

## Les équations de Maxwell

### ✱ Exercice 1

Il s'agit ici d'un exercice d'application de cours. Autrement dit tout ce qui est modélisation physique est absent de cet exercice. Il faut, en revanche, interpréter a posteriori ce qui est un résultat de calcul.

**1.** Ici il y a deux équations de MAXWELL parlant du champ électrique. Il faut que les deux soient vérifiées.

En ce qui concerne l'équation de MAXWELL – GAUSS, nous pouvons remarquer qu'elle s'écrit en l'absence de charge  $\text{div } \vec{E} = 0$  ce qui est bien vérifié ici car :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{avec} \quad E_x = E_0 \cos(\omega t + k z) \quad E_y = E_0 \sin(\omega t + k z) \quad \text{et} \quad E_z = 0$$

Pour voir si l'équation de MAXWELL – AMPÈRE est aussi vérifiée, nous devons nous débarrasser du champ magnétique. Pour cela, nous allons utiliser une méthode classique, celle du « rotationnel du rotationnel ».

Pour trouver l'équation vérifiée par  $\vec{E}$ , calculons :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E}$$

Avec l'équation de MAXWELL – FARADAY et celle de MAXWELL – AMPÈRE, nous arrivons à :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Il s'agit bien d'une équation de propagation d'onde de vecteur d'onde  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ .

Le laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes n'est autre que le vecteur des laplaciens des coordonnées.

Ainsi nous devons avoir :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad E_x = E_0 \cos(\omega t + k z)$$

Même chose avec  $E_y = E_0 \sin(\omega t + k z)$ .

Nous pouvons alors aisément vérifier que le champ électrique vérifie les équations de MAXWELL.

**2.** Pour déterminer  $\vec{B}$ , nous pouvons utiliser deux équations de couplage : MAXWELL – FARADAY ou MAXWELL – AMPÈRE. Étant donné que c'est  $\vec{B}$  l'inconnue, mieux vaut utiliser MAXWELL – FARADAY car primitiver une dérivée temporelle est plus facile que primitiver un rotationnel.

Nous obtenons (à un champ constant – pas forcément uniforme – près indépendant de  $\vec{E}$ ) :

$$\vec{B} = -\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} E_0 \sin(\omega t + k z) \vec{u}_x + \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} E_0 \cos(\omega t + k z) \vec{u}_y$$

**3.** L'expression du vecteur de POYNTING donne tout de suite :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\Pi} = -\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} E_0^2 \vec{u}_z$$

Nous reconnaissons la propagation à la célérité  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  de l'énergie  $\varepsilon_0 E_0^2$  (due au champ  $\vec{E}$  et au champ  $\vec{B}$ ) dans le sens  $-\vec{u}_z$ .

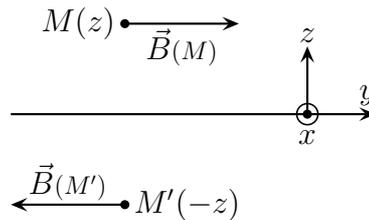
## ✱ Exercice 2

1. La description par coordonnées cartésienne est imposée. Ceci dit, si tel n'avait pas été le cas, il aurait été plus que très judicieux de le faire étant donné la géométrie de type « plan » de la distribution de courant.

La distribution est invariante par translation sur  $\vec{u}_x$  et sur  $\vec{u}_y$ , la norme du champ magnétique ne dépend alors que de  $z$ .

Soit  $M$  un point quelconque de l'espace. Le plan  $(Mxz)$  est plan de symétrie des courants donc est plan d'antisymétrie du champ donc  $\vec{B}(M)$  est orthogonal à ce plan en ce point, *i.e.*  $\vec{B}(M)$  est porté par  $\vec{u}_y$ .

Enfin le plan  $Oxy$  est plan de symétrie des sources ce qui signifie qu'il est un plan d'antisymétrie des champs et, donc, tel que  $B(-z) = -B(z)$ .

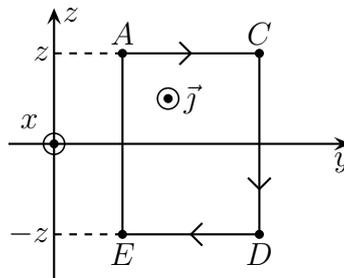


2. Analyse technique. Étant donné la haute symétrie du problème, un bon théorème d'AMPÈRE ne fera pas de mal. En ce qui concerne le schéma, nous devons y faire apparaître tout ce qui est important. Or là le champ est porté par  $\vec{u}_y$  et dépend de  $z$  : nous « devons » donc faire un schéma dans le plan  $(Myz)$ .

De plus plus le contour d'AMPÈRE doit respecter les plans de symétrie et les invariances par rotation. Nous allons donc choisir un rectangle passant par  $M$ .

Choisissons un contour d'AMPÈRE sous forme d'un rectangle dont les côtés supérieur et inférieur sont de cotes  $z$  et  $-z$ .

Comme  $\vec{B}$  est porté par  $\vec{u}_y$ , la circulation élémentaire  $dC = \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  sera non nulle uniquement sur les portions  $AC$  et  $DE$  ce qui donne  $C = 2 B(z) \ell$  en notant  $\ell = AC = DE$ .



L'intensité du courant enlacé n'est autre que le flux de  $\vec{j}$  à travers la surface délimitée par  $ACDE$ , ce qui donne (attention au signe dû à l'orientation de la surface) :

$$I_{\text{enlacé}} = -j a \ell \text{ si } z > \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad I_{\text{enlacé}} = -2 j z \ell \text{ si } 0 < z < \frac{a}{2}$$

Avec le théorème d'AMPÈRE  $C = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$ , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } z > \frac{a}{2} & \vec{B} = -\frac{\mu_0 j a}{2} \vec{u}_y \\ \text{pour } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} & \vec{B} = -\mu_0 j z \vec{u}_y \\ \text{pour } z < -\frac{a}{2} & \vec{B} = \frac{\mu_0 j a}{2} \vec{u}_y \end{array} \right.$$

3. Ici l'énoncé ne nous donne pas le choix : nous devons utiliser l'équation locale de MAXWELL – AMPÈRE. Cela ne va poser aucune difficulté étant donné que les coordonnées de description sont cartésiennes et que nous connaissons bien les composantes de tous les opérateurs vectoriels en cartésiennes (merci nablà !)

L'équation de MAXWELL – AMPÈRE s'écrit, en statique,  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

Compte tenu de la première question, à savoir que  $\vec{B}(M)$  s'écrit  $\vec{B}(M) = B(z) \vec{u}_y$ , cette équation devient :

$$\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} 0 \\ B_y(z) \\ 0 \end{array} \right) = \mu_0 \vec{j} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dB}{dz} = -\mu_0 j \quad \text{pour } |z| < \frac{a}{2} \\ \frac{dB}{dz} = 0 \quad \text{pour } |z| \geq \frac{a}{2} \end{array} \right.$$

Ces équations s'intègrent alors en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } z > \frac{a}{2} \quad B = b_1 \\ \text{pour } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2} \quad B = -\mu_0 j z + b_2 \\ \text{pour } z < -\frac{a}{2} \quad B = b_3 \end{array} \right. \quad \text{avec } b_1, b_2 \text{ et } b_3 \text{ des constantes}$$

Comme  $B(0) = 0$  (imparité du champ oblige), nous pouvons trouver  $b_2$  et  $b_1$  et  $b_3$  en utilisant la continuité du champ magnétique (car il n'y a pas de courant surfaciques).

Et nous retrouvons bien le même résultat.

#### REMARQUE

Étant donné que la distribution de courant était volumique, il ne pouvait **pas** y avoir physiquement de courant surfaciques qui modélisent, rappelons-le, des courants volumiques vus « de loin », *i.e.* lorsque l'épaisseur sur laquelle se répartissent les courants volumiques sont très petits devant les grandeurs géométriques du problème.

Ici pour avoir un courant surfacique et un courant volumique, il aurait fallu deux distributions volumiques évoluant spatialement avec deux longueurs caractéristiques (comme l'effet de peau) très différentes ce qui paraît d'autant moins probable que le courant est continu (donc l'épaisseur de peau est infinie) et que rien ne laisse à penser que le matériau est non uniforme (car l'épaisseur de peau est aussi fonction de la conductivité).

Allons un peu plus loin en remarquant que dans le cas d'une distribution volumique de charges, il est rarement précisé que celle-ci n'a pas de charges surfaciques.

**Morale** Lorsque les symétries sont hautes et que la description est cartésienne, au lieu d'utiliser les théorèmes de GAUSS et d'AMPÈRE, nous utiliserons désormais les équations locales de MAXWELL – GAUSS et MAXWELL – AMPÈRE pour trouver le résultat car elles sont plus rapides étant donné qu'elles ne nécessitent pas l'introduction de contour ou de surface particuliers.

4. *Analyse physique.* La puissance dissipée dans un matériaux sera toujours la puissance dissipée par effet JOULE. C'est donc ce que nous devons chercher à déterminer.

*Analyse technique.* La puissance volumique dissipée par effet JOULE s'écrit  $\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ . Pour la déterminer explicitement, soit nous allons tout écrire en fonction de  $\vec{j}$  soit tout en fonction de  $\vec{E}$ . Ici, comme nous avons un conducteur et que nous connaissons  $\vec{j}$ , autant écrire tout en fonction de  $\vec{j}$ .

Comme il s'agit d'un conducteur, le champ électrique à l'intérieur de celui-ci s'écrit  $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$  et

ainsi la puissance volumique cédée par le champ au matériau vaut  $\mathcal{P}_p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}$ .

« Retrouver le résultat à l'aide du vecteur de POYNTING » revient à faire un bilan énergétique.

Le vecteur de POYNTING à l'intérieur de la plaque vaut  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{j^2}{\gamma} z \vec{u}_z$ .

Le vecteur de POYNTING à l'extérieur de la plaque est nulle puisque le champ électrique est nul.

Pour comparer l'expression du vecteur de POYNTING avec le résultat précédent, faisons un bilan énergétique sur un volume infinitésimal  $dx dy dz$ .

La puissance qui rentre vaut  $[\Pi(z) - \Pi(z + dz)] dy dx$  (flux du vecteur de POYNTING) et la puissance perdue s'écrit  $\mathcal{P}_p dx dy dz$ .

En régime permanent continu (*i.e.* stationnaire), toute la puissance rentrante doit être perdue et :

$$[\Pi(z) - \Pi(z + dz)] dy dx = \mathcal{P}_p dx dy dz \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_p = -\frac{d\Pi}{dz}$$

C'est qui est bien le résultat attendu.

**A.N. :**  $\mathcal{P}_p = 16 \text{ kW.m}^{-3}$  Ce n'est pas une si grande puissance que cela lorsqu'on songe aux plaques électrique qui peuvent chauffer avec une puissance de 2 kW mais dans un volume bien plus restreint (20 à 30 cm de diamètre pour un à deux centimètre d'épaisseur) ce qui correspond à une puissance volumique  $\mathcal{P}_J = 400 \text{ kW.m}^{-3}$ .

#### REMARQUE

Nous pouvons aussi repartir de l'équation de conservation de l'énergie qui s'écrit  $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = -\mathcal{P}_p$  soit, en régime stationnaire :  $\text{div } \vec{\Pi} = -\mathcal{P}_p$ .

Dans le cas d'un régime permanent mais non stationnaire (typiquement les régime sinusoïdaux forcés), nous aurions écrit le bilan sous la forme d'une moyenne temporelle :  $\langle \text{div } \vec{\Pi} \rangle = -\langle \mathcal{P}_p \rangle$ .

### ✿ Exercice 3

Le fait que cet exercice soit la suite du précédent mais sans les courants signifie seulement que la géométrie du conducteur étudié reste identique : une plaque infinie d'épaisseur  $a$ .

**1.** D'après l'équation de MAXWELL – FARADAY, comme  $\vec{B}$  est constant, il n'y a pas de champ électrique dans la plaque, donc, puisque qu'il s'agit d'un conducteur, pas de courant.

De plus comme le champ magnétique est continu en  $z = \pm \frac{a}{2}$  (pas de courant surfacique étant donné l'approche mésoscopique) le champ magnétique à l'intérieur de la plaque est égal au champ extérieur : la plaque ne modifie pas le champ magnétique.

**2. (a)** Avec l'équation de MAXWELL – FARADAY  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , nous voyons bien que la variation temporelle de  $\vec{B}$  est à l'origine de d'un champ électrique, donc de courants puisqu'il s'agit d'un conducteur.

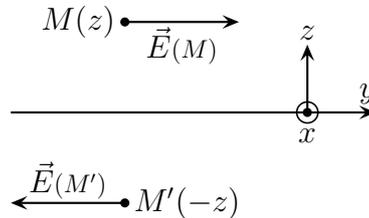
**2. (b)** Comme le dispositif est invariant par translation sur  $\vec{u}_x$  et sur  $\vec{u}_y$ , le champ électrique ne dépendra que de  $z$ .

Toujours d'après l'équation de MAXWELL – FARADAY, nous voyons que la variation temporelle de  $\vec{B}$  est la source de  $\vec{E}$ .

Nous pouvons donc utiliser les arguments de symétries entre source et champ, comme en première année, en faisant attention que la rotationnel « inverse » les comportements vis-à-vis des plans de symétrie.

Ainsi, pour tout  $M$  quelconque de l'espace, le plan  $(Mxz)$  est plan de symétrie du champ  $\vec{B}$ , c'est donc un plan d'antisymétrie des courants, donc de  $\vec{E}$ , donc  $\vec{E}$  est orthogonal à ce plan en  $M$ , ce qui donne  $\vec{E} = E(z) \vec{u}_y$ .

De même le plan  $(Oxy)$  est plan de symétrie pour le champ  $\vec{B}$  donc est plan d'antisymétrie pour  $\vec{E}$  ce qui donne (cf. schéma) :  $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ .



**2. (c)** Analyse technique. Certes l'énoncé invite fortement à déterminer la circulation de  $\vec{E}$  sur un contour bien choisi, mais nous savons qu'il y a plus rapide étant donné que la distribution est à haute symétrie et qu'elle est décrite par des coordonnées cartésiennes : intégrer directement les équations des MAXWELL.

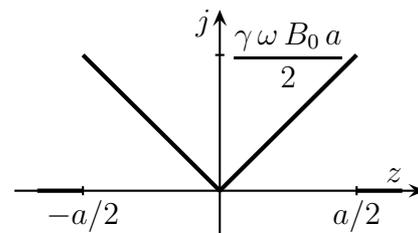
Ici, compte tenu de la forme particulière de  $E$ , la projection de l'équation de MAXWELL – FARADAY sur  $\vec{u}_x$  donne :

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(z) \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow -\frac{dE}{dz} = -\frac{dB}{dt} = +\omega B_0 \sin(\omega t)$$

Nous en déduisons alors, puisque  $E(0) = 0$  :  $E(z) = -\omega B_0 z \sin(\omega t)$ , expression valable quel que soit  $z$ .

Comme le matériau est conducteur  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  n'existe que dans le matériau et nous avons

$$\begin{cases} \vec{j} = -\gamma \omega B_0 z \sin(\omega t) \vec{u}_y & \text{pour } |z| < \frac{a}{2} \\ \vec{j} = \vec{0} & \text{pour } |z| > \frac{a}{2} \end{cases}$$



☞ Remarque. ici si nous avions voulu faire « à la théorie d'AMPÈRE », nous aurions calculé la circulation de  $\vec{E}$  sur un rectangle contenu dans le plan  $(Myz)$ , passant par  $M$  et respectant les symétries. Mais intégrer l'équation de MAXWELL – FARADAY reste plus rapide avec les coordonnées cartésiennes.

**3.** La puissance volumique dissipée par effet Joule vaut  $\mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma j^2$  et ainsi, dans la tranche située entre  $z$  et  $z + dz$ , la puissance vaut  $d\mathcal{P}_J = \gamma \omega^2 B_0^2 z^2 \sin^2(\omega t) S dz$ .

En valeur moyenne temporelle nous avons  $\langle d\mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{2} \gamma \omega^2 B_0^2 z^2 S dz$  et donc, pour tout le cylindre, par extensivité de la puissance dissipée :

$$p(\tau) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \langle d\mathcal{P}_J \rangle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2} \gamma \omega^2 B_0^2 z^2 S dz = \frac{1}{24} \gamma B_0^2 \omega^2 S a^3$$

$$\text{Et avec } \tilde{p} = \frac{p(\tau)}{S a} : \tilde{p} = \frac{1}{24} \gamma B_0^2 \omega^2 a^2 = 637 \text{ MW.m}^{-3}$$

4. La puissance moyenne volumique dissipée est proportionnelle à l'épaisseur au carré, l'épaisseur devant être comptée perpendiculairement au champ. Cela s'explique qualitativement par le fait que les courants sont nuls au milieu de la plaque et ne cessent d'augmenter en s'éloignant de ce centre. Dans ces conditions, plus les bords sont loin (*i.e.* plus la plaque est épaisse) plus les courants seront intenses et plus il y a aura d'énergie dissipée.

Dans le cas où le champ est parallèle à  $Oz$ , l'épaisseur vaut  $\frac{a}{N}$  la puissance volumique dissipée par chaque plaque est donc proportionnelle à  $\frac{1}{N^2}$  et comme il y a  $N$  plaques, la puissance volumique totale dissipée est proportionnelle à  $\frac{1}{N}$ .

Dans le cas où le champ est parallèle à  $Ox$ , l'épaisseur de chaque plaque vaut  $a$  la puissance volumique dissipée par chaque plaque ne dépend donc pas de  $N$  et comme il y a  $N$  plaques, la puissance totale dissipée est proportionnelle à  $N$ .

Conclusion : lorsque le champ est dirigée parallèlement au feuilletage, la puissance dissipée est bien moindre.

☞ *Remarque.* tout ceci à condition qu'il soit possible de négliger l'effet de peau.

### ✳ Exercice 4

1. Dans le cadre de l'ARQS, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction, ce qui implique que l'équation MAXWELL – AMPÈRE s'écrit  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

*Analyse technique.* Pour déterminer une équation aux dérivées partielles en électromagnétisme, rien de tel qu'un bon « rotationnel du rotationnel » de la grandeur intéressante.

Calculons  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$  de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) &= \overrightarrow{\text{grad}} (\underbrace{\text{div} \vec{B}}_{=0}) - \Delta \vec{B} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}} (\mu_0 \vec{j}) = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} (\gamma \vec{E}) = \gamma \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'aboutir au résultat attendu.

2. Le dispositif étudié est invariant par translation sur  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  donc  $\vec{B}(M,t)$  ne dépend que de  $x$  et de  $t$ .

Soit  $M$  un point quelconque. Le plan  $Mxy$  est plan de symétrie de la plaque et plan d'antisymétrie du champ magnétique. Le champ magnétique  $\vec{B}$  est donc orthogonal à ce plan en un point, *i.e.*  $\vec{B}$  est porté par  $\vec{u}_z$ .

Finalement  $\vec{B}(M,t) = B(x,t) \vec{u}_z$ .

En notation complexe et en projection sur  $\vec{u}_z$ , l'équation aux dérivées partielles donne :

$$\frac{d^2 \underline{B}_0}{dx^2} = i\omega \gamma \underline{B}_0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{B}_0 = \underline{\alpha} \exp\left((1+i)\frac{x}{\delta}\right) + \underline{\beta} \exp\left(-(1+i)\frac{x}{\delta}\right)$$

Où  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$  et  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  sont deux constantes à déterminer.

Les conditions aux limites  $\underline{B}_0 \left(\pm \frac{e}{2}\right) = B_0$  donnent (après quelques calculs sans difficulté) :

$$\underline{B}_0(x) = B_0 \frac{\cosh\left((1+i)\frac{x}{\delta}\right)}{\cosh\left((1+i)\frac{e}{2\delta}\right)}$$

Nous pouvons déterminer le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  à partir de l'équation de MAXWELL – AMPÈRE dans le cadre de l'ARQS et le champ électrique à partir de la loi d'Ohm locale.

Nous trouvons :

$$\vec{j} = -\frac{B_0}{\mu_0} \frac{1+i}{\delta} \frac{\sinh\left(\frac{(1+i)x}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{(1+i)\frac{e}{2\delta}}{\delta}\right)} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$$

☛ *Remarque.* la différence entre cet exercice et le numéro 2 est qu'ici l'effet de peau est pris en compte.

### ✿ Exercice 5

[1.] *Analyse physique.* Ici nous devons calculer des champs électrique et magnétique. Nous devons donc pour cela connaître la répartition de charge et de courant. La répartition de charge est connue (charge au centre et explosion de charges à la vitesse  $v_0$ ). La répartition de courant est, elle aussi, connue étant donné que nous connaissons le mouvement de toutes les charges. Maintenant « yapuke ».

La symétrie sphérique du problème implique (cf. raisonnement dans l'exercice précédent)  $\vec{E} = E(r,t) \vec{u}_r$  et  $\vec{B} = \vec{0}$ .

Pour calculer  $\vec{E}$ , étant donné les symétries, nous allons utiliser le théorème de GAUSS, mais pour cela il faut connaître la charge  $Q(r,t)$  contenue dans la sphère de rayon  $r$  à l'instant  $t$ .

À l'instant  $t$ , les charges émises par le point  $O$  ont parcouru au plus la distance  $v_0 t$ . Au delà de cette distance, il n'y a donc pas encore de charge et dans la sphère de rayon  $r > v_0 t$  la charge totale n'est autre que celle du point initial, à savoir nulle.

Pour  $r < v_0 t$ , au lieu d'essayer de calculer la densité volumique de charge et de sommer sur toute la boule, nous pouvons simplement remarquer que toutes les charges contenue dans la sphère de rayon  $r < v_0 t$  ont été émises entre l'instant  $t_0 = t - \frac{r}{v_0}$  et  $t$ . Il y a donc, dans cette sphère, la charge que contenait le point  $O$  à l'instant  $t_0$ .

Théorème de GAUSS aidant, nous trouvons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } r > v_0 t, \quad \vec{E}(r,t) = \vec{0} \\ \text{pour } r < v_0 t, \quad \vec{E}(r,t) = \frac{q \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

☛ *Remarque.* il n'a donc pas été besoin de déterminer  $\vec{j}$  en tout point de l'espace pour trouver le champ magnétique.

[2.] La charge comprise entre les deux sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$  à l'instant  $t$  est égale à :

$$Q(r + dr, t) - Q(r) = \frac{\partial Q}{\partial r} dr = 4\pi R^2 dr \rho(r, t)$$

Or nous avons déjà déterminé  $Q(r, t)$  et cela donne donc :

$$Q(r, t) = q \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \left( \rho(r, t) = \frac{q_0}{4\pi r^2 \tau v_0} \exp \left( -\frac{1}{\tau} \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \right) \right)$$

Nous avons ensuite, avec l'expression de  $\vec{j}$  :  $\vec{j}(r, t) = \rho(r, t) \vec{v} = \rho(r, t) v_0 \vec{u}_r$ .

[3.] Nous pouvons vérifier aisément l'équation de conservation de la charge  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$  avec les expressions de  $\vec{j}$  et  $\rho$  trouvées précédemment.

4. Étant donné que le champ magnétique est nul, l'énergie électromagnétique est uniquement sous forme électrique.

La densité volumique d'énergie vaut alors pour  $r < v_0 t$  (elle est nulle pour  $r > v_0 t$ ) :

$$u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r,t) \quad \rightsquigarrow \quad u_{\text{em}} = \frac{q^2 \left( t - \frac{r}{v_0} \right)}{32 \pi^2 \varepsilon_0 r^4}$$

La puissance volumique cédée par le champ au milieu (ici les particules  $\alpha$ ) :

$$\mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P} = \frac{q_0}{16 \pi^2 \varepsilon_0 r^4 \tau} q \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \exp \left( -\frac{1}{\tau} \left( t - \frac{r}{v_0} \right) \right)$$

L'équation locale de conservation de l'énergie  $\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$  se vérifie alors aisément.

REMARQUE

Pour une fois, la puissance cédée ne l'est pas par effet JOULE puisque le milieu n'est pas conducteur : c'est le vide.

Du point de vue de la modélisation, nous avons considéré que les particules éjectées gardaient une vitesse constante ce qui n'est *a priori* pas le cas puisqu'elles sont plongées dans un champ électrique.

Toutefois la conservation de l'énergie nous dit que toute l'énergie électrique « créée » provient des particules (cf. la conservation locale de l'énergie) et donc de la seule énergie qu'elles possèdent : l'énergie cinétique.

Ainsi si l'énergie cinétique des particules est assez grande, il est possible de considérer que l'énergie partie sous forme électrique est négligeable et donc que la vitesse des particules est globalement constante.

## ✳ Exercice 6

*Analyse physique. Ici, étant donné la géométrie du problème (et notamment les deux invariances par translation) nous sommes face à un problème à une dimension. Il s'agit d'un problème d'électromagnétisme où seuls deux potentiels sont imposés, tout le reste étant libre. Cela signifie notamment qu'il va y avoir une rétroaction entre le champ et les charges : les charges vont bouger à cause du champ  $\vec{E}$ , leur présence va engendrer un autre champ  $\vec{E}$  et leur mouvement un champ  $\vec{B}$ . Ces champs vont eux-même modifier le mouvement.*

*Au point de vue de la description, nous avons le potentiel  $V(x)$  inconnu, la vitesse  $v(x)$  et la densité  $\rho(x)$  des charges.  $E(x)$  et le courant  $J(x)$  ne sont pas vraiment des grandeurs descriptives étant donné qu'elles se déduisent immédiatement des autres par  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  et  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ . Ces trois grandeurs nécessitent donc trois lois : la loi d'évolution du potentiel (une loi électromagnétique), la loi d'évolution de la vitesse (loi mécanique) et une loi d'évolution de la charge (conservation de la charge). Après, il suffit de mélanger.*

1. En régime permanent, l'équation de conservation de la charge s'écrit  $\text{div } \vec{J} + 0 = 0$ , i.e.  $\vec{J}$  est à flux conservatif.

Comme  $\vec{J}$  est porté uniquement par  $\vec{u}_x$  par hypothèse, nous en déduisons que  $\frac{dJ_x}{dx} = 0$  et donc que  $J(x) = C^{\text{te}}$ .

2. En utilisant l'équation de MAXWELL – GAUSS et la définition du potentiel électrostatique  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ , nous arrivons à l'équation de POISSON vérifiée par le potentiel  $V(x)$  :

$$\Delta V(x) + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2V(x)}{dx^2} + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = 0}$$

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit, pour un ion :  $\boxed{\frac{1}{2} m v^2(x) + e V(x) = 0}$  car l'énergie mécanique initiale est nulle (pas d'énergie cinétique et le potentiel électrostatique est nul).

Nous voyons alors que le potentiel  $V(x)$  est nécessaire négatif.

Enfin l'expression du vecteur densité de courant ionique donne  $\boxed{\rho(x) v(x) = J_0}$ .

3. En éliminant  $\rho(x)$  et  $v(x)$  entre ces trois équations, nous arrivons à :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{J_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{-2eV(x)}}$$

Pour la résoudre, on multiplie d'abord par  $\frac{dV(x)}{dx}$  avant d'intégrer, ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dV(x)}{dx} \right)^2 = 2 \frac{J_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \sqrt{-V(x)} + K \quad \text{avec} \quad K = C^{\text{te}}$$

Pour déterminer  $K$ , il faut regarder les conditions limites.

Partons de la conservation de l'énergie et dérivons-la par rapport à l'espace :  $v \frac{dv}{dx} = -\frac{e}{m} \frac{dV}{dx}$ .

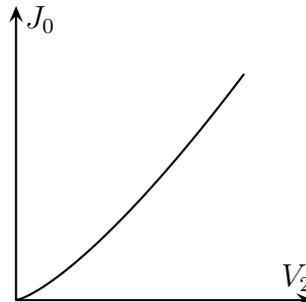
Or, en  $x = 0$ ,  $v = 0$  et  $\frac{dv}{dx}$  reste fini (l'accélération n'est pas infinie)

Finalement  $\frac{dV}{dx}(0) = 0$  ce qui donne  $K = 0$  et l'équation différentielle vérifiée par  $V(x)$  devient une équation à variables séparables (ne pas oublier que  $V(x) < 0$ ) :

$$\frac{dV}{dx} = -\sqrt{4 \frac{J_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} (-V(x))^{1/4}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{V(x) = -\left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}} \times x \right)^{4/3}}$$

4. En  $x = d_0$ ,  $V = V_2$  d'où  $J_0 = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0}{d_0^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} (-V_2)^{3/2}$ .

L'application numérique donne :  $J_0 = 0,86 \cdot 10^{-6} \times (-V_2)^{3/2}$  où  $V_2$  est en volts et  $J_0$  en ampère par mètre carré.



5. Des relations précédentes, nous pouvons trouver par substitution l'expression de la vitesse  $v(x)$  :

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e}{m}} \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} \left( \frac{J_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{3/4} x^{2/3} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{v(x)}{v(d_0)} = \left( \frac{x}{d_0} \right)^{2/3}}$$

L'exposant  $p$  recherché est donc égal à  $\frac{2}{3}$ .

Lorsqu'un mouvement est conservatif et à un seul degré de description, il est toujours possible d'écrire son temps de parcours sous la forme d'une somme de durées élémentaires. Après que cette somme soit techniquement intégrable et qu'elle s'écrive avec des fonctions usuelles, c'est un autre problème. Mais ici, ça marche.

Avec  $v(x) = \frac{dx}{dt}$  nous obtenons une équation à variables séparables :

$$dt = \frac{d_0^{2/3}}{v(d_0)} \frac{dx}{x^{2/3}} \rightsquigarrow \tau = \int_0^{d_0} \frac{d_0^{2/3}}{v(d_0)} \frac{dx}{x^{2/3}} \rightsquigarrow \boxed{\tau = 3 d_0 \sqrt{\frac{m}{-2 e V_2}}}$$

REMARQUE

Ici la contrainte était les potentiels  $V_1$  et  $V_2$ .

Il faut bien voir que ces potentiels doivent *a priori* varier avec le temps car les particules qui partent d'une plaque et qui arrivent sur l'autre vont les modifier.

Pour que les potentiels restent constants, il faut que les plaques soient reliées à des sources infinies de charges (des « chargeostats ») c'est-à-dire à un circuit électrique fermé.

Finalement, nous avons affaire à un dipôle électrocinétique dont la caractéristique est, en convention récepteur,  $I = \alpha U^{3/2}$ .

Il est alors possible de déterminer la puissance nécessaire pour entretenir la situation :  $\mathcal{P} = U I = \alpha U^{5/2}$ , puissance fournie par le générateur au dipôle.

Et que devient cette énergie ? Eh bien elle n'est pas dissipée par effet JOULE mais convertie en énergie interne (en « chaleur ») lors du choc des particules avec la paroi au potentiel  $V_2$  suite à la perte de l'énergie cinétique.

Nous n'avons pas déterminé le champ magnétique car cela n'était pas nécessaire étant donné que le problème était unidimensionnel et que, donc, le champ magnétique ne pouvait pas influencer le résultat.

Ceci étant, des arguments rapides de symétrie montrent facilement que le champ magnétique créé par la distribution de courant est nul. Donc tout va bien !

## ✿ Exercice 7

Ici le problème est clairement scindé en deux parties : d'une part la recherche de la répartition de charge et d'autre part les conséquences que cela a.

Analyse physique de la première partie. Ici nous avons une interaction entre la présence de charge et le potentiel associé. Étant donné la géométrie supposée (géométrie sphérique), toutes les grandeurs ne dépendront que de  $r$ . Ici comme les charges sont supposées immobiles, nous n'avons pas de courant et les grandeurs descriptives sont donc  $\rho(r)$  et  $V(r)$ . Il faut deux lois pour les déterminer entièrement. La loi de POISSON d'abord. Et, elle est donnée, la loi de répartition de BOLTZMANN. Le problème est théoriquement terminé, il n'y a plus qu'à mélanger ... à quelques approximations près.

1. (a) Les cations possèdent l'énergie potentielle  $+eV$ , leur densité volumique est donc égale à

$$n_+(r) = n_0 \exp\left(-\frac{+eV(r)}{k_B T}\right).$$

De même pour les anions d'énergie potentielle  $-eV$  :  $n_-(r) = n_0 \exp\left(\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$ .

La densité volumique de charge vaut donc :

$$\rho(r) = e n_+(r) - e n_-(r) \quad \rightsquigarrow \quad \left( \rho(r) = n_0 e \left( \exp \left( -\frac{+e V(r)}{k_B T} \right) - \exp \left( \frac{e V(r)}{k_B T} \right) \right) \right)$$

Si  $eV \ll k_B T$ , des développements limités à l'ordre 1 des deux exponentielles permettent d'arriver à  $\left( \rho(r) = -2 n_0 e^2 \frac{V(r)}{k_B T} \right)$

1. (b) L'équation vérifiée par le potentiel électrostatique (obtenue à partir de l'équation de MAXWELL – GAUSS et de l'expression de  $\vec{E}$  en fonction de  $V(r)$ ) n'est autre que l'équation de POISSON :  $\Delta V(r) + \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = 0$ .

Nous avons alors :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2(r V(r))}{dr^2} = \frac{2 n_0 e^2}{\epsilon_0} \frac{V(r)}{k_B T}$$

En notant  $f(r) = r V(r)$  et  $\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 k_B T}{2 n_0 e^2}$  nous pouvons la réécrire sous la forme :

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = \frac{f(r)}{\lambda_D^2}$$

La solution de cette équation est  $f(r) = r v(r) = \alpha e^{r/\lambda_D} + \beta e^{-r/\lambda_D}$ .

Quand  $r$  tend vers l'infini,  $V(r)$  doit rester borné donc  $\alpha = 0$ .

Quand  $r$  tend vers 0 on ne ressent que le potentiel de l'ion, donc il faut  $V(r) \simeq \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 r}$ .

Nous en déduisons  $\beta = \frac{e}{4 \pi \epsilon_0}$ .

Finalement :  $\left( V(r) = \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D} \right)$ .

1. (c) Nous avons  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r)$ , ce qui donne  $\left( \vec{E} = \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \left( 1 + \frac{r}{\lambda_D} \right) e^{-r/\lambda_D} \right)$ .

D'après le théorème de GAUSS, la charge contenue dans la sphère de rayon  $r$  n'est autre que le flux de  $\vec{E}$  à travers cette sphère (à  $\epsilon_0$  près).

Ainsi  $\left( Q(r) = e \left( 1 + \frac{r}{\lambda_D} \right) e^{-r/\lambda_D} \right)$ .

Quand  $r \rightarrow \infty$ ,  $Q(r)$  tend vers 0 ce qui traduit la neutralité de la solution et quand  $r \rightarrow 0$ ,  $Q(r)$  tend vers  $e$ , ce qui traduit le fait que le cation est au centre de la sphère.

2. (a) Étant donné que l'approche est statistique (eh oui, la loi de MAXWELL est un des piliers de la physique statistique) nous ne pouvons guère faire que suivre le cheminement que propose l'énoncé.

En revanche, nous pouvons quand même dire que puisque la température est fixée par thermostat, les fonctions thermodynamiques adaptées sont  $F$  ou  $G$ . Et comme nous cherchons  $P$ , ce sera  $F$  qui sera utile d'après l'identité thermodynamique  $dF = -S dT - P dV$ . Reste à trouver  $F$  !

Au niveau du décompte énergétique, rien de difficile, mais pas mal de passage glissant étant donné qu'il est très rapide de compter des énergie en trop.

L'énergie électrostatique de l'ion étudié est égale à  $U_0 = e V'(0)$  où  $V'$  est le potentiel créé par le reste de la solution.

Il est donc égal à  $V$  privé du potentiel créé par l'ion lui même, ce qui donne :  $V'(r) = V(r) - \frac{e}{4 \pi \epsilon_0 r}$ .

Un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle présente dans l'expression du potentiel permet d'obtenir  $V'(0)$  et d'avoir 
$$U_0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\lambda_D}$$
.

L'énergie électrostatique d'un anion est la même puisque la charge apparaît au carré dans l'expression précédente.

Comme dans le volume  $\mathcal{V}$ , il y a  $N_0 = c_0 \mathcal{V}$  anions et  $N_0$  cation, l'énergie totale vaut donc par extensivité 
$$U = \frac{1}{2}(N_0 + N_0) \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\lambda_D} \right).$$

La présence du  $\frac{1}{2}$  est nécessaire car en calculant l'énergie de tous les ions avec tous les autres, nous avons compté systématiquement **deux fois** l'énergie d'interaction pour chaque paire d'ions.

Finalement, en remplaçant  $\lambda_D$  par son expression, nous arrivons bien à la forme souhaitée :

$$U = \frac{-\alpha}{\sqrt{\mathcal{V}T}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{-N_0 e^2}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{2N_0 e^2}{\epsilon_0 k_B}}$$

2. (b) En remplaçant  $U$  par son expression, nous trouvons que  $F(T, \mathcal{V})$  vérifie l'équation :

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{T} \right) \right)_{\mathcal{V}} = \frac{-\alpha}{\mathcal{V}^{1/2} T^{5/2}} \quad \rightsquigarrow \quad F(T, \mathcal{V}) = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\mathcal{V}^{1/2} T^{1/2}} + T g(\mathcal{V})$$

La fonction  $g(\mathcal{V})$  est indépendante des phénomènes électrostatiques étudiés, c'est donc l'énergie libre « normale » donc inintéressante ici puisque nous cherchons la surpression liés, justement, aux phénomènes électrostatiques.

Nous pouvons donc la considérer nulle dans la suite.

☞ *Remarque.* c'est le principe de superposition que nous utilisons, donc considérer la fonction  $g(\mathcal{V})$  nulle n'est en aucun cas une approximation.

2. (c) Comme la pression est liée à l'énergie libre par  $P = -\left( \frac{\partial F}{\partial \mathcal{V}} \right)_T$  (cf. identité thermodynamique  $dF = S dT - P dV$ , la surpression liée aux phénomènes électrostatique vaut ici :

$$P = \frac{\alpha}{3 T^{1/2} \mathcal{V}^{3/2}} \simeq 1 \text{ Pa}$$

La surpression est clairement négligeable.

## ✿ Exercice 8

Cet exercice est dans la lignée de l'exercice 4 : il s'agit de déterminer les champs électriques et magnétiques engendrés par les évolutions temporelles.

Dans un premier temps, nous ne prendrons en compte qu'une seule création, à savoir :  $\vec{E}_0 \xrightarrow{M-A} \vec{B}_1$ , c'est l'ARQP.

Dans un deuxième temps, nous verrons que le champ créé va lui même en engendrer un autre :  $\vec{B}_1 \xrightarrow{M-F} \vec{E}_2$ .

Ce champ pourrait donner naissance à un troisième  $\vec{E}_2 \xrightarrow{M-A} \vec{B}_3$  et ainsi de suite.

Pour tout prendre en compte, à savoir tous les champs engendrés successivement, nous pouvons déterminer l'équation que doivent vérifier les champs à partir des équations de MAXWELL, c'est la deuxième partie de l'exercice.

1. En remarquant que le condensateur est invariant par rotation autour de l'axe  $Oz$  et que tout plan  $OMz$  est plan de symétrie pour la source (le champ  $\vec{E}$ ) donc est plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ , donc  $\vec{B}_1(M) = B_1(r,z,t) \vec{u}_r$ .

Pour le calculer, nous allons utiliser l'équation de MAXWELL – AMPÈRE en calculant la circulation de  $\vec{B}_1$  sur un cercle de rayon  $r$  centré sur l'axe.

Nous avons alors  $\oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$  où  $\Phi_E$  est le flux de  $\vec{E}$  à travers la surface délimitée par le cercle.

$$\text{Nous trouvons } \boxed{\vec{B}_1(M) = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_\theta}.$$

2. Le champ  $(\vec{E}_0, \vec{B}_1)$  ne satisfait pas à toutes les équations de MAXWELL notamment MAXWELL – FARADAY.

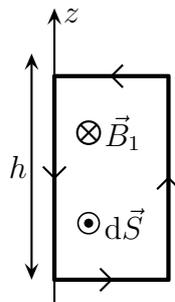
Il faut donc tenir compte du champ  $\vec{E}_2$  induit par  $\vec{B}_1$ .

L'équation de MAXWELL – FARADAY donne  $\text{rot}(\vec{E}_0 + \vec{E}_2) = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \text{rot} \vec{E}_2$ .

Le champ  $\vec{E}_2$  a les mêmes propriétés de symétrie que le champ  $\vec{E}_0$  : il est parallèle à  $(Oz)$  et dépend *a priori* de  $r$  et  $z$ .

Pour le déterminer, calculons la circulation de  $\vec{E}_2$  sur un contour bien choisi (c'est la forme globale de l'équation de MAXWELL – FARADAY précédente).

Choisissons le contour représenté ci-dessous.



$$\text{Nous trouvons : } \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell} = E_2 h = -\frac{d}{dt} \left( \int_0^r -\vec{B}_1(r,z,t) dS \right)$$

Avec l'expression de  $B_1$  trouvée précédemment, nous arrivons à  $\boxed{\vec{E}_2 = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z}$ , ce qui

est bien la forme recherchée avec  $\boxed{\alpha = \frac{1}{4}}$

l'ARQS consiste, ici, à négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en  $\frac{a\omega}{c}$ .

Dans ces conditions le champ  $\vec{E}_2$  est négligeable devant  $\vec{E}_0$ .

Hors ARQS, le champ  $(\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2, \vec{B}_1)$  n'est pas compatible avec toutes les équations de MAXWELL.

Pour qu'il le devienne, il faudrait rajouter un champ  $\vec{B}_3$  induit par  $\vec{E}_2$  puis un champ  $\vec{E}_4$  induit par  $\vec{B}_3, \dots$

3. Le champ électrique dans une zone vide de charge et de courant (à l'intérieur du condensateur) est solution de l'équation  $\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  (équation à retrouver en manipulant les équations de MAXWELL).

En posant  $\vec{E} = E(r) e^{i\omega t} \vec{u}_z$ , nous trouvons, en projetant l'équation précédente sur l'axe  $(Oz)$  :

$$\Delta E(r) = -\frac{\omega^2}{c^2} E(r).$$

Avec l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques, nous arrivons à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E(r)}{\partial r} \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} E(r) \quad \rightsquigarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n r^{n-2} \frac{\omega^n}{c^n} = -\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \frac{\omega^n}{c^n}$$

Comme les deux développements doivent être égaux, cela donne  $\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)^2}}$ , relation valable entre  $a_2$  et  $a_0$ .

4. La plus petite pulsation pour laquelle il existe une région de champ nul dans le condensateur vérifie  $\frac{a\omega_1}{c} = 2,40$ , ce qui donne  $\boxed{f = 2,86 \text{ MHz}}$ .

### ✳ Exercice 9

Il s'agit d'un exercice sans difficulté particulière. Il suffit juste de manipuler les équations de MAXWELL dans tous les sens. En fait la forme des champs est un peu imposée et nous devons juste chercher les formes qui manquent. Notons qu'il s'agit là du câble coaxial étudié en électrocinétique et que les solutions proposées correspondent à des ondes propagatives de tension.

1. Appliquons le théorème de GAUSS à travers une pellicule cylindrique comprise entre  $r$  et  $r + dr$ , de hauteur  $h$  située entre les deux armatures.

Le flux du champ électrique à travers cette surface est nulle puisqu'il n'y a pas de charges à l'intérieur (les charges sont portées par les armatures).

$$\text{Or } \Phi_E = 2\pi h (r + dr) E(r + dr) - 2\pi h r E(r).$$

Nous en déduisons que  $r E(r) = C^{\text{te}} = a E_a$  et ainsi  $\boxed{E(r) = \frac{a}{r} E_a}$ .

2. L'équation de MAXWELL – FARADAY  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  permet de calculer  $\vec{B}$  :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \vec{\text{rot}} \left( \frac{a E_a}{r} \cos(\omega t - k z) \vec{u}_r \right) \\ &= \cos(\omega t - k z) \underbrace{\vec{\text{rot}} \left( \frac{a E_a}{r} \vec{u}_r \right)}_{=\vec{0}} + \vec{\text{grad}}(\cos(\omega t - k z)) \wedge \left( \frac{a E_a}{r} \vec{u}_r \right) \\ &= k \sin(\omega t - k z) \vec{u}_z \wedge \left( \frac{a E_a}{r} \vec{u}_r \right) = \frac{a E_a}{r} k \sin(\omega t - k z) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi  $\vec{B} = \frac{a k E_a}{r \omega} \cos(\omega t - k z) \vec{u}_\theta$ , i.e.  $\boxed{\vec{B}_0 = \frac{a k E_a}{r \omega} \vec{u}_\theta}$ .

3. Le champ électrique et le champ magnétique sont aussi couplés par l'équation de MAXWELL –

AMPÈRE :  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dans l'espace entre les deux armatures.

Calculons  $\vec{\text{rot}} \vec{B}$  :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \frac{a k}{\omega} E_a \cos(\omega t - k z) \vec{\text{rot}} \left( \frac{\vec{u}_\theta}{r} \right) + \frac{a k}{\omega} E_a \vec{\text{grad}}(\cos(\omega t - k z)) \wedge \frac{\vec{u}_\theta}{r} \\ &= \vec{0} - \frac{a k^2}{\omega r} E_a \sin(\omega t - k z) \vec{u}_r \end{aligned}$$

Nous avons ainsi  $\frac{a k^2}{\omega r} E_a \sin(\omega t - k z) = \frac{\omega}{c^2} \frac{a}{r} \sin(\omega t - k z)$  et donc  $\boxed{\omega = k c}$ .

4. Pour déterminer les densités surfaciques de charges et de courants, nous devons utiliser les relations de passage des champs en  $a$  et  $b$  car la modélisation est clairement surfacique étant donné la condition « les champs sont nuls pour  $r < a$  et  $r > b$  ».

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(a) - \vec{0} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\sigma_a = \varepsilon_0 E_a \cos(\omega t - k z)} \\ \vec{B}(a) - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_{s,a} \wedge \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{j}_{s,a} = \frac{k E_a}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - k z) \vec{u}_z} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} - \vec{E}(b) = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0} \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\sigma_b = -\varepsilon_0 \frac{a E_a}{b} \cos(\omega t - k z)} \\ \vec{0} - \vec{B}(b) = \mu_0 \vec{j}_{s,b} \wedge \vec{u}_r \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{j}_{s,b} = \frac{a k E_a}{\mu_0 \omega b} \cos(\omega t - k z) \vec{u}_z} \end{array} \right.$$

Pour vérifier l'équation de conservation de la charge, il faut d'abord l'écrire en version surfacique.

Pour cela faisons un bilan de charges entre  $t$  et  $t + dt$  pour la portion de cylindre intérieur comprise entre  $z$  et  $z + dz$ .

À l'instant  $t$  elle possède la charge  $\delta q(t) = \sigma_a(t) \times 2 \pi a dz$  et à l'instant  $t + dt$  elle contient la charge  $\delta q(t + dt) = \sigma_a(t + dt) \times 2 \pi a dz$ .

L'intensité du courant entrant en  $z$  est  $I_a(z) = j_{s,a} 2 \pi a$  et l'intensité du courant sortant en  $z + dz$  est  $I_a(z + dz) = j_{s,a}(z + dz) 2 \pi a$ .

La conservation de la charge s'écrit

$$\delta q(t + dt) - \delta q(t) = I_a(z) - I_a(z + dz) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial \sigma_a}{\partial t} + \frac{\partial j_{s,a}}{\partial z} = 0$$

Nous pouvons alors vérifier que cette équation est satisfaite si  $\omega = k c$  et nous faisons de même pour  $r = b$ .

5. Pour que  $\vec{A}$  convienne, calculons  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$  et vérifions que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ .

Pour déterminer  $V$ , utilisons la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

Tous calculs faits, nous obtenons  $\boxed{V(r, z, t) = -a E_a \ln \frac{r}{b} \cos(\omega t - k z)}$  avec la condition  $V(b, z, t) = 0$ .

6. La différence entre les deux armatures est

$$U(z, t) = V(a, z, t) - V(b, z, t) = a E_a \ln \frac{a}{b} \cos(\omega t - k z)$$

L'intensité du courant qui parcourt l'armature intérieure est

$$I(z, t) = 2 \pi a j_{s,a} = 2 \pi a \frac{k E_a}{\mu_0 \omega} \cos(\omega t - k z)$$

Le rapport entre les deux est bien indépendant de  $z$  et  $t$  et vaut  $\boxed{Z = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2 \pi c \varepsilon_0}}$ .

7. Le vecteur de POYNTING dans le câble vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \left( \frac{a E_a}{r} \right)^2 \cos^2(\omega t - k z) \vec{u}_z$$

La puissance moyenne qui traverse une section droite du câble n'est autre que le flux de  $\vec{\Pi}$  à travers cette surface :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{k}{\mu_0 \omega} \left( \frac{a E_a}{r} \right)^2 2\pi r dr = \pi a^2 c \varepsilon_0 E_a^2 \ln \frac{b}{a} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = Z \langle I^2 \rangle}$$

La grandeur  $Z$  n'est autre que l'impédance du câble.