

Onde électromagnétique

✿ Exercice 1

1. (a) Ici l'onde se propage suivant les z décroissant. Pour déterminer le sens de rotation de la polarisation, il va donc falloir la représenter dans un plan avec $-\vec{u}_z$ qui pointe vers l'observateur.

Le déphasage entre les deux composantes est ni nul ni $\pm \frac{\pi}{2}$ donc l'onde est polarisée elliptiquement.

Nous trouvons, avec un dessin, que l'onde tourne dans le sens « droit » dans le plan xOy lorsque z pointe vers nous, ce qui signifie qu'elle tourne vers la gauche pour un observateur regardant l'onde se propager suivant $-\vec{u}_z$.

Il s'agit, finalement, d'une onde polarisée elliptiquement gauche.

1. (b) Les deux composantes sont en phase : c'est une polarisation rectiligne.

2. La polarisation est circulaire, donc les composantes sur \vec{u}_y et \vec{u}_z sont les mêmes.

C'est une circulaire droite pour une propagation suivant $-\vec{u}_x$: il s'agit donc d'un vecteur qui tourne dans le sens gauche dans le plan direct (Oyz).

Cela donne, sachant que le déphasage entre les deux composantes vaut $\pm \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y + E_0 \cos(\omega t + kx - \pi/2) \vec{u}_z$$

✿ Exercice 2

Dans cet exercice, nous ne savons pas d'où vient le champ, comment il a été créé. Nous savons juste qu'il existe et nous devons en tirer tout un tas de conclusion.

Ce genre d'exercice n'est pas inutile – forcément puisque vous êtes en train de le faire – étant donné que les problèmes s'intéressent souvent d'abord à la mise en équation d'un champ, puis à la résolution du problème pour ce champ et enfin à l'exploitation du résultat.

Cet exercice ne traite que de la troisième étape.

En fait il s'agit ici d'un champ électromagnétique dans un guide d'onde. C'est analogue à la situation vue en classe à la différence près qu'en classe le champ choisi était tel que \vec{E} soit transverse alors qu'ici c'est le champ magnétique qui va être transverse.

1. α est un paramètre de structure et k_0 un vecteur d'onde, c'est-à-dire une grandeur caractérisant la propagation d'une onde. Pour déterminer ces paramètres, nous devons donc écrire la loi qui donne la structure du champ et l'équation de propagation du champ.

Écrivons la loi qui donne la structure du champ électrique (à savoir l'équation de MAXWELL – GAUSS) ainsi que l'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide¹. Cela donne :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\pi}{\alpha} + j k_0 \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Nous en déduisons rapidement :

$$k_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{j\pi}{a k_0}$$

1. Équation qui est, normalement, à savoir retrouver.

2. Comme l'onde n'est pas plane, nous ne pouvons pas utiliser la relation de structure des ondes planes progressives monochromatique dans le vide.

Il est alors nécessaire de revenir à une équation de couplage (équation de MAXWELL – FARADAY ou équation de MAXWELL – AMPÈRE) pour déterminer le champ.

Techniquement, étant donné qu'il est plus facile de primitiver une dérivée partielle par rapport au temps que de primitiver un rotationnel, nous allons utiliser l'équation de MAXWELL – FARADAY.

L'équation de MAXWELL – FARADAY donne, tout calcul fait, et en ne prenant pas en compte les champs statiques :

$$\vec{B} = -\frac{\omega}{k_0 c^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - k_0 z)} \vec{u}_z$$

3. Pour qu'une onde soit plane, il faut qu'elle ne dépende que d'une seule coordonnée cartésienne, ce qui n'est pas le cas ici.

Elle se propage vers les z croissants, elle est bien harmonique de pulsation ω .

Elle est transverse magnétique mais pas transverse électrique.

4. Déterminons tout d'abord l'expression du vecteur de POYNTING en faisant attention d'utiliser les notations réelles pour \vec{E} et \vec{B} :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{\pi \omega}{a k_0^2 c^2 \mu_0} E_0^2 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - k_0 z) \sin(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\omega}{k_0 c^2 \mu_0} E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - k_0 z) \vec{u}_z \end{aligned}$$

Comme $\langle \cos(\omega t - k_0 z) \sin(\omega t - k_0 z) \rangle = 0$ et $\langle \cos^2(\omega t - k_0 z) \rangle = \frac{1}{2}$, nous obtenons finalement :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\omega}{2 k_0 c^2 \mu_0} E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{u}_z$$

L'énergie se déplace dans le sens de propagation.

✿ Exercice 3

Analyse physique. Ici nous avons affaire a priori à deux milieux propagatifs : le vide et le métal. Dans ces milieux propagatifs, tout se passe suivant un axe normal à la surface de séparation. Dans ces conditions, nous sommes ramenés à l'étude usuelle d'un milieu propagatif avec la recherche du nombre de milieux, du nombre d'interface, le décompte des grandeurs inconnues, les conditions aux limites et le mélange du tout.

Ici c'est l'énoncé qui nous donne (bien gentiment) les conditions aux limites, à savoir que le champ \vec{E} est nul au niveau de l'interface. Notons tout de suite que cela découle à la fois des relations de passage de l'électromagnétisme et du fait que le conducteur est parfait autrement dit que les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls à l'intérieur de ce dernier.

1. A priori aucune difficulté majeure dans cette question, hormis le fait que de l'écriture initiale de l'onde incidente va découler tout le reste de l'exercice. Il faut donc être particulièrement vigilant sur ce point.

Il faut faire attention aux trois points suivants :

→ l'onde se propage suivant les x croissant, donc la phase est en $\omega t - k x$ avec $(\omega = k c)$ (propagation dans le vide)

→ l'onde est circulaire donc il y a la même amplitude sur \vec{u}_z et sur \vec{u}_y et comme le déphasage est de $\pm \frac{\pi}{2}$, une composante peut s'écrire en cos et l'autre en sin.

→ l'onde est circulaire droite.

Nous trouvons finalement, avec la condition initiale $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y - \sin(\omega t - kx) \vec{u}_z$.
Comme l'onde est plane progressive, nous pouvons utiliser la relation de structure :

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kx) \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z \right)$$

Avec l'expression du vecteur de POYNTING, nous trouvons :

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\vec{\Pi}_i = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \right)$$

☞ *Remarque.* contrairement aux OPPM polarisée rectilignement, le vecteur de POYNTING pour une OPPMPC est constant dans le temps.

2. L'onde réfléchie s'écrit de toute façon sous la forme d'une onde plane avec des composantes *a priori* sur \vec{u}_x et \vec{u}_y :

$$\vec{E}_r = E_y \cos(\omega t + kx + \varphi_y) \vec{u}_y + E_z \cos(\omega t + kx + \varphi_z) \vec{u}_z$$

Pour déterminer E_y , φ_y , E_z et φ_z , nous devons utiliser les relations de passage.

Dans le cas présent elle concerne la composante tangentielle de \vec{E} et cette dernière est continue :
 $\vec{E}_{\text{total}}(0^-) = E_{\text{total}}(0^+)$.

Comme en $x = 0^+$ nous avons un métal parfait (donc à l'intérieur duquel les champs électrique et magnétique sont constamment nuls), cela donne :

$$\vec{E}_r(0) + \vec{E}_i(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left(\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y + E_0 \sin(\omega t + kx) \vec{u}_z \right)$$

Il s'agit d'une onde polarisée circulaire gauche.

Pour déterminer \vec{B}_r et $\vec{\Pi}_r$, nous faisons comme à la question précédente (sans oublier que le vecteur de propagation est $\vec{k}_r = -k \vec{u}_x$ et nous trouvons :

$$\left(\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \sin(\omega t + kx) \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{u}_z \right) \quad \text{et} \quad \left(\vec{\Pi}_r = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x \right)$$

► **Onde résultante.** Nous trouvons, en sommant simplement les champs incident et réfléchi (et avec une toute petite mini formule de trigo) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\text{tot}} = 2 E_0 [\sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y + \cos(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_z] \\ \vec{B}_{\text{tot}} = \frac{2 E_0}{c} [\sin(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_y + \cos(\omega t) \cos(kx) \vec{u}_z] \end{array} \right.$$

REMARQUE

Nous pouvons remarquer que le champ magnétique n'est pas nul à la surface du conducteur.

Pourquoi d'ailleurs le champ magnétique aurait-il du être nul ?

Seule sa composante normale doit être continue (donc nulle à cause du caractère parfait du conducteur), sa composante tangentielle ne se voit subir aucune contrainte.

En fait c'est même la composante tangentielle du champ magnétique qui va engendrer des courants surfaciques dans le conducteur.

Pour le vecteur de POYNTING, nous trouvons le résultat exceptionnel

$$\vec{\Pi}_{\text{tot}} = \frac{\vec{E}_{\text{tot}} \wedge \vec{B}_{\text{tot}}}{\mu_0} = \vec{0}$$

REMARQUE

Il ne faut pas oublier de prendre les champs résultants pour déterminer $\vec{\Pi}_{\text{tot}}$ et, surtout, ne pas écrire $\vec{\Pi}_{\text{tot}} \neq \vec{\Pi}_i + \vec{\Pi}_r$ car le vecteur de POYNTING n'est pas une grandeur linéaire.

En effet en développant $\vec{\Pi}_{\text{tot}}$ nous avons :

$$\vec{\Pi}_{\text{tot}} = \frac{(\vec{E}_i + \vec{E}_r) \wedge (\vec{B}_i + \vec{B}_r)}{\mu_0} = \underbrace{\frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}}_{\vec{\Pi}_i} + \underbrace{\frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r}{\mu_0}}_{\vec{\Pi}_r} + \frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r}{\mu_0} \neq \vec{\Pi}_i + \vec{\Pi}_r$$

En revanche, en **valeur moyenne**, comme il n'y a pas d'interférence entre les différentes propagations, nous avons bien :

$$\langle \vec{\Pi}_{\text{tot}} \rangle = \langle \vec{\Pi}_i \rangle + \langle \vec{\Pi}_r \rangle$$

3. La densité surfacique de charge est reliée à la composante normale du champ électrique.

Or, ici, le champ électrique voit sa composante nulle aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du métal : la densité surfacique de charge est donc nulle.

En ce qui concerne la densité surfacique de courant, nous pouvons la déterminer en utilisant la relation de passage de la composante tangentielle du champ magnétique :

$$\vec{u}_x \wedge (\vec{0} - (\vec{B}_r + \vec{B}_i)) = \mu_0 \vec{j}_s \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j}_s = \frac{2 E_0}{\mu_0 c} (\cos(\omega t) \vec{u}_y - \sin(\omega t) \vec{u}_z)$$

☞ *Remarque.* rappelons que le fait que le courant soit surfacique est lié à la modélisation adoptée à savoir que l'épaisseur de peau est considérée comme très faible.

✿ Exercice 4

Il s'agit ici d'un exercice de propagation unidimensionnel car tout se passe sur un axe : l'axe normal à l'interface. Nous sommes donc ramené ni plus ni moins aux méthodes que nous avons utilisées dans le chapitre sur la propagation d'onde mécanique, à savoir :

- trouver les équations de propagation dans chaque milieu propagatif
- écrire l'état ondulatoire dans chaque milieu propagatif (compte-tenu des relations de dispersion et des ondes présentes)
- trouver les conditions aux limites
- résoudre le tout

Nous aurons à faire tout cela dans cet exercice plus une interprétation de la solution obtenue.

1. En fait, il s'agit ici de refaire une partie de cours . . .

Analyse physique. Nous étudions un métal donc nous allons nous placer a priori dans le cadre d'un métal conducteur linéaire isotrope (tel que $\vec{j} = \gamma \vec{E}$) et dans l'ARQS c'est-à-dire tel qu'il soit possible de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction. Nous savons alors que nous allons retrouver l'effet de peau.

Analyse technique. Pour trouver l'équation de propagation, nous devons réécrire les équations de MAXWELL, l'équation de couplage champ – matière (la loi d'OHM) et faire les approximations qui s'impose. Après avec un bon $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\))$, cela devrait rouler.

La loi d'OHM locale $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, avec γ réel, n'est valable que pour $\omega \ll 10^{14}$ rad.s⁻¹ (environ).

Dans un conducteur ohmique placé dans ces conditions, le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

D'autre part, en utilisant l'équation locale de conservation de la charge, la loi d'OHM et l'équation de MAXWELL – GAUSS, nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \rho(M,t) = \rho_0(M,t) e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \ll T$$

Nous pouvons donc considérer que la charge volumique est uniformément nulle.

Ensuite, avec la démarche habituelle, nous trouvons l'équation aux dérivées partielles vérifiées par le champ \vec{E} :

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \gamma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La relation de dispersion s'écrit donc :

$$\boxed{k^2 = -i \omega \mu_0 \gamma} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{k} = \pm \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$$

2. Pour trouver les coefficients de réflexion et de transmission, nous devons tout d'abord écrire l'état ondulatoire compte-tenu de la relation de dispersion puis les conditions aux limites.

► État ondulatoire

Nous avons affaire ici à deux milieux propagatif semi-infini. Il va donc y avoir une onde incidente, une onde réfléchi et une onde transmise.

Écrivons tout d'abord les champs électromagnétiques en utilisant la relation de structure des OPPM et la définition des coefficients de réflexion et de transmission :

$$\begin{aligned} \text{Onde incidente :} \quad \underline{\vec{E}}_i &= \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)} & \text{et} & \quad \underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{k}_0 \wedge \underline{\vec{E}}_0}{\omega} e^{i(\omega t - k_0 z)} \\ \text{Onde réfléchi :} \quad \underline{\vec{E}}_r &= \underline{r} \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t + k_0 z)} & \text{et} & \quad \underline{\vec{B}}_r = \frac{(-\vec{k}_0) \wedge \underline{r} \underline{\vec{E}}_0}{\omega} e^{i(\omega t + k_0 z)} \\ \text{Onde transmise :} \quad \underline{\vec{E}}_t &= \underline{t} \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - k_m z)} & \text{et} & \quad \underline{\vec{B}}_t = \frac{\vec{k}_m \wedge \underline{t} \underline{\vec{E}}_0}{\omega} e^{i(\omega t - k_m z)} \end{aligned}$$

Dans les expressions précédentes, nous avons noté $\vec{k}_m = \underline{k}_m \vec{u}_z$ avec $\underline{k}_m = \frac{1-i}{\delta}$ (le signe est choisi de telle sorte que l'onde diminue lorsque z augmente).

► Conditions aux limites

Ici, étant donné que l'effet de peau apparaît, nous pouvons dire que nous sommes à l'échelle mésoscopique.

Or au niveau mésoscopique, tous les champs sont continus, aussi bien pour leur composante normale que pour leurs composantes tangentielles.

Nous en déduisons les relations :

$$\underline{\vec{E}}_0 + \underline{r} \underline{\vec{E}}_0 = \underline{t} \underline{\vec{E}}_0 \quad \text{et} \quad (\vec{k}_0 \wedge \underline{\vec{E}}_0) - (\vec{k}_0 \wedge \underline{r} \underline{\vec{E}}_0) = \vec{k}_m \wedge \underline{t} \underline{\vec{E}}_0$$

► Coefficients de réflexion et transmission

Comme les relations de passage sont vraies quel que soit $\underline{\vec{E}}_0$, cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ k_0 + \underline{r} k_0 = \underline{t} k_m \end{array} \right. \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{r} = \frac{k_m - k_0}{k_m + k_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{t} = \frac{2 k_0}{k_m + k_0}}$$

3. Pour déterminer le pouvoir réflecteur du métal, plutôt que de travailler en énergie, nous allons travailler en puissance. La traduction formelle de la définition du pouvoir réflecteur est :

$$R = \left| \frac{\langle \vec{\Pi}_r(0^-, t) \cdot \vec{u}_z \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i(0^-, t) \cdot \vec{u}_z \rangle} \right|$$

Or nous avons :

$$\langle \vec{\Pi}_i(0^-, t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2 c \mu_0} |E_0|^2 \vec{u}_z$$

$$\text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_r(0^-, t) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E}_r \wedge \vec{B}_r^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2 c \mu_0} |r|^2 |E_0|^2 \vec{u}_z$$

Ce qui donne :

$$R = |r|^2 = \frac{1 + \left(1 - \frac{\omega \delta}{c}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{\omega \delta}{c}\right)^2}$$

Si $\delta \ll \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$, le métal se comporte comme un métal parfait et R tend vers 1 : toute l'énergie de l'onde incidente est réfléchie, pourvu que le métal soit suffisamment épais pour que l'on puisse négliger l'onde retour.

4. Le champ électrique dans le métal s'écrit, en notation complexe :

$$\underline{E}_t = \underline{t} \underline{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

La puissance moyenne dissipée par effet JOULE vaut donc :

$$\mathcal{P}_J = \int_0^\infty \gamma \langle E_t^2(z, t) \rangle S dz = \int_0^\infty \frac{1}{2} \gamma |\underline{E}_t| S dz$$

Ce qui donne, tout calculs faits :

$$\mathcal{P}_J = \frac{\gamma \delta}{4} \frac{\left(\frac{2\delta\omega}{c}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{\omega\delta}{c}\right)^2} |E_0|^2 S$$

La puissance transmise par l'onde incidente est égale au flux moyen du vecteur de POYNTING transmis en $z = 0$ à travers la surface S . Il vient :

$$\mathcal{P}_t = \langle \vec{\Pi}_t(0^+, t) \rangle S \vec{u}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t^*}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2 \mu_0 \omega} |t|^2 \operatorname{Re}(k_m) |E_0|^2 S$$

et ainsi :

$$\mathcal{P}_t = \frac{1}{2 \mu_0 \omega \delta} \frac{\left(\frac{2 \delta \omega}{c}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{\omega \delta}{c}\right)^2} |\underline{E}_0|^2 S.$$

Comme $\delta^2 = \frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}$, les deux puissances sont égales : la puissance transmise par l'onde est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur.

Si le conducteur est parfait, ces deux puissances sont nulles, ce qui confirme le résultat de la question précédente.

✿ Exercice 5

Il s'agit ici d'un exercice analogue à celle vue en cours pour les électrons dans les métaux : modélisation microscopique d'un milieu, recherche de la loi de couplage milieu – champ, équation de propagation, solution, interprétation.

1. (a) L'équation de MAXWELL – AMPÈRE s'écrit, en notation complexe, avec la convention de l'énoncé (attention, ici les dérivées par rapport au temps correspondent à des multiplications par $-i\omega$) :

$$i \vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 (\underline{\vec{j}} - i \varepsilon_0 \omega \underline{\vec{E}}) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{j}} = i \varepsilon_0 c^2 \left(\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}}_0 + \frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}_0 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

1. (b) L'équation locale de conservation de la charge s'écrit $\text{div } \underline{\vec{j}} = 0$ puisque le milieu reste localement neutre.

En notation complexe cela donne $i \vec{k} \cdot \underline{\vec{j}} = 0$: le vecteur $\underline{\vec{j}}$ est donc orthogonal à \vec{k} .

☞ Remarque. ici, étant donné la convention de l'énoncé, nous avons $\nabla = +i \vec{k}$.

2. Les électrons étant non relativistes, la force magnétique est négligeable devant la force électrique (cf. cours) et le champ électrique apparaît uniforme à l'échelle du déplacement des électrons.

L'équation du mouvement d'un électron s'écrit donc en notation complexe : $-i m \omega \underline{\vec{v}} = -e \underline{\vec{E}}$.

Sachant que $\underline{\vec{j}} = -n_0 e \underline{\vec{v}}$, nous obtenons $\underline{\vec{j}} = i \frac{n_0 e^2}{m \omega} \underline{\vec{E}}$.

La conductivité recherchée vaut donc $\underline{\sigma} = i \frac{n_0 e^2}{m \omega}$.

La conductivité est complexe : le vecteur densité de courant est en quadrature avec le champ électrique ce qui implique que la puissance perdue par effet JOULE est nulle, conformément à la relation $\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right)$.

Tout cela est normal compte tenu du fait qu'aucun effet dissipatif n'ait été pris en compte dans l'équation du mouvement.

3. L'équation de MAXWELL – FARADAY donne, en notation complexe : $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$.

En reportant cette expression dans la relation trouvée dans la première question et en développant le double produit vectoriel tout en utilisant le fait que \vec{k} et $\underline{\vec{E}}$ sont orthogonal (ce qui revient, en fait, à trouver l'équation de propagation) :

$$\underline{\vec{j}}_0 = i \varepsilon_0 c^2 \left(\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \right) + \frac{\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}_0 \right) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{j}}_0 = \frac{i \varepsilon_0}{\omega} (\omega^2 - k^2 c^2) \underline{\vec{E}}_0$$

4. Les deux relations entre \vec{j}_0 et \vec{E}_0 donnent :

$$\underline{\sigma} = \frac{i \varepsilon_0}{\omega} (\omega^2 - k^2 c^2) \quad \rightsquigarrow \quad \omega^2 = c^2 (k^2 + K^2) \quad \text{avec} \quad K = \sqrt{\frac{\mu_0 n_0 e^2}{m}}$$

Les vitesses de phase et de groupe sont :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \sqrt{1 + \frac{K^2}{k^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{K^2}{k^2}}}}$$

Ces vitesses vérifient la relation $v_g v_\varphi = c^2$

5. Les trains d'onde se propagent à une vitesse égale à la vitesse de groupe.

L'instant de réception d'un train d'onde est donc $t = \frac{L}{v_g}$.

Nous en déduisons :

$$\delta t = L \left(\frac{1}{v_{g2}} - \frac{1}{v_{g1}} \right) = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda_2^2 K^2}{4 \pi^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_1^2 K^2}{4 \pi^2}} \right)$$

Compte tenu de l'approximation suggérée, cela donne :

$$\delta t = \frac{L}{c} \left(\frac{\lambda_2^2 K^2}{8 \pi^2} - \frac{\lambda_1^2 K^2}{8 \pi^2} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\delta t = \frac{L K^2}{8 \pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}$$

Numériquement $\delta t \leq 19$ ps.

✿ Exercice 6

1. Voir cours. L'éclairement n'est autre que la norme du vecteur de POYNTING.

Nous trouvons alors $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$

2. (a) Chaque photon a une énergie $h \nu$ donc l'énergie qui traverse la surface S pendant la durée dt est égale à $dU_{\text{em}} = N_0 h \nu S dt$ car N_0 représente le *flux* surfacique de photons.

D'autre part, cette énergie est égale à $dU_{\text{em}} = \mathcal{E} S dt$.

Par identification nous trouvons $N_0 = \frac{\mathcal{E}}{h \nu}$.

2. (b) Le raisonnement est identique à celui fait lors du calcul de la pression cinétique.

La quantité de mouvement du photon incident est $\vec{p}_i = \frac{h \nu}{c} \vec{u}_x$.

Une fois que le photon a rebondi (en fait il a été absorbé et réémis), sa quantité de mouvement est $\vec{p}_r = -\frac{h \nu}{c} \vec{u}_x$.

La paroi reçoit donc la quantité de mouvement $\delta \vec{p}_{\text{paroi}} = -\delta \vec{p}_{\text{photon}} = -2 \frac{h \nu}{c} \vec{u}_x$.

Entre les instants t et $t + dt$, il y a $N_0 S dt$ photons qui arrivent sur la paroi et dont cette dernière reçoit la quantité de mouvement $d\vec{p}_{\text{paroi}} = N_0 S \frac{2 h \nu}{c} dt \vec{u}_x$ et, d'après le PFD : $d\vec{p}_{\text{paroi}} = \vec{F} dt$.

Nous trouvons alors la force subie par la paroi $\vec{F} = N_0 S \frac{2h\nu}{c} dt \vec{u}_x = \frac{2\mathcal{E}S}{c} \vec{u}_x$ ce qui correspond à une pression $p = \frac{2\mathcal{E}}{c} = \varepsilon_0 E_0^2$

2. (c) Si la paroi était totalement absorbante, le photon ne serait pas réémis et la quantité de mouvement reçue par la paroi serait deux fois moins importante.

La pression vaudrait alors $p' = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$.

☞ *Remarque.* le photon étant absorbé et non réémis, l'énergie interne de la paroi augmente de $h\nu$ pour chaque photon, *i.e.* sa température va augmenter.

2. (d) Nous trouvons : $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{P}}{\pi r^2} = 5 \text{ MW.m}^{-2}$ (à comparer avec le $1,5 \text{ kW.m}^{-2}$ correspondant à l'éclairement solaire).

Nous avons ainsi $E_0 = 61,939 \text{ kV.m}^{-1}$ et $p = 0,034 \text{ Pa}$.

Bien que la puissance du laser soit extrêmement importante (un laser de TP a une puissance de l'ordre du mW), la pression résultante est très faible.

3. (a) Les photons reçus et absorbés par la sphère sont ceux que recevrait un disque de rayon a perpendiculaire à \vec{u}_x .

La sphère subit donc la force que subirait ce disque, soit $\vec{F} = \pi a^2 p' \vec{u}_x = \frac{\pi a^2 \mathcal{E}}{c} \vec{u}_x$

3. (b) La puissance émise par le Soleil peut se déterminer en calculant le flux à travers une sphère de rayon D (distance Terre – Soleil), ce qui donne $\mathcal{P}_0 = \mathcal{E} 4\pi D^2 = 4.10^{26} \text{ W}$.

REMARQUE

Chaque seconde, le Soleil perd une masse de $\Delta m = \frac{\mathcal{P}_0 \Delta t}{c^2} = 0,5.10^{10} \text{ kg}$!

À ce rythme, il tiendra tout au plus 2.10^{20} s . ☹

Heureusement que 2.10^{20} s correspond à 10^{13} an . ☺

En « réalité », les modèles actuels de vie d'une étoile prédisent que le Soleil brillera encore quelques milliards d'années.

La force gravitationnelle subie par un objet sphérique homogène de la part du Soleil s'écrit (en norme) : $F_{\text{grav}} = G \frac{4}{3} \pi r^3 \mu \frac{M_S}{r^2}$.

À la distance r , l'éclairement émis par le Soleil vaut $\mathcal{E}(r) = \frac{\mathcal{P}_0}{4\pi r^2}$ (conservation du flux), ainsi la force due à la pression de radiation s'écrit (en norme) $F_{\text{rad}} = \pi a^2 \frac{\mathcal{E}(r)}{c} = \frac{a^2}{4r^2} \frac{\mathcal{P}_0}{c}$ (pression pour un objet totalement absorbant). Cette force est dirigée en sens inverse de la force gravitationnelle.

Le rapport des deux forces vaut $\alpha = \frac{3\mathcal{P}_0}{16cGM_S\pi a\mu}$.

L'application numérique donne $\alpha = 10^{-7}$ pour une météorite et $\alpha = 6$ pour une poussière.

Ainsi dans le cas d'une météorite, nous pouvons négliger la pression de radiation, mais pas pour les poussières.

Cela se voit bien expérimentalement : les queues des météorites sont toujours en sens opposé au soleil et non dans le sens de la traînée comme l'intuition le laisserait croire.

REMARQUE

Il est possible de retrouver cette pression de radiation de manière entièrement électromagnétique pour un conducteur.

Il faut pour cela calculer les courants présents dans le conducteur et les forces de LAPLACE subies par celui-ci.

Dans le cas d'une incidence normale, pour un conducteur parfait, le calcul est assez facile et le lecteur est invité à vérifier qu'il retrouve bien l'expression initiale.

✿ Exercice 7

1. Étant donnée la forme de \vec{E} , nous pouvons chercher le champ magnétique \vec{B} sous la forme $\vec{B} = \vec{B}(r) e^{i(\omega t - kr)}$.

Pour cela, partons plutôt de l'équation de MAXWELL – FARADAY.

Elle donne tout d'abord $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}(r) e^{i(\omega t - kr)}$.

Avec une formule d'analyse vectorielle (merci la feuille magique), nous trouvons :

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot} \left(E(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z \right) = \text{grad} \left(E(r) e^{i(\omega t - kr)} \right) \wedge \vec{u}_z$$

Nous en déduisons
$$\vec{B}(r) = - \left(\frac{k}{\omega} E(r) + \frac{i}{\omega} \frac{dE}{dr} \right) \vec{u}_\theta$$

2. Nous pouvons déterminer la valeur moyenne du vecteur de POYNTING avec la notation complexe, ce qui donne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) \rightsquigarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k E^2(r)}{2 \mu_0} \vec{u}_r$$

La puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h est égale au flux de $\langle \vec{\Pi} \rangle$ à travers la surface latérale du cylindre, soit
$$\mathcal{P} = \frac{k E^2(r)}{2 \mu_0} 2 \pi r h.$$

3. Comme il n'y a pas de source d'énergie en dehors de l'axe, ce flux est conservatif, ce qui implique

$$E(r) = \sqrt{\frac{2 \mu_0 \mathcal{P}}{\pi k r}} : \text{l'amplitude est proportionnelle à } \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

4. Le champ électrique \vec{E} vérifie l'équation de D'ALEMBERT $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

Comme \vec{u}_z est un vecteur indépendant du point d'observation, nous pouvons projeter cette équation de propagation sur cet axe, ce qui donne $\Delta E_z(r,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z(r,t)}{\partial t^2}$.

Tous calculs faits, en négligeant les termes du second en $\frac{1}{kr}$, l'équation de D'ALEMBERT donne :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \rightsquigarrow k = \frac{\omega}{c}$$

5. Dans la zone de champ lointain $r \gg \lambda$, le terme $i \frac{dE}{dr}$ est négligeable devant $k E(r)$ dans l'expression du champ magnétique et il reste alors :

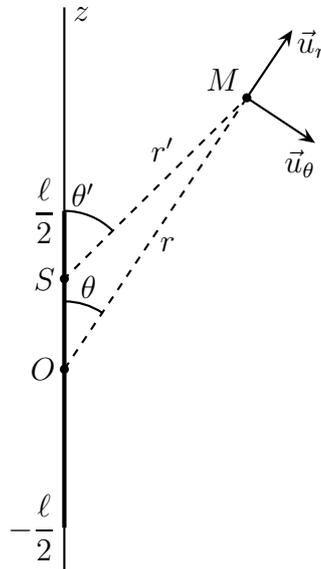
$$\vec{B} = -\frac{k}{\omega} E(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta \rightsquigarrow \vec{B} = \frac{k \vec{u}_r \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Localement, l'onde a la structure d'une onde plane.

✿ Exercice 8

1. Ici l'énoncé nous guide bien puisqu'il nous propose une approche mésoscopique à savoir déterminer le champ rayonné par un morceau de l'antenne et ensuite sommer les différentes contributions. Dans ces conditions, il est absolument nécessaire de faire un beau schéma bien grand bien soigné de manière à ne pas se louper sur la géométrie.

Commençons par un schéma représentant un dipôle situé en S rayonnant en M .



En écrivant $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OM}$ et en élevant au carré, nous retrouvons la relation de PYTHAGORE généralisée : $r'^2 = z^2 + r^2 - 2rz \cos \theta$, ce qui s'écrit, au premier ordre en $\frac{z}{r}$:

$$r' = r \left(1 - \frac{z}{r} \cos \theta \right) = r - z \cos \theta$$

D'autre part $HM = r \sin \theta = r' \sin \theta'$ ce qui donne $\frac{\sin \theta}{r} = \frac{r'}{r^2} \sin \theta' \simeq \frac{\sin \theta'}{r'}$.

Le champ magnétique rayonné par l'élément de longueur dz vaut, en utilisant l'expression de dp proposée :

$$\begin{aligned} d\vec{B}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{d\ddot{p} \left(t - \frac{r'}{c} \right)}{r'} \sin \theta' \vec{u}_{\varphi'} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi c} j\omega I_0 \cos \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \exp \left(j\omega \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right) \frac{\sin \theta}{r} \vec{u}_{\varphi} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } d\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} j\omega I_0 \cos \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \exp \left(j\omega \frac{z}{c} \cos \theta \right) \exp \left(j\omega \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right) \frac{\sin \theta}{r} \vec{u}_{\varphi}.$$

en utilisant les approximations suggérées dans l'énoncé et avec $\vec{u}_{\varphi} = \vec{u}_{\varphi'}$.

Pour calculer le champ total, il faut sommer $d\vec{B}$ pour z variant de $-\frac{\ell}{2}$ à $\frac{\ell}{2}$ et pour ce faire, nous décomposons $\cos \left(2\pi \frac{z}{\lambda} \right) = \frac{1}{2} \left(\exp \left(j2\pi \frac{z}{\lambda} \right) + \exp \left(-j2\pi \frac{z}{\lambda} \right) \right)$.

Tous calculs faits, on trouve bien l'expression proposée dans l'énoncé :

$$\vec{B}_{(M,t)} = j \frac{\mu_0 I_0}{2 \pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{j\omega(t-r/c)} \vec{u}_\varphi$$

2. La relation de structure de l'onde plane s'écrit $\underline{E} = c \underline{B} \wedge \vec{u}_r$, ce qui donne :

$$\vec{E}_{(M,t)} = j \frac{\mu_0 c I_0}{2 \pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{j\omega(t-r/c)} \vec{u}_\theta$$

Le vecteur de POYNTING s'écrit alors (attention de bien le calculer avec les grandeurs en notation réelle) :

$$\vec{\Pi}_{(M,t)} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4 \pi^2 r^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u}_r$$

Sa valeur moyenne dans le temps est donc :

$$\langle \vec{\Pi}_{(M,t)} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8 \pi^2 r^2} \times \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \vec{u}_r$$

☛ *Remarque.* nous aurions pu calculer directement la valeur **moyenne** du vecteur de POYNTING avec les notations complexes.

Cette grandeur est nulle pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et elle est extrême pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: l'antenne, à l'instar du dipôle, ne rayonne pas dans sa direction, mais dans son plan équatorial.

3. La puissance rayonnée à travers une sphère de rayon $r \gg \lambda$ s'écrit :

$$\mathcal{P} = \oint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \oint \frac{\mu_0 c I_0^2}{8 \pi^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Avec la formule donnée dans l'énoncé, nous trouvons $\mathcal{P} = \frac{1,22 \mu_0 c I_0^2}{4 \pi}$.

En assimilant cette puissance perdue à une puissance dissipée par effet JOULE $\mathcal{P} = \frac{1}{2} R I_0^2$, nous trouvons la résistance de rayonnement : $R = \frac{1,22 \mu_0 c}{2 \pi} = 73,2 \Omega$.

☛ *Remarque.* cette valeur est à rapprocher de l'impédance caractéristique des câbles d'antenne de réception, à savoir 75Ω .