

## Ondes dans un milieu diélectrique

### ✿ Exercice 1

Aucune difficulté dans cet exercice. Il rassemble juste des questions qui ne doivent poser aucune difficulté de résolution.

1. La relation de dispersion (à connaître **et** à savoir retrouver) est  $k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c}$ .

2. Numériquement :  $k = 33,5103 \text{ m}^{-1}$ , ce qui correspond à une longueur d'onde de  $\lambda = 18,75 \text{ cm}$ .

3. En écrivant le champ électrique sous la forme  $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ , on peut utiliser la relation de structure des OPPM pour  $\vec{B}$ , ce qui donne, en notant  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  :

$$\vec{B} = \frac{n \vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{n E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z}$$

Le rapport des amplitudes vaut :  $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} = \frac{c}{n}$

4. La vitesse de phase est  $v_\varphi = \frac{c}{n} = 1,875 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

### ✿ Exercice 2

*Analyse physique.* Ici nous sommes face à un problème de propagation unidimensionnel étant donné que l'onde électromagnétique arrive normalement à la surface de séparation<sup>1</sup>. Nous savons donc qu'il y aura des ondes transmises et réfléchies à chaque interface. Les grandeurs pertinentes sont  $e$  pour la géométrie,  $\omega$  pour décrire l'onde,  $k_0$  pour décrire son comportement dans le vide qu'est l'air et  $n$  pour décrire son comportement dans l'interface.

*Analyse technique.* Nous savons déjà écrire a priori l'état ondulatoire dans chacun des trois domaines propagatifs. Il restera donc à écrire les relations de passage au niveau des interfaces. Comme tout est linéaire, nous allons avoir 5 ondes au total donc 4 coefficients de proportionnalité avec l'onde incidente. Ces 4 coefficients demande 4 relations de passage : 2 (une pour  $\vec{E}$ , une pour  $\vec{B}$ ) pour chacune des deux interfaces.

Au niveau de l'écriture des ondes dans chaque zone, nous allons arranger le terme de phase afin que cela revienne à écrire la condition en  $z = 0$ .

Pour  $z < -\frac{e}{2}$ , la zone propagative est le vide et il y a une onde progressive vers les  $z$  croissants et une vers les  $z$  décroissants.

Avec la relation de structure des OPPM, cela donne, en modifiant le terme de phase de manière à simplifier les futures relations de passage :

$$\begin{cases} \vec{E}_0 &= E_0 e^{i(\omega t - k_0(z+e/2))} \vec{u}_x + E'_0 e^{i(\omega t + k_0(z+e/2))} \vec{u}_x \\ \vec{B}_0 &= \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - k_0(z+e/2))} \vec{u}_y + \frac{E'_0}{c} e^{i(\omega t + k_0(z+e/2))} \vec{u}_y \end{cases}$$

☞ *Remarque.* changer le terme de phase revient à changer l'amplitude complexe de l'onde, ce qui n'est pas important puisque ce n'est qu'une question de convention.

1. Dans le cas de milieux anisotrope il n'est pas impossible d'observer **deux** rayons réfractés y compris en incidence normale. Cela est du au fait que le comportement de l'onde dépend de la projection du champ  $\vec{E}$  sur les axes naturels du matériau.

Pour le milieu intermédiaire, il y a une onde progressive vers les les  $z$  croissants et une vers les  $z$  décroissants.

$$\begin{cases} \vec{E}_1 &= E_1 e^{i(\omega t - n_0 k_0 z)} \vec{u}_x &+ E'_1 e^{i(\omega t + n_0 k_0 z)} \vec{u}_x \\ \vec{B}_1 &= \frac{n_0 E_1}{c} e^{i(\omega t - n_0 k_0 z)} \vec{u}_y &+ \frac{n_0 E'_1}{c} e^{i(\omega t + n_0 k_0 z)} \vec{u}_y \end{cases}$$

Enfin, pour le dernier milieu d'indice  $n$ , il n'y a qu'une onde vers les  $z$  croissants :

$$\begin{cases} \vec{E}_2 &= E_2 e^{i(\omega t - n k_0 (z - e/2))} \vec{u}_x \\ \vec{B}_2 &= \frac{n E_2}{c} e^{i(\omega t - n k_0 (z - e/2))} \vec{u}_y \end{cases}$$

Aux interfaces, il y a continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  de toute façon.

De plus comme le diélectrique est parfait, il n'y a pas de courant libre (courant de conduction) ce qui implique la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{B}$ .

Ces relations s'écrivent, en notant  $\alpha \stackrel{\text{not}}{=} \frac{n_0 k_0 e}{2}$  :

$$\text{En } z = -\frac{e}{2} : \begin{cases} E_0 + E'_0 = E_1 e^{i\alpha} + E'_1 e^{-i\alpha} \\ E_0 - E'_0 = n_0 E_1 e^{i\alpha} - n_0 E'_1 e^{-i\alpha} \end{cases}$$

$$\text{Et en } z = \frac{e}{2} : \begin{cases} E_1 e^{-i\alpha} + E'_1 e^{i\alpha} = E_2 \\ n_0 E_1 e^{-i\alpha} - n_0 E'_1 e^{i\alpha} = n E_2 \end{cases}$$

Comme nous cherchons la condition pour avoir  $E'_0 = 0$ , le premier groupe d'équation permet, en éliminant  $E_0$  de trouver la relation :

$$E_1 (n_0 - 1) e^{i\alpha} = E'_1 (n_0 + 1) e^{-i\alpha}$$

Les deux autres équations donnent, en éliminant  $E_2$  :

$$E_1 (n_0 - n) e^{-i\alpha} = E'_1 (n_0 + n) e^{i\alpha}$$

Ces deux relations ne sont compatibles que si :

$$\frac{(n_0 - 1) e^{i\alpha}}{(n_0 - n) e^{-i\alpha}} = \frac{(n_0 + 1) e^{-i\alpha}}{(n_0 + n) e^{i\alpha}} \rightsquigarrow \frac{(n_0 + 1)(n_0 - n)}{(n_0 - 1)(n_0 + n)} e^{-4i\alpha} = 1$$

Comme tous les indices sont réels,  $e^{-4i\alpha}$  doit être aussi réel, ce qui implique  $e^{2ik_0 n_0 e} = \pm 1$ .

Dans le cas où  $e^{2ik_0 n_0 e} = 1$ , alors la solution de  $\frac{(n_0 + 1)(n_0 - n)}{(n_0 - 1)(n_0 + n)} = 1$  donne  $n = 1$  : cette solution n'est possible que si les deux milieux extrêmes sont identiques, ce qui est possible mais, ici, inintéressant puisque le but est de créer une couche antireflet sur un milieu diélectrique d'indice  $n$  fixé (comme les verres de lunette).

Dans le cas où  $e^{2ik_0 n_0 e} = -1$ , alors  $\boxed{e = \frac{(2p + 1) \lambda_0}{4 n_0}}$  avec  $p$  entier et  $\lambda_0$  la longueur d'onde dans le vide.

De plus la solution de  $\frac{(n_0 + 1)(n_0 - n)}{(n_0 - 1)(n_0 + n)} = -1$  donne  $\boxed{n_0 = \sqrt{n}}$ .

REMARQUE

Cette condition est à connaître sous la forme suivante : pour qu'un milieu intermédiaire forme une couche anti-reflet, il faut que l'onde qui s'y propage soit, après un aller retour, en opposition de phase avec elle-même.

Autrement dit, il faut que  $2e = (2p + 1) \frac{\lambda}{2}$  où  $\lambda$  est la longueur de l'onde dans le milieu intermédiaire.

### ✿ Exercice 3

*Cet exercice est classique surtout pour le résultat obtenu et la façon de l'obtenir. Il ne constitue en revanche que rarement un problème (ou une portion de) en lui-même.*

#### ► Raisonnement phénoménologique

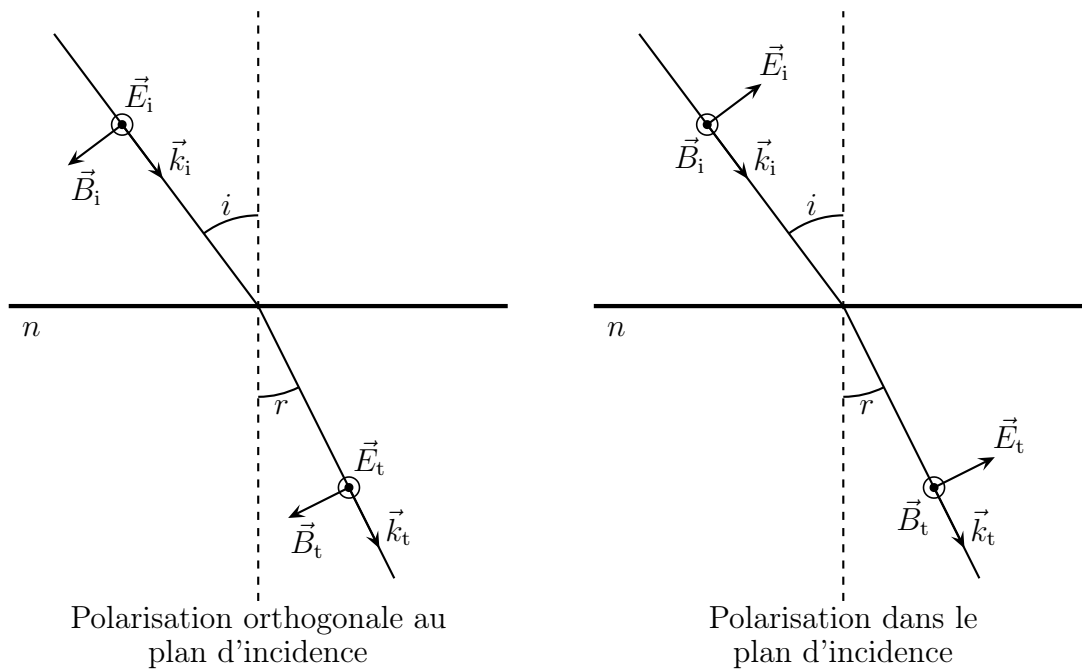
Remarquons tout d'abord que la source de l'onde réfléchie n'est autre que l'oscillation des dipôles induits dans le milieu d'indice  $n$ .

Étant donné que le milieu est LHI, les dipôles sont dans la direction de  $\vec{E}_t$  et, comme tout dipôle oscillant, rayonnent principalement dans leur plan équatorial et pas dans la direction de leur axe.

Dans le cas d'une polarisation orthogonale au plan d'incidence, les dipôles induits dans le milieu d'indice  $n$  peuvent rayonner sans difficulté dans le milieu d'indice 1 (cf. schéma ci-dessous).

En revanche, dans le cas d'une polarisation dans le plan d'incidence, avec le schéma ci-dessous, nous nous apercevons que les dipôles ne peuvent rayonner dans la direction de  $\vec{E}_t$ , i.e. perpendiculairement à  $\vec{k}_t$  car l'onde est transverse.

Si le rayon réfléchi est tel qu'il doit être orthogonal au rayon réfracté, il ne pourra pas exister puisque les dipôles ne pourront rayonner dans cette direction.



#### ► Avec les équations de MAXWELL

D'après les équations de MAXWELL dans les milieux diélectriques parfaits, en notant (comme par hasard)  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , nous avons les relations de passage suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{D} = \rho = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0 \text{ ①} \\ \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \text{ ②} \\ \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \text{ ③} \\ \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \text{ ④} \end{array} \right.$$

Les relations ③ et ④ impliquent la continuité totale du champ magnétique. La relation ② n'est autre que la traduction de la continuité de la composante tangentielle du champ. Enfin la relation ①, bien que juste, est rarement utilisable puisqu'impliquant le vecteur polarisation  $\vec{P}$  par l'intermédiaire du vecteur dont-il-ne-faut-pas-parler  $\vec{D}$ .

REMARQUE

La relation ④ ne sert jamais. Ce n'est pas qu'elle soit inutile (quoiqu'en pratique, si) mais c'est simplement celle qui permet de déterminer la polarisation au niveau de la surface.

En fait, elle joue le même rôle que  $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$  dans le cas des conducteurs parfaits, à savoir trouver la réaction du milieu face à la contrainte électromagnétique.

Insistons : écrire la condition de passage ① n'est pas faux, mais tout aussi inutile qu'une loi des nœuds en terme de potentiel à la sortie d'un AO car cela apporte une loi supplémentaire avec une inconnue supplémentaire (ici  $\vec{D}$  ou, ce qui revient au même  $\vec{P}$ )

→ *Polarisation orthogonalement au plan d'incidence.*

Dans le cas où  $\vec{E}$  est polarisé orthogonalement au plan d'incidence, il faut assurer la continuité complète du champ magnétique.

Comme  $\vec{B}_i$  et  $\vec{B}_t$  n'ont pas la même direction, leurs proportions entre composante normale et tangentielle n'est pas la même : il n'est donc pas possible que le champ magnétique soit continu uniquement avec ces deux champs : il **faut** un champ réfléchi supplémentaire.

→ *Polarisation dans le plan d'incidence.*

Dans ce cas,  $\vec{B}_i$  et  $\vec{B}_t$  peuvent être égaux en tout point de l'interface et cela donne :  $E_i(0,t) = n E_t \text{ pour}(0,t)$ .

De même la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  donne :  $E_i(0,t) \cos i = E_t(0,t) \cos r$ .

En ajoutant à cela la loi de SNELL – DESCARTE  $\sin i = n \sin r$ , nous arrivant, en éliminant  $n$ , à  $\sin(2i) = \sin(2r)$ , ce qui implique :

→ soit  $2i = 2r$ , ce qui n'est pas possible

→ soit  $2i = \pi - 2r$  ou encore  $i + r = \frac{\pi}{2}$

REMARQUE

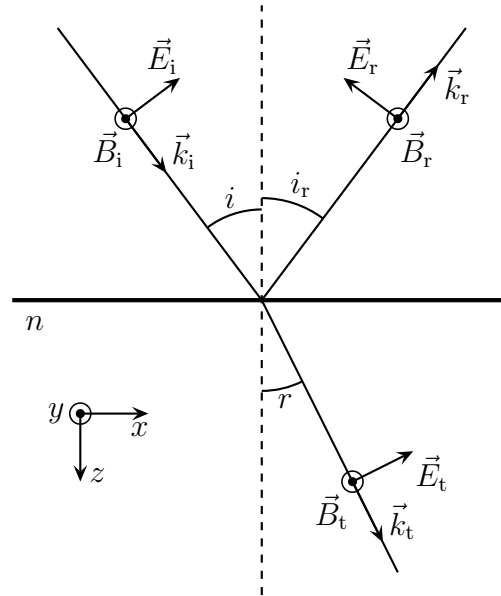
Voici une manière supplémentaire de polariser une lumière non polarisée.

En réalisant plusieurs réflexions successives sous l'angle de BREWSTER, il ne reste plus, à la fin que des ondes polarisées orthogonalement au plan d'incidence.

## ✿ Exercice 4

C'est un exercice tout à fait analogue au précédent. Reprendre ce dernier pour voir l'aspect physique de la chose.

Commençons d'abord par un beau grand schéma.



Au niveau des relations de passage, nous pouvons traduire le fait qu'il y a continuité des composantes tangentielle de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  et ... c'est tout.

En ce qui concerne la composante normale de  $\vec{E}$ , nous ne pouvons rien en tirer puisqu'elle est reliée à l'état de polarisation de la surface que non seulement nous ne connaissons pas mais qu'en plus qui s'adapte au champ.

En écrivant les deux relations de passages susnommées et comme dans l'exercice précédent, les termes de phase dans les relations de passage s'éliminent grâce aux lois de SNELL – DESCARTES.

Et ainsi :

→ la continuité de  $\vec{E}_{\text{tangential}}$  donne  $\cos i - r' \cos i = t' \cos i'$

→ la continuité de  $\vec{B}_{\text{tangential}}$  donne  $n_1 + n_1 r' = n_2 t'$

Tous calculs faits, nous trouvons :

$$r' = \frac{n_2 \cos i - n_1 \cos i'}{n_2 \cos i + n_1 \cos i'} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{r' = \frac{\tan(i - i')}{\tan(i + i')}}.$$

Ce coefficient s'annule pour  $i + i' = \frac{\pi}{2}$  : nous retrouvons l'incidence de BREWSTER.

## ✿ Exercice 5

Cet exercice présente une démarche classique : à partir d'un modèle microscopique d'un milieu, la première étape consiste à trouver la loi d'interaction entre le champ et le milieu de manière à pouvoir, dans une deuxième étape, déterminer la manière dont se propagent les ondes électromagnétiques dans le milieu.

**1.** Ici l'électron n'est soumis qu'à la force de rappel de la part de l'atome et à la force de LORENTZ exercée par le champ électromagnétique. Le PFD donne donc :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\lambda \vec{u} - e \left( \vec{E}(\vec{u}, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{u}, t) \right)$$

Comme les électrons ne sont pas relativistes, l'action du champ magnétique est négligeable devant celui du champ électrique.

De plus ce dernier apparaît uniforme à l'échelle des déplacements des électrons (cf. cours).

L'équation précédente se simplifie, avec la notation complexe, en :

$$i \omega \vec{v} = -\lambda \vec{u} - e \vec{E}(\vec{0}, t) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{u} = \frac{-e}{\lambda - m \omega^2} \vec{E}(\vec{0}, t)}$$

☞ *Remarque.* remarquons qu'ici aucune force de frottement n'est prise en compte, ce qui signifie qu'il n'y aura pas d'absorption par le milieu.

2. Par définition :  $\vec{j} = -N e \vec{v}$ , ce qui donne  $\boxed{\vec{j} = \frac{i N e^2 \omega}{\lambda - m \omega^2} \vec{E}(\vec{0}, t)}$

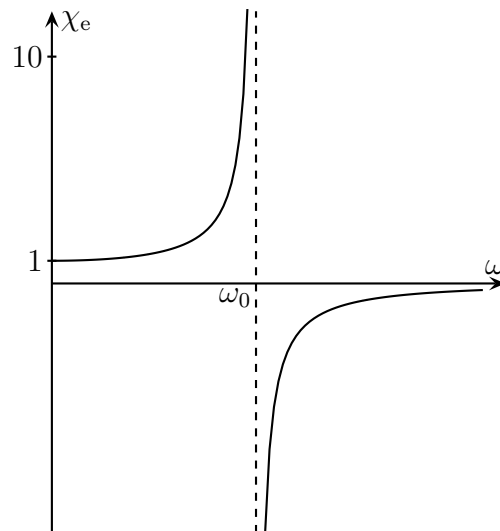
3. Avec l'expression du vecteur polarisation  $\vec{P} = -N E \vec{u}$ , nous trouvons  $\vec{P} = \frac{N e^2}{\lambda - m \omega^2} \vec{E}(\vec{0}, t)$ .

Par définition de la susceptibilité complexe :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{\chi}_e = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_p^2 = \frac{N e^2}{m \varepsilon_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{\lambda}{m}}$$

Nous voyons bien que la susceptibilité est réelle ici, ce qui est cohérent avec le fait que le modèle ne tient pas compte de l'amortissement par rayonnement.

Sa courbe représentative est représentée ci-dessous.



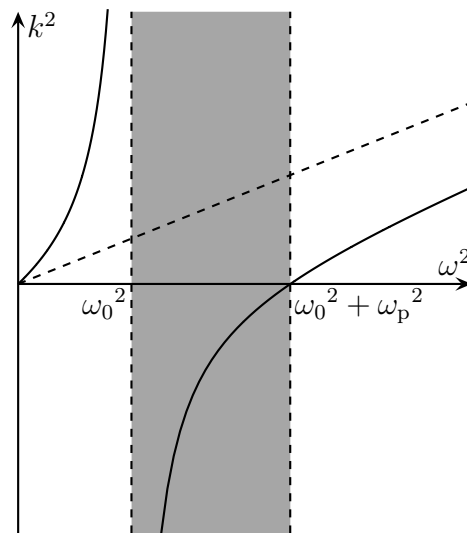
4. La relation de dispersion dans un milieu de susceptibilité  $\underline{\chi}_e$  est  $k^2 = \left(1 + \underline{\chi}_e\right) \frac{\omega^2}{c^2}$  (voir cours). Cela donne ici, avec l'expression particulière de  $\underline{\chi}_e$  :

$$\boxed{k^2 = \left( \frac{\omega_0^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$k^2$  s'annule pur  $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2$  et tend vers l'infini pour  $\omega \rightarrow \omega_0$ .

Entre  $\omega_0^2$  et  $\omega_0^2 + \omega_p^2$ ,  $k^2$  est négatif donc  $k$  imaginaire pur : l'onde ne peut pas se propager (rappelons que la propagation est caractérisée par la partie *réelle* de  $k$ ).

Dans la zone grisée, il n'y pas de propagation. Quand  $\omega$  tend vers l'infini,  $k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$  (droite hachurée sur le graphique) : le champ électrique varie trop vite pour que les électrons aient le temps de bouger, l'onde se propage alors comme dans le vide.



## REMARQUE

Bien qu'il n'y ait pas atténuation, l'expression complète de  $\vec{E}$  aurait montré que, dans la zone où il n'y a pas propagation, que l'amplitude décroissait exponentiellement.

Autrement dit, ici, il y aurait eu atténuation de l'onde sans absorption.

La conservation de l'énergie implique *de facto* que cela signifie que toute l'énergie est réfléchie.

## ❁ Exercice 6

L'exercice présent fait appel à des notions rencontrées déjà un bon nombre de fois durant l'année. En effet, nous allons étudier le cas d'une réflexion totale sur un milieu sans perte énergétique. Nous allons trouver, dans le milieu sur lequel se réfléchit l'onde, une onde non propagative qui s'atténue exponentiellement : c'est une onde évanescente. La différence avec ce avec quoi nous avons eu affaire c'est qu'ici l'onde incidence n'arrive pas normalement avec l'interface. Autrement dit, techniquement, cela va être un peu plus long. Mais seulement techniquement . . .

1. La loi de SNELL – DESCARTES pour la réfraction s'écrit ici  $n \sin \theta = \sin r$  si on appelle  $r$  l'angle de réfraction.

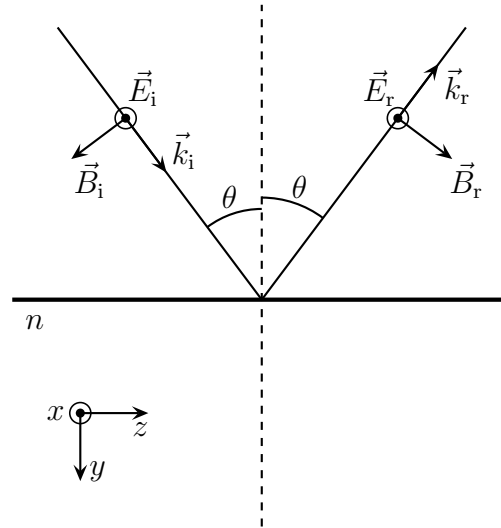
Pour  $\theta > \theta_L = \arcsin \frac{1}{n}$ , il y a réflexion totale.

2. Avec les notations de l'énoncé,  $\vec{k}_i = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_z$  d'où, avec la relation de structure de l'OPPM :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}_i = \frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} (\beta \vec{u}_y - \alpha \vec{u}_z)$$

3. De même, avec  $\vec{k}_r = -\alpha \vec{u}_y + \beta \vec{u}_z$  :

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}_r = \frac{E_{0r}}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} (\beta \vec{u}_y + \alpha \vec{u}_z)$$



4. À l'interface, le champ électrique est continu car il n'a de composantes que tangentielle<sup>2</sup>.  
Le champ magnétique est lui aussi continu car l'équation de MAXWELL – AMPÈRE donne :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{0}$$

S'il n'y avait pas d'onde transmise, ces deux relations de passage imposeraient à la fois  $E + \underline{E}_{0r} = 0$  et  $E - \underline{E}_{0r} = 0$ , ce qui est aboutit à une contradiction puisque la seule solution mathématique serait l'inexistence des ondes incidentes et réfléchi, ce qui est physiquement impossible. Il y a donc une onde transmise.

5. Les relations de passage en  $y = 0$  sont de la forme :

$$a_0 e^{-j\beta z} + \underline{a}_r e^{-j\beta z} = \underline{a}_t e^{-jk_1 z} \quad \text{pour tout } z \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k_1 = \beta = \frac{n\omega}{c} \sin \theta}$$

D'autre part, l'onde se propage dans l'air donc doit satisfaire l'équation de D'ALEMBERT, ce qui donne avec l'expression proposée pour  $\vec{E}_t$  :

$$\Delta \vec{E}_t = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial t^2} \quad \rightsquigarrow \quad k_2^2 - k_1^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

Comme  $k_2 > 0$  (puisque l'onde ne peut pas s'amplifier pour  $y$  croissant), cela donne :

$$\boxed{k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}$$

6. (a) Nous pouvons écrire  $\vec{E}_t$  sous la forme :

$$\vec{E}_t = \underline{E}_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \vec{k}_t = -j k_2 \vec{u}_y + k_1 \vec{u}_z = -j k_2 \vec{u}_y + \beta \vec{u}_z$$

Le champ magnétique complexe se trouve à l'aide de la relation de structure de l'OPPM :

$$\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_t}{\omega} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{B}_t = \frac{\underline{E}_{0t}}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} (\beta \vec{u}_y + j k_2 \vec{u}_z)$$

Les relations de passage donnent :

- continuité de  $\vec{E}_{\text{tangential}}$   $\rightsquigarrow E_0 + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t}$
- continuité de  $\vec{B}_{\text{normal}}$   $\rightsquigarrow \beta E_0 + \beta \underline{E}_{0r} = \beta \underline{E}_{0t}$

2. Profitons-en pour rappeler qu'il vaut mieux ne pas parler de la composante normale de  $\vec{E}$  qui est *a priori* discontinue à l'interface de deux milieux diélectrique



→ continuité de  $\vec{E}_{\text{tangential}} \rightsquigarrow -\alpha E_0 + \alpha \underline{E}_{0r} = +j k_2 \underline{E}_{0t}$

Les deux premières équations sont identiques et l'ensemble permet d'obtenir :

$$\underline{r} = \frac{\alpha + j k_2}{\alpha - j k_2} \rightsquigarrow \boxed{\underline{r} = \frac{n \cos \theta + j \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta - j \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}}$$

Le facteur de réflexion en énergie est défini comme le rapport des flux moyens des vecteurs de POYNTING réfléchi et incident à travers une surface  $S$  située à l'interface.

Pour déterminer les vecteurs de POYNTING moyens, nous pouvons utiliser l'expression :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

Avec  $\langle \vec{\Pi}_i \rangle \cdot \vec{u}_y = \alpha \frac{E_0^2}{\omega}$  et  $\langle \vec{\Pi}_r \rangle \cdot \vec{u}_y = -\alpha \frac{E_0^2 |\underline{r}|^2}{\omega}$ , nous trouvons :

$$R = \frac{\left| \langle \vec{\Pi}_r(y=0,t) \cdot \vec{u}_y \rangle \right|}{\left| \langle \vec{\Pi}_i(y=0,t) \cdot \vec{u}_y \rangle \right|} = |\underline{r}|^2 \rightsquigarrow \boxed{R = 1}$$

Toute l'énergie incidente est réfléchi.

6. (b) Nous trouvons, à partir des relations de passage  $\underline{t} = \frac{2\alpha}{\alpha - j k_2} = \frac{2n \cos \theta}{n \cos \theta - j \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}$ .

D'autre part  $\underline{E}_t \wedge \underline{B}_t^* = |\underline{t}|^2 \frac{E_0^2}{\omega} (j k_2 \vec{u}_y + \beta \vec{u}_z)$  et donc :

$$\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2} |\underline{t}|^2 \frac{E_0^2 \beta}{\mu_0 \omega} \vec{u}_z \rightsquigarrow \boxed{T = \frac{\left| \langle \vec{\Pi}_t(y=0,t) \cdot \vec{u}_y \rangle \right|}{\left| \langle \vec{\Pi}_i(y=0,t) \cdot \vec{u}_y \rangle \right|} = 0}$$

Ce qui confirme bien que toute l'énergie est réfléchi par le diélectrique.

6. (c) Étant donné que la réflexion totale, il est normal de trouver que toute l'énergie est réfléchi dans le diélectrique.

7. Dans la couche d'air, le champ sera composé d'une onde aller et d'une onde retour due à la réflexion sur le diélectrique en  $y = L$ , ce qui donne une forme :

$$\vec{E}_{\text{air}} = \underline{E}_{01} e^{-k_2 y + j(\omega t - k_1 z)} + \underline{E}_{02} e^{k_2 y + j(\omega t + k_1 z)}$$

Cette onde est atténuée sur la distance caractéristique  $d = \frac{1}{k_2}$ .

Si l'amplitude en  $y = L$  n'est pas négligeable (c'est à dire si  $L$  pas trop grand par rapport à  $d$ ) alors il existera une onde transmise dans le milieu diélectrique après  $y = L$ .

Il faut bien voir qu'entre  $y = 0$  et  $y = L$  **il n'y a pas de propagation d'onde**, il n'y a de rayons lumineux que pour  $y < 0$  et pour  $y > L$ . Tout se passe comme si, lorsque  $L$  suffisamment petit, l'onde « sautait » d'un milieu à l'autre sans passer par l'air. C'est un peu l'analogie de l'effet quantique connu sous le nom d'effet tunnel.

### ✳ Exercice 7

L'exercice présente ici un modèle microscopique pour lequel les molécules ont un moment dipolaire permanent et sont dans un milieu conducteur. Autrement dit, il va falloir tout prendre plusieurs phénomènes en compte. Une fois ces phénomènes modélisés par une loi reliant  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$ , nous allons après chercher la manière dont une onde se propage dans le milieu et interpréter à l'aide de valeur numériques.

1. En faisant passer le champ  $\vec{E}$  d'une valeur nulle à une valeur constante  $\vec{E}_0$ ,  $\tau$  représente le temps caractéristique d'obtention du régime permanent  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}_0$ .

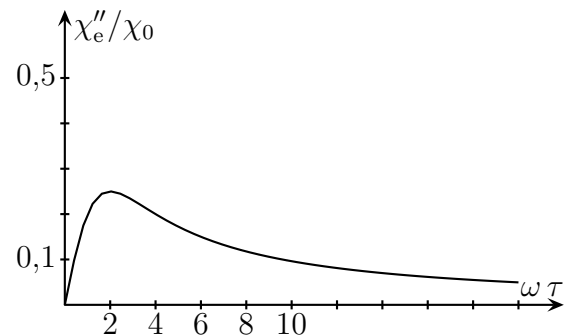
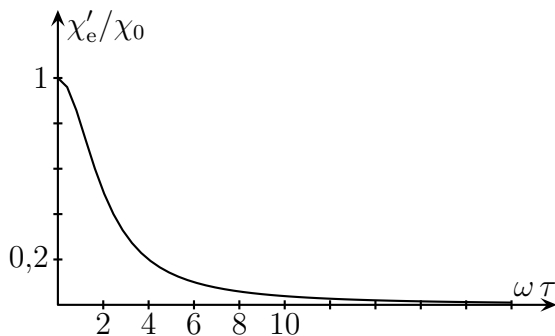
2. (a) L'équation donnée dans l'énoncée s'écrit, en complexe :

$$(i\omega\tau)\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \chi_0 \underline{\vec{E}_0} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\chi_e = \frac{\chi_0}{1 + i\omega\tau}}$$

2. (b) En séparant partie imaginaire et partie réelle, nous trouvons :

$$\boxed{\chi'_e = \frac{\chi_0}{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\chi''_e = \frac{\chi_0 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

Les graphes sont représentés ci-dessous.



Aux faibles fréquences, la susceptibilité est réelle, les vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont en phase : les dipôles suivent instantanément les variations du champ électrique.

En revanche, en hautes fréquences, les variations du champ électrique sont trop rapides pour que le milieu ait le temps de réagir : l'onde traverse le milieu sans interagir avec ce dernier, comme si elle traversait le vide en fait.

2. (c) Numériquement  $\omega\tau = 1,5394 \ll 1$  donc nous pouvons réécrire  $\chi_e$  au premier ordre en  $\omega\tau$  :

$$\boxed{\chi_e = \chi_0 (1 - i\omega\tau)}$$

3. Dans le cas de l'eau, l'équation de MAXWELL – AMPÈRE s'écrit en tenant compte du courant de conduction  $\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$  et du courant de polarisation  $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_e + \vec{j}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad -i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \left( \sigma + i\omega\varepsilon\chi_e + i\omega\varepsilon_0 \right) \underline{\vec{E}}$$

Le fait d'avoir supposé le champ électrique transverse se traduit par  $\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$  ou encore, en notation réelle,  $\text{div} \vec{E} = 0$ .

De là, avec la méthode usuelle (rotationnel du rotationnel puis passage en complexe), nous trouvons :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \chi_e \right) - i\mu_0 \sigma \omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\chi_0}{1 + i\omega\tau} \right) - i\mu_0 \sigma \omega = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{\chi_0}{1 + i\omega\tau} - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right)$$

Comme nous étudions toujours l'eau pour laquelle  $\omega \tau \ll 1$  et la relation de dispersion se simplifie en :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \chi_0 - i \left( \chi_0 \omega \tau + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \right) \right)}$$

4. (a) Par définition, nous avons  $\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi}_e$ .

D'autre part, à la fréquence de 2,45 GHz, la partie imaginaire de  $\underline{\chi}_e$  est négligeable devant sa partie réelle.

Nous avons donc, à cette fréquence :  $|\underline{\varepsilon}_r| = 1 + \chi_0$ , ce qui permet de calculer  $\chi_0 = 75$ .

Nous pouvons alors comparer  $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = 7,3469 \times 10^{-7}$  et  $\chi_0 \omega \tau = 1,1545$ .

Ce dernier terme étant très supérieur au premier, nous pouvons dire que dans l'eau pure et à cette fréquence, les effets dus à la polarisation prédomineront devant les effets dus à la conduction.

4. (b) Pour la pâte humide, le terme  $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = 7,3469 \times 10^{-2}$  reste 15 fois plus petit que le terme  $\chi_0 \omega \tau$ , nous pouvons donc continuer à le négliger.

Cela signifie que les sels minéraux n'ont qu'une très faible influence sur la propagation dans le milieu.

4. (c) Le terme dû à la conduction étant négligeable devant celui dû à la polarisation, la relation de dispersion peut se réécrire :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_0 - i \chi_0 \omega \tau)}$$

5. Nous avons, au premier ordre en  $\omega \tau$  :

$$k_0^2 = |\underline{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{(1 + \chi_0)^2 + (\chi_0 \omega \tau)^2} \rightsquigarrow \boxed{k_0 = \frac{\omega}{c} (1 + \chi_0)^{1/4}}$$

Comme  $\underline{k}^2 = k_0^2 e^{-2i\Phi}$ , nous en déduisons, puisque  $\Re(\underline{k}^2) > 0$  :

$$-2\Phi = \arctan\left(\frac{-\chi_0 \omega \tau}{1 + \chi_0}\right) \rightsquigarrow \boxed{\Phi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\chi_0 \omega \tau}{1 + \chi_0}\right)}$$

6. En écrivant  $\underline{k} = k_0 \cos \Phi - i k_0 \sin \Phi$ , nous trouvons :

$$\boxed{\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-k_0 z \sin \Phi} e^{i(\omega t - k_0 z \cos \Phi)}}$$

Nous voyons alors que l'onde est absorbée avec une distance caractéristique égale à  $\delta = \frac{1}{k_0 \sin \Phi}$ .

#### REMARQUE

Cette fois il s'agit bien d'absorption.

De cette manière, de l'énergie passe du champ à la matière, qui accumule cette énergie sous forme interne : la température augmente.

C'est ainsi que fonctionne le four à micro-onde.

7. (a) Pour l'eau, nous trouvons  $\Phi = 0,43516^\circ$  et  $\delta = 86,905 \text{ cm}$

7. (b) Pour la pâte sèche, avec  $\chi_0 = 9$ , nous trouvons  $\Phi = 0,39687^\circ$  et  $\delta = 1,5821 \text{ m}$ .

Nous constatons que la pâte sèche atténue moins l'onde que l'eau.

Cela implique qu'il y a moins de transfert énergétique dans la pâte sèche ou encore qu'elle est plus difficile à chauffer.

8. La distance caractéristique d'atténuation de l'énergie est  $\delta' = \frac{\delta}{2}$  puisque l'énergie est une grandeur quadratique, le vecteur de POYTING décroît ainsi en  $e^{-z/\delta'}$ .

Nous cherchons à faire en sorte que la puissance soit uniforme à mieux que 10 % près.

En considérant que l'onde n'arrive que d'un côté (approximation justifiée dans le cas d'une pâte étalée), cela implique la condition  $e^{-\ell/\delta'} > 0,9$  ou encore  $\ell < -\delta' \ln 0,9 \simeq 0,1 d$ .

Cela donne ( $\ell < \underline{4,5782 \text{ cm}}$ ) pour la pâte humide et ( $\ell < \underline{8,3348 \text{ cm}}$ ) pour la pâte sèche.

9. Pour que l'onde soit entièrement réfléchi, il suffit que l'épaisseur  $e$  soit supérieur à quelques fois

l'épaisseur de peau à la fréquence utilisée, ici  $\delta'' = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_{\text{Al}} \omega}}$ .

Avec  $\sigma_{\text{Al}} \simeq 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  cela donne une épaisseur de peau  $\delta'' = \underline{3,2154 \mu\text{m}}$ .

Une épaisseur d'une fraction de millimètre permet alors d'assurer la nullité du champ à l'extérieur du four.

Notons que la réflexion reste parfaite même pour une plaque « trouée », pourvu seulement que les trous soient de diamètre bien inférieur à la longueur d'onde qui vaut ici  $\lambda = \underline{12,2449 \text{ cm}}$ .

Cela explique pourquoi le grillage sur les portes du micro-onde sont transparents pour des longueurs d'onde visibles (le diamètre est largement plus grand que les longueurs d'ondes visibles) mais opaque au rayonnement chauffant du micro-onde.

## ✿ Exercice 8

Il s'agit d'un exercice assez classique sur le guidage d'une onde électromagnétique. Il n'y a pas de difficulté particulière ni au niveau physique, ni au niveau technique. Il faut juste ne pas oublier que ce qui se propage n'est a priori pas une OPPM.

1. Avec l'équation de MAXWELL – GAUSS  $\text{div } \vec{E} = 0$  et l'équation de MAXWELL – AMPÈRE  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_p + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , nous arrivons, avec la méthode usuelle, l'équation reliant  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  et la définition de l'indice d'un milieu, le tout à la pulsation  $\omega$ , à :

$$\Delta \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 n^2 \vec{E} = 0$$

☞ Remarque. nous pouvons conserver la notation réelle ici bien qu'étant en régime sinusoïdal forcé car l'indice est réel, ce qui correspond à une susceptibilité réelle, *i.e.* à un milieu parfaitement transparent.

2. La composante tangentielle du champ électrique est continue en  $x = \pm \frac{d}{2}$ .

Comme le champ électrique est nul dans les conducteurs parfaits, la composante tangentielle du champ  $\vec{E}$  est nulle en  $x = \pm \frac{d}{2}$ .

La composante normale du champ électrique est continue en  $x = \pm \frac{d}{2}$ .

Comme le champ magnétique est nul dans les conducteurs parfaits, la composante normale du champ  $\vec{B}$  est nulle en  $x = \pm \frac{d}{2}$ .

3. (a) À partir de  $\text{div } \vec{E} = 0$ , nous obtenons  $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ , ce qui implique que la composante sur  $y$  de  $\vec{E}$  ne dépend pas de  $y$ , donc que  $F(x,y)$  ne dépend pas de  $y$  non plus.

3. (b) En projetant l'équation vectorielle sur  $\vec{u}_y$  et avec  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  nous obtenons :

$$\Delta E_y + \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 n^2 E_y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2 F(x)}{dx^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) F(x) = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

Le champ électrique s'annule en  $x = \pm \frac{d}{2}$  donc  $F(\pm d/2) = 0$ .

La fonction  $F(x)$  doit s'annuler deux fois, ce qui implique que la solution de l'équation différentielle ci-dessus est forcément sinusoïdale, d'où :

$$k^2 n^2 - \beta^2 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{k > \beta}$$

3. (c) La solution de l'équation différentielle ci-dessus est  $F(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$ .

Les conditions  $F(\pm d/2) = 0$  donnent :

$$\begin{cases} A \cos\left(\frac{\alpha d}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\alpha d}{2}\right) = 0 \\ A \cos\left(\frac{\alpha d}{2}\right) - B \sin\left(\frac{\alpha d}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a de solution non nulle en  $(A, B)$  que si son déterminant est nul, donc si :

$$2 \cos\left(\frac{\alpha d}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha d}{2}\right) = 0 \quad \text{soit :} \quad \sin(\alpha d) = 0$$

Les valeurs possibles pour  $\alpha$  sont donc de la forme  $\boxed{\alpha_p = p \frac{\pi}{d} \text{ avec } p \text{ entier}}$ .

3. (d) Nous avons  $\beta^2 = k^2 n^2 - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 = \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2$ .

Pour que l'onde se propage dans le guide, il faut  $\beta^2 > 0$  (avec  $\beta^2 < 0$ ,  $\beta$  serait imaginaire pur et nous aurions une onde évanescente).

De plus pour n'avoir qu'un seul mode dans le guide, il faut :

$$\left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{d}\right)^2 < 0$$

Cela donne :  $\boxed{\frac{\lambda}{2n} < d < \frac{\lambda}{n}}$ .

Numériquement :  $\boxed{0,212121 \mu\text{m} < d < 0,424242 \mu\text{m}}$ .

4. Dans le cas où le guide n'admet qu'un seul mode, alors  $\alpha = \frac{\pi}{d}$  et le système de la question

3. (c) se réduit à  $B = 0$ .

Le champ électrique s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) \cos(\omega t - \beta z)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\beta^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2}}$$