

Induction

✿ Exercice 1

Analyse physique. Ici nous sommes face à un conducteur plongé dans un champ magnétique non constant. Peu importe que le champ ne « traverse pas » physiquement le conducteur : ce qui compte, c'est du conducteur entoure la zone de champ variable. Il va alors y avoir un champ électrique induit puis un courant induit puis des pertes par effet JOULE. Comme c'est le cas pour l'induction de NEUMANN, nous allons négliger l'effet retour, celui du champ créé par les courants induits.

Les grandeurs pertinentes sont $B(t)$ pour le champ, γ pour le conducteur et les différentes grandeurs géométriques : a , b et h .

Analyse technique. Étant donné que nous négligeons toute rétroaction entre les courants induits et le champ électromagnétique (*i.e.* nous négligeons l'effet de peau), nous pouvons considérer chaque courant séparément. Une fois trouvée la géométrie des lignes de courants, nous pourrions nous intéresser à elle seule et ne sommer qu'à la fin toutes les puissances dissipées.

Une autre méthode consiste à considérer ce problème comme un problème d'électromagnétisme où la seule difficulté est de déterminer le champ \vec{E} engendré par la variation temporelle de \vec{B} . Une fois ce champ connu, il est immédiat d'avoir la densité volumique de courant puis la puissance volumique dissipée par effet JOULE. Il ne reste plus qu'à sommer le tout sur l'ensemble du conducteur.

Les deux méthodes revenant au même, à chacun de faire son choix.

► Version en terme d'induction

Étant donné la symétrie du problème, nous pouvons dire que les lignes de courant induit sont circulaires.

Considérons une ligne de courant comprise entre r et $r + dr$ et entre z et $z + dz$ et orientée suivant $+\vec{u}_\theta$.

Le flux magnétique à travers ce circuit vaut $B(t) 2\pi r$ donc $e_{\text{ind}} = -\pi a^2 \frac{dB(t)}{dt}$.

La résistance associée à ce circuit vaut $R = \ll \frac{1}{\gamma} \times \frac{\text{longueur}}{\text{section}} \gg = \frac{2\pi r}{\gamma dr dz}$.

La puissance dégagée par cette spire vaut donc $d\mathcal{P} = \frac{e_{\text{ind}}^2}{R} = \gamma \frac{\pi a^4}{2r} dr dz$.

En sommant sur toutes les spires, nous obtenons :

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \int_0^e \int_a^b d\mathcal{P} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{tot}} = \frac{\gamma \pi e a^4}{2} \left(\frac{dB(t)}{dt} \right)^2 \ln \frac{b}{a}}$$

► Version en terme de champ électromagnétique

Commençons par déterminer le champ électrique engendré¹ par la variation temporelle de \vec{B} .

Tout plan contenant l'axe est plan de symétrie du champ \vec{B} dont plan d'antisymétrie du champ \vec{E} . En un point M quelconque de ce plan, \vec{E} doit lui être orthogonal donc être porté par \vec{u}_θ .

De plus les invariances se limitent ici à une invariance par rotation autour de l'axe, ce qui implique que \vec{E} ne dépend pas de θ .

Finalement, nous avons $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_\theta$.

Utilisons la loi de FARADAY en version intégrale, *i.e.* sommée sur un contour $C_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$.

Prenons comme contour une ligne de champ électrique, à savoir un cercle centré sur l'axe et de rayon r .

1. Il est préférable d'utiliser le mot « engendré » plutôt qu'induit afin d'éviter quelques confusions dans les notions même si tout cela repose sur la même loi physique, l'équation de MAXWELL – FARADAY.

Étant donné que, pour le conducteur, $r > a$, nous avons immédiatement :

$$\Phi_B = \pi a^2 B(t) \quad \text{et} \quad C_E = 2\pi r E \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = -\frac{a^2}{2r} \frac{dB(t)}{dt} \vec{u}_\theta$$

La puissance volumique vaut $\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ et ainsi la puissance dissipée dans tout le cylindre vaut :

$$\mathcal{P}_p = \int_a^b \gamma \left(\frac{dB(t)}{dt} \right)^2 \frac{a^4}{4r^2} 2\pi e r dr \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_v = \frac{\gamma \pi e a^4}{2} \left(\frac{dB(t)}{dt} \right)^2 \ln \frac{b}{a}}$$

REMARQUE

La deuxième version, celle avec le champ électromagnétique, nous permet de réaliser les conséquences de la géométrie du conducteur.

En effet, dans le cas où le conducteur n'aurait pas la géométrie du champ \vec{E} engendré (par exemple s'il était carré), alors quelques lignes de champ en couperaient les bords.

Cela impliquerait que du courant « foncerait » sur les bords et, comme les électrons ne peuvent pas sortir du métal, que des électrons s'accumuleraient sur les bords repoussant ainsi ceux qui voudraient y venir.

Au final, très rapidement il apparaîtrait au sein du conducteur un champ électrique dû aux charges surfaciques et qui permet de guider les lignes de courants à l'intérieur du conducteur : d'une certaine manière c'est un effet HALL.

Si tel était le cas, la résolution du problème serait bien plus complexe puisqu'il faudrait prendre en compte ces charges surfaciques dans l'établissement des courants induits.

✿ Exercice 2

Ici nous sommes face à de l'induction de LORENTZ, i.e. au mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique constant.

Analyse physique. En tombant sous l'effet de la gravité, le conducteur va entrer dans une zone de champ magnétique. Cela va induire un courant qui va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance : la chute. Nous avons affaire a priori à un mouvement avec trois degrés de liberté mécanique x , y et z et un degré de description électrique $i(t)$. Les grandeurs pertinentes sont a pour la géométrie du cadre, L et R pour son comportement électrocinétique, g pour le poids, B_0 pour le champ magnétique et v_0 pour la condition initiale.

Analyse technique. En ce qui concerne l'aspect mécanique, aucune surprise : étant donné que le cadre a plutôt un mouvement de translation, c'est un TCI qu'il nous faut.

1. Quand la spire pénètre dans la zone de champ magnétique, le flux magnétique à travers elle varie, elle est donc parcourue par un courant induit et se trouve soumise à des forces de LAPLACE.

Le courant induit s'oppose à l'augmentation de flux magnétique, il est donc orienté dans le sens horaire de sorte que le côté du bas subisse une force vers le haut.

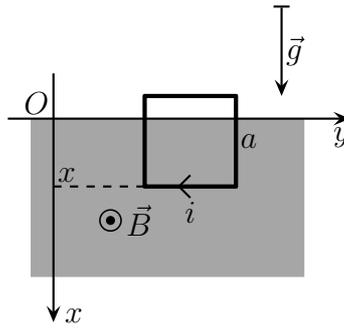
Dès que la spire est entièrement dans la zone de champ magnétique, le flux est constant donc il n'y a plus de courant induit : la chute libre reprend.

En ce qui concerne les forces LAPLACE, nous pouvons voir que la composante horizontale qui s'exerce sur les côtés verticaux du cadre s'annulent deux à deux car les deux portions infinitésimales de courant à une même cote z pour les deux côtés ont des courants opposés alors que le champ magnétique est le même.

Finalement toutes les forces qui s'exercent (force de LAPLACE et le poids) sont verticales ; la condition initiale l'est aussi donc tout le mouvement ultérieur le sera.

Bien qu'il y ait trois degrés de *liberté*, il n'y a qu'un degré de **description** du problème mécanique.

2. Orientons le circuit dans le sens indiqué ci-dessous.



La force de LAPLACE s'écrit $\vec{F}_L = \oint i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

Il n'y a de forces que sur les portions plongées dans le champ magnétique. De plus les forces sur les portions verticales sont horizontales et se compensent. Il ne reste que la force sur la portion horizontale.

Nous avons alors (après calculs) $\vec{F}_L = -i(t) a B_0 \vec{u}_x$.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué au cadre s'écrit : $m \frac{dv}{dt} = -mg - B_0 i(t)$

Pour déterminer $e_{\text{ind}}(t)$, comme nous avons affaire à une induction de LORENTZ, le plus simple reste d'utiliser le caractère parfait du couplage.

Le caractère parfait du couplage s'écrit :

$$\vec{F}_L \cdot \vec{v} + e_{\text{ind}} i = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = a B_0 v(t)$$

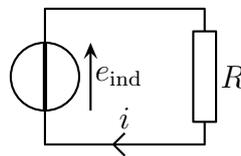
→ Avec la loi de FARADAY. Pour déterminer e_{ind} , nous pouvons aussi utiliser la loi de FARADAY

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Avec $\Phi_B = -B_0 a x(t)$ (attention au signe), nous obtenons $e_{\text{ind}} = a B_0 v(t)$, i.e. la même chose qu'avec le caractère parfait du couplage.

→ Équation électrique. Nous avons ainsi, puisque le modèle électrocinétique est représenté ci-dessous (attention à l'orientation relative de e_{ind} et i) :

$$i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{R} = \frac{a B_0 v(t)}{R}$$



En éliminant $i(t)$ entre l'équation électrique et l'équation mécanique, nous obtenons l'équation vérifiée par $v(t)$:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{m R}{(a B_0)^2} \quad \text{et} \quad v_\infty = \frac{m g R}{(a B_0)^2}$$

Compte tenu de la condition initiale $v(0) = v_0$, la solution de cette équation est :

$$v(t) = (v_0 - v_\infty) e^{-t/\tau} + v_\infty$$

REMARQUE

Attention, il ne faudrait pas croire que cela signifie que la vitesse du cadre tend vers une valeur limite!

En effet cette équation différentielle (et donc la solution associée) n'est valable que lorsque le cadre est **partiellement** dans le champ magnétique.

Une fois complètement plongé dans le champ magnétique, il n'y aura plus d'induction et la chute redeviendra libre, comme une chute libre des plus usuelles.

3. Nous ne pouvons pas remplacer brutalement ici R par 0 dans les expressions précédentes.

En effet quand la résistance de la spire devient nulle, nous ne pouvons plus négliger le phénomène d'autoinduction. Cela se comprend en imaginant que, lorsque le fil possède une résistance, le courant est peu intense et, dès lors, le champ créé (proportionnel à l'intensité) est négligeable devant \vec{B}_0 : l'auto induction est négligeable.

En revanche, quand la résistance est nulle, le courant tend à être infini créant ainsi un champ propre plus intense et qui ne peut plus être négligé devant \vec{B}_0 .

Il y a deux manières de tenir compte de l'auto induction : soit dans l'aspect électromagnétique soit dans l'aspect électrocinétique.

→ Auto-induction, vision électromagnétique.

La force électromotrice induite dans la spire doit désormais tenir compte du flux propre $\Phi_p = L i(t)$ puisque celui-ci n'est plus négligeable devant le champ \vec{B}_0 .

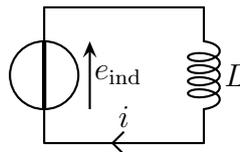
La loi de FARADAY donne alors, puisque $\Phi = \Phi_B + \Phi_p$: $e(t) = a B_0 v(t) - L \frac{di(t)}{dt}$.

Quant à l'équation électrique, elle s'écrit alors tout simplement $e(t) = 0$ puisqu'il n'y a plus de résistance.

→ Auto-induction, vision électrocinétique.

La force électromotrice induite dans la spire par le champ extérieur et **uniquement celui-ci** s'écrit comme avant $e_{\text{ind}}(t) = a B_0 v(t)$.

Puisqu'il faut tenir compte de l'auto-induction, nous pouvons dire que le circuit se comporte comme une bobine, *i.e.* qu'il est équivalent au schéma ci-dessous.



Cela donne l'équation électrique : $a B_0 v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$, ce qui est bien identique à la vision précédente.

→ Rassemblement.

En dérivant l'équation mécanique par rapport au temps et en remplaçant $\frac{di}{dt}$ par l'expression donné par l'équation électrique, nous obtenons l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \omega_0^2 v(t) = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{(a B_0)^2}{m L}$$

La solution est, compte tenu de la condition initiale $v(0) = v_0$, $v(t) = v_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

Pour trouver la position $x(t)$, il suffit d'intégrer l'expression de la vitesse avec la condition $x(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \frac{g}{\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t))$$

Le mouvement de la spire sera oscillatoire si la spire ne pénètre pas entièrement dans la zone de champ magnétique donc si :

$$\frac{g}{\omega_0^2} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{g}{\omega_0^2}\right)^2} < a$$

REMARQUE

Il est possible de retrouver le sens du courant induit lors de la pénétration du cadre avec un raisonnement microscopique.

Lorsque le cadre entre dans le champ magnétique, les électrons libres subissent la force de LORENTZ en $\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = +evB\vec{u}_y$.

Les électrons libres vont alors se déplacer dans le sens direct sur le schéma, ce qui correspond à un courant dans l'autre sens, soit à $i(t) > 0$, ce qui est bien ce que nous avons trouvé au-dessus.

✳ Exercice 3

Analyse physique. Ici nous avons affaire à un conducteur en mouvement dans un champ magnétique non uniforme mais constant, c'est de l'induction de LORENTZ. Le champ magnétique est radial. Les grandeurs pertinentes sont B_0 pour le champ, N , a pour la description de la bobine, E et r pour l'aspect électrique, J pour l'inertie mécanique, C et h pour les actions mécaniques.

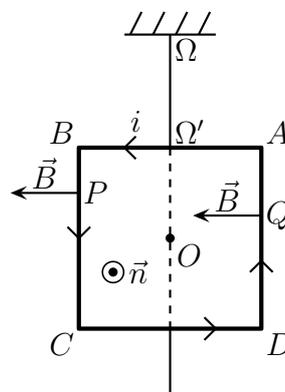
Analyse technique. Avant tout faire un beau schéma de manière à bien représenter les courants, les forces, ... Il faut faire ici attention à la notion d'enroulement : c'est une bobine plate donc chaque enroulement (chaque spire) est un carré de côté $2a$. Comme il s'agit de l'induction de LORENTZ nous utiliserons plutôt le caractère parfait du couplage pour déterminer e_{ind} et ce d'autant plus que le champ magnétique n'est pas connu partout ce qui empêche d'en calculer le flux.

1. Le cadre est alimenté, il est donc parcouru par un courant.

Il est dès lors soumis à des forces de LAPLACE qui le mettent en mouvement.

Quand le cadre bouge dans le champ magnétique, il y a apparition d'une force électromotrice induite qui s'oppose à ce qui lui a donné naissance, i.e. à la f.é.m. du générateur.

2. De manière à pouvoir écrire le vecteur surface sous la forme $\vec{S} = +S\vec{n}$, orientons le circuit dans le sens représenté ci-dessous.



► Moment exercé par les forces de LAPLACE

Déterminons le moment total exercé par les forces de LAPLACE. Pour cela décomposons le cadre en petits morceaux élémentaire et déterminons le moment élémentaire subit par ce petit morceau. Il ne restera plus alors après qu'à sommer le tout.

Sur les côtés AB et CD , le champ magnétique est parallèle à $d\vec{\ell}$: il n'y a donc pas de forces de LAPLACE sur ces deux côtés.

Sur le côté BC , la force élémentaire s'exprime $d\vec{F}_{BC} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -i dl B_0 \vec{n}$.

Le moment élémentaire de cette force vaut par rapport à l'axe Ωz vaut alors :

$$d\Gamma_{\Omega z} = (\vec{\Omega} \vec{P} \wedge d\vec{F}_{BC}) \cdot \vec{u}_z = -i a B_0 dl$$

☞ *Remarque.* nous pouvons retrouver l'expression de ce moment élémentaire à l'aide du bras de levier.

Pour l'ensemble du bras BC , le moment des forces de LAPLACE vaut $\Gamma_{BC} = -2 i a^2 B_0$.

Pour le coté AD , le raisonnement est le même. Ceci dit, la force de LAPLACE est dans l'autre sens donc le moment par rapport à Oz sera le même.

Finalement, pour les N spires, le moment total vaut :

$$\Gamma_{\Omega z} = -4 N i(t) a^2 B_0 = -\Phi_0 i(t)$$

► F.é.m. induite.

Pour déterminer la force électromotrice induite, nous pouvons calculer la circulation du champ $\vec{v} \wedge \vec{B}$ ou utiliser le caractère parfait du couplage électromécanique en se rappelant que la puissance fournie par un couple de force s'écrit $\mathcal{P}_{f,L} = +\Gamma_{\Omega z} \dot{\alpha}(t)$.

Seule la loi de FARADAY n'est pas utilisable ici (bien que demeurant vraie) car le champ \vec{B} n'est pas connu en tout point de l'espace et en particulier en tout point de la surface de la spire.

Quelle que soit la méthode, nous obtenons à la fin $e_{\text{ind}}(t) = +4 N a^2 B_0 \frac{d\alpha(t)}{dt} = \Phi_0 \frac{d\alpha}{dt}$.

► Équation mécanique.

Étudions le système { cadre } dans le référentiel galiléen lié au laboratoire. Le cadre est soumis :

- à son poids, de moment nul par rapport à Ωz ;
- aux forces de Laplace de moment $\Gamma_L = \Phi_0 i(t)$
- à l'action du fil, de moment $\Gamma_{\text{fil}} = -C \alpha$;
- aux forces de frottement de moment $\Gamma_{\text{frott}} = -h \frac{d\alpha}{dt}$;

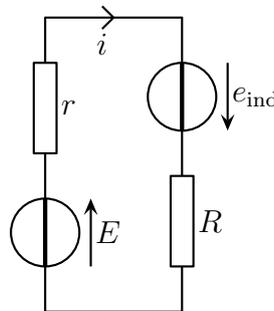
Le théorème du moment cinétique scalaire appliqué à ce cadre donne donc :

$$J \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = -C \alpha(t) - h \frac{d\alpha(t)}{dt} - \Phi_0 i(t)$$

► Aspect électrique

→ *Équation électrique.*

Le circuit électrique équivalent est représenté ci-dessous.



Nous en déduisons l'équation électrique $E + e_{\text{ind}}(t) = (R + r) i(t)$.

3. En éliminant $i(t)$ entre l'équation électrique et l'équation mécanique, nous obtenons l'équation demandée avec :

$$\tau = \frac{2J}{h + \frac{\Phi_0^2}{r+R}} ; \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J} \quad \text{et} \quad \alpha_{\text{éq}} = -\frac{\Phi_0 E}{C(R+r)}$$

REMARQUE

Pour vérifier l'homogénéité dans le cadre de l'induction, une bonne méthode consiste à multiplier par i au numérateur et au dénominateur.

Cela donne par exemple ici, avec E un champ électrique :

$$\frac{2J(r+R)}{\Phi_0^2} \equiv \frac{m\ell^2 R i}{(B\ell^2)^2 i} = \frac{mU}{(B\ell i) B\ell} = \frac{mE\ell}{F_L B\ell} = \frac{mv}{F_L} = \frac{mv}{ma} = \tau$$

4. À l'équilibre, $\alpha = \alpha_{\text{éq}}$ et comme $e(t) = 0$ à l'équilibre (il n'y a pas de champ induit sans mouvement), alors $E \propto i$ et donc $\alpha_{\text{éq}} \propto i$.

Un tel appareillage est utilisé dans les galvanomètres à cadre mobile : un galvanomètre étant un ampèremètre très sensible.

Remarque. pour que l'appareil fonctionne dans toutes les conditions, il est nécessaire qu'il ne fasse pas plus qu'un demi-tour étant donné que le champ subit par les branches AD et BC ne sont pas dans le même sens.

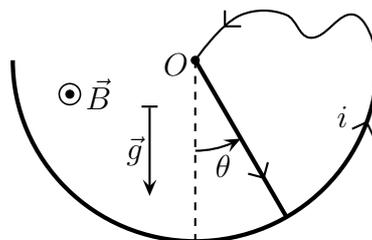
❁ Exercice 4

Analyse physique. Ici nous avons un conducteur mobile placé dans un champ magnétique constant : il va y avoir une induction de LORENTZ. La barre va osciller sous l'effet de son poids et va se voir freinée par le phénomène d'induction. Du point de vue de la description, nous n'avons ici qu'un seul circuit électrique et qu'un seul paramètre de description mécanique. Les grandeurs pertinentes sont ℓ , m et R pour décrire la barre (notamment par l'intermédiaire de son moment d'inertie), B_0 le champ magnétique et g car le poids aura un effet.

Analyse technique. Au niveau de l'évolution mécanique, un TMC sera très utile ici étant donné l'aspect rotatoire de l'évolution. Quant à la détermination de l'intermédiaire de calcul e_{ind} , la méthode de couplage parfait nous tend les bras pour une induction de LORENTZ.

Le conducteur étant en mouvement dans un champ magnétique, il apparaît un courant induit et une force de LAPLACE qui vont s'opposer au mouvement (loi de LENZ). Nous vérifierons le signe en temps voulu.

Orientons le dispositif comme représenté ci-dessous (cette orientation présente l'avantage technique d'avoir un vecteur surface \vec{S} dans le même sens que \vec{B}).



► Aspect mécanique.

Étant donné que le mouvement ici est un mouvement de rotation autour de Oz , nous allons utiliser un théorème du moment cinétique par rapport à Oz .

Dans le référentiel (évidemment galiléen) du laboratoire, la tige est soumise :

- à son poids de moment $\mathcal{M}_O(\vec{P}) = -m g \frac{\ell}{2} \sin \theta$
 - aux forces de LAPLACE de moment $\mathcal{M}_O(\vec{F}_L)$
 - à l'action de l'axe de moment nul étant donné que la liaison est dite parfaite.
- *Force de LAPLACE*

Chaque petite portion de la tige est soumise à la force de LAPLACE $d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ de moment élémentaire $d\mathcal{M}_O = (\vec{OM} \wedge d\vec{F}_L) \cdot \vec{u}_z$.

En exprimant $i d\vec{\ell} = i dr \vec{u}_r$, $\vec{OM} = r \vec{u}_r$, $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ et en faisant attention au sens d'intégration (qui **doit** être le même que le sens arbitraire choisi pour le courant), nous trouvons :

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_L) = \int_0^A d\mathcal{M}_O = \int_0^\ell -i B_0 r dr = -i \frac{B_0 \ell^2}{2}$$

Le théorème du moment cinétique donne (attention de prendre le bon moment d'inertie) :

$$J_{Oz} \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{m g \ell}{2} \sin \theta(t) - i(t) \frac{B_0 \ell^2}{2}$$

► Aspect électrique.

- *F.é.m. induite* Nous avons le choix *a priori* entre trois méthodes :
 - la loi de FARADAY, sauf qu'ici nous ne connaissons pas la forme précise du circuit
 - le caractère parfait du couplage électro-mécanique
 - l'utilisation du champ électromoteur
- *Caractère parfait du couplage.*

Étant donné que la puissance mécanique fournie par une force à un objet en rotation s'écrit $\mathcal{P} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega}$ où $\vec{\Gamma}$ est le moment exercé par ces forces et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de l'objet.

Ici cela donne donc :

$$M_{O(\vec{F}_L)} \dot{\theta} + e_{\text{ind}} i = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = \frac{B_0 \ell^2 \dot{\theta}}{2}$$

- *Champ électromoteur.* Pour l'utilisation du champ électromoteur, nous avons, en chacun des points de la tige : $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$.

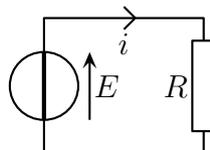
Or chaque point a une vitesse différente : $\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

Nous trouvons alors $\vec{E}_m = r \dot{\theta} B_0 \vec{u}_r$ de circulation (à prendre **obligatoirement** dans le sens choisi pour i) :

$$e_{\text{ind}} = \int_0^A \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_0^A \vec{E}_m \cdot dr \vec{u}_r = (\dots) = \frac{B_0 \ell^2 \dot{\theta}}{2}$$

- *équation électrique*

Le circuit électrique équivalent n'est autre que celui représenté ci-contre pour lequel on a immédiatement $e(t) = R i(t)$.



► Rassemblement

En éliminant $i(t)$ entre l'équation électrique et l'équation mécanique, nous arrivons à l'équation

$$\frac{1}{3} m \ell^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{m g \ell}{2} \sin \theta(t) - \left(\frac{B_0 \ell^2}{2} \right)^2 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Celle-ci donc, en tenant compte des petits mouvements :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{3B_0^2 \ell^2}{4m} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{3g}{2\ell} \theta(t) = 0$$

→ *Solution.* En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$ la pulsation propre de l'oscillateur en l'absence de champ magnétique, et $Q = \frac{4m}{3B_0^2 \ell^2} \omega_0$.

L'évolution sera pseudo-périodique pour $Q > \frac{1}{2}$.

La solution sera alors de la forme $\theta(t) = e^{-t/\tau} (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$ où $-\frac{1}{\tau} \pm j\omega$ sont les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$, ce qui donne :

$$\tau = \frac{2m}{3B_0^2 \ell^2} \quad \text{et} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Compte tenu des conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, nous arrivons finalement à :

$$\theta(t) = \theta_0 \left(\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega \tau} \sin(\omega t) \right) e^{-t/\tau}$$

► Bilan énergétique.

Multiplions l'équation mécanique par $\dot{\theta} dt = d\theta$ et l'équation électrique par $i dt$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} J_{Oz} \ddot{\theta} \dot{\theta} dt = -\frac{mg\ell}{2} \sin\theta d\theta - \frac{B_0 \ell^2}{2} i(t) \dot{\theta} dt \\ \frac{1}{2} B_0 \ell^2 \dot{\theta} i dt = R i^2 dt \end{cases}$$

En sommant les deux équations nous obtenons (ne pas oublier que $\dot{\theta} dt = d\theta$) :

$$d\left(\frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 - \frac{mg\ell}{2} \cos\theta\right) = -R i^2 dt \quad \rightsquigarrow \quad d(E_c + E_p) = -R i^2 dt$$

La variation d'énergie mécanique est due à la dissipation d'énergie par effet JOULE.

✳ Exercice 5

Ici nous sommes face à un conducteur mobile plongé dans un champ magnétique non constant. Ce n'est donc ni de l'induction de NEUMANN, ni de l'induction de LORENTZ. Ceci étant, ici la situation est posée et toute la description est connue : nous n'avons « qu'à » rechercher les paramètres intérieurs afin d'analyser ce qui se passe.

[1.] Le courant $i(t)$ dans la spire est orienté par le vecteur \vec{n} et la spire est assimilable à un dipôle magnétique de moment $\vec{M} = i(t) S \vec{n}$.

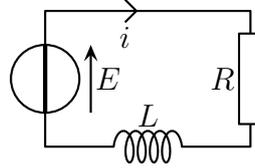
Le moment des forces de LAPLACE qui agissent sur ce dipôle est donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = i(t) S B_0 \sin(\omega_0 t - \omega t) \vec{u}_z$$

☞ *Remarque.* même sans le résultat donné par l'énoncé, nous aurions pu retrouvé l'expression précédente avec la méthode usuelle consistant à découper le circuit en portions élémentaires, à calculer le moment élémentaire sur chaque portion et à sommer le tout.

Il faut maintenant calculer $i(t)$.

Comme nous tenons compte de l'inductance de la spire (c'est donc qu'il doit s'agir d'un bobinage), le circuit équivalent est représenté ci-dessous.



Nous avons alors $e_{\text{ind}}(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t)$ où $e_{\text{ind}}(t)$ est la f.é.m. induite.

☞ *Remarque.* nous aurions pu tenir compte de l'auto-induction lors du calcul du flux du champ magnétique ci-dessous en rajoutant $\Phi_{\text{propre}} = L i$ et ne pas introduire de bobine dans le circuit électrique. Cela serait bien sûr revenu au même.

Comme le champ dépend du temps, les seules possibilités pour déterminer $e(t)$ sont soit le champ électromoteur, soit la loi de FARADAY.

Pour le champ électromoteur, il faudrait non seulement déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}(t)$, mais aussi tenir compte du fait que le conducteur est en mouvement ... Nous préférons donc la loi de FARADAY.

Nous avons $e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ où $\Phi_B = \vec{S} \cdot \vec{B} = S B_0 \cos(\omega_0 t - \omega t)$.

Nous arrivons alors à $S B_0 (\omega_0 - \omega) \sin(\omega_0 t - \omega t) = L \frac{di(t)}{dt} + R i(t)$

Le régime permanent correspond ici visiblement à un régime sinusoïdal forcé et nous allons donc chercher $i(t)$ sous la forme $i(t) = i_0 \sin(\Omega t + \psi)$ où $\Omega = \omega_0 - \omega$.

En notation complexe, cela donne $\underline{i}(t) = \underline{I} e^{j\Omega t}$ avec $\underline{I} = i_0 e^{j\psi}$ de manière à avoir $i(t) = \text{Im}(\underline{i}(t))$.

Il vient alors : $\underline{I} = \frac{S B_0 \Omega}{R + j L \Omega}$ puis :

$$i(t) = \text{Im}(\underline{i}(t)) = \frac{S B_0 \Omega}{R^2 + L^2 \Omega^2} \left(-L \Omega \cos(\Omega t) + R \sin(\Omega t) \right)$$

Nous en déduisons :

$$\vec{\Gamma} = (S B_0)^2 \frac{\Omega}{R^2 + L^2 \Omega^2} \left(-L \Omega \cos(\Omega t) + R \sin(\Omega t) \right) \sin(\Omega t) \vec{u}_z$$

En valeur moyenne $\langle \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) \rangle = 0$ et $\langle \cos(\Omega t) \cos(\Omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\boxed{\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{1}{2} (S B_0)^2 \frac{R \Omega}{R^2 + L^2 \Omega^2} \vec{u}_z}$$

Ce couple est moteur si la puissance qu'il fournit est positive, *i.e.* si $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{\omega} > 0$ ce qui donne la condition $\Omega > 0$, *i.e.* la condition $\omega_0 > \omega$.

Le moteur est dit *asynchrone* car il ne tourne pas à la même vitesse que le champ magnétique.

2. En multipliant l'équation électrique par $i dt$ nous obtenons :

$$R i^2 dt + d \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) = B_0 S \Omega \sin(\Omega t) i dt$$

L'équation mécanique est donné par le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = B_0 S i \sin(\Omega t)$$

Multiplions la par ωdt :

$$d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = B_0 S i \omega \sin(\Omega t) dt$$

En combinant les deux relations précédentes, nous obtenons :

$$d\left(\frac{1}{2} J \omega^2 + \frac{1}{2} L i^2\right) + R i^2 dt = B_0 S \omega_0 \sin(\Omega t) i dt \neq 0$$

Le couplage électromagnétique n'est pas parfait : le champ magnétique apporte de l'énergie au système. C'est d'ailleurs tout l'intérêt d'un moteur.

REMARQUE

L'équation mécanique montre que, en moyenne, l'énergie cinétique doit augmenter ce qui implique que ω augmente et, donc, qu'il ne peut être constant.

En fait, il faut un couple résistant $\vec{\Gamma}_f$ pour avoir le régime permanent.

Ce couple résistant pour la spire n'est autre que le couple moteur pour ce qui est relié à la spire!

Nous voyons alors bien que l'énergie fournie par le champ pendant la durée dt : $B_0 S i \omega \sin(\Omega t) dt$ est perdue par effet JOULE et transmise en énergie disponible sur l'axe de rotation du moteur.

3. Pour créer un champ magnétique tournant, nous pouvons placer deux solénoïdes selon deux axes orthogonaux, les courants dans les deux bobines étant déphasés de $\frac{\pi}{2}$.

La difficulté principale n'est pas tellement due au caractère *tournant* du champ mais au caractère *uniforme* de ce champ tournant.

✿ Exercice 6

Nous avons affaire ici à un exercice qui guide la démarche – ce qui est fréquent pour un sujet posé à l'écrit – nous n'aurons donc que peu à nous poser des questions sur la modélisation voire – ce qui est le cas ici – sur les méthodes à utiliser pour trouver les réponses.

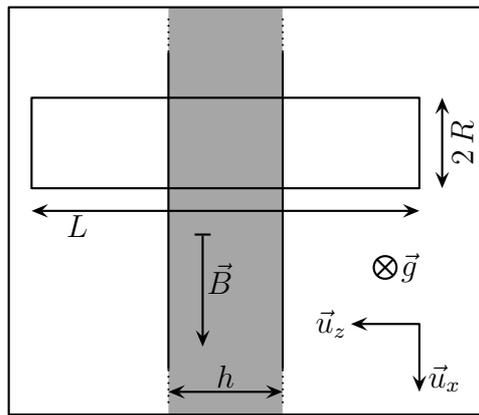
Quoiqu'il en soit, nous sommes face à un conducteur mobile dans un champ magnétique constant, il s'agit donc d'un phénomène d'induction de LORENTZ. Le problème majeur est que la répartition de courant n'est pas connue puisqu'elle n'est pas imposée par la présence de fils éléxtrique. Il va donc falloir prendre en compte ici l'aspect tridimensionnel du courant électrique, ce qui fait que :

→ *soit nous trouvons a priori la lignes des formes de courants et nous pouvons alors nous ramener à l'étude d'un circuit électrique usuel quitte à sommer toutes les contributions ensuite grâce à l'aspect linéaire du problème*

→ *soit nous adoptons une démarche locale de manière à déterminer successivement le champ électromoteur \vec{E}_m , la densité de courant \vec{j} et l'action des forces de LAPLACE*

C'est la deuxième approche que propose l'énoncé.

Notez qu'une des difficulté de cet exercice est de se représenter la situation. Vue de dessus, la zone de champ magnétique est la zone grisée représentée ci-dessous.



1. Le conducteur est mobile dans un champ magnétique.

Il existe donc des courants induits à l'intérieur du cylindre qui vont avoir pour effet de freiner le conducteur (loi de LENZ).

Les courants induits sont globalement parallèles à l'axe de rotation, il faut donc que le circuit se referme au delà du cylindre.

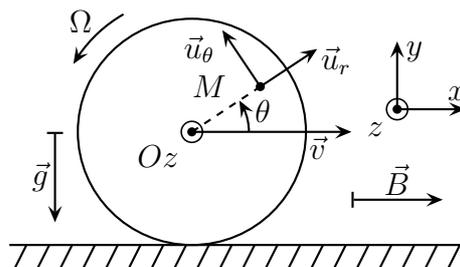
REMARQUE

Ce n'est ni plus ni moins qu'un gros zoom sur l'expérience des rails de Laplace avec une disposition de \vec{B} légèrement différente.

Cette géométrie particulière et notamment le fait que les lignes de courants se referment « hors champ magnétique » permet de résoudre simplement le problème et notamment de ne pas avoir à se poser la question sur ce qui se passe « au bord ».

En toute rigueur il faudrait tenir compte des effets de bords car la moindre accumulation de charges sur les faces du cylindre peut modifier sensiblement la répartition des courants.

2. Notons Oz l'axe du cylindre, $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse des points de l'axe à l'instant t et $\vec{\Omega}(t) = \Omega(t) \vec{u}_z$ le vecteur rotation instantannée du cylindre.



Le roulement sans glissement se traduit par $v = -R \Omega$.

Un point M du cylindre est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe Oz étant l'axe du cylindre. La vitesse d'un point M est donnée par la relation (cf. champ des vitesses dans un solide) :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = v(t) \vec{u}_x \wedge r \Omega(t) \vec{u}_\theta$$

Nous en déduisons le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v}(M) \wedge \vec{B} : \boxed{\vec{E}_m = -r \Omega(t) B \cos \theta \vec{u}_x}$.

3. (a) La loi d'OHM locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}_m$ donne $\vec{j}(M) = -\gamma r \Omega(t) B \cos \theta \vec{u}_x$.

Les forces de LAPLACE agissant sur l'élément de volume $d\tau = r dr d\theta dz$ sont $d\vec{F} = \vec{j}_v d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$, ce qui donne, avec l'expression de \vec{j} : $d\vec{F} = -\gamma r \Omega(t) B \cos \theta d\tau \vec{u}_y$.

En deux points diamétralement opposés (θ et $\theta + \pi$), les forces élémentaires de LAPLACE sont opposées : la résultante des forces est donc nulle.

Le moment élémentaire des forces de LAPLACE, par rapport à l'axe de ce même volume s'exprime :

$$d\mathcal{M}_{Oz} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau \right) \cdot \vec{u}_z = -r \times \gamma r \Omega(t) B^2 \cos \theta \times \cos \theta r dr d\theta dz$$

Dans toute la portion du cylindre **dans laquelle il y a un courant induit et un champ magnétique**, i.e. pour $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{z}{2}$:

$$\mathcal{M}_{Oz} = \iiint d\mathcal{M}_{Oz} = - \iiint \gamma \Omega(t) B^2 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta dz$$

Ce qui donne $\boxed{\mathcal{M}_{Oz} = \iiint d\mathcal{M}_{Oz} = -\frac{\pi}{4} \gamma \Omega(t) B^2 h R^4}$.

☞ *Remarque.* le moment est opposé au sens de rotation, il s'agit donc bien d'un moment de frottement, conformément à la loi de LENZ.

3. (b) Étudions le cylindre dans le référentiel galiléen lié au support. Le cylindre subit :

- son poids $\vec{P} = -m g \vec{u}_y$
- la force de LAPLACE
- la réaction du support $\vec{R}_{\text{sup}} = R_N \vec{u}_y + R_T \vec{u}_x$

Le théorème du moment cinétique barycentrique scalaire appliqué au cylindre donne (le poids ayant un moment nul) :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = R R_T - \frac{\pi}{4} \gamma \Omega(t) B^2 h R^4$$

☞ *Remarque.* rappelons qu'il s'agit d'un faux TMCS, du moins un TMCS bien particulier, car un vrai TMCS dans le référentiel barcentrique aurait du prendre en compte les forces d'inertie d'entraînement (celles de CORIOLIS sont nulles dans un tel référentiel). Voir dans le cours de mécanique la démonstration de ce faux TMCS.

Pour déterminer R_T , nous pouvons utiliser le théorème du centre d'inertie.

Ce dernier donne, en projection sur \vec{u}_x : $m \frac{dv}{dt} = R_T$.

En combinant ces deux équations différentielles et en tenant compte de la relation de non glissement, nous obtenons finalement :

$$(J + m R^2) \frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{\pi}{4} \gamma \Omega(t) B^2 h R^4$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants dont la solution est, avec la condition initiale $\Omega(0) = -\frac{v_0}{R} \stackrel{\text{not}}{=} \Omega_0$:

$$\boxed{\Omega(t) = \Omega_0 e^{-t/\tau}} \quad \text{où} \quad \boxed{\tau = \frac{4(J + m R^2)}{\gamma \pi B^2 h R^4}}$$

☞ *Remarque.* la dépendance de τ vis à vis des grandeurs caractéristiques du problème (γ , J et B entre autre) est cohérente (que le lecteur n'hésite pas à se l'expliquer lui-même!)

✿ Exercice 7

Ici nous avons affaire à une spire conductrice placée dans un champ magnétique variable : c'est donc de l'induction de NEUMANN. Ceci étant, le but de l'exercice n'est pas d'étudier cette induction mais l'effet de cette induction sur la source, un aimant tournant.

Nous allons nous placer dans l'ARQS stipulant que lorsque le courant $i(t)$ parcourt la bobine, le champ magnétique qu'elle crée est un champ de type magnétostatique.

1. Un dipôle magnétique modélise un aimant permanent, *i.e.* une source de champ magnétique.

Lorsque celui-ci tourne, le flux du champ magnétique qu'il crée à travers la bobine varie.

La rotation de l'aimant induit donc un courant dans la bobine qui va créer un champ magnétique exerçant sur l'aimant un moment qui tend à le freiner (loi de LENZ).

Il faut donc qu'un opérateur exerce une action permettant de compenser cet effet.

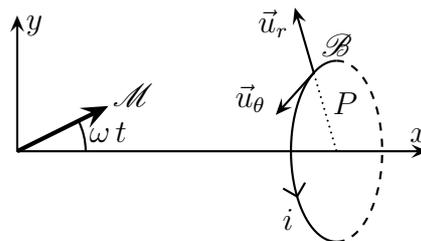
REMARQUE

Si l'aimant et la bobine étaient supraconducteur, *i.e.* s'il n'y avait pas de pertes énergétiques, la vitesse de rotation de l'aimant ne serait certes pas uniforme, mais il tournerait quasiment indéfiniment, un peu comme un pendule simple rigide sans frottement autour de son axe peut tourner indéfiniment (mais pas uniformément) s'il est lancé avec une assez grande vitesse.

Ils tourneraient *quasiment* indéfiniment car la rotation du dipôle magnétique fait de lui un dipôle rayonnant qui va donc envoyer son énergie à l'infini et concomitamment en perdre jusqu'à ne plus en avoir du tout.

2. La vitesse de rotation constante pour l'aimant implique que la somme des moments qui s'exercent sur lui est nulle, donc $\vec{\Gamma}_{\text{op}} = -\vec{\Gamma}_{\text{spire} \rightarrow \text{aimant}} = -\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}(O)$.

Utilisons les conventions de notations ci-contre.



Cherchons d'abord le champ créé par une spire circulaire sur son axe.

C'est un des exemples fondamentaux du cours d'électromagnétisme de sup et nous trouvons, en adaptant les notations au cas présent : $\vec{B}_{\text{bobine}} = \frac{\mu_0 N i(t)}{2} \frac{a^2}{(a^2 + D^2)^{3/2}} \vec{u}_z$

► Détermination du courant induit dans la bobine.

L'équation électrique de la bobine, dont on néglige l'auto-induction, se réduit à $e_{\text{ind}}(t) = R i(t)$.

Pour déterminer $e_{\text{ind}}(t)$, on peut penser à :

→ la loi de FARADAY. Pour cela il faudrait calculer le champ créé par l'aimant un chacun des points de la surface de la bobine. Non seulement cela, il faudrait aussi calculer le flux ! Trop de calculs, nous y penserons si nous n'avons pas mieux.

→ l'expression du champ électromoteur : $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Mais pour cela il faut déterminer \vec{A} créé par le dipôle. Nous pouvons le connaître, si nous y tenons (c'est une « formule » du cours).

Oui mais bon, ça ne paraît pas réjouissant.

Que reste-t-il comme méthode ? Serions nous destinés à faire des calculs horribles ?

Que nenni ! Il reste une bonne voire une excellente méthode : l'égalité des coefficients d'inductance mutuelle. Eh oui !

Le flux du champ créé par l'aimant à travers la bobine (celui qui est difficile à calculer donc), vaut $\Phi_{\text{aimant} \rightarrow \text{bobine}} = M i'$ où i' est le courant qui parcourt le dipôle magnétostatique.

Et nous savons facilement calculer le flux du champ magnétique créé par la bobine à travers la boucle de courant qu'est le dipôle $\Phi_{\text{bobine} \rightarrow \text{aimant}} = \vec{B}(O) \cdot \vec{S} = M i$, ce qui donne, en notant S la surface de la boucle de courant :

$$\Phi_{\text{bobine} \rightarrow \text{aimant}} = S \times \frac{\mu_0 N i(t)}{2} \frac{a^2}{(a^2 + D^2)^{3/2}} \cos(\omega t) \quad \rightsquigarrow \quad M = \frac{S \mu_0 N}{2} \frac{a^2}{(a^2 + D^2)^{3/2}} \cos(\omega t)$$

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi_B(t) &= M i' = i' S \frac{\mu_0 N}{2} \frac{a^2}{(a^2 + D^2)^{3/2}} \cos(\omega t) \\ &= \mathcal{M} \frac{\mu_0 N}{2} \frac{a^2}{(a^2 + D^2)^{3/2}} \cos(\omega t) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{M}_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Finalement, $i(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = \frac{\mathcal{M}_0}{R} \sin(\omega t)$ et en remplaçant dans l'expression du couple exercé par l'opérateur et en effectuant le produit vectoriel : $\vec{\Gamma}_{\text{op}} = \frac{\mathcal{M}_0^2}{R} \omega \sin^2(\omega t) \vec{u}_z$.

La valeur moyenne recherchée vaut alors $\langle \vec{\Gamma}_{\text{op}} \rangle = \frac{\mathcal{M}_0^2}{2R} \omega \langle \sin^2(\omega t) \rangle$.

Nous constatons que ce couple est orienté en moyenne dans le sens de la rotation ce qui est cohérent avec l'analyse qualitative faite lors de la première question.

3. Le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe Oz appliqué à l'aimant s'écrit $J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = (\mathcal{M} \wedge \vec{B}(O)) \cdot \vec{u}_z$ où $\theta(t)$ est l'angle entre l'aimant et l'axe Oz .

Les calculs sont les mêmes que pour la première question à condition de faire les changements $\omega \rightarrow \dot{\theta}$ et $\omega t \rightarrow \theta(t)$.

Nous trouvons alors, sans oublier que $\omega = \frac{d\theta}{dt}$:

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{\mathcal{M}_0^2}{2R} \frac{d\theta(t)}{dt} \sin^2 \theta(t) \quad \rightsquigarrow \quad J d\omega = -\frac{\mathcal{M}_0^2}{2R} d\theta \sin^2 \theta(t)$$

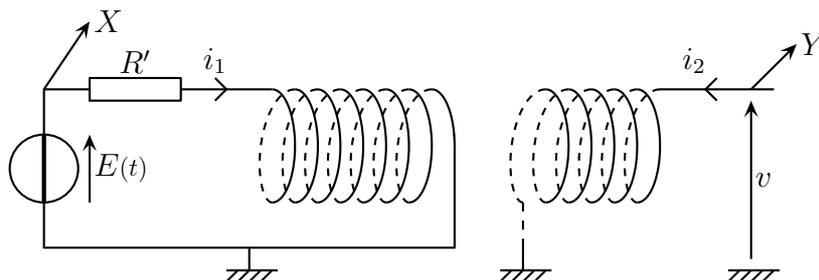
Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables (et séparée) qui s'intègre en :

$$\begin{aligned} \int_{\text{début}}^{\text{fin}} J d\omega &= \int_{\text{début}}^{\text{fin}} -\frac{\mathcal{M}_0^2}{2R} \sin^2 \theta(t) d\theta \\ J \int_{\omega_0}^0 d\omega &= -\frac{\mathcal{M}_0^2}{2R} \int_0^{\theta_f} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ J(0 - \omega_0) &= -\frac{\mathcal{M}_0^2}{8R} (2\theta_f - \sin(2\theta_f)) \end{aligned}$$

L'équation recherchée est donc $2\theta_f - \sin(2\theta_f) = \frac{8J\omega_0 R}{\mathcal{M}_0^2}$.

✿ Exercice 8

1. Le montage est représenté ci-dessous.



2. Comme $i_2(t) = 0$, la tension en convention récepteur aux bornes de la première bobine vaut :

$$u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} = L \frac{di_1(t)}{dt}$$

De même la tension aux bornes de la seconde bobine vaut

$$u_2(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} = M \frac{di_1(t)}{dt}$$

Les équations électriques recherchées sont donc :

$$\boxed{E(t) = R' i_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt}} \quad \text{et} \quad \boxed{v(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}}$$

→ *Mutuelle inductance*. Sur chaque demi-période, la tension $v(t)$ est constante, donc $\frac{di_1(t)}{dt} = C^{\text{te}} = v$.

En dérivant la première équation, nous obtenons $\frac{dE}{dt} = R' \frac{v}{M}$ puis :

→ sur la première demi-période : $\frac{2 \Delta e}{T} = \frac{R' v_1}{M}$

→ sur la deuxième demi-période : $-\frac{2 \Delta e}{T} = \frac{R' v_2}{M}$

soit, finalement : $\boxed{M = \frac{R' A T}{4 \Delta e}}$ avec $A = v_1 - v_2$ et $e = 1,4$ V.

Nous lisons la période $T = 1$ ms sur l'oscillogramme. Cela donne :

d (cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
M (mH)	0,77	0,59	0,46	0,38	0,30	0,21	0,14	0,075	0,043

3. Voir l'exemple fondamental du cours de 1^{re} année pour le champ magnétique créé sur l'axe d'une spire.

Comme la bobine est plate, il suffit de multiplier ce champ par le nombre de spire pour avoir celui créé par l'ensemble de la bobine. Cela donne :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i_1}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z \quad \text{soit} \quad \varphi(z) = \frac{\mu_0 N R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

En un point M proche (ou non) de l'axe, le plan contenant M et l'axe est plan d'antisymétrie de la distribution du courant donc \vec{B} appartient à ce plan : il n'a pas de composante orthoradiale.

L'invariance par rotation autour de l'axe Oz prouve que les composantes de B ne dépendent pas de θ . Finalement :

$$\vec{B}(M) = b_r(r,z) \vec{u}_r + B_z(r,z) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad B_r(0,z) = 0 \quad \text{et} \quad B_z(0,z) = B_0(z)$$

Le champ magnétique est à flux conservatif, donc le flux de \vec{B} est nul à travers un cylindre de rayon r compris entre les plans z et $z + dz$.

Cela donne, en considérant les composantes utiles constantes sur chaque surface du cylindre :

$$-\pi r^2 B_z(0,z) + 2\pi r B_r(r,z) + \pi r^2 B_z(r,z+dz) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0}{dz}}$$

De même, comme il n'y a pas de courants au voisinage de l'axe, l'équation de MAXWELL – AMPÈRE (ou le théorème d'AMPÈRE!) implique que la circulation sur un petit rectangle vertical compris entre r et $r + dr$ d'une part et entre z et $z + dz$ d'autre part est nulle, ce qui donne :

$$B_r(r,z) dr + B_z(r+dr,z) dz - B_r(r,z+dz) dr - B_z(r,z) dz = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial B_r(r,z)}{\partial z} = \frac{\partial B_z(r,z)}{\partial r}$$

Cela donne l'expression $\frac{\partial B_z(r,z)}{\partial r} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}$ qui s'intègre en $B_z(r,z) = b_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}$.

Seule la composante selon oz participe au flux magnétique à travers la deuxième bobine. Il vient donc :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \int_0^R \left(B_0(d) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}(d) \right) 2\pi r dr = i_1 \left(\varphi(d) \pi R^2 - \varphi''(d) \frac{\pi R^4}{8} \right) = M i_1$$

Donc $M = \pi R^2 \left(\varphi(d) - \varphi''(d) \frac{R^2}{8} \right)$.

Nous constatons alors que le modèle théorique ci-dessus correspond aux résultats expérimentaux trouvés pour $d = 20$ cm mais pas pour $d = 4$ cm. Dans ce dernier cas, l'approximation faite pour le calcul du champ n'est plus valable car $\frac{d}{r}$ n'est pas suffisamment petit.