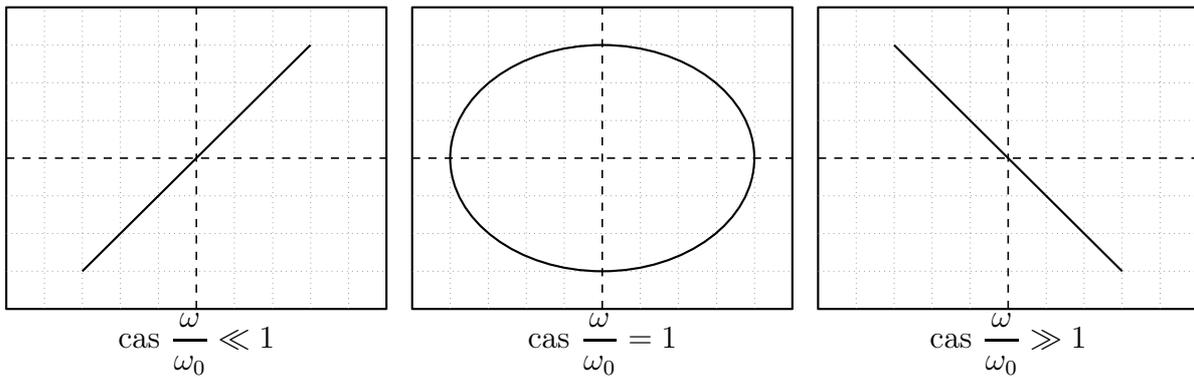
$$u_C(t) = U_C \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -U_C \sqrt{2} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t)$$

Le mode XY permet de représenter la courbe paramétrée  $(u(t), u_C(t))$  qui, ici, est une ellipse de demi-grand axe horizontal  $U \sqrt{2}$  et de demi grand-axe vertical  $U_C \sqrt{2} = Q U \sqrt{2}$  car on est à la pulsation propre.

→ Pour  $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$  : nous avons  $\varphi = -\pi$  soit  $u_C(t) = U_C \sqrt{2} \cos(\omega t - \pi) = -U_C \sqrt{2} \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t)$ .

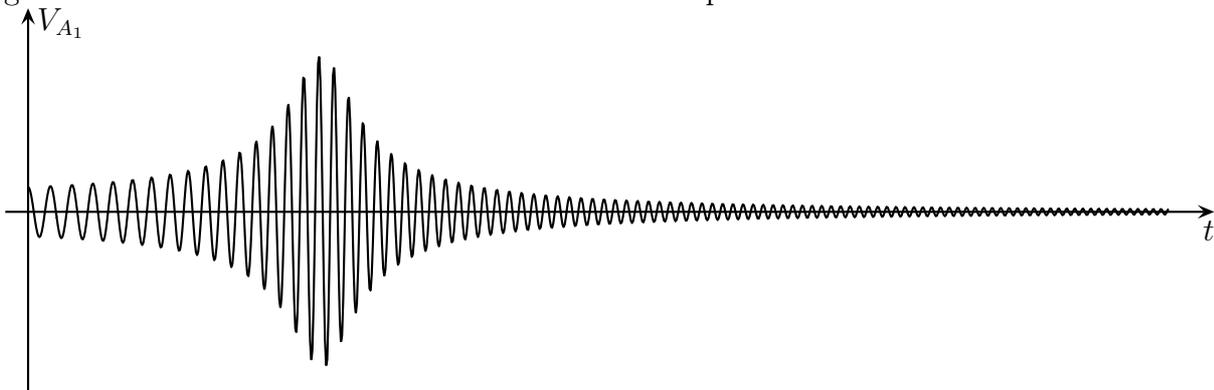
Le mode XY permet de représenter la courbe paramétrée  $(u(t), u_C(t))$  qui, ici, est une portion rectiligne de pente négative dont les extensions horizontale et verticale dépendent des échelles utilisées et de la fréquence.

À  $U$  fixé,  $u_C \rightarrow 0$  pour  $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ .

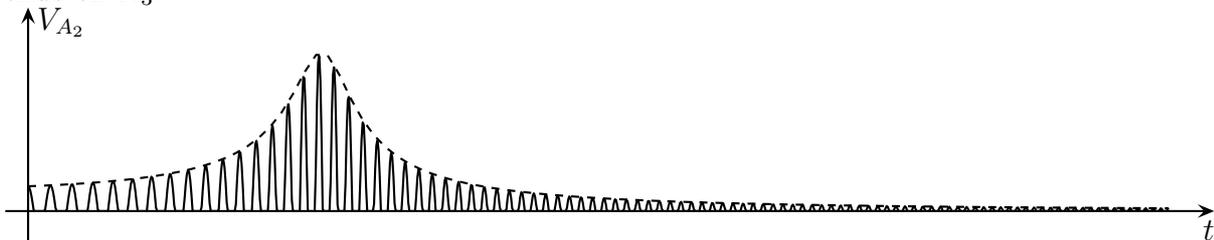


4. (a) Les deux AO ont été montés en montage suiveur. Cela permet de « transmettre » la tension de l'entrée vers la sortie sans que la sortie n'influence l'entrée en prenant du courant.

4. (b) Voir ci dessous. Dans la représentation pour le point  $A_1$  la période des oscillations a été exagérée afin de mieux visualiser la modulation de fréquence.



Entre  $A_1$  et  $A_2$  il y a un montage suiveur et un montage redresseur simple alternance. Nous obtenons donc le tracé suivant sur lequel nous avons représenté en pointillé la courbe de résonance obtenue en  $A_3$ .



4. (c) Pour que la tension fournisse la courbe de résonance en  $A_3$ , il faut que la constante de temps du circuit détecteur  $\tau_3 = R_3 C_3$  soit grande devant les petites oscillations et faible devant la durée caractéristique de variation d'amplitude du signal.

Quand la fréquence est la plus faible, la période des oscillation est d'environ 1 kHz ce qui implique  $\tau_3 \gg 1$  ms et la variation de l'amplitude se fait avec une durée caractéristique de 0,1 s ce qui implique  $\tau_3 \ll 0,1$  s.

Finalement la marge est faible et il reste  $\tau_3 \simeq 10$  ms ce qui donne  $C_3 = 1 \mu\text{F}$ .

Si  $C_3$  (donc  $\tau_3$ ) était trop faible, le signal de sortie aurait un effet « dents de scie » et nous verrions des petites ondulations pointue autour de la courbe attendue.

Si  $C_3$  (donc  $\tau_3$ ) était trop grand, le signal de sortie ne diminuerait pas assez vite pour voir la courbe de résonance en pointillé sur le graphique ci-dessus.

## ✿ Exercice 7

1. (a) Analyse physique. Il s'agit d'un montage à AO qui fonctionne en régime non linéaire puisqu'il n'y a pas de rétroaction sur l'entrée inverseuse. Les grandeurs caractéristiques vont être  $R_1$  et  $R_2$ .

*Analyse technique. Approche nodale, sans hésiter. Et comme il s'agit d'un montage non linéaire, il faut procéder par « hypothèse – vérification ».*

► **Supposons que**  $u_s(t) = +U_{\text{sat}}$ .

Cette relation est vérifiée tant que  $\varepsilon > 0$ . Cherchons ce que cela implique pour  $u_e(t)$ .

Or, comme  $R_1$  et  $R_2$  sont en série (puisqu'aucun courant ne rentre par l'entrée non inverseuse de l'AO étant donné qu'il est idéal) nous pouvons utiliser un diviseur de tension et nous aurons

$$V_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = k U_{\text{sat}}, \text{ relation toujours vraie à tout instant.}$$

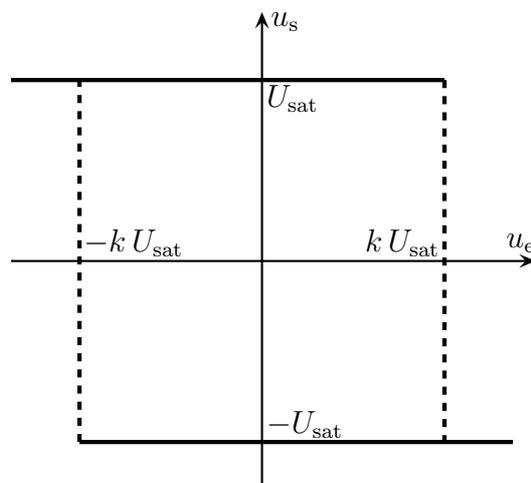
De plus  $V_- = u_e(t)$ .

La condition se réécrit donc :  $u_s = +U_{\text{sat}}$  pour  $u_e < k U_{\text{sat}}$ .

► **Supposons que**  $u_s(t) = -U_{\text{sat}}$ . Avec un raisonnement identique, nous trouvons :

$$u_s = -U_{\text{sat}} \text{ pour } u_e > -k U_{\text{sat}}$$

► **La caractéristique.** Voir ci-dessous.



Les morceaux en pointillés ne font pas vraiment partie de la caractéristique étant donné qu'on ne peut jamais avoir une valeur de  $u_s(t)$  différente de  $\pm U_{\text{sat}}$ .

1. (b) Il s'agit d'un **comparateur à hystérésis**.

*C'est un montage classique à savoir étudier très rapidement voire à connaître par cœur.*

1. (c) *Analyse physique. C'est un montage avec un AO réel et un condensateur donc d'ordre 2. Nous ne pouvons dire si le montage fonctionne en régime linéaire ou non étant donné qu'il y a une rétroaction sur chaque entrée. Les grandeurs caractéristiques vont être  $C$ ,  $R$ ,  $\mu_0$ ,  $\omega_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .*

*Analyse technique. Avec un AO et pour trouver une équation différentielle vérifiée par une tension : approche nodale en complexe. Il y a trois potentiels inconnus, il faudra donc trois lois : deux lois des nœuds en terme de potentiels et une loi constitutive de l'AO.*

La loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée non inverseuse conduit à  $\underline{V}_+ = k \underline{U}_s$  (c'est un diviseur de tension puisque  $R_1$  et  $R_2$  sont en série).

De même à l'entrée inverseuse :  $\underline{V}_- = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_s$ .

Exploitions maintenant la loi de fonctionnement de l'AO :

$$\underline{U}_s = \underline{\mu} (\underline{V}_+ - \underline{V}_-) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{\mu_0} \underline{U}_s = \left( k - \frac{1}{1 + jRC\omega} \right) \underline{U}_s$$

En multipliant tout par  $(1 + jRC\omega)$   $\left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  et en regroupant :

$$\left( 1 - k + \frac{1}{\mu_0} + j\omega \left( \frac{RC}{\mu_0} - kRC + \frac{1}{\mu_0\omega_0} \right) + (j\omega)^2 \frac{RC}{\mu_0\omega_0} \right) \underline{U}_s = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre dont les trois coefficients sont :

$$1 - k + \frac{1}{\mu_0} > 0 ; \quad \frac{RC}{\mu_0} - kRC + \frac{1}{\mu_0\omega_0} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{RC}{\mu_0\omega_0} > 0$$

Les trois coefficients n'étant pas tous de même signe,  $\underline{U}_s$  va diverger : l'AO va fonctionner en régime de saturation.

☞ *Remarque.* pour que tel soit bien le cas, il est nécessaire d'assurer  $-kRC + \frac{1}{\mu_0\omega_0} < 0$ , i.e. de faire en sorte que la partie en circuit  $RC$  réagissent « plus lentement » que l'AO.

1. (d) Ici, il s'agit de trouver le lien entre  $u_e(t)$  et  $u_s(t)$  dont on sait qu'elle sera égale  $\pm U_{\text{sat}}$ . Dis comme cela, il suffit d'utiliser un pont diviseur entre le condensateur et  $R$ .

Nous obtenons :

$$\underline{V}_- = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_s \rightsquigarrow (1 + jRC\omega) \underline{V}_- = \underline{U}_s \rightsquigarrow \boxed{\tau \frac{du_e(t)}{dt} + u_e(t) = u_s(t)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = RC}$$

1. (e) L'équation différentielle s'écrivant  $\tau \frac{du_e(t)}{dt} + u_e(t) = +U_{\text{sat}}$ , la solution est du type  $u_e = \lambda e^{-t/\tau} + C^{\text{te}}$  (la solution particulière est constante car le second membre est constant).

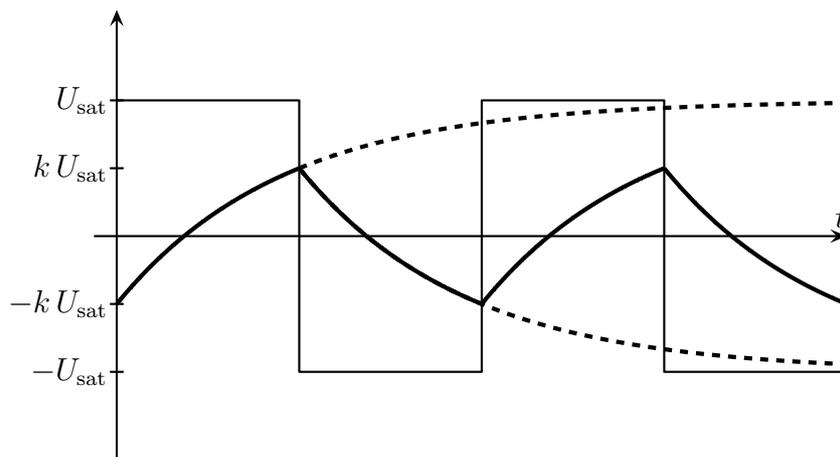
En tenant compte des conditions initiales, nous obtenons :  $\boxed{u_e(t) = U_{\text{sat}} (1 - e^{-t/\tau})}$ .

Ce régime dure tant que  $u_e < kU_{\text{sat}}$  ce qui donne l'équation  $U_{\text{sat}} (1 - e^{-t/\tau}) < kU_{\text{sat}}$  de solution

$$\boxed{t < -\tau \ln(1 - k)}$$

Le signe  $-$  n'est pas étonnant étant donné que  $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$  soit  $0 < 1 - k < 1$  et  $\ln(1 - k) < 0$ .

1. (f) Au bout d'un certain temps un régime permanent s'établit, périodique, où la tension  $u_e(t)$  varie exponentiellement avec la constante de temps  $\tau$  entre les valeurs extrêmes  $\pm kU_{\text{sat}}$  faisant basculer la sortie de l'AO entre  $\pm U_{\text{sat}}$ .



1. (g) D'après ce qui précède la période vaut deux fois la durée pour passer de  $-kU_{\text{sat}}$  à  $+kU_{\text{sat}}$ .

Pour cette première demi-période, la solution de  $u_e(t)$  vaut, comme en 1. (d),  $u_e(t) = \mu e^{-t/\tau} + U_{\text{sat}}$  mais ici la condition initiale est  $u_e(0) = -kU_{\text{sat}}$  ce qui donne :  $u_e(t) = -U_{\text{sat}}(k + 1)e^{-t/\tau} + U_{\text{sat}}$ .

Ce régime dure jusqu'à l'instant  $t_0$  tel que  $u_e(t_0) = k U_{\text{sat}}$  soit  $+U_{\text{sat}}(k-1)e^{-t_0/\tau} + U_{\text{sat}} = k U_{\text{sat}}$  de solution  $t_0 = \tau \ln \frac{k+1}{1-k}$  et ainsi la période vaut  $T = 2\tau \ln \frac{k+1}{1-k}$

2. (a) Il s'agit d'un **intégrateur**.

2. (b) Relation usuelle de l'intégrateur :  $u_s(t) = -RC \frac{dv(t)}{dt}$ .

2. (c) Ici, vu la question, il semble difficile de ne pas utiliser la loi des nœuds en terme de potentiels.

Utilisons la loi des nœuds en terme de potentiels en remarquant qu'il n'y a que deux branches dans lesquelles circulent des courant, celles où il y a  $R_1$  et celle où il y a  $R_2$  :

$$\frac{u_s(t) - u_e(t)}{R_1} + \frac{v_e - u_e}{R_2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_e = \frac{R_2 U_s(t) + R_1 v(t)}{R_1 + R_2}$$

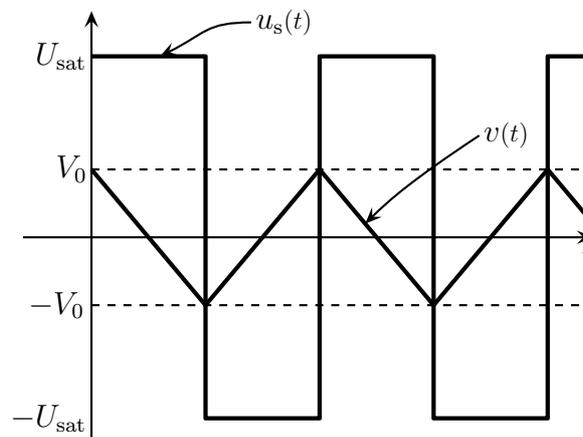
2. (d) L'AO est en saturation haute ( $+U_{\text{sat}}$ ) tant que  $\varepsilon = V_+ - V_- = u_e(t) - 0 > 0$ . Avec la relation précédente, cela donne  $u_e > -\frac{R_2}{R_1} U_{\text{sat}}$ , i.e.

$$\text{l'AO bascule de } +U_{\text{sat}} \text{ à } -U_{\text{sat}} \text{ lorsque } v(t) \text{ atteint } -V_0 = -\frac{R_2}{R_1} U_{\text{sat}}$$

De même : l'AO bascule de  $-U_{\text{sat}}$  à  $+U_{\text{sat}}$  lorsque  $v(t)$  atteint  $V_0 = \frac{R_2}{R_1} U_{\text{sat}}$ .

2. (e) Étant donné que  $v(t)$  est une tension de sortie d'un AO, elle est forcément telle que  $|v(t)| < u_{\text{sat}}$ . Pour que  $v(t)$  puisse atteindre  $V_0$  il est donc nécessaire d'avoir  $V_0 < U_{\text{sat}}$ , i.e. d'avoir  $R_2 < R_1$ .

2. (f) Voir ci-dessous.



2. (g) D'après l'équation vérifiée par  $v(t)$  trouvée en 2. (b), nous avons  $v(t) = \pm \frac{U_{\text{sat}}}{RC} t + C^{\text{te}}$ . La pente de  $v(t)$  vaut donc  $\pm \frac{U_{\text{sat}}}{RC}$ .

Ainsi la durée d'une demi-période est telle que « pente =  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  », ce qui donne  $-\frac{U_{\text{sat}}}{RC} = \frac{-2V_0}{\frac{T}{2}}$  et

ainsi, avec l'expression de  $V_0$ ,  $T = 4 \frac{R_2}{R_1} RC$ .

2. (h) Ce montage permet d'avoir deux « belles » tensions : une triangulaire en  $v(t)$  et une rectangulaire en  $u_s(t)$  alors que le montage précédent ne permettait d'avoir qu'une tension rectangulaire.

2. (i) Tout d'abord la tension doit être d'amplitude  $V_0 = 6,0 \text{ V}$ , ce qui implique  $R_1 = 2 R_2$ .

Nous pouvons alors prendre, par exemple  $R_1 = 2 R_2 = 2,0 \text{ k}\Omega$ .

À partir de la relation précédente, nous trouvons  $T = 2,0 RC$  et comme nous cherchons  $10 \text{ ms} > T > 0,10 \text{ ms}$ , cela implique  $10 \text{ k}\Omega < R < 1,0 \text{ M}\Omega$ .

☞ *Remarque.* dans l'expression  $T = 2,0 RC$  le 2,0 représente une AN dont il faut respecter le nombre de chiffres significatifs. Comme il s'agit d'une valeur sans dimension, cela ne pose pas de difficultés particulière pour les calculs.

## ✿ Exercice 8

1. *Analyse physique.* Il s'agit ici d'un circuit à AO qui fonctionne en régime linéaire (normal puisqu'il n'y a qu'une seule rétroaction sur l'entrée inverseuse). Les grandeurs pertinentes sont  $R$ ,  $C$  et  $\omega$  puisqu'il s'agit là d'un filtre.

*Analyse technique.* Un AO, une fonction de transfert, ce sera une approche nodale. Il y a trois potentiels inconnus donc il faudra trois lois : deux lois des nœuds en terme de potentiels et la loi de fonctionnement de l'AO.

Utilisons la loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse de l'AO :

$$\frac{V_e - V_-}{2R} + \frac{V_s - V_-}{2R} + 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_-} = \frac{V_s + V_e}{2}$$

Et la loi des nœuds en terme de potentiels à l'entrée non inverseuse :

$$\frac{V_e - V_+}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - V_+}{R} + 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_+} = \frac{jRC\omega V_e}{1 + jRC\omega}$$

Comme  $V_+ = V_-$  (AO idéal en régime linéaire), cela donne :

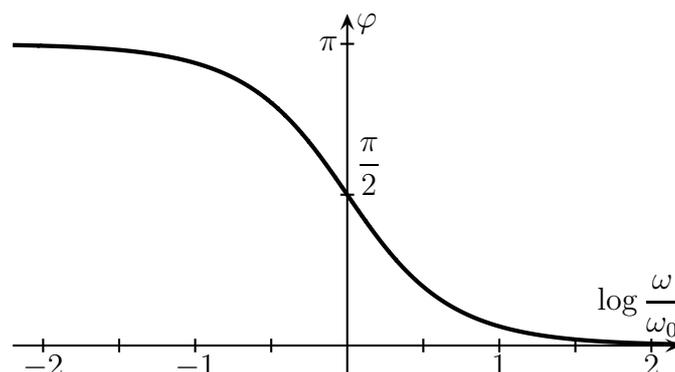
$$\underline{V_s} + \underline{V_e} = \frac{2jRC\omega}{1 + jRC\omega} \times \underline{V_e} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V_s} = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \times \underline{V_e} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{T(j\omega)} = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

2. Nous avons  $|\underline{T(j\omega)}| = \left| \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right|$  d'où nous tirons immédiatement :  $|\underline{T(j\omega)}| = 1$ .

De plus :

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg \underline{T(j\omega)} = \pm\pi + \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) \\ &= \pm\pi + 2 \arg(1 - jRC\omega) = \pm\pi - 2 \arctan(RC\omega) \end{aligned}$$

Pour avoir  $\varphi(\omega)$  compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ , il faut :  $\varphi(\omega) = \pi - 2 \arctan(RC\omega)$ .



3. La fonction de transfert de ce montage ayant un module constant, ce filtre n'a pour rôle que d'introduire un déphasage entre la tension d'entrée et la tension de sortie, c'est bien un **déphaseur**.

### ✿ Exercice 9

*Analyse physique.* Il s'agit d'un circuit à AO fonctionnement en RSF. L'AO fonctionne en régime linéaire grâce à la rétroaction sur son entrée inverseuse. Les grandeurs pertinentes sont  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\mu_0$  et  $\omega_0$ .

*Analyse technique.* Un AO, une fonction de transfert, une approche nodale. Il y a deux potentiels inconnus donc nous aurons deux lois à écrire.

#### ► Fonction de transfert

Comme  $R_1$  et  $R_2$  sont en série, nous pouvons utiliser la formule du diviseur de tension et ainsi  $V_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s = \beta V_s$ .

De plus, par définition de  $\underline{\mu} : \underline{U}_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} = \underline{\mu}(j\omega) (\underline{U}_e - \beta \underline{V}_s)$ .

Nous arrivons alors à  $\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \beta \underline{\mu}}$  ce qui donne, en utilisant l'expression de  $\underline{\mu}(j\omega)$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \beta \mu_0}}{1 + j \frac{x}{1 + \beta \mu_0}} \quad \text{où} \quad x \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$$

Il s'agit de la forme canonique d'un filtre **passé-bas** :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jx}$  avec  $H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \beta \mu_0}$ . En suivant la même démarche que dans cours, nous pouvons trouver que la pulsation de coupure est  $\omega_c = \omega_0 (1 + \beta \mu_0)$ .

#### ☕ Remarques.

→ Nous retrouvons bien la relation d'un amplificateur non inverseur pour un AO idéal lorsque l'on fait  $\mu_0 \rightarrow \infty$  et  $\omega_0 \rightarrow \infty$  car alors  $\underline{H}(j\omega) \rightarrow \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ .

→ Nous constatons de plus que le produit « gain – bande passante » est constant, *i.e.* indépendant des valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  :  $H_0 \omega_c = \omega_0 \mu_0$ .

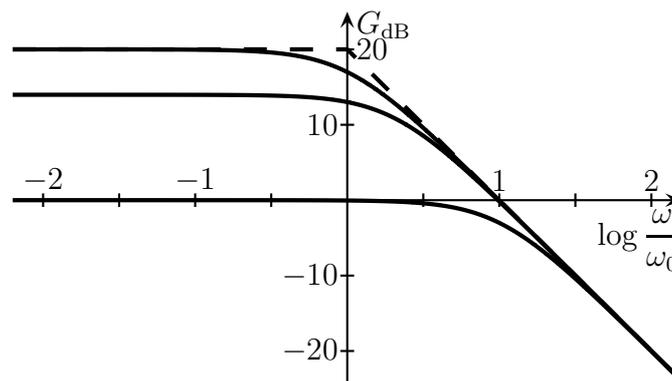
#### ► Diagrammes de Bode

→ *Asymptotes en  $\omega \rightarrow 0$ .* Lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\underline{H} \sim H_0$ . Ainsi  $G \sim H_0 \sim 20 \log \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$ .

→ *Asymptotes en  $\omega \rightarrow \infty$ .* Lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\underline{H} \sim \frac{\mu_0}{jx}$ . Ainsi  $G \sim 20 \log \mu_0 - 20 \log x$ .

Nous constatons que l'asymptote en hautes fréquences, contrairement à celle en basses fréquences, est identique pour toutes les valeurs d'amplification.

→ *Tracés.* Les diagrammes ci-dessous diffèrent par la valeur du coefficient d'amplification  $\beta$  (1, 5 et 10).



### ✿ Exercice 10

*Analyse physique.* Le circuit est étudié à la fois en régime transitoire et en régime sinusoïdal forcé, nous utiliserons donc la notation complexe. Il s'agit d'un AO en régime linéaire comme le laisse supposer l'unique rétroaction sur l'entrée inverseuse. Les grandeurs pertinentes vont être  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\mu_0$  et  $\omega_0$ .

*Analyse technique.* Comme nous cherchons des expressions de tensions ou des équations différentielles de tension, le tout avec un AO, nous allons utiliser l'approche nodale.

1. Nous reconnaissons un diviseur de tension entre l'entrée inverseuse et la sortie :

$$\underline{V_-} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \times \underline{U_s} = \frac{\underline{U_s}}{A_0}$$

De plus le fonctionnement de l'AO est tel que :  $\underline{U_s} = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} (\underline{V_+} - \underline{V_-}) = \underline{\mu} \left( \underline{V_e} - \frac{\underline{U_s}}{A_0} \right)$ .

Nous avons donc  $\left( \frac{1}{\underline{\mu}} + \frac{1}{A_0} \right) \underline{U_s} = \underline{U_e}$  soit, en remplaçant  $\underline{\mu}$  :

$$\left( \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{A_0} \right) u_s(t) + \frac{1}{\mu_0 \omega_0} \frac{du_s(t)}{dt} = u_e(t)$$

2. Avec  $\varepsilon(t)$ .

#### ► Fonction de transfert

Nous avons, par définition :  $\underline{\varepsilon} = \underline{V_+} - \underline{V_-} = \underline{U_e} - \frac{\underline{U_s}}{A_0} = \underline{U_e} - \frac{\underline{\mu} \underline{\varepsilon}}{A_0}$  et ainsi :  $\underline{H_E} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{\mu}}{A_0}}$ .

Cela donne, en remplaçant  $\underline{\mu}$  par son expression et en réarrangeant :  $\underline{H_E} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\mu_0}{A_0} + 1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ .

#### ► Équation différentielle associée

En effectuant le produit en croix de la fonction de transfert et en associant  $\frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times(j\omega)$ , nous

arrivons à  $\left( \frac{\mu_0}{A_0} + 1 \right) \varepsilon(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = u_e(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt}$ .

3. Fonctions du temps.

#### ► Expression de $\varepsilon(t)$

Comme  $\underline{\varepsilon} \left( \kappa + j \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \underline{u_e} \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  où  $\kappa \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\mu_0}{A_0} + 1$  l'équation différentielle reliant  $\varepsilon(t)$  et  $u_e(t)$  s'écrit :  $\kappa \varepsilon(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = u_e(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt}$ .

Ici on considère un échelon de tension, donc  $\frac{du_e}{dt} = 0$  et ainsi, en simplifiant l'équation différentielle nous obtenons la solution (faire attention à la condition initiale) :

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \omega_0 \kappa \varepsilon(t) = \omega_0 E \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon(t) = \frac{E}{\kappa} \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right] \quad \text{avec : } \tau = \frac{1}{\kappa \omega_0}$$

En considérant que le régime permanent est atteint en  $5\tau$ , cela signifie qu'ici le régime permanent est atteint au bout de la durée  $T = 7,96 \cdot 10^{-7}$  s. Aux échelles de temps considérées, nous pouvons dire que le régime permanent est atteint instantanément.

#### ► Expression de $u_s(t)$

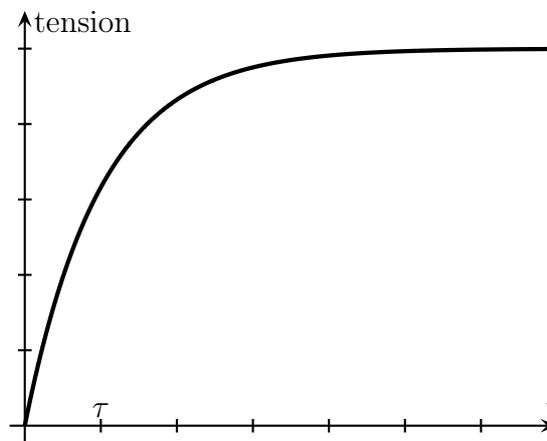
STOP Pour ce faire, nous disposons de deux équations différentielles, une reliant  $u_s(t)$  à  $u_e(t)$  (cf. question 1) et l'autre reliant  $u_s(t)$  à  $\varepsilon(t)$  (la définition de  $\mu$ ). L'une et l'autre sont, *a priori*, équivalentes. Mais l'expression de  $\varepsilon(t)$  trouvée provient d'une équation différentielle qui a été simplifiée à cause de la forme particulière de  $u_e(t)$ . L'équation reliant  $u_s(t)$  à  $u_e(t)$  n'a fait l'objet, elle, d'aucune simplification à quelque moment que ce soit. C'est donc cette dernière qu'il faut préférer.

Nous avons ainsi  $\frac{du_s(t)}{dt} + \omega_0 \kappa u_s(t) = \mu_0 \omega_0 E$  qui a pour solution (en respectant les conditions initiales) :

$$u_s(t) = \frac{\mu_0 E}{\kappa} \left[ 1 - e^{-t/\tau} \right] \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\kappa \omega_0}$$

Comme la constante de temps est identique à celle de la tension  $\varepsilon(t)$ , la conclusion est identique : nous pouvons dire que le régime permanent de  $u_s(t)$  est atteint instantanément.

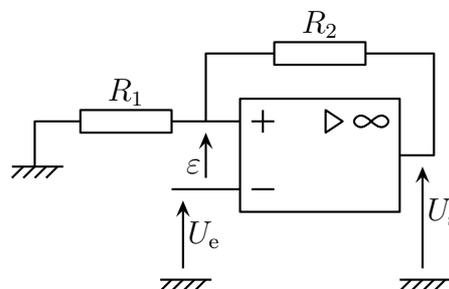
En unités arbitraires, les tracés de  $\varepsilon(t)$  et de  $u_s(t)$  ont la même allure représentée ci-dessous.



4. Les conditions initiales choisies ne sont pas cohérentes : si  $\varepsilon(0) = 0$  alors le courant  $i(0)$  circulant dans la résistance  $R_1$  de la masse vers l'entrée inverseuse vaut  $i(0) = E/R_1$  et comme  $i_- = 0$  (AO idéal) nous arrivons tout de suite à  $u_s(0) = A_0 u_e(0) \neq 0$ .

Cela n'a guère d'importance en pratique car même si les conditions initiales ne sont pas celles utilisées, comme nous avons vu que la constante de temps faisait que le régime était atteint « instantanément » par rapport aux échelles de temps, nous pouvons parfaitement négliger cet écart entre la tension « vraie » avec les bonnes conditions initiales et le résultat précédent dont nous savons qu'il n'est pas forcément juste.

5. L'AO est maintenant branché comme sur le schéma ci-dessous.



► Nouvelle expression de  $u_s(t)$

→ Fonction de transfert. Nous avons toujours

$$\underline{U}_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} (\underline{V}_+ - \underline{V}_-) = \underline{\mu} \left( \frac{1}{A_0} \underline{U}_s - \underline{U}_e \right) \rightsquigarrow \left( -1 - j \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\mu_0}{A_0} \right) \underline{U}_s = \mu_0 \underline{U}_e$$

Ainsi  $\boxed{H'(j\omega) = \frac{\mu_0}{\kappa' - j \frac{\omega}{\omega_0}}}$  avec  $\boxed{\kappa' = \frac{\mu_0}{A_0} - 1}$ .

→ *Équation différentielle.* Nous avons  $\kappa' u_s(t) - \frac{1}{\omega_0} \frac{du_s(t)}{dt} = \mu_0 u_e(t)$ , et en associant  $\frac{d}{dt} \leftrightarrow \times(j\omega)$  nous

obtenons :  $\boxed{\frac{du_s(t)}{dt} - \omega_0 \kappa' u_s(t) = -\omega_0 \mu_0 u_e(t)}$  (.....).

► **Nouvelle expression de  $\varepsilon(t)$**

→ *Fonction de transfert.* Nous avons toujours :

$$\underline{\varepsilon} = (\underline{V}_+ - \underline{V}_-) = \left( \frac{U_s}{A_0} - \underline{U}_e \right) = \left( \frac{\underline{\mu} \underline{\varepsilon}}{A_0} - \underline{U}_e \right) \rightsquigarrow \underline{H}'_E = \frac{1}{\underline{\mu}/A_0 - 1}$$

Et en remplaçant  $\underline{\mu}$  par son expression, nous arrivons à  $\boxed{H'_E(j\omega) = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}{\kappa' - j \frac{\omega}{\omega_0}}}$ .

→ *Équation différentielle.* En associant  $\frac{d}{dt} \leftrightarrow \times(j\omega)$  nous arrivons à :

$$\kappa' \varepsilon(t) - \frac{1}{\omega_0} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = u_e(t) + \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt} \rightsquigarrow \boxed{\frac{d\varepsilon(t)}{dt} - \omega_0 \kappa' \varepsilon(t) = -\omega_0 u_e(t) - \frac{du_e(t)}{dt}}$$

► **Système instable ?**

La solution de l'équation différentielle (.....) est, en choisissant  $u_s(t) = 0$  :

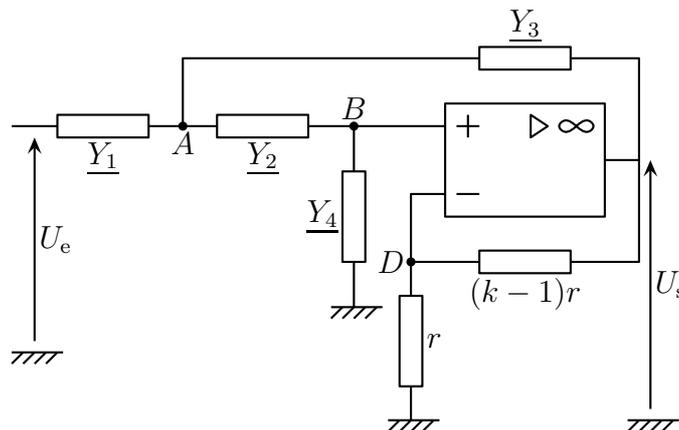
$$u_s(t) = \frac{\mu_0}{\kappa'} E \left[ 1 - \exp\left(+\frac{t}{\tau'}\right) \right] \quad \text{avec} \quad \tau' = \frac{1}{\omega_0 \kappa'}$$

Nous constatons que, dans ces conditions,  $u_s(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .  $u_s(t)$  atteindra donc la valeur limite  $V_{sat}$  et l'AO fonctionnera en régime de saturation, le système est bien instable et ne peut donc pas fonctionner en régime linéaire bien longtemps.

✿ **Exercice 11**

**1.** *Analyse physique.* C'est un filtre donc le circuit va s'étudier en RSF. Comme la fonction de transfert est donnée, nul besoin de savoir a priori de quelle grandeur elle va dépendre.

*Analyse technique.* C'est un AO et nous cherchons une amplification en tension, l'approche nodale va alors de soi. Nous pouvons compter 4 potentiels inconnus en A, B, D et en sortie de l'AO. Cela signifie 4 lois dont 3 lois des nœuds en terme de potentiels et une loi de fonctionnement de l'AO.



La loi des nœuds en terme de potentiel s'écrit, en  $A$  :

$$\underline{Y}_1 (\underline{U}_e - \underline{V}_A) + \underline{Y}_3 (\underline{U}_2 - \underline{V}_A) + \underline{Y}_2 (\underline{V}_B - \underline{V}_A) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{Y}_1 \underline{U}_e + \underline{Y}_3 \underline{U}_s + \underline{Y}_2 \underline{V}_B = \underline{V}_A (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)$$

Cette même loi écrite au point  $B$  donne :

$$\underline{Y}_2 (\underline{V}_A - \underline{V}_B) + \underline{Y}_4 (0 - \underline{V}_B) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{Y}_2 \underline{V}_A = (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_4) \underline{V}_B$$

Ainsi en éliminant  $\underline{V}_A$  dans la première expression :

$$\underline{Y}_2 \underline{Y}_1 \underline{U}_e + \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 \underline{U}_s + \underline{Y}_2 \underline{Y}_2 \underline{V}_B = (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_4) (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) \underline{V}_B$$

Comme l'AO est idéal et en régime linéaire nous avons  $\underline{V}_B = \underline{V}_D$ .

Enfin, nous reconnaissons un diviseur de tension entre  $r$  et  $(k-1)r$ , ce qui donne  $\underline{V}_D = \frac{U_s}{k}$ .

Finalement, en remplaçant dans l'expression précédente et après une ou deux manipulations algébriques, nous arrivons bien au résultat proposé.

**2. (a)** Comme  $\underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i}$ , la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{k \frac{1}{R^2}}{\frac{1}{R^2} + (1-k) \frac{jC\omega}{R} + jC\omega \left( \frac{2}{R} + jC\omega \right)} \rightsquigarrow \boxed{\underline{H}_1(j\omega) = \frac{k}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + j(3-k)\omega RC}}$$

Il s'agit d'un filtre **passé-bas** car  $|\underline{H}_1(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} k \neq 0$  et  $|\underline{H}_1(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$ .

Nous pouvons alors identifier avec la forme canonique vue en cours  $\underline{H}_1 = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_p}}$ .

Nous trouvons  $H_0 = k$ ,  $\omega_p = \frac{1}{RC} = 6,25000 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $Q = \frac{1}{3-k} = 0,694444$ .

En reprenant les résultats du cours, que normalement il faudrait redémontrer, nous voyons qu'il n'y a pas de phénomène de résonance puisque  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Numériquement, nous trouvons, pour la pulsation de coupure  $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_p} = 0,981772$  ce qui donne  $\omega_c = 6,13608 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  et

$$\boxed{f_c = 9,76587 \times 10^2 \text{ Hz}}.$$

**2. (b)** La fonction de transfert s'écrit  $\underline{H}(j\omega) = \frac{k}{1 + (3-k)RCj\omega + R^2C^2j\omega^2}$ . Le polynôme en  $(j\omega)$  du dénominateur a tous ses coefficients de même signe (en l'occurrence positif) pourvu que  $3-k > 0$ . Le filtre n'est donc stable que pour  $\boxed{1 < k < 3}$ , la condition  $1 < k$  assurant simplement que la résistance de rétroaction a une valeur positive.

**3. ► Fonction de transfert.** En remplaçant par les admittances proposées, nous obtenons :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{k(jC\omega)^2}{(jC\omega)^2 + (1-k) \frac{jC\omega}{R} + \frac{1}{R} \left( 2jC\omega + \frac{1}{R} \right)}$$

Puis, après manipulations :  $\boxed{\underline{H}_2(j\omega) = -\frac{kR^2C^2\omega^2}{1 - R^2C^2\omega^2 + j(3-k)RC\omega}}$ .

Il s'agit d'un filtre **passé-haut** car  $|H_2(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$  et  $|H_2(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} k \neq 0$ .

Nous pouvons alors identifier avec la forme canonique vue en cours  $\underline{H}_1(j\omega) = -\frac{H_0 \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_p}}$

et nous trouvons  $H_0 = k$ ,  $\omega_p = \frac{1}{RC} = 6,25000 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $Q = \frac{1}{3-k} = 0,694444$ .

Les résultats du cours, que normalement il faudrait redémontrer, nous indiquent qu'il n'y a pas de phénomène de résonance puisque  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Numériquement, nous trouvons, pour la pulsation de coupure  $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_p} = 1,01857$  ce qui donne  $\omega_c = 6,36604 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $f_c = 1,01319 \text{ kHz}$ .

► **Stabilité.** Ici aussi le polynôme en  $(j\omega)$  du dénominateur de  $\underline{H}_2(j\omega)$  a tous ses coefficients de même signe (positifs) pourvu que  $3 - k > 0$ . La conclusion est donc identique à celle obtenue pour le filtre précédent, à savoir que le filtre n'est stable que pour  $1 < k < 3$ .

4. ► **Fonction de transfert.** En remplaçant par les admittances proposées, nous obtenons

$$\underline{H}_3(j\omega) = \frac{k \frac{1}{R} j C \omega}{\frac{1}{R} j C \omega + (1-k) \frac{j C \omega}{R} + \left( j C \omega + \frac{1}{R} \right) \left( \frac{2}{R} + j C \omega \right)}$$

Soit, après manipulations :  $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{k j R C \omega}{2 + (5-k) j R C \omega - R^2 C^2 \omega^2}$ .

Il s'agit d'un filtre **passé-bande** car  $|\underline{H}_3(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$  et  $|\underline{H}_3(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$ .

Pour identifier avec la forme canonique vue en cours  $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j Q \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)}$ , réécrivons

d'abord la fonction de transfert sous la forme  $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{k}{5-k} \times \frac{1}{1 + \frac{j R C \omega}{5-k} + \frac{2}{(5-k) j R C \omega}}$ .

Nous trouvons  $H_0 = \frac{k}{5-k}$ ,  $\frac{RC}{5-k} = \frac{Q}{\omega_p}$  et  $\frac{2}{(5-k)RC} = Q \omega_p$ , ce qui donne une pulsation centrale  $\omega_{\text{cent}} = \omega_p = \frac{\sqrt{2}}{RC} = 8,83883 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ , soit  $f_{\text{cent}} = 1,40674 \text{ kHz}$  et un facteur de qualité  $Q = \frac{\sqrt{2}}{5-k} = 0,471404$ .

Les résultats du cours nous indiquent qu'il n'y a pas de phénomène de résonance puisque  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Numériquement, on trouve, pour les pulsations de coupure :

$$\rightarrow x_{c1} = \frac{\omega_{c1}}{\omega_p} = 0,397078; \omega_{c1} = 3,50971 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } f_{c1} = 5,58587 \times 10^2 \text{ Hz}.$$

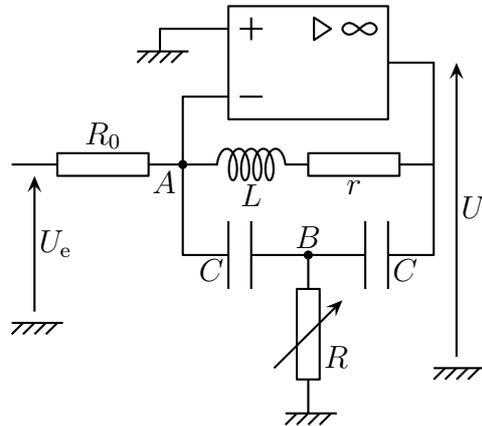
$$\rightarrow x_{c2} = \frac{\omega_{c2}}{\omega_p} = 2,51840; \omega_{c2} = 22,2597 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } f_{c2} = 3,54374 \times 10^3 \text{ Hz}.$$

► **Stabilité.** Comme  $\underline{H}_3(j\omega) = \frac{k j R C \omega}{2 + (5-k) j R C \omega + R^2 C^2 (j\omega)^2}$ , nous voyons que les coefficients du polynôme en  $(j\omega)$  du dénominateur sont de même signe (positif) pourvu que  $5 - k > 0$ . Cela signifie que le filtre n'est stable que pour  $1 < k < 5$ .

## ✿ Exercice 12

**1.** *Analyse physique.* C'est un filtre donc nous allons étudier le circuit en RSF. Étant donnée la présence d'une bobine et de deux condensateurs, nous pouvons penser que le filtre sera d'ordre 3.

*Analyse technique.* Ici, cela sera une approche nodale, de par l'AO et la recherche d'une tension en sortie. Comme nous pouvons voir la bobine associée en série avec  $r$ , nous pouvons dire qu'il n'y a que 3 potentiels inconnus : en  $A$ ,  $B$  et en sortie de l'AO. Cela donne trois lois : 2 lois des nœuds en terme de potentiels et la loi de fonctionnement de l'AO.



L'AO est idéal et en régime linéaire donc  $V_- = V_+$ . Or ici  $V_+ = 0$  donc nous avons  $V_- = 0$ . La loi des nœuds en terme de potentiel en  $A$  s'écrit en tenant du fait que  $\underline{V}_A = \underline{V}_- = 0$  :

$$\frac{U_e - 0}{R_0} + \frac{U_s - 0}{jL\omega + r} + \frac{V_B - 0}{\frac{1}{jC\omega}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{U_e}{R_0} + \frac{U_s}{jL\omega + r} = -jC\omega V_B$$

La loi des nœuds en terme de potentiels écrite en  $B$  donne :

$$\frac{0 - V_B}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{U_s - V_B}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - V_B}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad jRC\omega U_s = \underline{V}_B(1 + 2jRC\omega)$$

En éliminant  $\underline{V}_B$  entre ces deux expressions, nous arrivons après quelques manipulations à :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{R_0} \times \frac{(1 + 2jRC\omega)(jL\omega + r)}{1 + 2RC(j\omega) + RrC^2(j\omega)^2 + RC^2L(j\omega)^3}$$

Comme  $|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{r}{R_0} \neq 0$  et  $|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$ , nous pouvons dire qu'il s'agit d'un filtre

passe-bas.

**2.** Pour qu'il y ait un phénomène de résonance, il faut qu'il existe une valeur de  $\omega$  qui permette de minimiser le dénominateur.

Or le dénominateur s'écrit  $1 - RrC^2\omega^2 + j[2\omega RC - \omega^3 RC^2L]$ . Il nous faut donc chercher le cas limite tel que les parties imaginaire et réelle soient nulles en même temps.

Cela donne les deux conditions  $1 = RrC^2\omega^2$  et  $\omega^3 RC^2L = 2RC\omega$ . Cette dernière condition

donne  $\omega = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ , qui n'est autre que la pulsation de résonance.

L'autre condition donne, en utilisant l'expression de la pulsation de résonance  $R = \frac{L}{2rC}$ . Cette dernière valeur correspond à celle qu'il faudrait donner à  $R$  pour assurer une amplification infinie. En pratique nous chercherons simplement à se rapprocher de celle-ci par valeur supérieure afin d'assurer la stabilité du filtre.

☞ *Remarque.* une étude plus poussée, comme celle faite en cours, permet de montrer que si  $R$  a une valeur inférieure à celle trouvée ci-dessus, le régime est instable. Nous ne pouvons pas utiliser ici le critère « tous les coefficients du dénominateur sont de même signe » car il s’agit d’un filtre d’ordre 3 ; le critère précédent ne s’appliquant qu’aux filtres d’ordre 1 et 2.

✿ **Exercice 13**

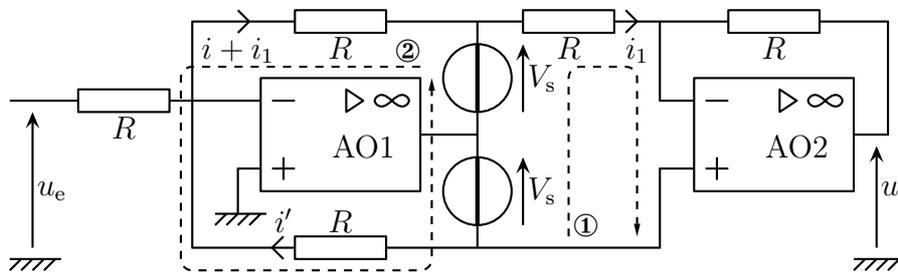
1. Remarquons tout d’abord, et cela restera vrai dans tout l’exercice, que l’AO2, étant rétroactioné uniquement sur son entrée inverseuse, est toujours en régime linéaire.

Pour montrer qu’une situation non linéaire est impossible, nous allons la supposer vraie et montrer qu’il est impossible que les conditions « à vérifier » soient vraies en même temps.

► **Les deux diodes sont passantes.**

Elles se comportent alors comme des générateurs idéaux de tension. Les deux conditions à vérifier sont  $i > 0$  et  $i' > 0$ .

L’AO1 étant rétroactionné uniquement sur son entrée inverseuse, il est, lui aussi, en régime linéaire.



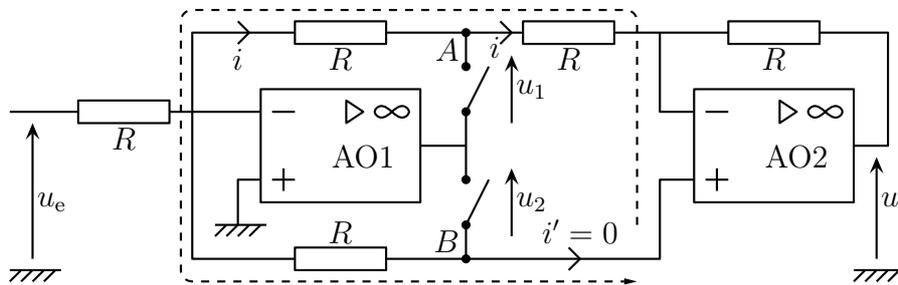
La loi des mailles ① s’écrit  $V_s + V_s - Ri_1 = 0$  ce qui donne  $i_1 = \frac{2V_s}{R} > 0$ .

La loi des mailles représentée sur le schéma ci-dessus s’écrit  $R(i + i_1) + Ri' + V_s + V_s = 0$ . Chacun de ces 4 termes est strictement positif par hypothèse. Il est donc impossible de satisfaire cette égalité. Le résultat est ainsi contradictoire, ce qui invalide l’hypothèse initiale :

les deux diodes ne peuvent pas être simultanément passantes

► **Les deux diodes sont bloquées.**

L’AO1 n’est plus rétroactionné sur son entrée inverseuse, il fonctionne donc en régime de saturation :  $V_S = \epsilon V_{\text{sat}}$  avec  $\epsilon = \pm 1$ . Alors, avec les notations ci-dessous, il faut vérifier  $u_1 < V_s$  et  $u_2 < V_s$ .



La loi des mailles représentée donne  $2Ri = 0$  soit  $i = 0$ , ce qui implique  $V_A = V_B = u_e$ .

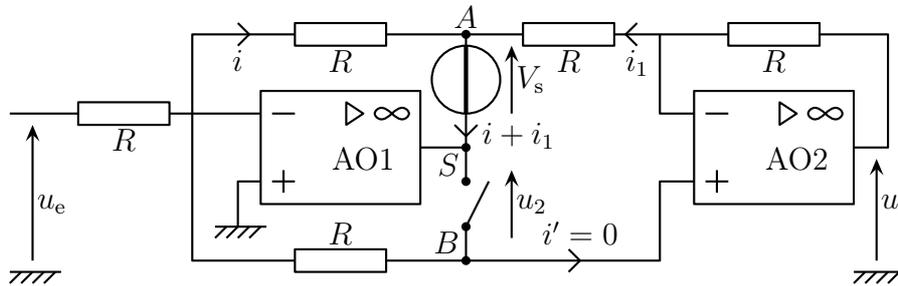
Comme  $u_2 = V_S - V_B$  et  $u_1 = V_A - V_S$ , les conditions à respecter sont  $\epsilon V_{\text{sat}} - u_e < V_s$  et  $u_e - \epsilon V_{\text{sat}} < V_s$ .

La première donne, si  $\epsilon = +1$  :  $u_e > V_{\text{sat}} - V_s \simeq 14,3 \text{ V}$  ce qui n’est pas possible étant donné que  $-10 \text{ V} < u_e < 10 \text{ V}$ .

La deuxième donne, avec  $\epsilon = -1$  :  $u_e < -V_{\text{sat}} + V_s \simeq -14,3 \text{ V}$ , impossible pour les mêmes raisons.

Comme il n'y a pas de solution non contradictoires, l'hypothèse faite est fausse et ainsi on peut dire que les deux diodes ne peuvent pas être bloquées en même temps.

2. (a) Commençons par refaire le schéma avec la diode ① passante et la ② bloquée.



Constate tout d'abord que l'AO1 est en régime linéaire car il est rétroactionné uniquement sur son entrée inverseuse.

Pour que diodes soient dans ces états, il faut d'une part que  $u_2 < V_s$  et d'autre part que  $i + i_1 > 0$ .

→ *Condition sur la diode ②. Comme la condition se fait en potentiel, mieux vaut une approche nodale.*

Comme  $V_- = V_+$  (régime linéaire d'un AO idéal) et  $V_+ = 0$ , nous en déduisons  $v_B = 0$  et  $u_2 = V_s$ . La loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse de l'AO1 s'écrit donc

$$\frac{u_e - V_-}{R} + \frac{V_1 - V_-}{R} + \frac{V_B - V_-}{R} - 0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad V_A = -u_e$$

Ainsi, comme  $V_s = V_A - V_S$  nous en déduisons  $V_S = -u_e - V_s$ , puis, parce qu'il faut  $V_S = u_2 < V_s$  :  $u_e > -2V_s$ .

→ *Conditions sur la diode ①. Ici, comme nous avons déjà utilisé l'approche nodale pour la question précédente, nous allons la poursuivre afin de déterminer les courants  $i = \frac{V_{-,1} - V_A}{R}$  et  $i_1 = \frac{V_{-,2} - V_A}{R}$  pour vérifier  $i + i_1 > 0$ .*

Comme  $i' = 0$ , la loi constitutive du résistor « en dessous » de l'AO1 s'écrit  $\frac{V_B - V_{-,1}}{R} = 0$ , ce qui donne  $V_{1,-} = V_B$ .

Or  $V_B = V_{+,2}$  et comme l'AO2 est idéal et en régime linéaire :  $V_{+,2} = V_{-,2}$ . De même pour l'AO1 :  $V_{+,1} = V_{-,1}$ .

Finalement :  $V_{+,2} = V_{-,2} = V_{+,1} = V_{-,1} = u_e$ .

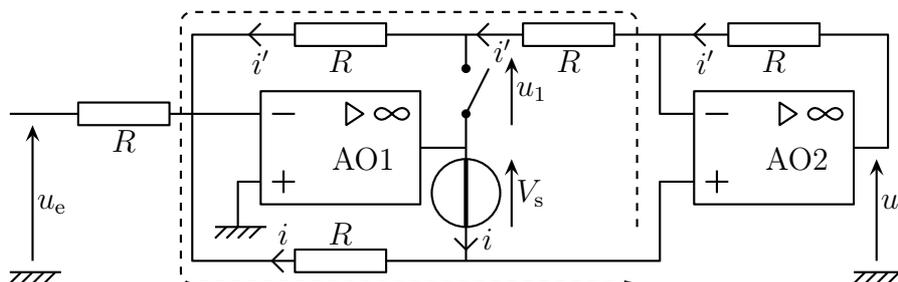
Ainsi la condition se réécrit  $i + i_1 = \frac{2u_e}{R} > 0$  soit  $u_e(t) > 0$ .

Comme cette condition est plus restrictive que la précédente, nous ne gardons que cette dernière.

2. (b) La loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse de l'AO2 donne :

$$s \frac{V_A - 0}{R} + \frac{u_s - 0}{R} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_s = -V_A \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{u_s(t) = u_e(t)}$$

3. Redessinons tout d'abord le schéma du circuit.



L'AO1 est en régime linéaire car il est rétroactionné sur son entrée inverseuse. Nous avons donc, puisqu'il est idéal  $V_- = V_+ = 0$ .

Les conditions à vérifier sont  $u_1 < V_s$  pour la diode ① et  $i > 0$  pour la diode ②.

→ *Condition sur la diode ①. Cette condition portant sur un courant, nous allons, pour une fois, regarder de plus près l'approche maillère. En notant les courants sur le circuit, nous en trouvons deux. Il y a donc deux inconnues. Pour l'approche nodale, nous comptons 6 potentiels inconnus... C'est décidé : approche maillère.*

La loi des mailles repérée sur le circuit s'écrit :

$$-Ri' - Ri' + Ri = 0 \quad \rightsquigarrow \quad i' = \frac{i}{2}$$

Comme la loi d'Ohm s'écrit pour la résistance à l'extrême gauche  $-R(i + i') = u_e$ , nous en déduisons  $i = -\frac{2}{3} \frac{u_e}{R}$  et  $i' = -\frac{1}{3} \frac{u_e}{R}$ .

Ainsi avec  $u_1 = -V_s - Ri + Ri'$  (additivité des tensions) nous obtenons la condition  $-V_s + \frac{u_e}{3} < V_s$  soit  $u_e < 6V_s$ .

→ *Condition sur la diode ②. Il faut vérifier  $i > 0$ .*

Avec les résultats obtenus lors de la première vérification, nous obtenons  $\boxed{u_e(t) < 0}$ .

Comme cette dernière est la plus restrictive, c'est celle que l'on garde.

→ *Loi de fonctionnement*

L'additivité des tensions permet d'écrire  $u_s = V_- + Ri' + Ri' + Ri'$  ce qui donne  $\boxed{u_s(t) = -u_e(t)}$ .

4. Comme  $u_s(t) = u_e(t)$  pour  $u_e(t) > 0$  et  $u_s(t) = -u_e(t)$  pour  $u_e(t) < 0$ , nous constatons que nous avons bien, en fait  $\boxed{u_s(t) = |u_e(t)|}$ , ce qui correspond à un montage redresseur double alternance sans seuil.

## ✿ Exercice 14

1. Si  $v_s$  prend une valeur positive, alors  $v_+ = \beta v_s > 0$ . Comme  $\varepsilon = v_+ - v_-$  et que  $v_- = 0$  (parce que la tension aux bornes du condensateur est mathématiquement continue), alors  $\varepsilon > 0$ .

Dans ces conditions, l'AO amplifiant  $\varepsilon$ ,  $v_s$  atteint brusquement  $V_{\text{sat}}$  et le condensateur se charge.

En écrivant la loi d'évolution de  $v_-(t)$  et en résolvant l'équation différentielle, nous obtenons :  $v_-(t) = V_{\text{sat}} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$  avec  $\tau = RC$ , ce qui n'est autre que la charge d'un condensateur initialement déchargé soumis à l'échelon de tension  $V_{\text{sat}}$ .

Nous avons toujours  $v_+ = \beta v_s$  (diviseur de tension). Donc lorsque  $v_-$  atteint  $\beta V_{\text{sat}}$ ,  $\varepsilon = v_+ - v_-$  devient négatif et  $v_s$  atteint alors la valeur  $-V_{\text{sat}}$  puis la tension aux bornes du condensateur tend alors vers  $-V_{\text{sat}}$ .

Évitons ici de parler de décharge du condensateur, car s'il est vrai que dans un premier temps (jusqu'à ce que  $v_- = 0$ ) la quantité de charges accumulées dans le condensateur diminue, cette quantité réaugmente dès lors que  $v_-$  devient négatif : le condensateur se recharge mais « à l'envers ».

$\boxed{\text{L'équilibre n'est donc pas possible, le système est instable.}}$

2. Lorsque  $v_s = -V_{\text{sat}}$ , nous avons :  $v_-(t) = -V_{\text{sat}} + (\beta V_{\text{sat}} + V_{\text{sat}}) e^{-t/\tau}$  car on reconnaît qu'il s'agit de l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit  $R, C$  soumis à l'échelon de tension  $-V_{\text{sat}}$ . Il faut juste faire attention à la tension initiale qui, ici, n'est pas nulle.

Déterminons l'instant  $t_1$  tel que  $v_-(t_1) = -\beta V_{\text{sat}}$ . Il faut :

$$-\beta V_{\text{sat}} = -V_{\text{sat}} + (\beta V_{\text{sat}} + V_{\text{sat}}) e^{-t_1/\tau} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = e^{-t_1/\tau} \quad \rightsquigarrow \quad t_1 = \tau \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

Lorsque  $v_s = +V_{\text{sat}}$ , la tension  $v_-(t)$  vaut :  $v_-(t) = V_{\text{sat}} + (-\beta V_{\text{sat}} - V_{\text{sat}}) e^{-(t-t_1)/\tau}$  car on reconnaît qu'il s'agit de l'évolution de la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit  $R,C$  soumis à l'échelon de tension  $+V_{\text{sat}}$ . La condition initiale s'écrit ici  $v_-(t_1) = -\beta V_{\text{sat}}$ .

Ainsi la période  $T$  est telle que :  $v_-(t) = \beta V_{\text{sat}}$ , ce qui s'écrit :

$$\beta V_{\text{sat}} = V_{\text{sat}} - (\beta V_{\text{sat}} + V_{\text{sat}}) e^{-(T-t_1)/\tau} \rightsquigarrow \frac{1-\beta}{1+\beta} = e^{-(T-t_1)/\tau} \rightsquigarrow T - t_1 = \tau \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Finalement  $T = 2\tau \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$ .

3. Si  $\beta \ll 1$ , le signal se triangularise : la constante de temps du circuit  $R,C$  étant très grande devant la période des oscillations, chaque évolution exponentielle ressemblera qu'à un tout petit bout de droite.

