

# Électrocinétique

## Chapitre 1

### Circuits électriques

# Circuits électriques

Dans ce chapitre, nous allons essentiellement rappeler les lois et les résultats à connaître voire à maîtriser en électrocinétique. Nous ne développerons pas les démonstrations, mais nous insisterons régulièrement sur l'aspect « philosophique » des lois ainsi que sur leurs interprétations physiques.

Le chapitre sera divisé en trois parties. La première concernera les lois de fonctionnement de manière générale ; la deuxième fera le point sur les circuits en régime transitoire et leurs phénoménologies ; la dernière partie sera consacrée au fonctionnement en régime sinusoïdal forcé qui tient une place fondamentale en physique linéaire, comme nous aurons l'occasion de le voir de très nombreuses fois cette année.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Biographies succinctes</b>                                    | <b>5</b>  |
| <b>I Lois de fonctionnement</b>                                  | <b>7</b>  |
| I-1 Lois pour un dipôle . . . . .                                | 7         |
| I-1 <i>·i</i> résistor . . . . .                                 | 7         |
| I-1 <i>·ii</i> bobine . . . . .                                  | 7         |
| I-1 <i>·iii</i> condensateur . . . . .                           | 8         |
| I-1 <i>·iv</i> générateurs . . . . .                             | 9         |
| I-2 Lois de fonctionnement des circuits . . . . .                | 9         |
| I-2 <i>·i</i> lois de KIRCHHOFF . . . . .                        | 9         |
| I-2 <i>·ii</i> ponts diviseurs . . . . .                         | 11        |
| I-3 Association de dipôles . . . . .                             | 11        |
| I-3 <i>·i</i> association série . . . . .                        | 11        |
| I-3 <i>·ii</i> association parallèle . . . . .                   | 12        |
| I-3 <i>·iii</i> générateurs réels . . . . .                      | 12        |
| I-4 Aspect énergétique . . . . .                                 | 13        |
| I-4 <i>·i</i> puissance . . . . .                                | 13        |
| I-4 <i>·ii</i> dipôles usuels . . . . .                          | 13        |
| résistor . . . . .   | 13        |
| générateur . . . . .   | 14        |
| bobine et condensateurs . . . . .                                | 14        |
| bilan . . . . .  | 14        |
| <b>II Régimes transitoires</b>                                   | <b>15</b> |
| II-1 Circuits d'ordre 1 . . . . .                                | 15        |
| II-1 <i>·i</i> passe-bas . . . . .                               | 15        |
| montage . . . . .  | 15        |
| grandeurs caractéristiques . . . . .                             | 15        |
| ordre de grandeur . . . . .                                      | 16        |
| réponse à un échelon . . . . .                                   | 17        |
| II-1 <i>·ii</i> passe-haut . . . . .                             | 18        |
| montage . . . . .  | 18        |
| ordre de grandeur . . . . .                                      | 18        |
| échelon de tension . . . . .                                     | 19        |
| II-2 Circuit d'ordre 2 . . . . .                                 | 19        |
| II-2 <i>·i</i> circuit classique : le <i>RLC</i> série . . . . . | 19        |
| II-2 <i>·ii</i> équation différentielle . . . . .                | 19        |
| II-2 <i>·iii</i> ordres de grandeur . . . . .                    | 20        |
| II-2 <i>·iv</i> solutions . . . . .                              | 20        |
| solution générale . . . . .                                      | 20        |
| différentes natures de régime transitoire . . . . .              | 20        |
| régime apériodique . . . . .                                     | 21        |
| régime pseudopériodique . . . . .                                | 21        |
| régime critique . . . . .  | 23        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>III Régime forcé</b>   | <b>24</b> |
| III.1 Utilisation . . . . .   | 24        |
| III.1 <i>·i</i> signaux périodiques . . . . .                       | 24        |
| III.1 <i>·ii</i> série de FOURIER . . . . .                         | 24        |
| décomposition . . . . .   | 24        |
| spectres usuels . . . . .   | 25        |
| propriétés . . . . .  | 25        |
| III.1 <i>·iii</i> précautions . . . . .                             | 26        |
| III.2 Notation complexe . . . . .                                   | 26        |
| III.2 <i>·i</i> présentation . . . . .                              | 26        |
| III.2 <i>·ii</i> impédance / admittance . . . . .                   | 27        |
| III.2 <i>·iii</i> lois en complexe . . . . .                        | 27        |
| III.3 Aspect énergétique . . . . .                                  | 28        |
| III.3 <i>·i</i> puissance moyenne reçue . . . . .                   | 28        |
| III.3 <i>·ii</i> d'autres expressions . . . . .                     | 28        |
| III.3 <i>·iii</i> impédances usuelles . . . . .                     | 28        |
| III.3 <i>·iv</i> valeur efficace . . . . .                          | 28        |
| III.3 <i>·v</i> pour la décomposition en série de FOURIER . . . . . | 29        |
| III.4 Filtres d'ordre 1 . . . . .                                   | 29        |
| III.4 <i>·i</i> filtre passe-haut . . . . .                         | 29        |
| montage et fonction de transfert . . . . .                          | 29        |
| forme canonique . . . . .   | 29        |
| diagrammes de BODE . . . . .  | 30        |
| III.4 <i>·ii</i> filtre passe-bas . . . . .                         | 30        |
| montage et fonction de transfert . . . . .                          | 30        |
| forme canonique . . . . .   | 30        |
| diagrammes de BODE . . . . .  | 31        |
| III.4 <i>·iii</i> d'autres types . . . . .                          | 31        |
| déphaseur . . . . .   | 31        |
| atténuateur . . . . .   | 31        |
| III.5 Filtres d'ordre 2 . . . . .                                   | 32        |
| III.5 <i>·i</i> utilité . . . . .                                   | 32        |
| III.5 <i>·ii</i> filtre passe-bas . . . . .                         | 32        |
| montage et fonction de transfert . . . . .                          | 32        |
| forme canonique . . . . .   | 32        |
| diagrammes de BODE . . . . .  | 33        |
| III.5 <i>·iii</i> filtre passe-haut . . . . .                       | 33        |
| montage et fonction de transfert . . . . .                          | 33        |
| forme canonique . . . . .   | 33        |
| diagrammes de BODE . . . . .  | 34        |
| III.5 <i>·iv</i> filtre passe-bande . . . . .                       | 34        |
| montage et fonction de transfert . . . . .                          | 34        |
| forme canonique . . . . .   | 34        |
| diagrammes de BODE . . . . .  | 35        |
| III.6 Stabilité d'un filtre . . . . .                               | 35        |
| III.6 <i>·i</i> définition . . . . .                                | 35        |
| III.6 <i>·ii</i> critères de stabilité . . . . .                    | 35        |
| <b>Fiche de révision</b>  | <b>36</b> |

## Biographies succinctes

### Jean-Baptiste Joseph FOURIER

(1768 Auxerre – 1830 Paris)



Orphelin à 10 ans, Joseph est envoyé dans une école militaire où il brille et devient professeur à 16 ans. Plongé au cœur de la révolution, il échappe de peu à la guillotine avec la mort de ROBESPIERRE. Fin 1794, il est admis à l'école Normale supérieure de Paris (qui fermera un an après) puis à la toute nouvelle école Polytechnique. La renommée de Joseph lui permettra de suivre NAPOLÉON dans son expédition égyptienne. À son retour, il s'installe à Grenoble comme préfet de l'Isère et effectue durant son temps libre des travaux en mathématiques dont son mémoire sur la chaleur. En 1817 il est élu à l'académie des sciences dont il deviendra le secrétaire perpétuel en 1822.

### Claude POUILLET

(1790 Cusance, Doubs – 1868 Paris)



Fils de papetier, Claude fait ses études à Besançon avant de suivre des cours à l'école normale et à la faculté de Paris de 1811 à 1813. Il aura notamment GAY-LUSSAC comme professeur. Claude commence alors à enseigner à partir de 1813 et de nombreux établissements le verront professer : l'École Normale, la faculté des sciences de Paris, l'école Polytechnique, le Conservatoire National des Arts et Métiers. Il sera aussi professeur de physique des enfants de Louis-Philippe. Reconnu comme un enseignant exceptionnel, il trouve expérimentalement la loi qui porte son nom.

### James Prescott JOULE

(1818 Salford, Lancashire – 1889 Sale, Cheshire)



Fils de brasseur et brasseur lui-même jusqu'en 1854, James a eu une éducation privée avec notamment John DALTON, connu pour l'hypothèse atomique et la maladie qui porte son nom, le daltonisme. Passionné par l'électricité, James découvre en 1841 l'effet qui porte son nom. Deux ans plus tard, il prouve l'équivalence entre énergie mécanique et chaleur. Ses idées eurent du mal à s'imposer car elles allaient à l'encontre de LAVOISIER et CARNOT partisans de la théorie du calorique qui supposait que la chaleur ne pouvait être ni créée ni détruite.

### Gustav KIRCHHOFF

(1824 Königsberg – 1887 Berlin)



Fils d'avocat, Gustav fait des études de physique et épouse la fille de son professeur de mathématiques. C'est étudiant qu'il énonce les « lois de KIRCHHOFF » valables en électrocinétique. Pourtant, Gustav est plus connu pour avoir créé avec R. BUNSEN la spectroscopie : c'est lui qui établit ainsi que les raies d'émission sont caractéristiques du corps. C'est ainsi qu'il découvre le césium et le rubidium. À partir de 1886, sa santé décline et il doit arrêter de travailler.

**Léon Charles THÉVENIN**

(1857 Meaux – 1926 Paris)



Diplômé de l'École polytechnique et de l'École supérieure de télégraphie en 1879, Léon entre en 1890 dans la jeune Administration des postes et télégraphes. Dans le même temps, il s'occupe de cours de mathématiques et mène ses propres recherches en électricité. Il publie en 1883 une formule de simplification des schémas électriques qui est devenue célèbre sous le nom de théorème de THÉVENIN. En 1888, Léon est chargé d'enseigner les mathématiques et l'électricité à l'École Professionnelle Supérieure des Postes et Télégraphes puis est nommé directeur en 1896. Il fut un peu isolé à la fin de sa vie au sein de l'administration à cause de son attrait pour la recherche.

**Edward Lawry NORTON**

(1898 Rockland, Maine – 1983 Chatam, New Jersey)



Edward a servi comme opérateur radio dans l'armée entre 1917 et 1919. Il a fréquenté l'Université du Maine pendant un an avant et pendant un an après son service de guerre. Il a ensuite intégré le MIT en 1920 et y a obtenu un diplôme de génie électrique en 1922. Puis il a commencé à travailler en 1922 à l'Ouest Electric Corporation à New York, qui devint en 1925 Bell Laboratories. Tout en travaillant pour Western Electric, il a obtenu un diplôme de maîtrise en génie électrique de l'Université de Columbia en 1925. C'est en 1926, au milieu d'un mémorandum, qu'il a parlé du modèle de générateur pour lequel nous le connaissons. Il a pris sa retraite en 1961 et est décédé le 28 janvier 1983.

**Hendrik Wade BODE**

(1905 Madison, Wisconsin – 1982 Cambridge, Massachusetts)



D'origine hollandaise et d'un père enseignant à de l'Université de l'Illinois à Urbana-Champaign, Hendrik se révèle précoce en sortant du lycée à 14 ans, en obtenant l'équivalent de la licence de mathématiques à 19 ans et l'équivalent de la maîtrise 2 ans plus tard. Après un an comme assistant en faculté, il rentre aux laboratoires Bell et y est particulièrement brillant. Il passe un doctorat en 1935 et « invente » ses diagrammes en 1938, diagrammes qui facilitent grandement l'étude de la rétroaction. À partir de la guerre et jusqu'à la fin de sa vie, il travaillera dans l'armement et améliorera les mécanismes de guidage des missiles.

**Jacob MILLMAN**

(1911 Novohrad-Volynskyï, Ukraine – 1991)

Expert en radar et en circuit électronique, Jacob, d'origine russe, a émigré avec ses parents en 1913. Il a obtenu son doctorat au Massachusetts Institute of Technology en 1935. Il fut professeur au City College de New York de 1936 à 1952 puis, jusqu'à sa retraite en 1976, il enseigna à l'université de Columbia. Il a écrit ou co-écrit 8 livres sur l'électronique et les ordinateurs.

# I – Lois de fonctionnement

## I.1 – Lois pour un dipôle

### I.1.i – résistor

◇ Rien de surprenant.

Un résistor est caractérisé par sa résistance  $R > 0$  en  $\Omega$  (ohm) et tel que, en convention récepteur

$$u(t) = +R i(t)$$


◇ Bien sûr, en convention générateur, la relation courant-tension s'écrit  $u(t) = -R i(t)$ .

◇ Parce qu'il y a une stricte égalité entre courant traversant un résistor et tension entre ses bornes, le résistor est un dipôle très prisé dans les montages demandant une conversion courant – tension.

◇ Quelques valeurs à connaître.

Résistance :

- de montage de TP, entre  $10 \Omega$  et  $1 M\Omega$  ;
- d'entrée d'un oscilloscope,  $R_{\text{oscillo}} = 1 M\Omega$  ;
- de sortie d'un GBF,  $R_{\text{gbf}} = 50 \Omega$  ;
- d'entrée d'un voltmètre,  $R_{\text{volt}} = 1 G\Omega$ .

La tension aux bornes d'un ampèremètre numérique est d'environ  $0,2 \text{ V}$ .

◇ Dans ces conditions la résistance d'entrée de l'ampèremètre dépend du calibre utilisé : entre  $1 \Omega$  et  $1 \text{ k}\Omega$ . Cette non idéalité implique qu'il est souvent préférable d'utiliser un voltmètre.

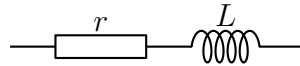
Un fil peut être vu comme un résistor de résistance nulle et un interrupteur ouvert comme un résistor de résistance infinie.

### I.1.ii – bobine

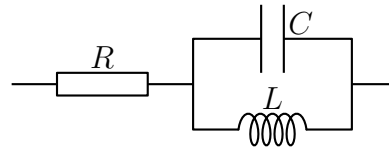
Une bobine idéale est caractérisée par son *inductance*  $L > 0$  en H (henry) et telle que en convention récepteur

$$u(t) = +L \frac{di}{dt}(t)$$


En basses fréquences, une bobine peut être modélisée par une association série d'une bobine idéale et d'un condensateur.



En hautes fréquences, une bobine peut être modélisée par l'association suivante dans laquelle la résistance varie fortement en fonction de la pulsation.



⚠ Le fait que la résistance des fils varie (fortement) avec la fréquence provient de l'effet de peau.

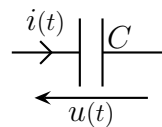
◇ La limite basse / haute fréquence dépend évidemment des bobines mais à partir de 10 kHz, cela *peut* être considéré comme de la haute fréquence pour beaucoup d'entre elles.

En TP nous utiliserons des bobines dont l'inductance varie de quelques mH à une fraction de henry.

### I.1.iii – condensateur

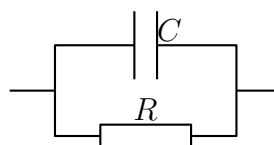
Un condensateur idéal est caractérisé par sa *capacité*  $C > 0$  en F (farad) et telle que en convention récepteur

$$i(t) = +C \frac{du}{dt}(t)$$



En TP nous utiliserons des condensateurs dont la capacité varie du nF au  $\mu\text{F}$ .

Un condensateur réel se comporte comme un condensateur idéal en parallèle avec un résistor dont la résistance  $R_f$  est appelée *résistance de fuite*.

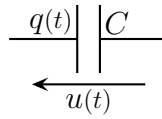


◇ En ce qui concerne l'aspect électrostatique du condensateur



Avec les conventions ci-dessous, les deux armatures d'un condensateur possèdent des charges opposées et celles-ci sont reliées à la tension par la loi

$$q(t) = +C u(t)$$

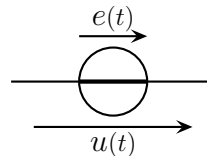


- ◇ Rappelons que cet aspect électrostatique est **complètement inutile** pour la « mise en équation » du circuit.
- ◇ Qui plus est, l'expérience montre que le fait de mettre une charge  $q$  sur une des armatures du condensateur est bien plus esthétique que rigoureux car le respect *des* conventions électrocinétique et électrostatique de la notation engendre souvent plusieurs erreurs de signe qui se compensent parfois mais qui, de toute façon, discréditent totalement le raisonnement.
- ◇ Nous éviterons donc autant que possible cette approche.

### I.1.iv – générateurs

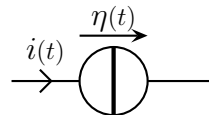
Un générateur idéal de tension est caractérisé par sa *force électromotrice* (f.é.m) en V (volt) et tel que

$$u(t) = +e(t)$$



Un générateur idéal de courant est caractérisé par son *courant électromoteur* (c.é.m) en A (ampère) et tel que

$$i(t) = +\eta(t)$$



- ◇ Pour ces deux dipôles, à ce niveau là nous ne parlons pas de convention générateur ou récepteur puisque leurs lois sont indépendantes (respectivement) du courant qui les traverse et de la tension à leurs bornes.

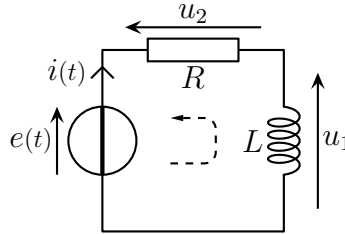
## I.2 – Lois de fonctionnement des circuits

### I.2.i – lois de KIRCHHOFF

- ◇ Il s'agit de lois valables uniquement dans le cadre de l'ARQS :
  - la loi des mailles ;
  - la loi des nœuds.
- ◇ Nous n'utiliserons que très peu ces lois car elles sont lourdes.
- ◇ La plupart du temps, nous utiliserons :
  - soit la loi des mailles en terme de courant ;
  - soit la loi des nœuds en terme de potentiel.

▲ La loi des mailles n'est plus valable en induction !

- ◇ Dans les deux cas il s'agit de remplacer directement dans la loi de KIRCHHOFF les lois constitutives des composants (en faisant attention aux conventions) de manière à limiter le nombre d'inconnues.
- ◇ Exemple de loi des mailles en terme de courant



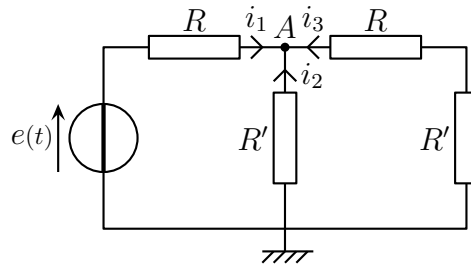
◇ Nous avons ainsi

$$L \underbrace{\frac{di}{dt}}_{=u_1}(t) + \underbrace{R i(t)}_{=u_2} - e(t) = 0$$

◇ Remarquons qu'une loi des mailles en terme de courant :

- finit par « = 0 » (sinon c'est une simple additivité des tensions) ;
- les termes s'écrivent dans l'ordre de la maille (sinon il est plus que fréquent d'en oublier) ;
- demande de réfléchir au signe de chaque terme.

◇ Exemple de loi des nœuds en terme de potentiels :



◇ Nous avons ainsi

$$\underbrace{\frac{e(t) - V_A(t)}{R}}_{=i_1} + \underbrace{\frac{0 - V_A(t)}{R'}}_{=i_2} + \underbrace{\frac{0 - V_A(t)}{R + R'}}_{=i_3} = 0$$

◇ Remarquons qu'une loi des nœuds en terme de potentiels :

- finit par « = 0 » ;
- n'est qu'une simple loi des nœuds **entrants** ;
- ne demande pas de réfléchir au signe de chaque terme.

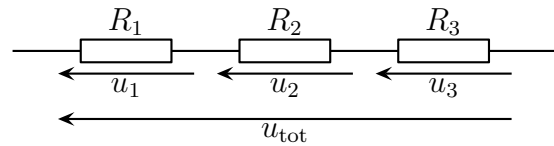
◇ Parfois cette loi des nœuds est connu sous la forme dite « formule de MILLMANN » mais nous ne l'utiliserons pas car :

- l'écriture MILLMANN est plus lourde (avec des fractions de fraction) ;
- dans le cas où il n'y a pas *que* des dipôles passifs dans le circuit, l'expression de la loi générale est plus délicate, notamment au niveau des signes.

## I.2.ii – ponts diviseurs

Pour des résistors en série, nous avons

$$u_1(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_2} \times u_{\text{tot}}(t)$$



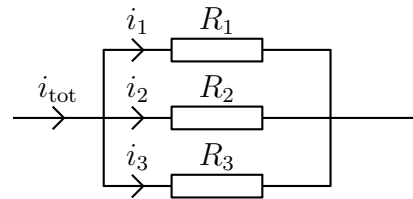
- ◇ Bien sûr il faut faire (une fois de plus) attention aux signes.
- ◇ Le piège de cette loi est qu'elle **nécessite** de vérifier que les dipôles sont bien en série, ce qu'ils ne sont pas toujours.

La *conductance*  $G > 0$  d'un résistor s'évalue en S (siemens) et est définie par

$$G \triangleq \frac{1}{R}$$

Pour des résistors en parallèle, nous avons

$$i_1(t) = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_2} \times i_{\text{tot}}(t)$$



- ◇ Bien sûr il faut faire là aussi attention aux signes et vérifier que les dipôles sont en parallèle.

## I.3 – Association de dipôles

## I.3.i – association série

$N$  résistors en série sont équivalents à un résistor unique de résistance  $R_{\text{éq}}$  telle que

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

$N$  bobines idéales en série sont équivalentes à une bobine idéale unique d'inductance  $L_{\text{éq}}$  telle que

$$L_{\text{éq}} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

$N$  condensateurs idéaux en série sont équivalents à un condensateur idéal unique de capacité  $C_{\text{éq}}$  telle que

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

- ◇ En pratique les lois sur les bobines et les condensateurs sont peu importantes car, en régime sinusoïdal forcé, tout n'est qu'impédance.

### I.3.ii – association parallèle

$N$  résistors en parallèle sont équivalents à un résistor unique de résistance  $R_{\text{éq}}$  telle que

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \quad \text{ou} \quad G_{\text{éq}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$

Dans le cas de *deux* résistors en parallèle de résistance  $R_1$  et  $R_2$ , la résistance équivalente de l'association s'écrit

$$R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- ⊘ Ne surtout pas généraliser cette loi à  $R_{\text{éq}} = \frac{\text{produit}}{\text{somme}}$  qui est trivialement fausse pour  $N \geq 3$  pour une simple raison d'homogénéité.

$N$  bobines idéales en parallèle sont équivalentes à une bobine idéale unique d'inductance

$L_{\text{éq}}$  telle que

$$\frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}$$

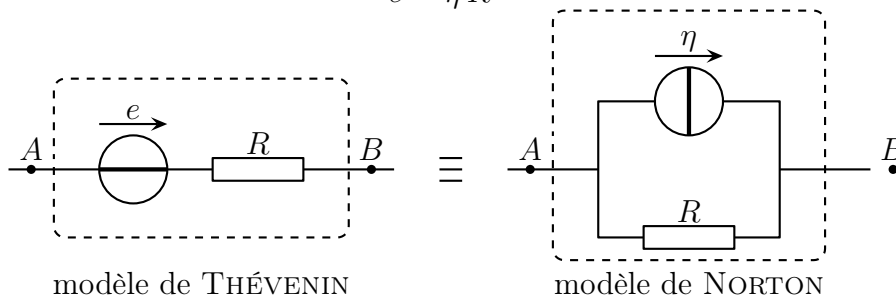
$N$  condensateurs idéaux en parallèle sont équivalents à un condensateur idéal unique de capacité  $C_{\text{éq}}$  telle que

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

### I.3.iii – générateurs réels

Un générateur réel peut être modélisé soit par le modèle de THÉVENIN soit par le modèle de NORTON tels que

$$e = \eta R$$



- ◇ Là, comme partout, il faut bien faire attention aux conventions : à « l'intérieur » du dipôle les flèches sur les générateurs sont dans le même sens.

## I.4 – Aspect énergétique

### I.4.i – puissance

- ◇ Il faut bien distinguer dans quel sens va l'énergie et cela est valable quel que soit le domaine de la physique.

La *puissance fournie* et la *puissance reçue* par un système sont définies par

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{reçue}}}{dt}(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\text{fournie}} = \frac{d\mathcal{E}_{\text{fournie}}}{dt}(t)$$

- ◇ Tout cela afin d'éviter les erreurs de signe.

Par convention, nous avons toujours, quel que soit le système considéré

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = -\mathcal{P}_{\text{fournie}}$$

- ◇ Du point de vue de l'interprétation


La puissance reçue est positive lorsque le système reçoit effectivement de l'énergie.  
La puissance fournie est positive lorsque le système fournit effectivement de l'énergie.

Pour un dipôle en convention récepteur, la puissance reçue s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = +u(t) \times i(t)$$

Pour un dipôle en convention générateur, la puissance fournie s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = +u(t) \times i(t)$$

-  Attention de ne pas se tromper de signe et de ne pas confondre le « + » avec le caractère positif d'une puissance.

- ◇ N'oublions pas aussi une loi absolument fondamentale.

#### CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

À tout instant dans un circuit électrocinétique, la somme des puissances reçues par tous les composants est nulle.

$$\sum_{\text{composants}} \mathcal{P}_{\text{reçue}}(t) = 0$$

- ◇ Cette loi est valable avec n'importe quel type de composants, dipôle ou non comme l'AO.

-  Ne pas oublier qu'avec l'AO, tous les composants ne sont pas représentés.

### I.4.ii – dipôles usuels

#### ★ résistor

- ◇ Le résistor ne peut **que** recevoir de l'énergie et toute celle qu'il reçoit « sort » du circuit.

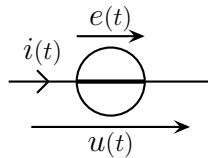
L'énergie dissipée par un résistor l'est par *effet JOULE* et la puissance associée s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = +R i^2(t) \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{u^2(t)}{R}$$

### ★ générateur

◇ Pour un générateur comme celui représenté ci-dessous, nous avons

$$\mathcal{P}_{\text{fournie}} = +e(t) i(t) \geq 0$$



◇ Le cas  $\mathcal{P}_{\text{fournie}} < 0$  n'est pas rare : c'est ce qui arrive lorsque des batteries sont rechargées.

### ★ bobine et condensateurs

À chaque instant une bobine idéale d'inductance  $L$  et parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$  possède l'énergie

$$\mathcal{E}_{\text{bob}}(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

Cette énergie est contenue dans le champ magnétique créé par la bobine.

À chaque instant un condensateur idéal de capacité  $C$  soumis à la tension  $u(t)$  possède l'énergie

$$\mathcal{E}_{\text{cond}}(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$$

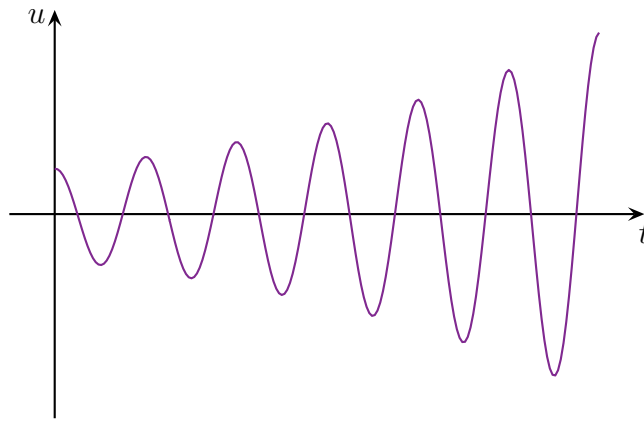
Cette énergie est contenue dans le champ électrique créé par le condensateur.

### ★ bilan

◇ Qualitativement nous avons donc :

- les résistors qui « sortent » l'énergie du circuit et ce **toujours** ;
- les bobines et les condensateurs qui peuvent stocker et déverser de l'énergie dans le circuit ;
- les générateur qui fournissent de l'énergie la plupart du temps mais qui peuvent en récupérer parfois.

◇ C'est ainsi que la situation suivante n'est pas possible dans un circuit passif comportant au moins un résistor car cela impliquerait qu'il y ait de plus en plus d'énergie dans le circuit.



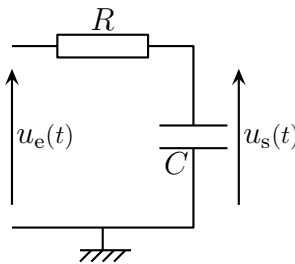
## II – Régimes transitoires

### II.1 – Circuits d'ordre 1

#### II.1.i – passe-bas

##### ★ montage

◇ Il s'agit d'un simple circuit  $RC$  où le but est de déterminer l'équation vérifiée par  $u_s(t)$ .



◇ La mise en équation est immédiate à partir d'une approche nodale et, donc, d'une loi des nœuds en terme de potentiel.

$$\frac{u_e(t) - u_s(t)}{R} + \left( -C \frac{du_s(t)}{dt} \right) = 0$$

◇ En réarrangeant, cela donne

$$\frac{du_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_s(t) = \frac{u_e(t)}{RC}$$

◇ Et sous forme canonique

$$\frac{du_s(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u_s(t) = \frac{u_e(t)}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

##### ★ grandeurs caractéristiques

◇ Pour étudier de manière générale et qualitative, mais néanmoins rigoureuse, des lois, nous serons amenés à parler des valeurs prises par les différentes grandeurs.

La *valeur caractéristique* d'une grandeur est la valeur qui décrit le mieux cette grandeur.

- ◇ C'est ainsi que :
  - la valeur caractéristique d'une tension sinusoïdale est son amplitude ou sa valeur efficace ;
  - la valeur caractéristique d'une tension exponentielle est sa valeur initiale.
- ◇ Il ne faut pas être trop à cheval sur la définition technique précise de ces valeurs caractéristiques, car leur but n'est pas d'apporter une information quantitative mais plutôt qualitative, de manière à pouvoir, éventuellement, négliger certains termes d'une loi.
- ▲ Ces valeurs caractéristiques sont utilisées notamment dans le calcul du nombre de REYNOLDS.

La *durée caractéristique* d'un signal est la durée pendant laquelle le signal varie notablement.

- ◇ Typiquement :
  - pour un signal périodique, la durée caractéristique est la période  $T$  ;
  - pour un signal exponentiel, la durée caractéristique est la constante de temps  $\tau$ .
- ◇ Ceci étant la durée caractéristique peut être définie pour n'importe quel type de signal, comme par exemple le son de la voix.
- ☞ *Remarque.* Il est parfois possible de distinguer plusieurs grandeurs ou durée caractéristiques dans un signal. L'exemple canonique est le signal modulé en amplitude qui a deux durées caractéristiques : la période de la porteuse et la période du signal modulant.

### ★ ordre de grandeur

- ◇ Imaginons un signal, pas forcément périodique, de durée caractéristique  $T$ .
- ◇ Alors, en ordre de grandeur (ODG), nous avons

$$\frac{du_s}{dt}(t) \sim \frac{U_s}{T}$$

- ◇ Dans ces conditions, l'équation différentielle permet de dire, toujours en ODG

$$\left( \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} \right) U_S = \frac{U_e}{\tau}$$

- ◇ Nous avons alors deux cas intéressants : si  $T \ll \tau$  ou si  $T \gg \tau$ .
- ◇ Dans le cas  $T \ll \tau$  alors

$$\frac{1}{T} U_S = \frac{U_e}{\tau} \quad \rightsquigarrow \quad U_S = \frac{T}{\tau} U_e$$

- ◇ Cela implique que plus la fréquence caractéristique<sup>1</sup> augmente, plus  $T$  diminue et plus la sortie diminue également.
- ◇ Dans le cas  $T \gg \tau$  alors

$$\frac{1}{\tau} U_S = \frac{U_e}{\tau} \quad \rightsquigarrow \quad U_S = U_e$$

- ◇ Cela signifie que la sortie répond « immédiatement » à l'entrée : c'est un cas de quasistaticité.

1. Fréquence caractéristique que nous définirons par  $f = 1/T$  même pour des signaux non périodiques.

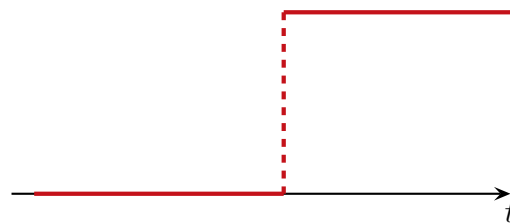


Lorsque la durée caractéristique de fonctionnement du système est très inférieure à la durée caractéristique de la contrainte extérieure, il est possible de parler de *quasistaticité*.

### ★ réponse à un échelon

Un *échelon* est une contrainte qui passe « instantanément » d'une valeur à une autre valeur.

- ◇ Le caractère instantané de l'échelon est à comprendre au sens physique, à savoir « beaucoup plus rapidement que la durée de réaction du système ».
- ◇ Graphiquement il s'agit d'une simple « marche » et l'instant de discontinuité est pris comme instant initial.



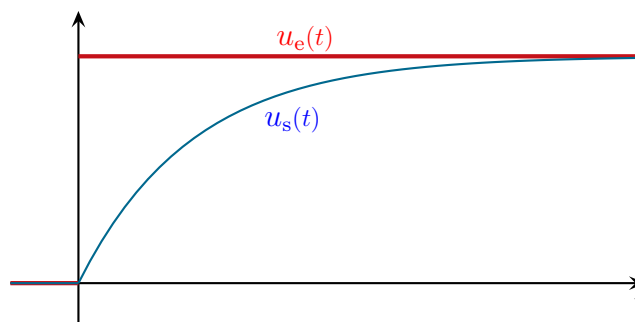
☞ *Remarque.* Même si physiquement le signal est forcément continu, il vaut mieux ne pas représenter le trait vertical entre les deux niveaux de l'échelon pour ne pas laisser croire qu'il est possible de fixer un point dessus.

- ◇ Rappelons sans les redémontrer les résultats.

$$u_s(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction mathématiquement continue du temps.

- ◇ La représentation graphique est la suivante :

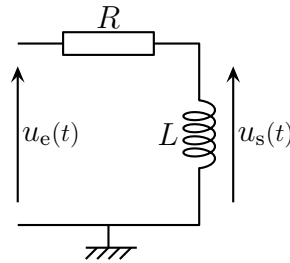


- ◇ Ne pas oublier la propriété de la « tangente n'importe où » : une tangente à une évolution du 1<sup>er</sup> ordre coupe l'asymptote  $\tau$  plus tard que la date de son point de tangence.

## II.1.ii – passe-haut

### ★ montage

◇ Il s'agit d'un montage analogue.



◇ Cette fois, pour le mettre en équation, mieux vaut passer par la notation complexe, mais ici faisons plutôt une loi des mailles en terme de courant (car il vaut mieux éviter les lois des nœuds en terme de potentiel pour les bobines)

$$u_s(t) + Ri(t) - u_e(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad u_s(t) + Ri(t) = u_e(t)$$

◇ En dérivant cette relation et en ajoutant le fait que  $u_s(t) = +L \frac{di}{dt}(t)$ , nous arrivons à

$$\frac{du_s}{dt}(t) + R \frac{di}{dt}(t) = \frac{du_e}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{du_s}{dt}(t) + \frac{R}{L} u_s(t) = \frac{du_e}{dt}(t)$$

◇ Et sous forme canonique

$$\frac{du_s}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} u_s(t) = \frac{du_e}{dt}(t) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

### ★ ordre de grandeur

◇ Comme pour le circuit passe-bas, nous avons immédiatement

$$\left( \frac{1}{T} + \frac{1}{\tau} \right) U_s = \frac{U_e}{T}$$

◇ En basses fréquences, nous avons  $T \gg \tau$  et donc

$$\frac{1}{\tau} \times U_s = \frac{U_e}{T} \quad \rightsquigarrow \quad U_s = \frac{\tau}{T} U_e$$

◇ Plus la fréquence baisse, plus la réponse est faible.

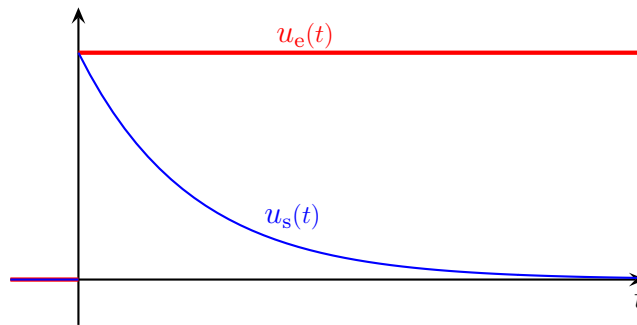
◇ En hautes fréquences nous avons

$$\frac{1}{T} \times U_s = \frac{U_e}{T} \quad \rightsquigarrow \quad U_s = U_e$$

◇ La sortie suit l'entrée

## ★ échelon de tension

◇ Graphiquement nous avons la courbe suivante :



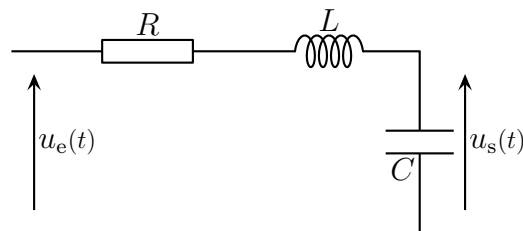
Le courant traversant une bobine est une fonction mathématiquement continue du temps.

◇ En revanche, comme nous le voyons, la *tension* aux bornes d'une bobine peut très bien être mathématiquement discontinue.

## II.2 – Circuit d'ordre 2

### II.2.i – circuit classique : le *RLC* série

◇ Choisissons un circuit  $R, L, C$  série tout ce qu'il y a de plus classique.



### II.2.ii – équation différentielle

◇ La mise en équation, tout aussi classique, permet d'aboutir à

$$\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s(t)}{dt} + \omega_0^2 u_s(t) = \omega_0^2 u_e(t) \quad \text{avec} \quad Q_{\text{série}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

◇ Rappelons que  $\omega_0$  est la pulsation propre et  $Q_{\text{série}}$  le facteur de qualité du circuit.

◇ Si, dimensionnellement, l'expression de la pulsation propre ne pouvait être que celle-ci (à un facteur numérique près), il n'en est pas de même pour le facteur de qualité car il est sans dimension et donc  $1/Q_{\text{série}}$  l'est aussi.

◇ Il ne faut donc **pas** penser que quel que soit le circuit le facteur de qualité est d'autant meilleur que  $R$  est petit. C'est **faux** ! Contre-exemple (laissé au lecteur) : le circuit  $R, L, C$  parallèle.

▲  $\omega_0$  est la pulsation du mode propre du circuit  $R, L, C$  série avec  $R$  négligeable.

## II.2.iii – ordres de grandeur

◇ En ODG nous avons

$$\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} \sim \frac{U_s}{T^2}$$

◇ Dans ces conditions, l'équation différentielle donne, en ODG

$$\left( \frac{1}{T^2} + \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{1}{T} + \omega_0^2 \right) U_s = \omega_0^2 U_e$$

◇ Prenons le cas d'une évolution *lente* avec  $T \gg 1/\omega_0$ . Alors

$$\omega_0^2 U_s = \omega_0^2 U_e \quad \rightsquigarrow \quad U_s = U_e$$

◇ Pour une évolution rapide,  $T \ll 1/\omega_0$  et

$$\frac{1}{T^2} U_s = \omega_0^2 U_e \quad \rightsquigarrow \quad U_s = T^2 \omega_0^2 U_e \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

◇ Il est parfois possible que le troisième terme soit prédominant mais cela impose la condition

$$\frac{1}{T^2} \ll \frac{\omega_0}{QT} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 \ll \frac{\omega_0}{QT} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{T^2} \omega_0^2 \ll \frac{\omega_0}{QT} \times \frac{\omega_0}{QT} \quad \rightsquigarrow \quad Q \ll 1$$

## II.2.iv – solutions

### ★ solution générale

◇ Comme l'équation est une équation différentielle linéaire, la solution générale s'écrit sous la forme

$$u_s(t) = u_{s,\text{transitoire}}(t) + u_{s,\text{permanent}}(t)$$

◇ Pour trouver la solution en régime permanent :

- soit la contrainte est continue et il suffit de remplacer bobine et condensateur par leurs modèles équivalents en régime continu ;
- soit la contrainte est sinusoïdale et alors nous utiliserons la notation complexe ;
- soit la contrainte est quelconque et alors le problème devient un problème mathématique de recherche de solution.

◇ Physiquement, le régime transitoire ne peut **que** tendre vers 0 à cause de l'aspect dissipatif du résistor.

Le régime permanent ne dépend pas des conditions initiales.

◇ C'est un résultat très intéressant qui nous permettra d'évacuer ce problème de condition initiale assez régulièrement.

### ★ différentes natures de régime transitoire

◇ Pour trouver la solution en régime transitoire, il faut s'abord résoudre l'équation caractéristique associée

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

◇ Le discriminant s'écrit

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$$

### ★ régime apériodique

#### 🕒 interprétation

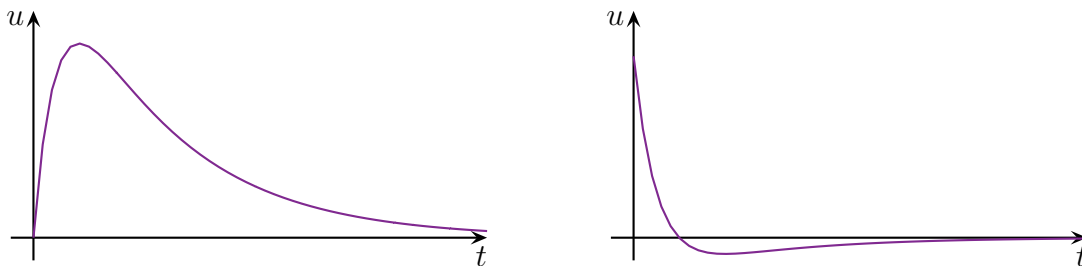
- ◇ Il s'agit d'un système essentiellement dissipatif et qui a lieu lorsque  $Q < \frac{1}{2}$ , ce qui correspond à  $\Delta > 0$ .

La durée du régime transitoire pour un régime apériodique tel que  $Q \ll 1$  est de  $\frac{T_0}{Q}$ .

- ◇ En pratique nous aurons  $Q \ll 1$  dès que  $Q < 0,2$ .

#### 🕒 représentation

- ◇ Voici deux représentations possible de deux régimes apériodiques de même facteur de qualité mais de conditions initiales différentes.



#### 🕒 expression

- ◇ En résolvant l'équation caractéristique, nous trouvons deux solutions réelles négatives  $r_1$  et  $r_2$  qui nous permettent d'introduire les durées caractéristiques  $\tau_1$  et  $\tau_2$  telles que :

$$-\frac{1}{\tau_1} \stackrel{\text{not}}{=} r_1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\tau_2} = r_2$$

- ◇ Dans ces conditions la solution en régime transitoire s'écrit

$$u_{s,\text{transitoire}}(t) = \lambda e^{-t/\tau_1} + \mu e^{-t/\tau_2}$$

- ◇  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux constantes d'intégration.  
 ◇ L'évolution a donc *deux* constantes de temps différentes, comme si le système était composé de deux sous-systèmes séparés répondant de manière indépendante.  
 ◇ Cela permet d'interpréter la 2<sup>e</sup> évolution représentée ci-dessus.

### ★ régime pseudopériodique

#### 🕒 interprétation

- ◇ Il s'agit d'un système essentiellement peu dissipatif et qui a lieu lorsque  $Q > \frac{1}{2}$ , ce qui correspond à  $\Delta < 0$ .

La durée du régime transitoire pour un régime pseudopériodique tel que  $Q \gg 1$  est de  $2Q T_0$ .

Les oscillations d'un régime pseudopériodique tel que  $Q \gg 1$  ont pour période la période propre  $T_0$ .

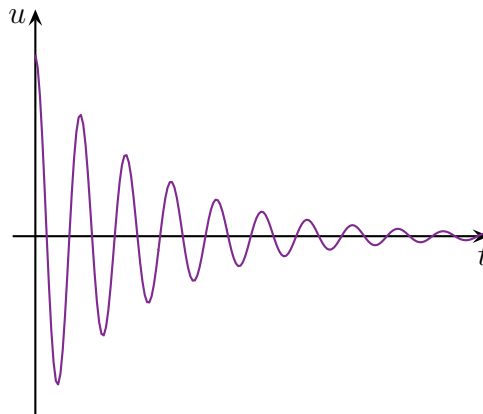
- ◇ En pratique nous aurons  $Q \gg 1$  dès que  $Q > 5$ .
- ◇ Une loi qualitative importante sur les oscillations est la suivante.

Il ne peut y avoir d'oscillations dans un dispositif quelconque que si l'énergie y est présente sous deux formes différentes au moins.

- ◇ En d'autres termes, un circuit d'ordre deux mais composés uniquement de bobines ou uniquement de condensateurs ne pourra **jamais** être en régime pseudo-périodique.
- ⚠ Il en est de même pour le phénomène de propagation qui n'est, au fond, qu'un ensemble d'oscillations qui « avancent ».

### 🕒 représentation

- ◇ Sans surprise.



- ◇ Le régime permanent est obtenu pour environ  $2Q$  oscillations.
- ◇ Dans les rares cas où  $Q \gg 1$ , la pseudo-période n'est **pas** égale à la période propre.

### 🕒 expression

- ◇ En résolvant l'équation caractéristique, nous trouvons deux solutions imaginaires conjuguées  $\underline{r}_0$  et  $\underline{r}_0^*$  notées

$$\underline{r}_0 \stackrel{\text{not}}{=} -\frac{1}{\tau} + j\omega$$

- ◇ Dans ces conditions la solution en régime transitoire s'écrit, au choix

$$u_{s,\text{transitoire}}(t) = e^{-t/\tau} (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) \quad \text{ou} \quad u_{s,\text{transitoire}}(t) = A e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$$

- ◇  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $A$  et  $\varphi$  sont des constantes d'intégration, il y en a 2 quelle que soit la forme de la solution.

### 🕒 loi fondamentale

Pour qu'il y ait des oscillations dans un dispositif physique, il est nécessaire d'avoir deux types d'énergie différentes.

- ✧ En d'autres termes un circuit composé uniquement de bobines ou de condensateurs ne comporte qu'un seul type d'énergie (respectivement magnétique et électrostatique) et ne peut donc pas osciller.
- ✧ Il est donc **impossible** de constituer un circuit avec uniquement des bobines (ou uniquement des condensateurs) avec un facteur de qualité plus grand que 0,5.
- ✧ Il s'agit là d'une petite loi qui n'a l'air de rien mais qui est très utile pour commenter différents phénomènes comme, plus tard, la propagation.

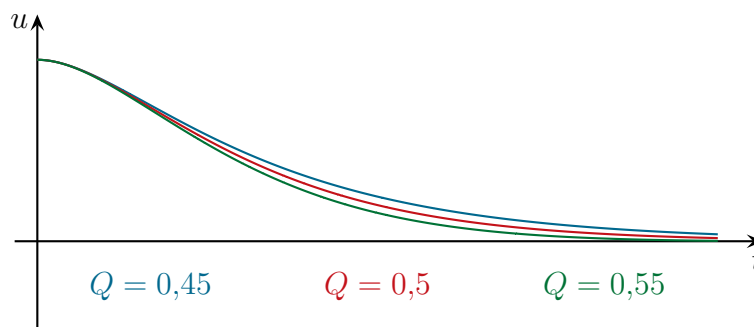
### ★ régime critique

#### 🕒 interprétation

- ✧ C'est le cas limite entre le régime aperiodique et le régime pseudoperiodique et est obtenu pour  $Q = \frac{1}{2}$
- ✧ Physiquement comme nous ne pourrions jamais avoir rigoureusement  $Q = \frac{1}{2}$ , cette solution est plutôt théorique.
- ✧ Cette solution n'est intéressante que parce qu'elle simplifie (un peu) la résolution formelle.

#### 🕒 représentation

- ✧ Devant un oscilloscope, il est difficile de trouver « le » régime critique.
- ✧ Ci-dessous sont représentés les trois régimes  $Q = 0,5$ ,  $Q = 0,55$  et  $Q = 0,45$ .



#### 🕒 expression

- ✧ Dans le cas  $Q = 0,5$ , la racine (double) de l'équation caractéristique est  $r_0 = -\omega_0$  et alors

$$u_{s,\text{transitoire}}(t) = e^{-\omega_0 t} \times (\lambda + \mu t)$$

- ✧  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes d'intégration.

## III – Régime forcé

### III.1 – Utilisation

#### III.1.i – signaux périodiques

- ◇ Nous utiliserons la notation complexe lorsque :
  - le système sera *linéaire* (cas fréquent et pas réservé, loin de là, à l'électrocinétique) ;
  - la contrainte sera périodique.
- ◇ Dans ces conditions, nous pourrons ramener toute l'étude à une étude en régime sinusoïdal forcé grâce au principe de superposition.
- ◇ Les contraintes non purement sinusoïdales seront décomposées en contraintes sinusoïdales grâce aux séries de FOURIER.

#### III.1.ii – série de FOURIER

##### ★ décomposition

- ◇ C'est un cas très général.

Toute fonction  $T$ -périodique peut s'écrire sous la forme unique (au choix) avec  $\omega \stackrel{\text{not}}{=} \frac{2\pi}{T}$

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)
 \end{aligned}$$

- ✂ La transformée de FOURIER n'est autre que la généralisation aux fonctions non périodiques de la décomposition précédente.

$a_0 = c_0$  est la valeur moyenne de  $f(t)$ .

La composante de période  $T$  (*i.e.* de pulsation  $\omega$ ) correspondant à  $n = 1$  est appelé le *fondamental*.

Les autres composantes (pour  $n \geq 2$ ) sont appelées les *harmoniques*.

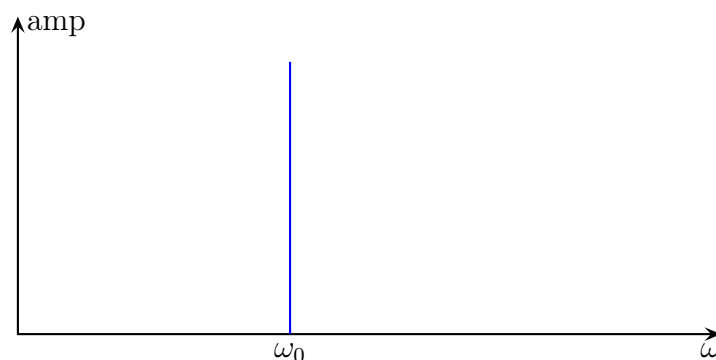
L'ensemble des  $c_n$  est appelé le *spectre* de  $f(t)$ .

- ◇ Comme nous aurons l'occasion de le voir en optique mais aussi en acoustique, le *spectre* est une notion très utilisée même dans la vie courante.

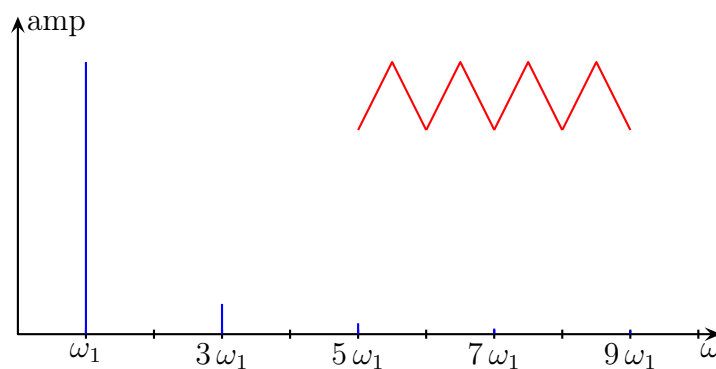


## ★ spectres usuels

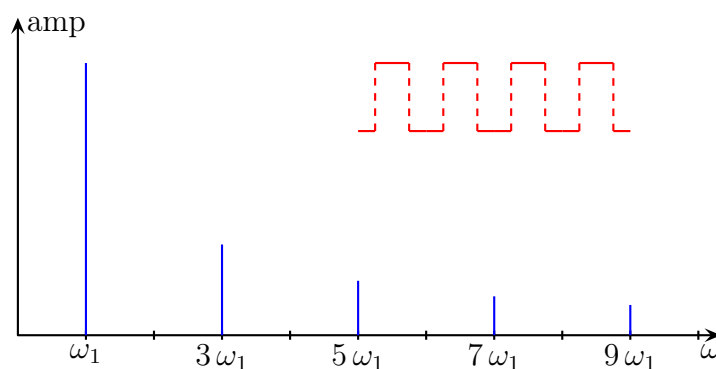
Un signal sinusoïdal a un spectre composé d'une seule raie



Un signal triangulaire a un spectre composé uniquement d'harmoniques impaires et décroissant en  $\frac{1}{n^2}$



Un signal rectangulaire a un spectre composé uniquement d'harmoniques impaires et décroissant en  $\frac{1}{n}$



## ★ propriétés

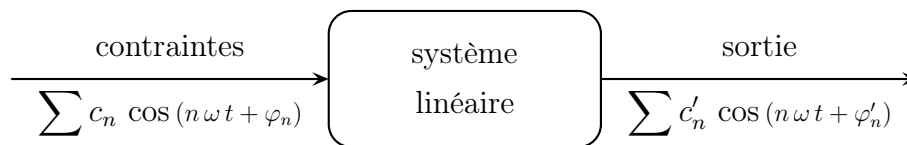
Un signal  $f(t)$  symétrique ne possède que des composantes impaires.

Plus un signal a de discontinuités, plus le spectre est riche en harmoniques.

◇ Remarquons que le signal triangulaire est certe continu mais sa dérivée est discontinue.

### III.1.iii – précautions

- ◇ Nous utiliserons tellement la décomposition en série de FOURIER et la notation complexe que, parfois, il sera possible d'oublier une condition nécessaire : il **faut** que le dispositif soit linéaire.
- ◇ Sans dispositif linéaire, même si nous pouvons décomposer la contrainte en série de FOURIER nous ne pourrions pas dire que la sortie est la superposition des sorties de chaque composante de l'entrée prises indépendamment les unes des autres.



Avec un dispositif linéaire, une contrainte de pulsation  $\omega$  engendre une sorte de pulsation  $\omega$ .

Pour que la sortie n'ait pas la même pulsation que l'entrée, il **faut** un système non linéaire.

- ◇ Ce corrolaire est très très important en terme d'interprétation de spectre : c'est lui qui nous permet de diagnostiquer le caractère linéaire ou non d'un dispositif.

## III.2 – Notation complexe

### III.2.i – présentation

- ◇ La notation complexe n'est qu'une *notation*.
- ◇ En « vrai » les grandeurs complexes n'existent pas, seules les grandeurs réelles sont mesurables.
- ◇ À la grandeur réelle  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  nous pouvons associer la grandeur complexe

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$$

- ◇ Nous avons ainsi (même si nous le ferons que rarement)

$$u(t) = \Re(\underline{u}(t)) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \longleftrightarrow \times(j\omega)$$

 Il existe aussi la convention

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m e^{-j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U}_m = U_m e^{-j\varphi}$$

### III.2.ii – impédance / admittance

Un dipôle linéaire peut être vu comme une *impédance*  $\underline{Z}$  telle que, en convention récepteur

$$\underline{u}(t) = +\underline{Z}\underline{i}(t) \quad \text{ou} \quad \underline{U}_m = +\underline{Z}\underline{I}_m$$

◇ De là nous pouvons en déduire les comportements BF et HF de la bobine et du condensateur.

Une bobine en basses fréquences est équivalente à un interrupteur fermé.  
Une bobine en hautes fréquences est équivalente à un interrupteur ouvert.

Un condensateur en basses fréquences est équivalente à un interrupteur ouvert.  
Une bobine en hautes fréquences est équivalente à un interrupteur fermé.

◇ En fait, tous les dipôles linéaires peuvent être vus comme des sortes de résistance.

◇ En terme d'appellation, nous avons

$$\underline{\text{impédance}} = \text{résistance} + j \times \text{réactance} \quad \text{ou} \quad \underline{Z} = R + jX$$

L'*admittance* complexe  $\underline{Y}$  est l'inverse de l'impédance.

$$\underline{Y} \triangleq \frac{1}{\underline{Z}}$$

$$\underline{\text{admittance}} = \text{conductance} + j \times \text{susceptance} \quad \text{ou} \quad \underline{Y} = G + jB$$

◇ Pour les dipôles usuels

$$\underline{Z}_{\text{résistor}} = R ; \quad \underline{Z}_{\text{bobine}} = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{\text{condensateur}} = \frac{1}{jC\omega}$$

### III.2.iii – lois en complexe

◇ Elles sont identiques aux lois en notation réelle et avec les mêmes restriction (ARQS) à condition de procéder aux changements

$$R \longrightarrow \underline{Z} ; \quad G \longrightarrow \underline{Y} \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) \longrightarrow \underline{U}_m$$



Attention aux lois des mailles et des nœuds à bien utiliser les amplitudes complexes car

$$\sum I_{m,k} \neq 0 \quad \text{mais} \quad \sum \underline{I}_{m,k} = 0$$

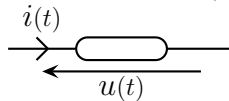
## III.3 – Aspect énergétique

### III.3.i – puissance moyenne reçue

- ◇ La puissance et l'énergie (qu'elles soient « reçues » ou « fournies ») sont des grandeurs quadratiques, *i.e.* non linéaires.
- ◇ En conséquence de quoi **il n'existe pas de notation complexe** pour la puissance ou l'énergie.
- ◇ En régime sinusoïdal nous parlerons davantage de la puissance moyenne reçue.

Un dipôle en convention récepteur reçoit en moyenne la puissance  $P$  telle que

$$P = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \\ i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$



### III.3.ii – d'autres expressions

- ◇ Pour calculer la puissance moyenne reçue, nous pourrions utiliser la notation complexe de la tension et de l'intensité.

La puissance moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal forcé s'écrit

$$P = \frac{1}{2} \Re(\underline{U}_m \times \underline{I}_m) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} I_m^2 \Re(\underline{Z}) \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2} U_m^2 \Re(\underline{Y})$$



Pour une fois, dans les expressions ci-dessus, il s'agit bien des amplitudes réelles.

### III.3.iii – impédances usuelles

- ◇ En régime sinusoïdal forcé, sans surprise, la puissance moyenne reçue par un résistor est forcément positive car elle s'écrit

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2$$

En régime sinusoïdal forcé, les bobines idéales et les condensateurs idéaux ne consomment pas d'énergie et, donc, reçoivent une puissance moyenne nulle.

- ◇ En fait, bobines et condensateurs idéaux passent autant de temps à recevoir de l'énergie qu'à la restituer.

### III.3.iv – valeur efficace

La valeur efficace  $U_{\text{eff}}$  d'un signal  $u(t)$  périodique s'écrit

$$U_{\text{eff}}^2 = \langle u^2(t) \rangle \quad \text{ou} \quad U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

La valeur efficace d'un signal représente la valeur à donner à un signal constant pour transporter la même puissance.

$$\text{Pour un signal sinusoïdal } U_{\text{eff}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

- ◇ Cette relation n'est vraie que pour un signal parfaitement sinusoïdal de valeur moyenne nulle !
- ◇ L'électricité disponible dans les prises a une tension de 230 V efficace.

### III.3.v – pour la décomposition en série de FOURIER

- ◇ La non linéarité de la puissance semble sonner le glas de la notation complexe et de la décomposition en série de FOURIER pour les signaux non sinusoïdaux. Mais en fait non !

Dans un circuit linéaire, la puissance totale reçue par un dipôle de la part d'un signal non sinusoïdal est la somme des puissances reçues par chacune des harmoniques.

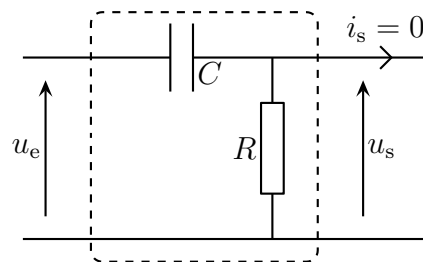
- ◇ C'est un résultat absolument stupéfiant et génial. Sans lui, les calculs effectués sur les puissances seraient bien plus difficiles.
- ▲ Nous ne faisons que dire ici qu'il n'y a pas d'interférence entre des signaux de pulsation différente.

## III.4 – Filtres d'ordre 1

### III.4.i – filtre passe-haut

#### ★ montage et fonction de transfert

- ◇ Considérons le montage suivant.



- ◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

#### ★ forme canonique

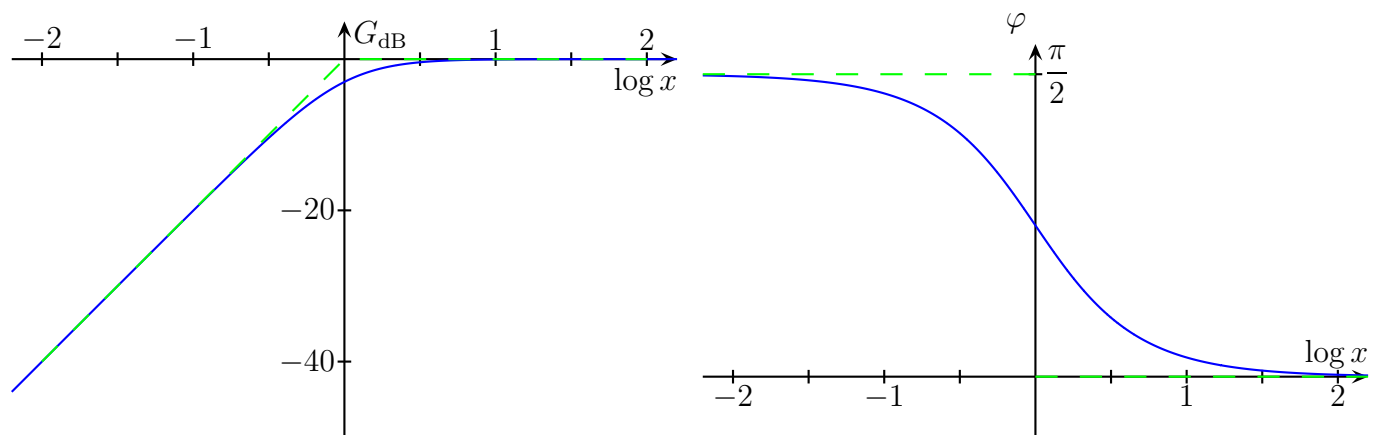
- ◇ La forme canonique d'un passe-haut du premier ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{jx}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

- ◇  $x = \frac{\omega}{\omega_{\text{caractéristique}}}$  est appelé la pulsation réduite.

## ★ diagrammes de BODE

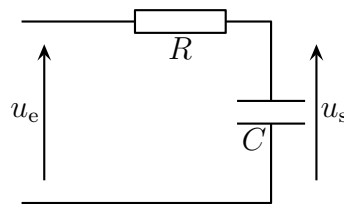
- ◇ Rappelons qu'il ne faut pas confondre le gain  $G = |\underline{H}(jx)|$  avec le gain en décibels  $G = 20 \log |\underline{H}(jx)|$
- ◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant  $H_0 = 1$ , à :



## III.4.ii – filtre passe-bas

## ★ montage et fonction de transfert

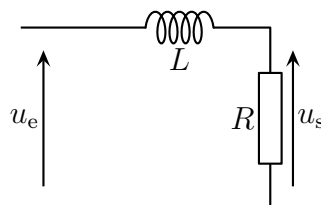
- ◇ Considérons le montage suivant.



- ◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ☹ *Remarque.* En pratique, le montage ci-dessous ne fonctionne pas en tant que filtre passe-bas à cause du caractère capacitif de la bobine en hautes fréquences.



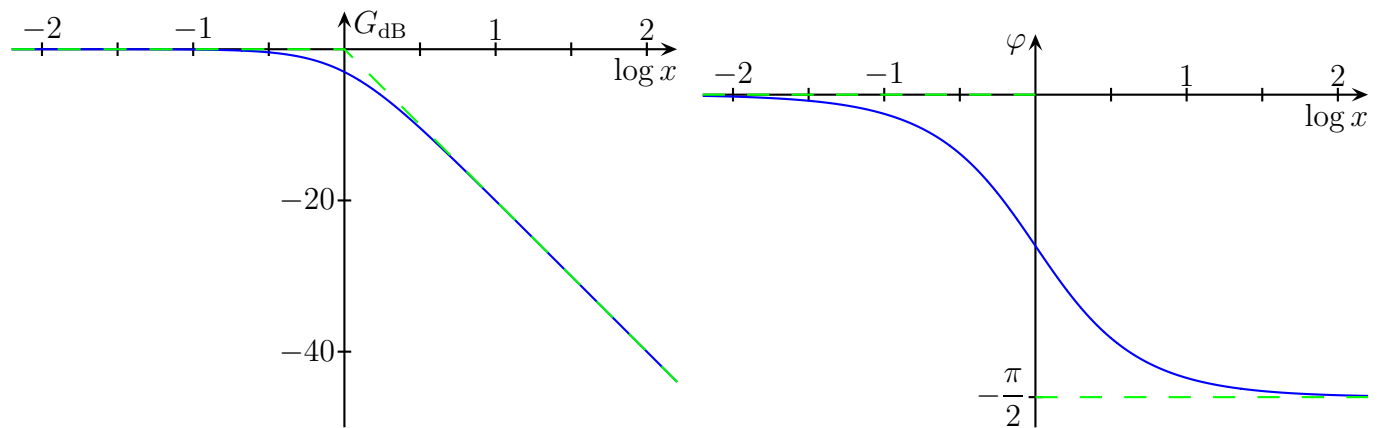
## ★ forme canonique

- ◇ La forme canonique d'un passe-bas du premier ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

### ★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant  $H_0 = 1$ , à :



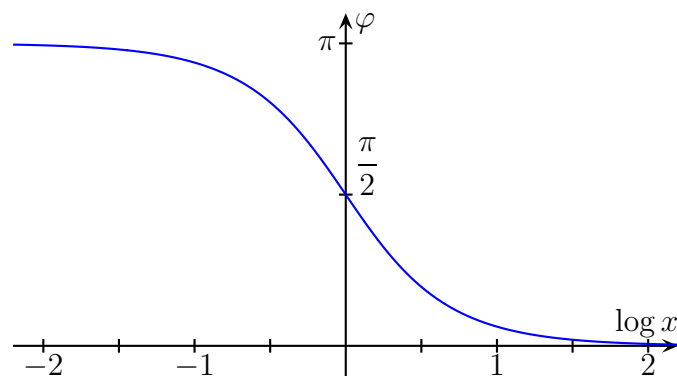
### III.4.iii – d'autres types

◇ Il n'existe pas que ces deux types de filtres !

### ★ déphaseur

◇ C'est un filtre de gain constant mais de déphasage non constant.

◇ Son diagramme de BODE en phase ressemble à

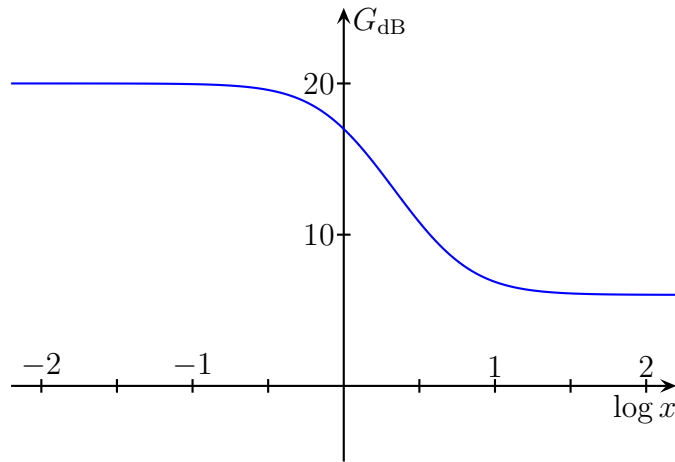


### ★ atténuateur

◇ C'est un cas dont la seule difficulté est de ne pas s'écrire ni sous la forme canonique d'un passe-bas ni sous celle d'un passe-haut.

◇ En conséquence de quoi, vouloir absolument écrire toute fonction de transfert sous une forme connue peut mener droit dans le mur.

◇ Son diagramme de BODE en gain en décibel ressemble à



## III.5 – Filtres d'ordre 2

### III.5.i – utilité

- ◇ L'intérêt des filtres d'ordre 1 et 2 est que toute fonction de transfert peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions de transfert d'ordre inférieur ou égal à 2, car tout polynôme peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

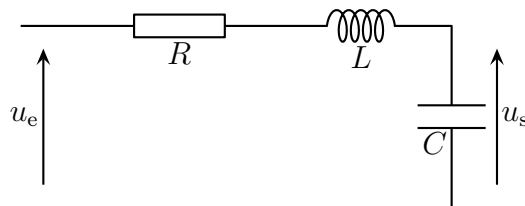
$$\underline{H}(jx) = \frac{\nu_0 + \nu_1(jx) + \nu_2(jx)^2 + \dots + \nu_n(jx)^n}{\delta_0 + \delta_1(jx) + \delta_2(jx)^2 + \dots + \delta_n(jx)^n} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{H}(jx) = \prod \frac{N_{0,i} + N_{1,i}(jx) + N_{2,i}(jx)^2}{D_{0,i} + D_{1,i}(jx) + D_{2,i}(jx)^2}$$

- ◇ Par ordre (au numérateur et au dénominateur), il y a :
- une variation de pente de  $\pm 20$  db/déc ;
  - un déphasage de  $\pm \pi/2$ .

### III.5.ii – filtre passe-bas

#### ★ montage et fonction de transfert

- ◇ Considérons le montage suivant.



- ◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

#### ★ forme canonique

- ◇ La forme canonique d'un passe-bas du second ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$



☞ *Remarque.* Pour se souvenir du dénominateur il suffit de penser à la forme canonique des équations différentielles d'ordre 2.

★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant  $H_0 = 1$  et pour plusieurs valeurs du facteur de qualité  $Q$ , à :

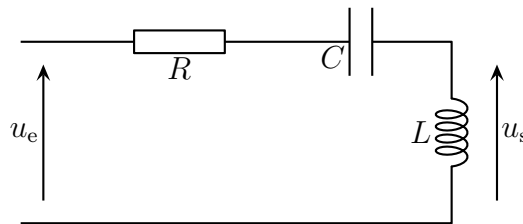


◇ Nous constatons qu'il peut y avoir des phénomènes de résonance, ce qui n'est pas souhaitable car cela transforme un filtre passe-bas en filtre passe-bande.

III.5.iii – filtre passe-haut

★ montage et fonction de transfert

◇ Considérons le montage suivant.



◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

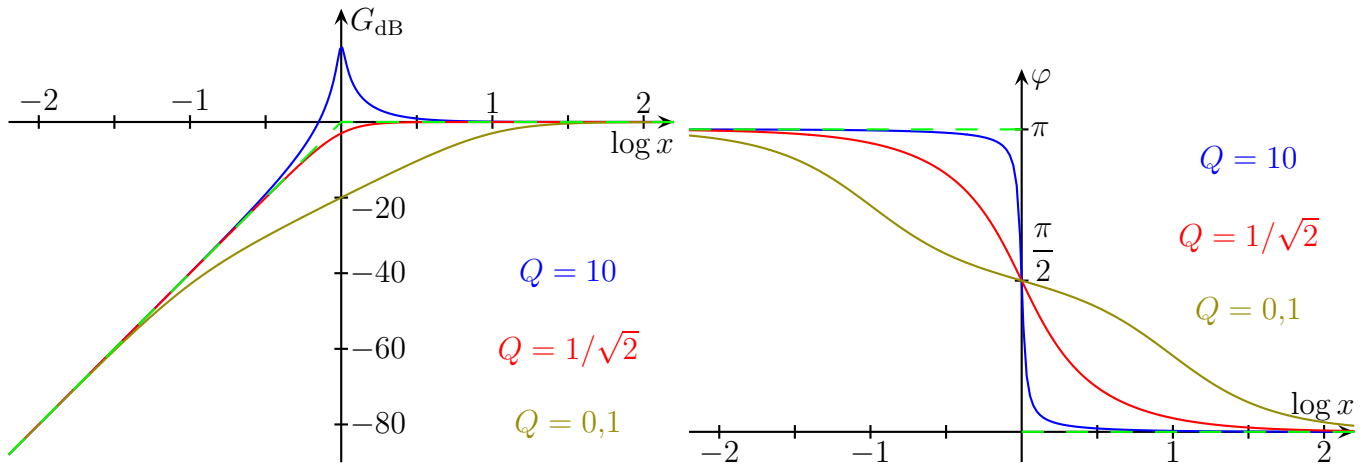
★ forme canonique

◇ La forme canonique d'un passe-haut du second ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant  $H_0 = 1$  et pour plusieurs valeurs de facteur de qualité  $Q$ , à :

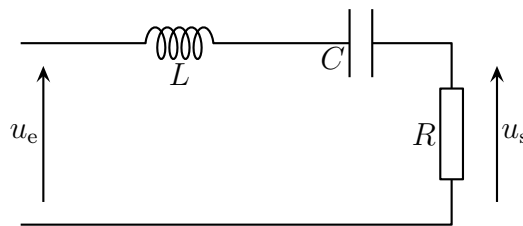


◇ Là aussi les phénomènes de résonance ne sont pas souhaitables.

III.5.iv – filtre passe-bande

★ montage et fonction de transfert

◇ Considérons le montage suivant.



◇ Nous trouvons rapidement que la fonction de transfert en tension s'écrit

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

★ forme canonique

◇ La forme canonique d'un passe-bande du second ordre s'écrit

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{j \frac{x}{Q}}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

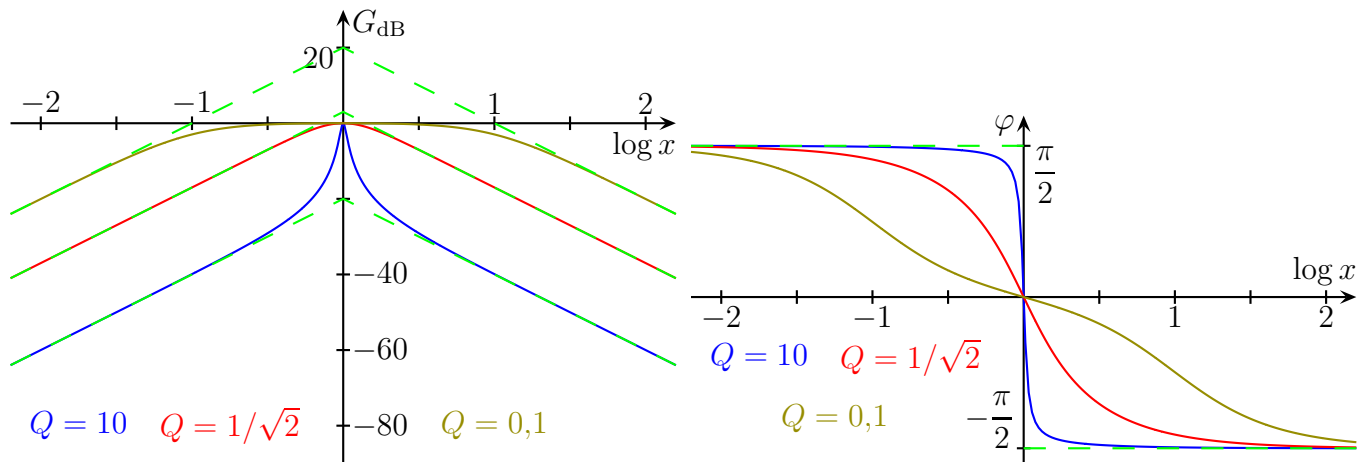
◇ Le numérateur n'est autre que le 2<sup>e</sup> terme du dénominateur.

◇ Une autre manière (plus pratique en général) d'écrire cette fonction de transfert est

$$\underline{H}(jx) = H_0 \times \frac{1}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec} \quad H_0 \geq 0$$

### ★ diagrammes de BODE

◇ Les diagrammes de BODE pour ce filtre ressemblent, en prenant  $H_0 = 1$  et pour plusieurs valeurs de facteur de qualité  $Q$ , à :



◇ Ici, contrairement aux autres filtres, les phénomènes de résonance sont recherchés.

## III.6 – Stabilité d'un filtre

### III.6.i – définition

Un filtre est dit *stable* lorsque la sortie est bornée à tout instant et quelle que soit la pulsation d'entrée.

### III.6.ii – critères de stabilité

Pour qu'un filtre d'ordre 1 ou 2 soit stable, il faut :

- que le polynôme en  $(jx)$  du dénominateur soit d'ordre plus élevé ou égal à celui du numérateur ;
- que le polynôme en  $(jx)$  du dénominateur ait tous ses coefficients non nuls **et** de même signe.

◇ La 2<sup>e</sup> condition est aussi connue sous le nom de *critère de CAUCHY*.

◇ Insistons : ce n'est valable que pour les filtre d'ordre 1 ou 2.

# Circuits électriques

## Au niveau du cours

### ★ Programme concerné

- ◇ Programme de 1<sup>re</sup> année :
  - I.B. Électrocinétique.
  - III.A. Circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé.

### ★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
  - dipôle, courant, tension, intensité, potentiel ;
  - convention générateur / récepteur, caractéristique ;
  - résistor, condensateur idéal, bobine idéale, générateur idéal de tension / de courant ;
  - armature, charge ;
  - résistance, capacité, inductance, force électromotrice, courant électromoteur ;
  - maille, nœud, circuit, pont diviseur ;
  - association série / parallèle de dipôles ;
  - puissance reçue / fournie / dissipée ;
  - effet JOULE ;
  - circuits d'ordre 1 / d'ordre 2 ;
  - constante de temps, pulsation propre, facteur de qualité ;
  - régime apériodique / critique / pseudo-périodique ;
  - régime transitoire / forcé / permanent / continu ;
  - signal périodique ;
  - signal sinusoïdal, pulsation, phase instantannée, phase à l'origine, amplitude ;
  - série de FOURIER / spectre / valeur moyenne / fondamental / harmonique d'ordre  $n$  ;
  - circuit linéaire ;
  - notation complexe, amplitude réelle / complexe ;
  - impédance, admittance, résistance, réactance, conductance ;
  - puissance active, déphasage, valeur efficace ;
  - filtre, gain, gain en décibels, diagramme de BODE, pulsation de coupure ;
  - stabilité d'un filtre.

### ★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
  - tension en volt (V), intensité en ampère (A) ;
  - résistance en ohm ( $\Omega$ ), conductance en siemens (S), inductance en henry (H), capacité en farad (F), charge en coulomb (C) ;
  - puissance en watt (W), énergie en joule (J) ;
  - constante de temps (s), pulsation en radian par seconde ( $\text{rad.s}^{-1}$ ), facteur de qualité (sans unité) ;
  - impédance ( $\Omega$ ), réactance ( $\Omega$ ), admittance (S).
- ◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leur interprétation :
  - $\tau = RC$  ;  $\tau = \frac{L}{R}$  ;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ;  $Q_{\text{série}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  ;

→  $[jRC\omega] = 1$  ;  $[LC\omega^2] = 1$  ;  $[L\omega] = (\Omega)$  ;  $[C\omega] = (\Omega)^{-1}$ .

◇ Connaître les valeurs de :

- résistance usuelle en TP, capacité usuelle en TP, inductance usuelle en TP ;
- résistance de sortie d'un GBF, résistance d'entrée d'un oscilloscope / d'un voltmètre.

### ★ Les lois

◇ Sont à connaître :

- lois caractéristiques d'un résistor / d'une bobine idéale / d'un condensateur / d'un générateur idéal ;
- loi de KIRCHHOFF : loi des mailles, loi des nœuds ;
- loi des nœuds en terme de potentiels ;
- pont diviseur de tension / de courant ;
- loi d'association série et parallèle de résistors / bobines idéales / condensateurs idéaux ;
- loi d'association parallèle de deux résistors ;
- équivalence entre les modèles de THÉVENIN et de NORTON d'un générateur réel ;
- puissance instantanée reçue ;
- puissance dissipée par effet JOULE ;
- énergie instantanée contenue dans une bobine idéale / dans un condensateur idéal ;
- impédance et admittance d'un résistor / d'une bobine idéale / d'un condensateur idéal ;
- puissance active reçue par un dipôle ;
- valeur efficace d'un signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle.

### ★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- le comportement en régime transitoire d'un circuit d'ordre 1 ;
- le comportement des différents types de régime transitoire d'un circuit d'ordre 2 ;
- l'effet d'un filtre d'ordre 1, d'ordre 2 ;
- le comportement en basse et hautes fréquences de la bobine, du condensateur.

## Au niveau de l'analyse

### ★ Analyse physique

- ◇ Savoir compter le nombre de mailles, de nœuds.
- ◇ Savoir repérer les dipôles en série, en parallèle.

### ★ Analyse technique

- ◇ Savoir quelle approche utiliser (nodale ou maillère) suivant le circuit.

## Au niveau des savoir-faire

### ★ outils mathématiques

- ◇ Connaître parfaitement :
  - la méthode de résolution de système linéaire de deux équations à deux inconnues ;
  - la méthode de résolution d'une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ;
  - la forme des solutions en régime transitoire des évolutions d'ordre 2.

★ **petits gestes**

◇ Savoir :

- transformer un circuit en un circuit équivalent ;
- écrire les lois de mailles en terme de courant et les lois des nœuds en terme de potentiel ;
- trouver la nature d'un filtre avec son comportement en HF et BF ;
- savoir passer de la notation réelle à la notation complexe et réciproquement ;
- savoir passer d'une fonction de transfert à une équation différentielle.

★ **exercices classiques**

◇ Savoir refaire :

- le circuit  $R,C$  et  $R,L$  en régime transitoire ;
- le circuit  $R,L,C$  série en régime transitoire ;
- le circuit  $R,L,C$  série en tant que filtre.