

Électromagnétisme

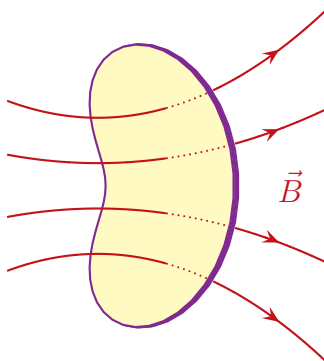
Chapitre 2

Induction

Induction

Alors qu'AMPÈRE avait pu constater qu'un courant électrique pouvait générer un champ magnétique, très vite s'est posée la question inverse : est-il possible de créer un courant électrique à partir d'un champ magnétique ? Après de nombreuses tentatives infructueuses, c'est FARADAY qui trouve et comprend que ce n'est pas un champ magnétique qui peut engendrer un courant mais sa *variation* et plus particulièrement la variation du flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit. Il énonce ainsi la loi très générale

$$e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$



Pour faire varier le flux du champ à travers le circuit il existe deux grandes méthodes qui constitueront chacune une partie de ce chapitre : soit c'est le champ magnétique qui varie en fonction du temps (première partie) soit c'est le circuit qui se déforme par mouvement (deuxième partie).

Table des matières

Biographies succinctes	6
I Circuit fixe dans $\vec{B}(t)$	8
I-1 Origine du courant électrique	8
I-1 <i>·i</i> des électrons, ça bouge	8
I-1 <i>·ii</i> vision électrocinétique : lien entre \vec{E} et f.é.m.	8
I-2 Induction dans une spire fermée	9
I-2 <i>·i</i> de MAXWELL – FARADAY à la loi de FARADAY	9
loi	9
interprétation – modèle électrocinétique	9
schéma de principe	10
démonstration	10
I-2 <i>·ii</i> idoinoton – calcul d’un courant	11
situation, analyse	11
loi de FARADAY	12
vision électrocinétique	12
I-2 <i>·iii</i> loi de LENTZ	13
loi qualitative	13
application à l’effet de peau	13
I-2 <i>·iv</i> idoinoton et loi de LENZ	14
les questions à se poser	14
vérification	14
I-3 Champ électromoteur	15
I-3 <i>·i</i> expression	15
loi, interprétation	15
démonstration	15
I-3 <i>·ii</i> idoinoton	16
situation	16
version « champ électromoteur »	16
version « loi de FARADAY »	17
morale	18
I-4 Induction dans un volume	18
I-4 <i>·i</i> situation, analyse	18
dispositif	18
deux approches différentes	19
I-4 <i>·ii</i> vision électrocinétique en spires	19
préliminaire : le découpage en spires	20
étude d’une spire	20
sommation sur toutes les spires	21
homogénéité	22
I-4 <i>·iii</i> vision électromagnétique mésoscopique	22
rappel de l’analyse	22
trouver \vec{E}	22
trouver \vec{j} et la puissance dissipée	23
trouver la puissance dissipée totale	24
I-4 <i>·iv</i> retour sur l’analyse	24
analyse physique	24
analyse technique	25

I-5	Autoinduction	25
I-5 <i>·i</i>	origine physique	25
	modélisation d'une bobine	25
	deux grands types de bobines	26
I-5 <i>·ii</i>	inductance d'une bobine	26
	flux propre	26
	inductance	27
	justification de la définition	27
I-5 <i>·iii</i>	aspect électrocinétique	28
	où une loi connue depuis très longtemps refait surface	28
	tenir compte de l'autoinduction dans un problème d'induction	29
I-5 <i>·iv</i>	aspect énergétique	30
	loi	30
	cas de la bobine idéale	30
I-6	Induction mutuelle	30
I-6 <i>·i</i>	analyse	30
	origine	30
	aspect qualitatif	32
	sens du courant induit	32
I-6 <i>·ii</i>	aspect électrocinétique	33
	loi	33
	démonstration	33
I-6 <i>·iii</i>	aspect énergétique	33
	loi	34
	interprétation	34
	démonstration	34
	plus que deux bobines	35
I-6 <i>·iv</i>	coefficient de couplage	35
	résultat	35
	interprétation	36
	démonstration	36
I-6 <i>·v</i>	circuits couplés par mutuelle	36
	mise en équation	37
	résolution d'un cas particulier en régime transitoire	37
	résolution en régime sinusoïdal forcé	38
II	Circuit mobile dans un champ statique	40
II-1	Transformation galiléenne des champs	40
II-1 <i>·i</i>	courant électrique dans deux référentiels différents	40
	question	40
	réponse	40
	et le courant ?	41
II-1 <i>·ii</i>	oui mais non mais si	42
	un contre-exemple facile	42
	morale	43
II-2	Induction dans un circuit en mouvement	43
II-2 <i>·i</i>	champ électromoteur	43
	loi	43
	précaution de lecture	43
	démonstration	43

II.2.ii	et la loi de FARADAY ?	44
	loi	44
	idée de démonstration	45
II.2.iii	aspect qualitatif	46
	avec la loi de FARADAY	46
	avec la loi de LENZ	46
II.2.iv	analyser un problème d'induction de LORENTZ	47
II.3	Exemple : rails de LAPLACE	47
II.3.i	présentation	47
	dispositif	47
	analyse	48
II.3.ii	freinage électromagnétique	49
	aspect mécanique	49
	couplage par e_{ind}	49
	aspect électrocinétique	51
	couplage par force de LAPLACE	52
	rassemblement	52
	solution, interprétation	52
II.3.iii	tout ça à cause de LORENTZ	53
II.3.iv	bilan énergétique du freinage	53
	aspect purement mécanique	53
	aspect purement électrique	53
	coïncidence ?	54
II.3.v	moteur linéaire	56
	dispositif, analyse	56
	mise en équation	57
	solution, interprétation	58
II.4	Exemple : le haut parleur	59
II.4.i	présentation	59
II.4.ii	lois de fonctionnement	60
	aspect mécanique	60
	couplage par force de LAPLACE	60
	aspect électrique	61
	couplage par e_{ind}	61
II.4.iii	bilan d'énergie	62
	bilan d'énergie mécanique	62
	bilan d'énergie électrique	63
	bilan total	63
II.4.iv	vision purement électrique	63
	idée	63
	action	63
	interprétation	64
	Fiche de révision	65

Biographies succinctes

Pierre Simon marquis de LAPLACE

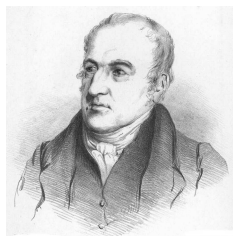
(1749 Beaumont en Auge – 1827 Paris)



Né dans une famille aisée, Pierre Simon aurait dû devenir ecclésiastique mais il décide de lui-même de monter à Paris avec une lettre de recommandation. Il fait rapidement ses preuves et Jean le Rond D'ALEMBERT lui trouve un poste rémunéré de professeur de mathématiques. Pierre Simon est élu à l'académie royale des sciences à 24 ans et à l'academie française en 1816. Entre temps son prestige international lui permettra de naviguer dans les hautes sphères aussi bien durant la monarchie que durant la révolution ou sous NAPOLÉON. Pierre Simon de LAPLACE est connu pour le « déterminisme laplacien » pour qui tout le futur et tout le passé est absolument connu à celui qui connaît les lois physiques et tous les mouvements de toutes les particules.

Peter BARLOW

(1776 Norwick, Norfolk – 1862 Woolwich, Londres)



À 30 ans Peter BARLOW devient capitaine mathématique dans la Royal Military Academy, Woolwich, poste qu'il a occupé pendant 41 ans. IL travaillera principalement dans le domaine des chemins de fer, que cela soit pour la locomotion à vapeur ou pour l'ébauche du premier moteur électrique (roue de BARLOW). Il a aussi produit des résultats en résistance des matériaux et en optique (une lentille portant son nom permet d'augmenter le grossissement d'appareils optiques). Ses deux fils Peter et William seront des ingénieurs célèbres du XIXe siècle.

Michael FARADAY

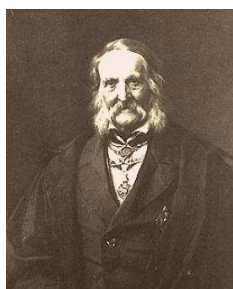
(1791 Newington, Surrey – 1867 Hampton Court, Middlesex)



Le premier métier de Michael est relieur. Cela le met en contact avec de nombreux livres et trouve de l'intérêt à lire ceux de physique-chimie. Il continue en suivant des conférences publiques. En 1813 il obtient un poste de technicien à la Royal Institution grâce au chimiste H. DAVY avec qui il s'est lié d'amitié. En 1822, avec la découverte de CÆRSTED (une aiguille aimantée est déviée près d'un conducteur parcouru par un courant), Michael se lance dans l'étude de l'électromagnétisme. Il y obtiendra tellement de succès qu'il sera l'un des principaux inspirateurs de J. MAXWELL. Élevé dans la foi, M. FARADAY restera toute sa vie un homme calme, aimable et simple.

Franz Ernst NEUMANN

(1798 Joachimstahl, Prusse – 1895 Königsberg)



Franz met de côté ses études en 1814 pour s'engager dans l'armée contre Napoléon. Blessé il ne finira pas la guerre mais reprendra dès la fin de celle-ci des études de théologie ... qu'il arrête aussi pour s'orienter vers les sciences. Il commencera par travailler sur la cristallographie et deviendra professeur titulaire de minéralogie en 1829. À partir de 1832 il s'intéresse plus particulièrement à l'optique ondulatoire. Enfin il travaillera sur l'électrodynamique et publiera en 1845 et 1847 deux articles. Franz NEUMANN publie peu mais transmet ses résultats dans des séminaires en partenariat avec Gustav JACOBI et dont un des rares (le seul ?) étudiant célèbre est Gustav KIRCHHOFF.

Heinrich Friedrich Emil LENZ

(1804 Dorpat, Estonie – 1865 Rome)



Après des études dans de nombreux domaines (théologie, physique, chimie, géophysique) Heinrich LENZ entreprend entre 1823 et 1826 un voyage autour du monde durant lequel il étudie la salinité des océans. Il est ensuite nommé professeur à Saint-Petersbourg et travaille sur l'électricité et en particulier sur l'induction découverte par FARADAY. Il étudiera aussi avec précision l'effet PELTIER (production de froid à la soudure de deux conducteurs parcourus par un courant) avant de décéder d'un accident vasculaire cérébral en 1865.

Hendrik Antoon LORENTZ

(1853 Arnhem, Pays-Bas – 1928 Haarlem)



Avant de devenir professeur dans l'université où il fit ses études (Leyde), Hendrik fut enseignant dans le secondaire tout en effectuant, seul, une thèse sur la propagation de la lumière. Ses travaux ont ensuite essentiellement porté sur la théorie électromagnétique de la lumière et en particulier sur son caractère corpusculaire. Il est principalement connu pour la loi qui permet de passer d'un référentiel à un autre dans le cadre de la relativité. Hendrik LORENTZ reçoit le prix NOBEL en 1902 conjointement avec ZEEMANN (son ancien élève) pour la découverte de l'effet ZEEMANN (déplacement des raies spectrales des atomes soumis à un champ magnétique).

I – Circuit fixe dans $\vec{B}(t)$

Le phénomène d'induction dans un circuit immobile plongé dans un champ magnétique dépendant du temps s'appelle *l'induction de NEUMANN*.

- ◇ Pour notre part, nous nous intéresserons uniquement aux courants induits dans des conducteurs électriques métalliques. Nous mettons donc de côté tout ce qui est solution électrolytique.

I.1 – Origine du courant électrique

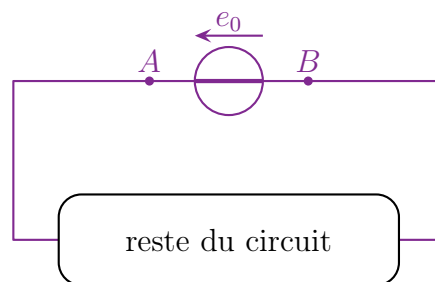
I.1.i – des électrons, ça bouge

- ◇ Le courant électrique, dans un conducteur métallique, est dû aux électrons qui sont mis en mouvement par la force de LORENTZ $\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.
- ◇ Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent traitant des équations de MAXWELL, chacune de ces charges reçoit la puissance $\mathcal{P} = \vec{v} \cdot (q \vec{E})$.
- ◇ Dans ces conditions, nous pouvons dire que **seul le champ électrique** peut véritablement créer, être à l'origine, d'un courant électrique.
- ◇ Le champ magnétique, lui, ne modifie que de manière marginale le courant électrique (cf. effet HALL).
- ◇ En fait, dans le cas de l'induction, ce n'est pas le champ $\vec{B}(t)$ qui est « directement » à l'origine du courant électrique, mais le champ électrique *via* la loi de MAXWELL – FARADAY

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

I.1.ii – vision électrocinétique : lien entre \vec{E} et f.é.m.

- ◇ Considérons un circuit électrique en exhibant le générateur et en regroupant *tout* le reste sous un seul et même dipôle.



- ◇ Cherchons l'expression de l'énergie reçue de la part du champ électrique par la charge qui va du point A au point B.
- 👉 *Remarque.* Même si nous savons qu'« en vrai » les charges, à savoir les électrons, vont de B en A, pour notre propos, nous pourrions quand même parler des charges qui se déplacent de A vers B car une charge négative qui recule est physiquement équivalent à une charge positive qui avance.
- ◇ Pour déterminer l'expression de ce travail, rien d'extraordinaire; il s'agit simplement de trouver le travail fourni par la force de LORENTZ lorsque la charge va de A à B.
- ◇ Ce travail peut s'exprimer de deux manières différentes.
- ◇ Commençons par exprimer la force dans le calcul du travail reçu

$$\mathcal{E}_r = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{r} \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = \int_A^B q \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

◇ Nous voyons apparaître la définition de la circulation

$$\mathcal{E}_r = q C_{E(A \rightarrow B)}$$

◇ Pour trouver l'énergie reçue, nous pouvons aussi utiliser le fait qu'il s'agit là d'une force conservative

$$\mathcal{E}_r = -\Delta E_p \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = -\left(qV_B - qV_A\right)$$

◇ Et nous trouvons, avec e_0 la f.é.m. du circuit,

$$\mathcal{E}_r = -q(V_B - V_A) \rightsquigarrow \mathcal{E}_r = q e_0$$

◇ Nous voyons alors, et nous aurons l'occasion de l'utiliser tout le temps, que la f.é.m n'est autre que la circulation de \vec{E} sur l'ensemble du circuit.

I.2 – Induction dans une spire fermée

I.2.i – de MAXWELL – FARADAY à la loi de FARADAY

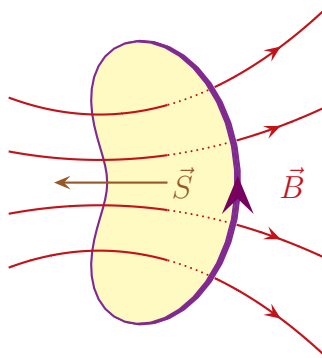
★ loi

Dans un circuit **fermé** et **immobile**, la f.é.m. induite $e_{\text{ind}}(t)$ s'écrit

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{où :}$$

→ $e_{\text{ind}}(t)$ est dans le sens de i ;

→ Φ_B est calculé avec le vecteur surface \vec{S} orienté dans le sens de i .

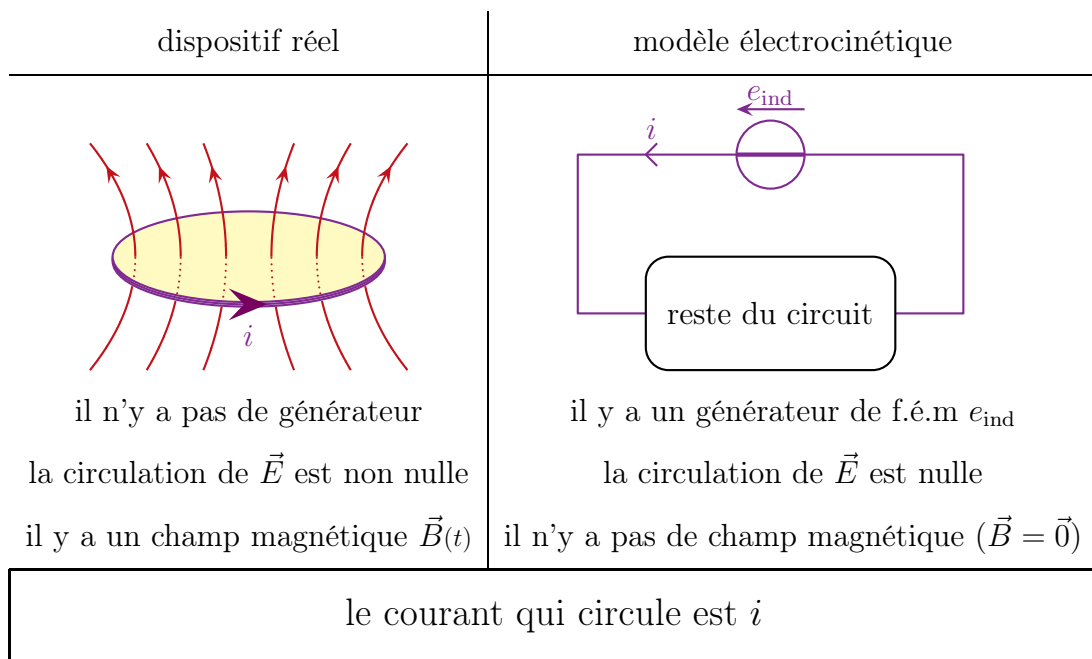


◇ Une des conséquences de cette **obligation** d'orientation est la loi suivante

$$\text{pas de schéma} \implies \text{manque de rigueur} \implies \text{pas de point}$$

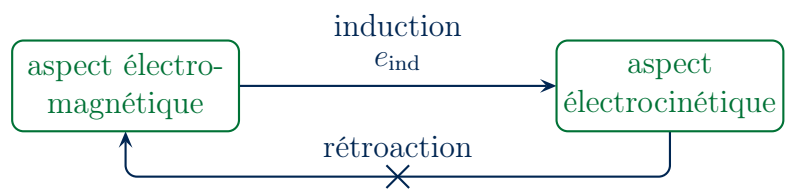
★ interprétation – modèle électrocinétique

◇ La plupart du temps, nous ferons deux schémas : l'un en vision « réelle », l'autre en vision « électrocinétique ».



★ schéma de principe

◇ Conceptuellement, nous pouvons résumer la situation de la manière suivante.



◇ Autrement dit :

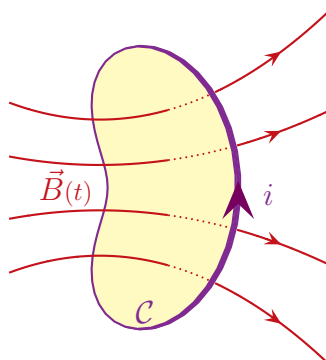
- la partie « électromagnétisme » engendre des effets électrocinétique *via* la f.é.m. induite ;
- la partie « électrocinétique » n'engendre **pas** d'effets électromagnétique.

◇ Ce schéma est provisoire car, nous le savons, un courant est source de champ ce qui implique, de fait, qu'un courant variable est source de champ variable, donc est source d'induction.

◇ Nous traiterons ce cas un peu plus tard.

★ démonstration

◇ Considérons un circuit électrique quelconque (mais fermé!) plongé dans un champ magnétique variable.



◇ Calculons la circulation de \vec{E} sur le contour qui coïncide avec le circuit.

- ◇ Comme le circuit est fermé, la circulation se fait sur un contour fermé ce qui donne, avec le théorème de STOKES

$$C_E = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad C_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ Avec l'équation de MAXWELL – FARADAY, nous avons

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad C_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ Comme le circuit est immobile, le contour l'est aussi, *donc* la surface \mathcal{S} aussi, *donc* chacune des surfaces élémentaires $d\vec{S}_P$ aussi. Cela nous permet d'écrire

$$C_E = \iint_{P \in \mathcal{S}} -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P)$$

- ◇ Encore une fois, comme le circuit est immobile, la surface \mathcal{S} ne dépend pas du temps et nous pouvons sortir la dérivée du signe somme

$$C_E = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \right)$$

- ◇ Ce qui ne fait apparaître, ni plus ni moins, que la définition du flux

$$C_E = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

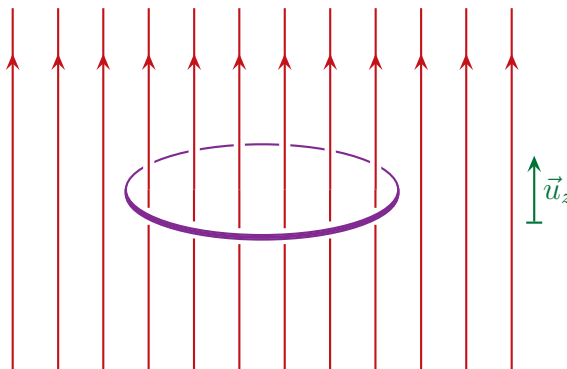
- ◇ Pour conclure, il nous faut ajouter l'argument vu dans le paragraphe précédent, à savoir que la circulation du champ \vec{E} correspond à une f.é.m., f.é.m. que nous appellerons ici « f.é.m. induite »

$$C_E = e_{\text{ind}} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

I-2-ii – idoinoton – calcul d'un courant

★ situation, analyse

- ◇ Considérons une spire circulaire plongée dans un champ uniforme mais non constant.



- ◇ Supposons le champ parallèle à l'axe de la spire et d'expression

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

- ◇ La question est : quel est l'expression du courant $i(t)$ induit ?

- ◇ Analyse physique :

- nous sommes face à un phénomène d'induction de NEUMANN dans un circuit filiforme ;
 - les grandeurs pertinentes sont le rayon a (géométrie), la résistance r de la spire (comportement électrocinétique), B_0 et ω (sources, contraintes).
- ◇ Phénoménologiquement, nous sommes face à un champ $\vec{B}(t)$ qui « crée » une tension, qui « crée » un courant

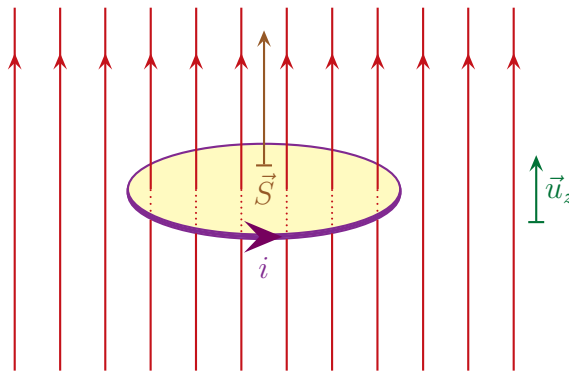
$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{loi de FARADAY}} e_{\text{ind}} \xrightarrow{\text{loi KIRCHHOFF}} i_{\text{spire}}$$

- ◇ Analyse technique :

- le repérage est déjà fait ;
- les lois que nous utiliserons sont immédiates compte-tenu de la situation.

★ loi de FARADAY

- ◇ Redessinons le schéma en orientant proprement le circuit **et en faisant apparaître** le vecteur surface \vec{S} .



- ◇ Calculons le flux de \vec{B} à travers une surface qui s'appuie sur le circuit. Choisissons la plus simple : le disque de rayon a (coloriée, ici, en jaune clair).
- ◇ La définition du flux nous permet d'écrire

$$\Phi_B = \iint_{P \in S} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

- ◇ Et comme le champ est *uniforme*, nous avons

$$\vec{B}(P) = \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

- ◇ Ainsi

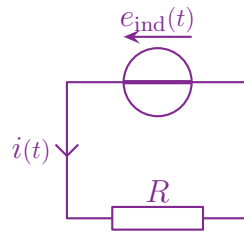
$$\vec{S} = \pi a^2 \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = B_0 \pi a^2 \cos(\omega t)$$

- ◇ La loi de FARADAY nous conduit donc à

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = +B_0 \omega \pi a^2 \sin(\omega t)$$

★ vision électrocinétique

- ◇ Voyons la spire sous l'angle purement électrocinétique en faisant attention de bien mettre $e_{\text{ind}}(t)$ et $i(t)$ **dans le même sens**.



◇ Le circuit est (très) simple, ne tergiversons pas. La loi de POUILLET donne

$$i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad i(t) = + \frac{B_0 \omega \pi a^2}{R} \sin(\omega t)$$

I.2.iii – loi de LENTZ

★ loi qualitative

LOI DE LENZ – LOI DE MODÉRATION

L'induction, par ses effets, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance.

◇ Il s'agit là d'une loi qualitative qui permet :

- lors de l'analyse, de « deviner » ce qui va se passer ;
- lors de l'interprétation des résultats, de vérifier les signes obtenus.

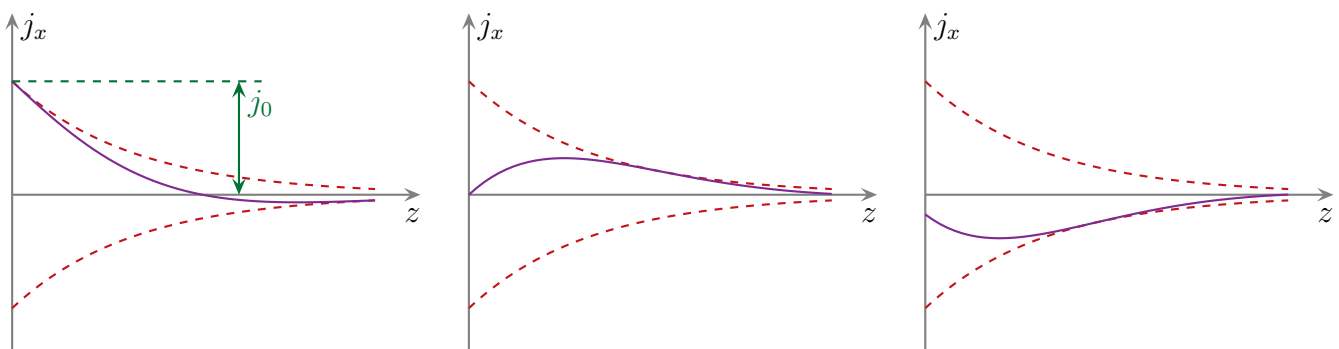
◇ Cette loi vient, en fait, du signe « - » dans la loi de FARADAY

$$e_{\text{ind}}(t) = - \frac{d\Phi_B}{dt}(t)$$

◇ Cette loi, très simple, demande à être utilisée avec précaution car, pour fonctionner, il faut parfaitement identifier les « causes » et les « effets » de l'induction.

★ application à l'effet de peau

◇ Comme nous l'avons vu, la densité de courant en volume diminue avec la profondeur dans le cas d'un conducteur plongé dans un champ électrique variable.

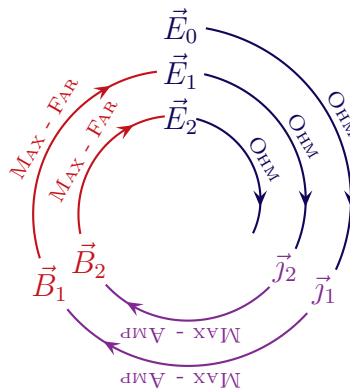


◇ La situation peut être vue de la manière suivante :

- le champ \vec{E}_0 , présent partout, engendre le courant \vec{j}_0 par la loi d'OHM ;
- le courant \vec{j}_0 engendre le champ \vec{B}_0 par la loi de MAXWELL – AMPÈRE ;
- le champ \vec{B}_0 engendre le champ \vec{E}_1 par la loi de MAXWELL – FARADAY ;
- le champ \vec{E}_1 engendre le courant \vec{j}_1 par la loi d'OHM ;
- le courant \vec{j}_1 engendre le champ \vec{B}_1 par la loi de MAXWELL – AMPÈRE ;

- le champ \vec{B}_1 engendre le champ \vec{E}_2 par la loi de MAXWELL – FARADAY ;
- (...)

◇ Ce que nous pouvons symboliser de la manière suivante



◇ Le courant total, le courant final, celui que nous avons déterminé directement avec l'équation vérifiée par \vec{j} n'est autre que

$$\vec{j} = \sum_k \vec{j}_k$$

☞ *Remarque.* Nous aurions pu établir, par étapes successives, les différentes expressions de \vec{j}_k puis sommer le tout.

◇ Il s'agit bien là de la loi de LENZ : l'effet s'oppose à la cause. Effectivement, la cause, c'est le champ \vec{E}_0 **partout** dans le conducteur et l'effet final c'est qu'il n'y a plus de champ dans le conducteur.

I.2.iv – idoinoton et loi de LENZ

★ les questions à se poser

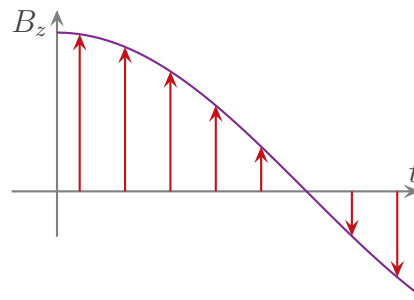
- ◇ La première des questions à se poser est « Quelle est la cause de l'induction ? » ou « Quelle est la cause de $i(t)$? »
- ◇ La première erreur à ne pas commettre est de répondre « C'est le champ magnétique ! ».

C'est faux !

- ◇ Ce n'est **pas** le champ magnétique qui crée le courant induit mais ses *variations*.
- ◇ Cela signifie que les effets de $i(t)$ ne doivent pas s'opposer au champ magnétique mais doivent s'opposer aux *variations* du champ magnétique. La nuance est de taille.
- ◇ Maintenant posons-nous l'autre question : « Quelle est l'effet du courant $i(t)$? »
- ◇ Là, la réponse est plus immédiate, c'est « un champ magnétique ».

★ vérification

- ◇ Nous devons donc vérifier que le champ magnétique $\vec{B}_1(t)$ créé par le courant induit s'oppose aux *variations* de \vec{B} .
- ◇ Regardons ce qui se passe uniquement autour de $t = 0^+$. À cet instant, le champ \vec{B} est en train de *diminuer*.



- ◇ D'après la loi de LENZ, il faut donc que \vec{B}_1 s'oppose à cette diminution *donc* soit dirigé vers le haut.
- ◇ Or $\vec{B}_1(t)$, qui est créé par $i(t)$, est vers le haut quand $i(t) > 0$ (règle de la main droite).
- ◇ C'est pourquoi, nous pouvons constater qu'autour de $t = 0^+$, le courant $i(t)$ est bien positif.

$$i(t) = \underbrace{K}_{>0} \sin(\omega t) > 0 \quad \text{autour de } t = 0^+$$

- ◇ Donc tout va bien! ☺

I.3 – Champ électromoteur

I.3.i – expression

★ loi, interprétation

Pour un circuit orienté \mathcal{C} fermé ou non, la f.é.m. d'induction comptée dans le sens d'orientation de \mathcal{C} s'écrit

$$e_{\text{ind}} = \int_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

\vec{E}_m est appelé le *champ électromoteur*.

- ◇ Il s'agit là d'une autre manière de déterminer la f.é.m. induite.
- ◇ L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer des f.é.m. directement sur des *portions* de circuits. Maintenant, il est certain que si le circuit électrique n'est pas ouvert il y aura, certe, une f.é.m. mais aucun courant.
- ◇ L'inconvénient, le gros inconvénient même, de cette méthode est que le calcul se base sur la connaissance de \vec{A} , connaissance qui est loin d'être triviale.

★ démonstration

- ◇ D'après les équations de MAXWELL, nous savons déjà que nous pouvons écrire

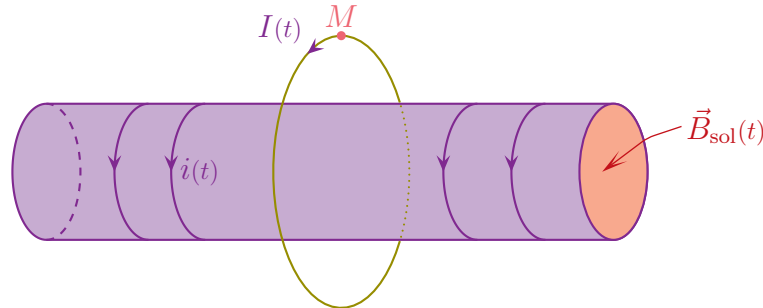
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- ◇ Or nous savons que la circulation de $-\overrightarrow{\text{grad}} V$ correspond à la f.é.m. « normale », celle due aux générateurs de tension.
- ◇ Il reste donc la f.é.m. due à la circulation de $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qui correspond aux effets de la variation du champ magnétique, c'est-à-dire la f.é.m. induite.

I-3·ii – idoinoton

★ situation

- ◇ Considérons une spire circulaire entourant une bobine idéale de rayon a parcourue par un courant d'intensité variable $i(t)$.



- ◇ Avec le repérage usuel ci-dessus, le champ magnétique créé par la bobine :
- est nul en dehors de la bobine ;
 - vaut $\vec{B}_{\text{bob}} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$ à l'intérieur.
- ◇ Quel est le courant parcourant la spire ?
- ◇ Comparons les deux méthodes

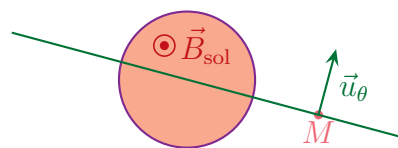
★ version « champ électromoteur »

🕒 déterminer $\vec{A}(t)$

- ◇ Comme nous ne connaissons pas $\vec{A}(t)$, il faut le déterminer et, pour cela, commencer par chercher les symétries et les invariances.
- ◇ Les invariances, cela va très vite puisque ce sont les mêmes que celle de la bobine infinie, à savoir une invariance par translation et une invariance par rotation.
- ◇ Pour les symétries, c'est plus délicat car il faut savoir si \vec{A} est un vrai vecteur (*i.e.* se comporte comme \vec{E} vis-à-vis des plans de symétrie) ou un pseudo-vecteur (comme \vec{B}).
- ◇ La loi de MAXWELL – FARADAY nous montre que l'utilisation du rotationnel change la nature d'un vecteur, nous pouvons donc en conclure que

Le champ potentiel vecteur \vec{A} est un champ de vrai vecteur.

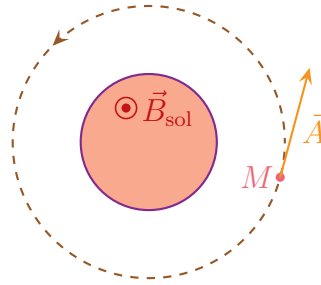
- ◇ Or nous constatons que les plans contenant l'axe de la bobine sont des plans de *symétrie* pour le champ \vec{B} , *i.e.* pour les pseudo-vecteur.
- ◇ Nous pouvons donc en déduire que les plans contenant l'axe de la bobine sont des plans d'*antisymétrie* pour les vrais vecteur, *i.e.* pour le champ \vec{A} .



- ◇ Dans ces conditions, \vec{A} est orthoradial et s'écrit, compte-tenu des invariances

$$\vec{A}(M,t) = A(r,t) \vec{u}_\theta$$

◇ Choisissons un point M quelconque dans l'espace¹ et calculons la circulation de \vec{A} sur le cercle centré sur l'axe passant par M .



◇ Nous avons alors

$$C = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{A}(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow C = \oint_{P \in \mathcal{C}} A(M) \vec{u}_\theta \cdot (d\vec{\ell}_P \vec{u}_\theta) \rightsquigarrow C = A(r) \times 2\pi r$$

◇ Et en utilisant le théorème de STOKES ainsi que la définition de \vec{A}

$$C = \iint_{P \in \mathcal{S}} \text{rot} \vec{A}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow C = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \rightsquigarrow C = \Phi_B \rightsquigarrow C = \mu_0 n i(t) \times \pi a^2$$

◇ En rapprochant les deux résultats, nous obtenons

$$\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0 n i(t) a^2}{2r} \vec{u}_\theta$$

🌀 en déduire \vec{E}_m

◇ Nous pouvons calculer maintenant le champ électromoteur

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial A}{\partial t} \rightsquigarrow \vec{E}_m(r,t) = -\frac{\mu_0 n a^2}{2r} \times \frac{di}{dt}(t) \vec{u}_\theta$$

🌀 puis e_{ind}

◇ Calculons la circulation de \vec{E}_m sur le circuit électrique \mathcal{C} .

$$e_{\text{ind}} = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \rightsquigarrow e_{\text{ind}} = E_m(r,t) \times 2\pi r \rightsquigarrow e_{\text{ind}} = -\mu_0 n \pi a^2 \times \frac{di}{dt}(t)$$

★ version « loi de FARADAY »

◇ Calculons le flux de \vec{B} à travers la surface délimitée par le circuit \mathcal{C} .



1. Vu ce que nous allons faire de \vec{A} après, à savoir ne s'intéresser à lui qu'au niveau du circuit \mathcal{C} , nous aurions pu nous contenter de prendre un point M sur ce circuit.

◇ Comme le champ y est uniforme, nous avons tout de suite

$$\Phi_B = \pi a^2 (\mu_0 n i(t)) \quad \text{et} \quad e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = -\mu_0 n \pi a^2 \times \frac{di}{dt}(t)$$

◇ C'est une méthode « un peu » plus rapide.

★ morale

◇ Clairement la méthode « champ électromoteur » n'est pas très rentable puisque, pour déterminer \vec{A} , nous devons quand même calculer un flux de \vec{B} . En fait, entre la méthode du « champ électromoteur » et la méthode « loi de FARADAY » la seule différence est le moment où nous calculons la dérivée temporelle.

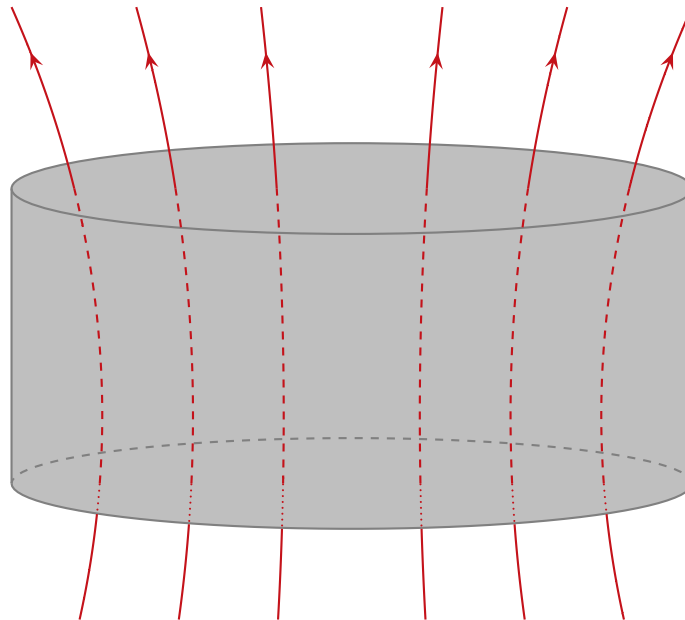
◇ Finalement, lorsque nous ne connaissons pas le potentiel vecteur \vec{A} , nous préférons la méthode « loi de FARADAY ». En revanche si, pour une raison quelconque, nous connaissons déjà *a priori* l'expression de $\vec{A}(M,t)$, là, nous pourrions penser à la méthode « champ électromoteur ».

I.4 – Induction dans un volume

I.4.i – situation, analyse

★ dispositif

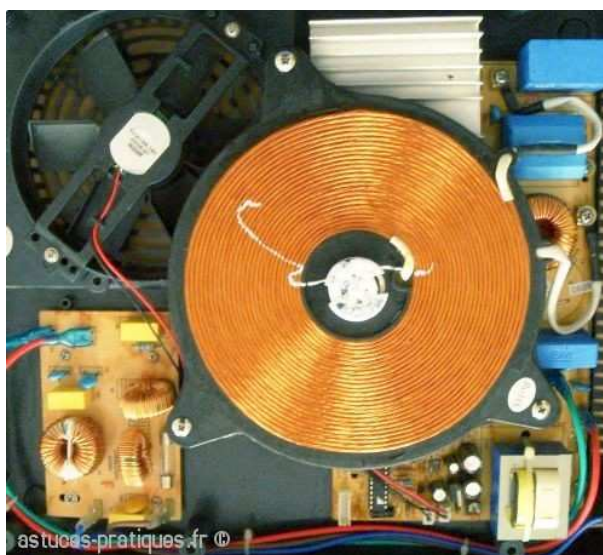
◇ Considérons une pièce métallique épaisse, comme un fond de casserole, plongée dans un champ magnétique uniforme et variable.



◇ Dans cette pièce métallique, des courants vont apparaître, courants qui vont dissiper de l'énergie par effet JOULE et ainsi élever la température du matériau. C'est là le principe des plaques de cuisson par induction.

◇ Ci-dessous, une photo de plaque à induction montrant les bobines qui génèrent le champ magnétique.²

2. Source : <http://www.astuces-pratiques.fr/images/articles/24/inductance-cuisine-induction.jpg>



- ◇ Cherchons à déterminer la puissance dissipée par effet JOULE.
- ◇ Avant de commencer, signalons que, « en vrai », pour les plaques à induction, tout ne se passe pas exactement comme nous allons le faire. La grande différence est que le matériau des casseroles et autres poêles doit être ferromagnétique pour que « ça marche bien ». En pratique, un matériau ferromagnétique est un matériau qui attire les aimants.
- ◇ Phénoménologiquement, un matériau ferromagnétique « amplifie » l'effet magnétique (*i.e.* le champ \vec{B}) par un coefficient phénoménologique appelée permittivité relative μ_r . Cela signifie que, pour que nous résultats soient théoriquement plus proches de la réalité, il nous suffira de remplacer μ_0 par $\mu_0 \mu_r$.

★ deux approches différentes

- ◇ Analyse physique :
 - nous sommes face à un conducteur immobile dans un champ magnétique variable, c'est de l'induction de NEUMANN ;
 - le champ magnétique est uniforme donc, en tenant compte de la pièce métallique, nous pouvons dire que le dispositif admet une invariance par rotation ;
 - les grandeurs pertinentes sont γ (caractéristique électrique du matériau), R, h (géométrie) et $B(t)$ (contrainte).
- ◇ Analyse technique :
 - le repérage sera (évidemment) le repérage cylindro-polaire ;
 - du point de vue de l'approche, nous avons le choix :
 - soit nous découpons l'ensemble en différentes spires puis nous allons procéder comme suit

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{loi de FARADAY}} e_{\text{ind}} \xrightarrow{\text{loi KIRCHHOFF}} i_{\text{spire}} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} \mathcal{P}_{J,\text{spire}} \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

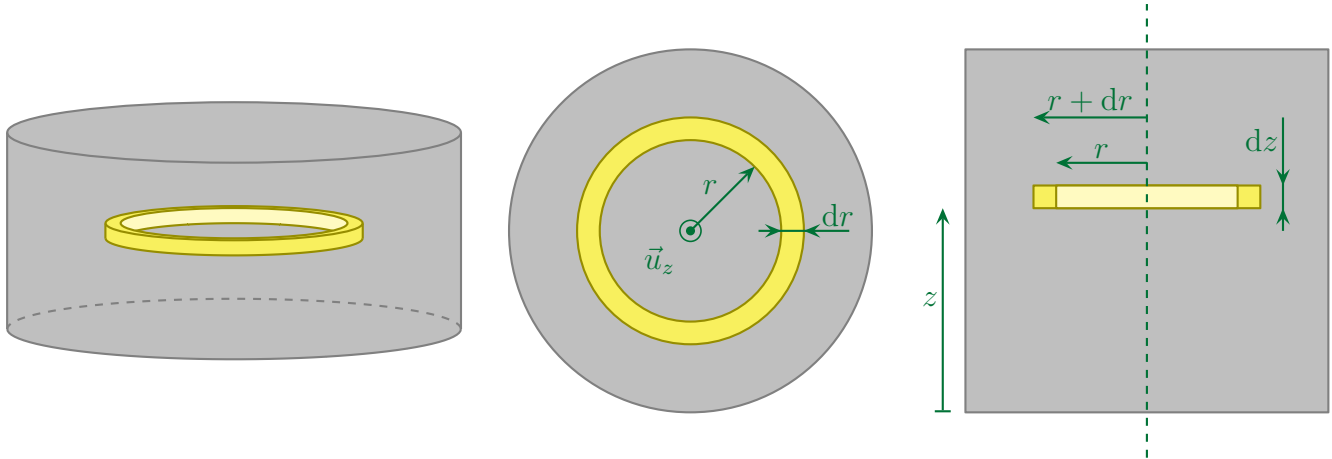
→ soit nous découpons l'ensemble en volume élémentaires puis

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{équation de MAXWELL - FARADAY}} \vec{E} \xrightarrow{\text{loi d'OHM}} \vec{j} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} d\mathcal{P}_J \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

I.4.ii – vision électrocinétique en spires

★ préliminaire : le découpage en spires

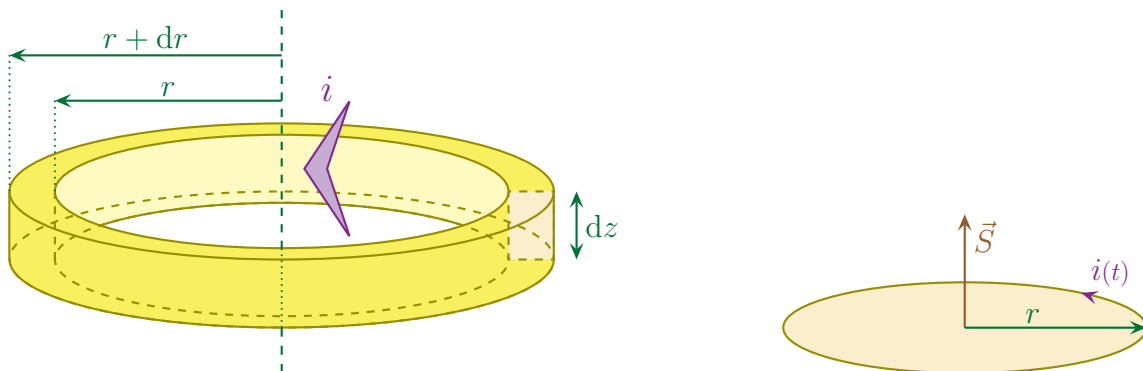
- ◇ Ici, pour choisir une « bonne » spire qui nous facilitera les calculs, nous devons respecter les symétries à la fois pour le champ magnétique et pour le matériau conducteur.
- ◇ Ici le choix va être très rapide (et très simple) : nous allons considérer une spire située à la cote z , de largeur dr et de rayon r .



★ étude d'une spire

🕒 trouver e_{ind}

- ◇ Pour trouver e_{ind} nous allons isoler la spire considérée et la voir comme un circuit usuel filiforme.

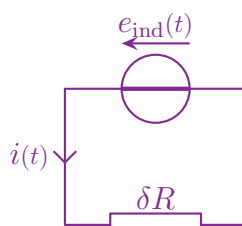


- ◇ Avec la loi de FARADAY nous trouvons très vite

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{et} \quad \Phi_B = \pi r^2 \times B(t) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}(t)$$

🕒 en déduire i

- ◇ Le modèle électrocinétique de la spire est



◇ La loi de POUILLET donne immédiatement

$$i_{\text{spire}} = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{\delta R}$$

🔗 et la puissance dissipée

◇ La puissance dissipée par le résistor équivalent s'écrit

$$\mathcal{P}_{J,\text{spire}} = \delta R \times i_{\text{spire}}^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{J,\text{spire}} = \frac{e_{\text{ind}}^2(t)}{\delta R}$$

◇ Or, parce que la spire est très fine, nous pouvons dire qu'il s'agit d'un conducteur dont la résistance s'écrit

$$\delta R = \frac{1}{\gamma} \times \frac{\text{longueur}}{\text{section}} \quad \rightsquigarrow \quad \delta R = \frac{1}{\gamma} \times \frac{2\pi r}{dr dz}$$

◇ Et ainsi

$$d\mathcal{P}_{J,\text{spire}} = \frac{\gamma \pi^2 r^4 \dot{B}^2(t)}{2\pi r} \times dr dz \quad \rightsquigarrow \quad d\mathcal{P}_{J,\text{spire}} = \frac{\gamma \pi r^3 \dot{B}^2(t)}{2} \times dr dz$$

★ sommation sur toutes les spires

◇ Nous avons, par simple extensivité de la puissance dissipée

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \int_{\text{spires}} d\mathcal{P}_{J,\text{spire}}$$

◇ Comme une spire dépend de la cote et de son rayon, nous devons sommer pour toutes les cotes et tous les rayons, ce qui donne

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \int_{z=0}^{z=h} \int_{r=0}^{r=R} d\mathcal{P}_{J,\text{spire}}$$

◇ Remplaçons

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \int_{z=0}^{z=h} \int_{r=0}^{r=R} \frac{\gamma \pi r^3 \dot{B}^2(t)}{2} \times dr dz$$

◇ Réarrangeons

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \frac{\gamma \pi \dot{B}^2(t)}{2} \times \left(\int_{z=0}^{z=h} dz \right) \times \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \right)$$

◇ Ce qui donne, tous calculs (rapides) faits

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \frac{\gamma \pi h R^4 \dot{B}^2(t)}{8}$$

◇ Nous pouvons tout d'abord constater que la puissance dissipée est bien positive, ce qui est très rassurant.

◇ De plus, alors que nous voyons que la puissance dissipée est directement proportionnelle à la conductivité (ce qui n'a rien d'évident, bien au contraire), nous pouvons constater qu'elle croît plus vite que le volume. Autrement dit : la puissance dissipée n'est pas uniforme mais dépend de la taille du volume.

- ◇ Ensuite, nous pouvons voir que la dépendance est en B^2 ce qui explique l'utilisation de ferromagnétiques. Avec un ferromagnétique, le champ magnétique efficace³ est multiplié par $\mu_r =$ qq 100aine. Cela permet donc des puissances dissipée multipliée par un facteur allant de 10^4 à 10^6 par rapport à un simple conducteur non ferromagnétique comme le cuivre!
- ◇ Enfin, comme la dépendance est en ω^2 , il est préférable de travailler en hautes fréquences. Toutefois, il ne faut pas non plus travailler en trop hautes fréquences de manière à ne pas créer un effet de peau trop important qui empêcherait le champ magnétique de pénétrer au cœur du matériau et donc d'y créer des courants par induction.

★ homogénéité

- ◇ Pour vérifier l'homogénéité dans le cas de résultat avec l'induction, ce n'est jamais très immédiat. La grande idée pour y parvenir et de faire apparaître la force de LAPLACE homogène à $B i \ell$.
- ◇ Nous avons tout d'abord

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \gamma \times \ell^5 \times \frac{B^2}{\tau^2}$$

- ◇ Ensuite, transformons un B en E en pensant à la force de LORENTZ

$$\vec{f} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \rightsquigarrow B \equiv \frac{E}{v} \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \gamma \times \ell^4 \times \frac{B}{\tau} \times \frac{E}{\mathcal{X}} \times \frac{\ell}{l}$$

- ◇ Nous pouvons alors utiliser la loi d'OHM

$$j \equiv \gamma E \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \ell^4 \times \frac{B}{\tau} \times j$$

- ◇ Nous reconnaissons une intensité

$$i \equiv j \ell^2 \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv \ell^2 \times \frac{B}{\tau} \times i$$

- ◇ Et nous voyons enfin que la puissance peut se mettre sous la forme « force \times vitesse » ce qui prouve bien que c'est une puissance

$$F \equiv B i \ell \quad \text{et} \quad v \equiv \frac{\ell}{\tau} \rightsquigarrow \mathcal{P}_{J,\text{tot}} \equiv F \times v$$

I.4.iii – vision électromagnétique mésoscopique

★ rappel de l'analyse

- ◇ Rappelons le plan de bataille

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{équation de MAXWELL - FARADAY}} \vec{E} \xrightarrow{\text{loi d'OHM}} \vec{j} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} d\mathcal{P}_J \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

★ trouver \vec{E}

- ◇ Partons de l'équation de MAXWELL – FARADAY

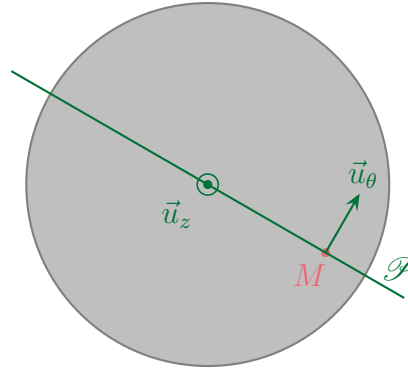
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- ◇ Comme le champ magnétique est uniforme et porté uniquement par \vec{u}_z , cette équation devient

3. Dénomination non académique.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{dB}{dt}(t) \vec{u}_z$$

- ◇ Il reste maintenant à inverser le rotationnel...
- ◇ Commençons par bien poser le problème : « \vec{B} est la source de \vec{E} et le but est de chercher \vec{E} ».
- ◇ Pour cela, faisons comme d'habitude en cherchant les invariances et les symétries.
- ◇ Du point de vue des invariances, l'uniformité du champ **et** la symétrie de la pièce cylindrique, nous permettent de dire que le champ \vec{E} est invariant par rotation.
- ◇ De plus, comme \vec{E} et \vec{B} sont de natures différentes, les plans de symétrie de l'un seront des plans d'antisymétrie de l'autre et réciproquement.



- ◇ C'est ainsi qu'en considérant le champ \vec{B} associé à la pièce métallique, nous pouvons dire que, pour un point M quelconque, le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des causes :
 - donc le plan $\mathcal{P}(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie de \vec{E} ;
 - donc $\vec{E}(M \in \mathcal{P})$ est orthogonal à \mathcal{P} ;
 - donc $\vec{E}(M \in \mathcal{P})$ est porté par \vec{u}_θ .
- ◇ Avec un formulaire, nous pouvons constater que la projection sur \vec{u}_z du rotationnel s'écrit

$$\frac{1}{r} \times \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \times \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -\frac{dB}{dt}$$

- ◇ Comme le champ magnétique ne dépend pas de r , nous pouvons primitiver tranquillement

$$\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} = -r \frac{dB}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad r E_\theta = -\frac{r^2}{2} \times \frac{dB}{dt} + C^{te}$$

- ◇ La constante est nulle car, par symétrie, nous voyons bien que $E(r=0) = 0$.
- ◇ Il reste donc

$$E_\theta = -\frac{r}{2} \times \frac{dB}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}(M) = -\frac{r}{2} \times \dot{B}(t) \vec{u}_\theta$$

★ trouver \vec{j} et la puissance dissipée

- ◇ La loi d'OHM donne directement

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = -\frac{\gamma r}{2} \times \dot{B}(t) \vec{u}_\theta$$

- ◇ La puissance dissipée dans le volume $d\tau$ s'écrit donc

$$d\mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \quad \rightsquigarrow \quad d\mathcal{P}_J = +\frac{\gamma r^2}{4} \times \dot{B}^2(t) d\tau$$

★ trouver la puissance dissipée totale

◇ Là aussi, il ne reste plus qu'à sommer sur l'ensemble du volume

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \iiint_{\mathcal{V}} d\mathcal{P}_J \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\gamma r^2}{4} \times \dot{B}^2(t) d\tau$$

◇ Pour le volume élémentaire, rappelons-nous du déplacement élémentaire

$$d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad d\tau = r dr d\theta dz$$

◇ Nous avons ainsi

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \int_{z=0}^{z=h} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=R} \frac{\gamma r^2}{4} \times \dot{B}^2(t) r dr d\theta dz$$

◇ Ce qui se réécrit

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \frac{\gamma \dot{B}^2(t)}{4} \times \left(\int_{z=0}^{z=h} dz \right) \times \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right) \times \left(\int_{r=0}^{r=R} r^3 dr \right)$$

◇ Et après calculs (simples)

$$\mathcal{P}_{J,\text{tot}} = \frac{\pi}{8} \times \gamma \dot{B}^2(t) \times R^4 h$$

◇ Il s'agit, bien sûr, du même résultat.

I.4.iv – retour sur l'analyse

★ analyse physique

◇ Nous voyons qu'il y a deux approches possible :

- l'approche en terme de conducteur filiforme ;
- l'approche *via* la vision mésoscopique.

◇ La vision « conducteur filiforme » donne

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{loi de FARADAY}} e_{\text{ind}} \xrightarrow{\text{loi KIRCHHOFF}} i_{\text{spire}} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} \mathcal{P}_{J,\text{spire}} \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

◇ L'approche mésoscopique, elle, donne

$$\vec{B}(t) \xrightarrow{\text{équation de MAXWELL - FARADAY}} \vec{E} \xrightarrow{\text{loi d'OHM}} \vec{j} \xrightarrow{\text{effet JOULE}} d\mathcal{P}_J \xrightarrow{\text{extensivité}} \mathcal{P}_{J,\text{tot}}$$

◇ Les deux visions sont totalement équivalentes. Il est possible de passer de l'une à l'autre :

- $\vec{E} \xrightarrow{\text{circulation}} e_{\text{ind}}$;
- $\vec{j} \xrightarrow{\text{flux}} i$.

◇ Nous pouvons aussi remarquer que la présence du courant i final **n'engendre pas** un nouveau champ magnétique qui engendrerait à nouveau de l'induction.

◇ Lorsque, dans le paragraphe suivant, il faudra tenir compte de cet effet, nous ne le modéliserons pas par une rétroaction sur \vec{B} mais par une rétroaction sur i *directement*.

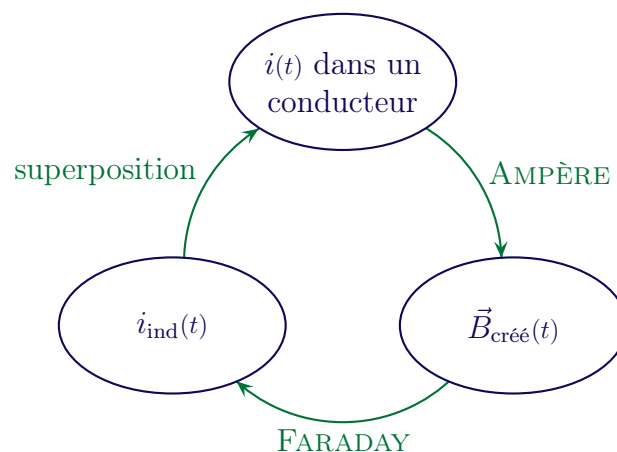
★ analyse technique

- ◇ Techniquement nous utiliserons toujours *a priori* la loi de FARADAY soit en version « circuit filiforme » soit, éventuellement, en version « approche mésoscopique » dans le cas d'une induction en volume.
- ◇ Nous n'utiliserons pas l'approche en terme de champ électromoteur, sauf si le potentiel vecteur \vec{A} est déjà connu.
- ◇ Enfin, *a posteriori*, nous vérifierons :
 - que la loi de LENZ est vérifiée ;
 - que l'épaisseur de peau est négligeable ;
 - que la rétroaction du courant induit sur le champ inducteur est négligeable.
- ◇ Le fait que le courant induit engendre des champs magnétiques suffisamment intenses pour modifier notablement l'induction s'appelle le phénomène d'« autoinduction ».

I.5 – Autoinduction

I.5.i – origine physique

- ◇ L'autoinduction est un phénomène de rétroaction qui peut apparaître dès lors qu'un courant circule dans un conducteur.



- ◇ L'auto-induction est d'autant plus forte que le champ \vec{B} créé est intense, autrement dit le phénomène est important avec les bobines.

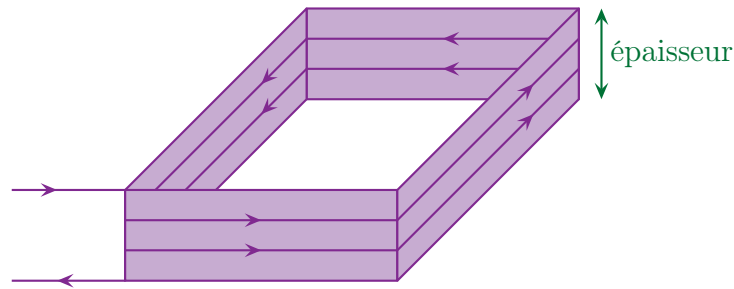
★ modélisation d'une bobine

- ◇ Comme d'habitude, nous modéliserons les bobines non pas par une hélice mais par une association de spires indépendantes.



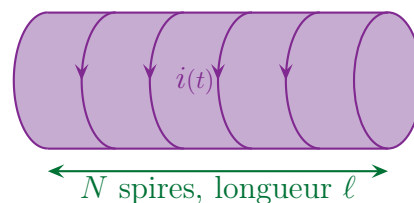
★ deux grands types de bobines

◇ Il existe des bobines dites « plates » pour lesquelles l'épaisseur est faible devant la section.



◇ Ces bobines sont, en général, considérées comme infiniment plates et sont caractérisées par le nombre N de tours que fait le fil.

◇ Il y a aussi les solénoïdes



◇ Les solénoïdes sont caractérisés par leur longueur ℓ et le nombre de spires N .

◇ Rappelons que le champ magnétique créé par un solénoïde infini :

- est nul en dehors du solénoïde ;
- vaut $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ à l'intérieur du solénoïde.

I.5.ii – inductance d'une bobine

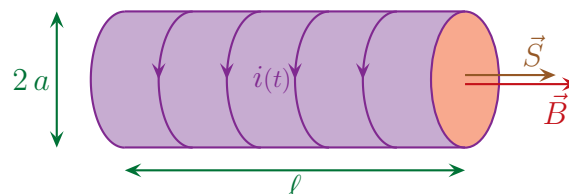
★ flux propre

🕒 définition

Le *flux propre* d'une bobine (ou d'un circuit) est le flux du champ magnétique créé par la bobine à travers elle-même (lui-même).

🕒 exemple

◇ Prenons l'exemple de la bobine idéale.



◇ Ici, comme la bobine est modélisée par une juxtaposition de N spires indépendantes, nous pouvons dire que

$$\Phi_{\text{propre}} = \Phi_{\text{tot}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_N$$

- ◇ Comme le champ est uniforme dans toute la bobine, le flux traversant chaque spire est le même et s'écrit

$$\Phi_{\text{spire}} = B \times \pi a^2 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{\text{spire}} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \pi a^2$$

- ◇ Nous avons ainsi

$$\Phi_p = N \times \Phi_{\text{spire}} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 i$$

★ inductance

🕒 définition

L'inductance d'une bobine (ou d'un circuit) est la grandeur notée L , mesurée en henry, telle que

$$\Phi_p = L \times i \quad \text{où}$$

i est le courant traversant la bobine (ou le circuit).

L'inductance est toujours positive.

- ◇ L'inductance est forcément positive puisque le vecteur surface \vec{S} utilisé pour calculer le flux propre et le champ magnétique créé par i sont forcément dans le même sens, donné par la main droite.

Le flux magnétique s'exprime en *weber (Wb)* avec

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T.m}^2$$

🕒 exemple

- ◇ Pour la bobine idéale, nous avons tout de suite

$$\Phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 i \quad \rightsquigarrow \quad L_{\text{bob idéale}} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$$

🕒 rappel

- ◇ Lors d'un calcul de flux à travers une surface qui s'appuie sur quelque chose :
- si le quelque chose est un contour fictif (théorème d'AMPÈRE), l'orientation du contour est arbitraire ;
 - si le quelque chose est un circuit électrique (en induction), l'orientation se fait obligatoirement dans le sens de i .

★ justification de la définition

- ◇ En fait, en regardant les lois, nous pouvons voir que le flux propre est obligatoirement proportionnel à l'intensité du courant qui le crée.
- ◇ En effet, la loi de BIOT et SAVART s'écrit

$$\vec{B}_{\text{propre}}(M) = \int_{P \in \text{bobine}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{i \, d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

◇ L'ARQS impose que le courant i est le même dans toute la bobine ce qui donne

$$\vec{B}_{\text{propre}}(M) = i \times \int_{P \in \text{bobine}} \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{d\vec{\ell}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \rightsquigarrow \vec{B}_{\text{propre}}(M) = i \times \vec{\kappa}(M)$$

◇ Nous pouvons donc voir que, quel que soit le point M considéré, le champ magnétique est proportionnel à l'intensité i .

◇ Comme le flux (fût-il propre), est proportionnel au champ magnétique, nous voyons que, là aussi, le flux propre est proportionnel à l'intensité.

I.5.iii – aspect électrocinétique

★ où une loi connue depuis très longtemps refait surface

🗨 énoncé

La tension aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance R s'écrit, en convention récepteur

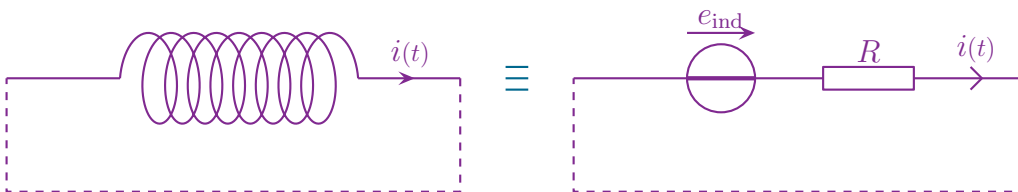
$$u_{\text{bob}} = +L \frac{di}{dt}(t) + R i(t)$$

🗨 démonstration

◇ Considérons une bobine parcourue par un courant. Elle va alors créer un champ magnétique qui, lui-même, va engendrer un phénomène d'induction. Cherchons la f.é.m induite.



◇ Pour cela, calculons la circulation du champ électromoteur sur la bobine court-circuitée de manière à pouvoir en déduire la f.é.m. induite.

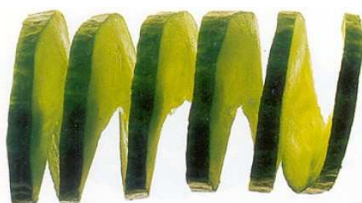


◇ Sur ce circuit *fermé*, nous pouvons utiliser la loi de FARADAY.

◇ Or le flux à travers le circuit se réduit au flux à travers la bobine car le flux à travers la portion qui « referme » le circuit est négligeable.

◇ En effet, la surface qui s'appuie sur la bobine ressemble à une grande hélice, un peu comme cette sculpture sur concombre⁴

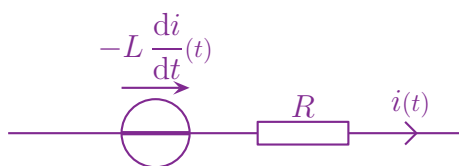
4. Source : <http://i82.servimg.com/u/f82/09/02/30/17/legume17.jpg>



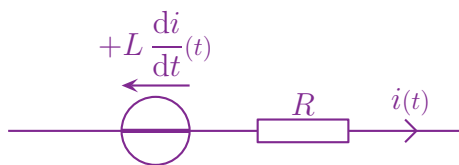
- ◇ Cela implique que la surface formée par le fil qui referme le circuit peut être considérée comme négligeable, surtout si le fil de retour « colle » la bobine.
- ◇ Dans ces conditions, nous avons

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi_p = L i(t) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}(t)$$

- ◇ Dans ces conditions la bobine peut se modéliser par

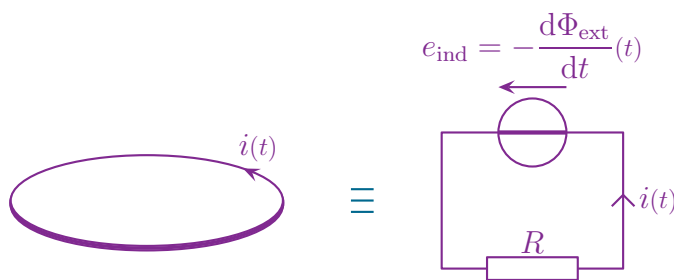


- ◇ Et en convention récepteur, cela donne

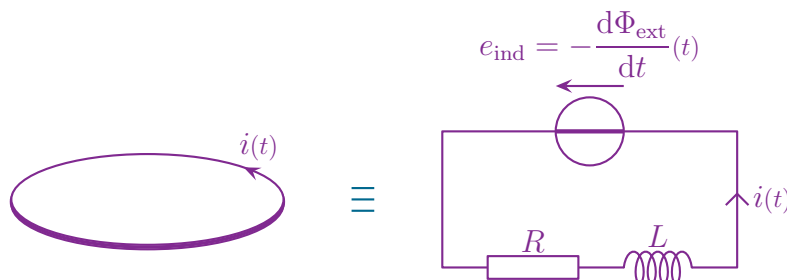


★ tenir compte de l'autoinduction dans un problème d'induction

- ◇ Prenons un circuit plongé dans un champ magnétique variable, donc soumis à induction.
- ◇ S'il s'agit d'une spire toute seule, l'auto-induction est négligeable et nous savons que nous pouvons modéliser l'aspect électrocinétique de la manière suivante.



- ◇ En revanche si, maintenant, le phénomène d'autoinduction n'est plus négligeable, nous n'allons pas calculer \vec{B}_{propre} et encore moins Φ_{propre} mais inclure un effet « bobine » dans le circuit modélisé.



- ◇ Dans la modélisation précédente :
 - le flux Φ de la loi de FARADAY est calculé **uniquement** avec le champ extérieur ;
 - **tout** l'effet d'autoinduction est pris en compte dans le L (aussi bien \vec{B}_{propre} que Φ_{propre}).
- ◇ En fait, l'un dans l'autre, en pratique, il est possible d'oublier les notions de flux propre et de champ propre puisque, techniquement, la seule différence entre auto-induction et non auto-induction c'est l'adjonction d'une bobine dans le circuit modélisé.

I.5.iv – aspect énergétique

★ loi

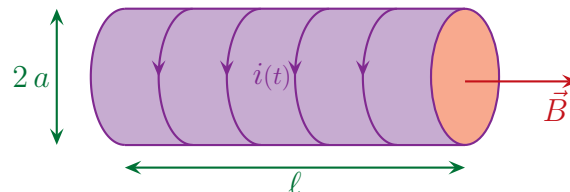
L'énergie contenue dans le champ magnétique d'une bobine d'inductance L parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{mag}}(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

- ◇ La démonstration de l'énergie contenue dans une bobine a été faite en première année avec une approche électrocinétique.
- ◇ Nous devons maintenant montrer que cette énergie est bien celle contenue dans le champ magnétique créé par la bobine.

★ cas de la bobine idéale

- ◇ Nous allons montrer ce résultat sur un exemple et accepter la généralisation.
- ◇ Considérons une bobine idéale.



- ◇ Nous savons alors qu'elle crée un champ magnétique de norme $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$ dans le volume $\mathcal{V} = \pi a^2 \ell$.
- ◇ L'énergie contenue dans le champ magnétique s'écrit donc

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = e_{\text{mag}} \times \mathcal{V} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\mu_0^2}{2 \mu_0} \frac{N^2}{\ell^2} i^2(t) \times \pi a^2 \ell \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \times \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \times i^2(t)$$

- ◇ Nous reconnaissons là l'expression de l'inductance d'une bobine idéale ce qui donne

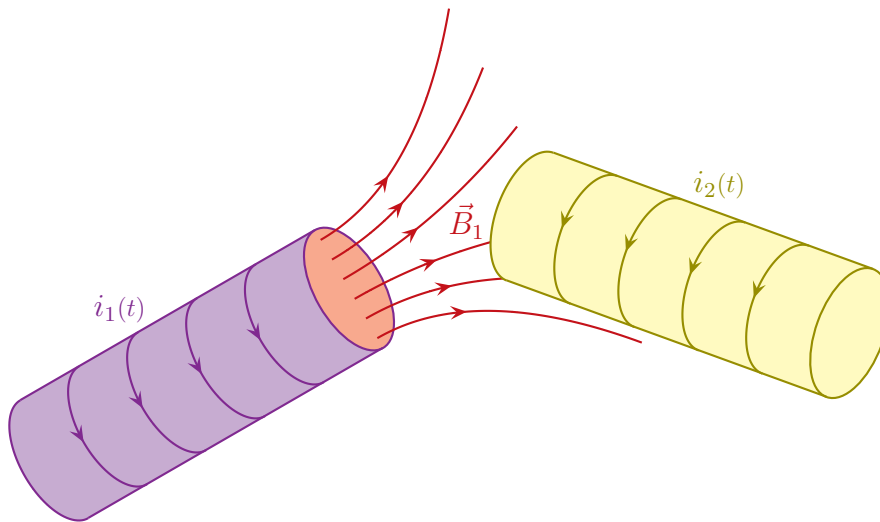
$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \times L \times i^2(t)$$

I.6 – Induction mutuelle

I.6.i – analyse

★ origine

- ◇ Considérons deux bobines.



◇ La bobine ① crée un champ magnétique \vec{B}_1 qui engendre un flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ à travers la bobine ②. Nous avons donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} \propto B_1 \quad \text{et} \quad B_1 \propto i_1 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{1 \rightarrow 2} \propto i_1$$

◇ De même, nous avons

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} \propto B_2 \quad \text{et} \quad B_2 \propto i_2 \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} \propto i_2$$

◇ Nous pouvons donc écrire, en introduisant les constantes de proportionnalité

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2$$

◇ M_{12} et M_{21} sont homogènes à des inductances et sont appelés « coefficient de mutuelle inductance ».

Lorsque deux circuits sont en interaction magnétique, le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ que ① crée à travers ② et le flux $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ que ② crée dans ① s'écrivent

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

M est appelé le *coefficient de mutuelle inductance*.

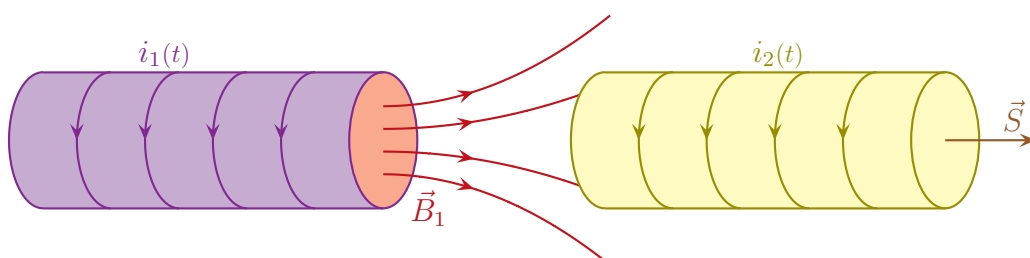
◇ Autrement dit, par rapport à ce qui précède, nous avons

$$M_{12} = M_{21}$$

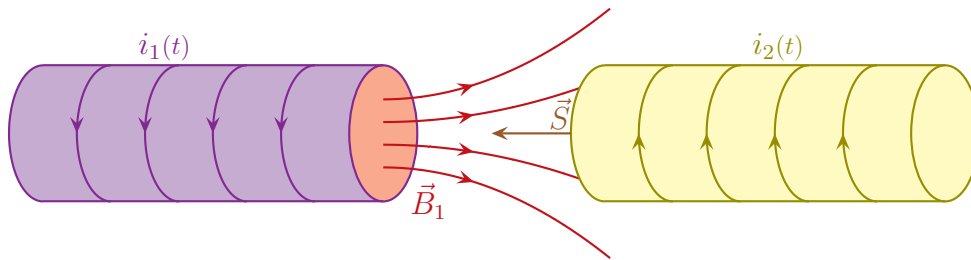
◇ Le résultat précédent est appelé « théorème de NEUMANN » et nous l'admettrons.

Le coefficient de mutuelle inductance dépend de la géométrie des bobines considérées et est positif ou négatif suivant l'orientation (arbitraire) des courants

◇ Sur l'exemple suivant, nous avons $\Phi_{1 \rightarrow 2} > 0$ lorsque $i_1(t) > 0$ donc $M_{12} = M > 0$.



- ◇ Sur l'exemple suivant, la bobine 2 est orientée dans l'autre sens, ce qui implique $\Phi_{1 \rightarrow 2} < 0$ pour $i_1(t) > 0$. De là nous en déduisons $M_{12} = M < 0$.



★ aspect qualitatif

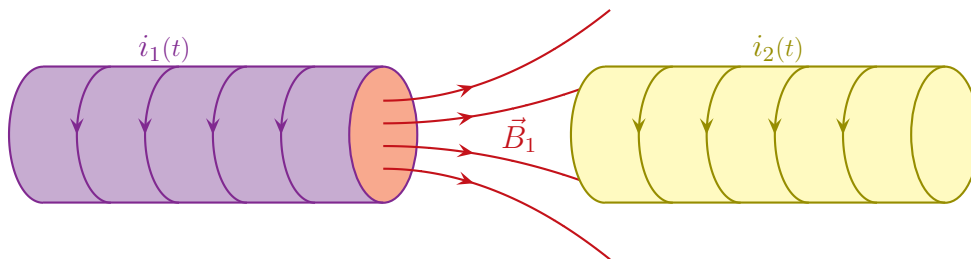
Qualitativement :

- le coefficient d'auto-induction d'une bobine est proportionnel au carré du nombre de spires, $L \propto N^2$;
- le coefficient de mutuelle induction de deux bobines est proportionnel au produit de leurs nombres de spires, $M \propto N_1 N_2$.

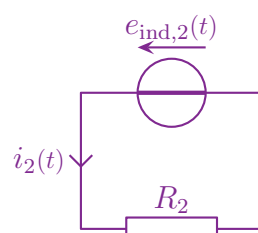
- ◇ En effet, en considérant le coefficient de mutuelle inductance :
- plus il y a de spires dans la bobine ①, plus le champ magnétique créé est intense, d'où la proportionnalité avec N_1 ;
 - plus il y a de spires dans la bobine ②, plus le flux engendré par le champ magnétique ① est grand, d'où la proportionnalité avec N_2 .
- ◇ Pour le coefficient d'auto-inductance, c'est le même nombre de spires N qui joue les deux rôles ci-dessus.

★ sens du courant induit

- ◇ Considérons l'exemple suivant et constatons que le coefficient de mutuelle inductance est positif.



- ◇ Imaginons que le courant $i_1(t)$ augmente. Alors :
- le flux $\Phi_2 = M i_1(t)$ augmente ;
 - la f.é.m. induite est négative $e_{\text{ind}2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} < 0$;
 - le courant $i_2(t)$ est alors négatif comme le montre le schéma électrocinétique suivant.



◇ Nous pouvons le vérifier avec la loi de LENZ :

- la cause de $i_2(t)$, ce sont les *variations* de \vec{B}_1 ;
- \vec{B}_1 est de plus en plus grand vers la droite ;
- les conséquences de $i_2(t)$ doivent donc créer un champ \vec{B}_2 vers la gauche, pour modérer \vec{B}_1 ;
- la règle de la main droite nous dit alors que le courant $i_2(t)$ doit être négatif.

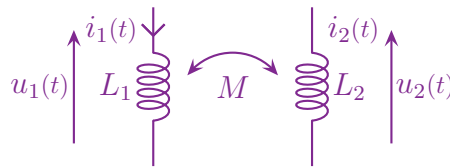
I-6·ii – aspect électrocinétique

★ loi

Deux bobines idéales en interaction magnétique dans des circuits électrocinétiques ont pour loi caractéristique, en convention récepteur,

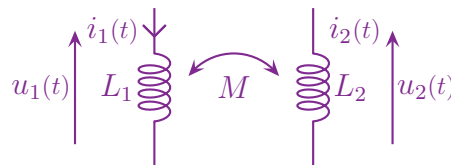
$$u_1(t) = +L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = +L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) \quad \text{où}$$

$$L_1 > 0 \quad L_2 > 0 \quad M \geq 0$$



★ démonstration

◇ Considérons deux bobines en interaction magnétique et représentons-les par leurs modèles électrocinétiques équivalents.



◇ Mettons de côté l'aspect résistif des bobines.

◇ Par linéarité du champ magnétique, et donc du flux, nous pouvons dire que le flux traversant la bobine ① est dû au champ magnétique propre et au champ magnétique engendré par l'autre bobine. Cela donne

$$\Phi_1 = \Phi_p + \Phi_{2 \rightarrow 1} \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_1 = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$$

◇ Et la loi de FARADAY nous permet de dire que la f.é.m. qui apparaît aux bornes de la bobine dans le sens du courant, *i.e.* en convention générateur, est

$$e_{\text{ind1}}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind1}}(t) = -L_1 \frac{di_1}{dt}(t) - M \frac{di_2}{dt}(t)$$

◇ Et en repassant en convention récepteur, nous obtenons bien le résultat énoncé au début.

I-6·iii – aspect énergétique

★ loi

Dans le cas de deux bobines en influence mutuelle, l'énergie contenue dans le champ magnétique s'écrit, avec des notations naturelles

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t)$$

★ interprétation

◇ Comme nous pouvons le constater, l'énergie contenue dans le champ magnétique *semble* ne plus être extensive car, naïvement, nous aurions pu croire que celle-ci s'écrirait

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t)$$

◇ En fait, l'énergie est *bien* extensive.

◇ Ce qu'il faut comprendre, c'est que l'énergie $\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t)$ est l'énergie contenue dans le champ magnétique créé par la bobine ① toute seule et $\frac{1}{2} L_2 i_2^2(t)$ est l'énergie contenue dans le champ magnétique créé par la bobine ② toute seule.

◇ Mais lorsque les deux bobines sont ensemble, il n'est **pas possible** de dire : « ceci est le champ magnétique créé par la première et ceci est le champ magnétique créé par la deuxième. » Il n'existe qu'un champ magnétique, celui créé par les deux bobines en même temps !

◇ C'est ainsi que si l'énergie est bien extensive, il faut voir qu'en chaque point de l'espace, la densité volumique d'énergie magnétique s'écrit

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \rightsquigarrow \quad u_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2 \quad \rightsquigarrow \quad u_{\text{em}} = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_2^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2$$

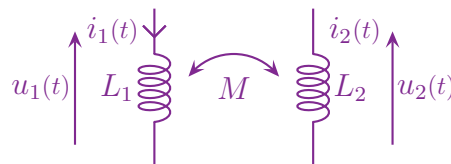
◇ C'est le troisième terme qui, une fois sommé sur tout l'espace donne la résultante $M i_1(t) i_2(t)$.

☞ *Remarque.* Le fait d'associer à chaque bobine un champ « personnel » est très fréquent, même dans la vulgarisation, avec la notion de « lignes de champ » qui sortent d'une bobine et qui semblent donc, visuellement, avoir été créées par celle-ci uniquement ce qui est, bien évidemment, faux.

★ démonstration

◇ Nous allons faire la démonstration *via* l'aspect électrocinétique des bobines.

◇ Considérons deux bobines idéales en interaction mutuelle.



◇ Les tensions à leurs bornes s'écrivent, en convention récepteur

$$u_1(t) = +L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) \quad \text{et} \quad u_2(t) = +L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t)$$

◇ Les puissances respectives qu'elles reçoivent s'écrivent donc

$$\mathcal{P}_{r1}(t) = u_1(t) \times i_1(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r2}(t) = u_2(t) \times i_2(t)$$

◇ La puissance totale reçue s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{tot}}(t) &= \mathcal{P}_{r1}(t) + \mathcal{P}_{r2}(t) \\ &= L_1 i_1(t) \times \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + M i_1(t) \times \frac{di_2}{dt}(t) + L_2 i_2(t) \times \frac{di_2}{dt}(t) + M i_2(t) \times \frac{di_1}{dt}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \right) \end{aligned}$$

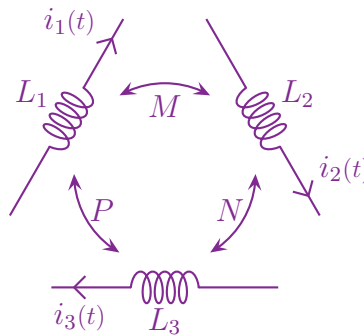
◇ Résultat que nous pouvons interpréter sous la forme

$$\mathcal{P}_{\text{tot}}(t) = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mg}}}{dt}(t)$$

◇ Ce qui est le résultat attendu.

★ plus que deux bobines

◇ Dans le cas (rarissime) où trois ou plus bobines sont en interaction, il faut compter tous les termes de couplage.



◇ Avec la situation ci-dessus, l'énergie magnétique s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + \frac{1}{2} L_3 i_3^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + N i_2(t) i_3(t) + P i_1(t) i_3(t)$$

◇ Remarquons qu'il n'y a pas de terme énergétique d'interaction « à trois » proportionnel à $i_1(t) \times i_2(t) \times i_3(t)$. Le lecteur pourra s'en convaincre aisément en développant le terme d'énergie volumique

$$\frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

I.6.iv – coefficient de couplage

★ résultat

Pour deux bobines d'inductance L_1 et L_2 ,
le coefficient de mutuelle inductance est tel que

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Deux bobines d'inductance L_1 et L_2 sont dites en *couplage parfait* lorsque

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

Le *coefficient de couplage* k de deux bobines est défini par

$$k \triangleq \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{avec} \quad -1 \leq k \leq 1$$

★ interprétation

- ◇ Physiquement le couplage parfait correspond au cas où *toutes* les lignes de champ créées par une bobine traversent toutes les spires de l'autre bobine.
- ◇ En pratique ce cas idéal n'est jamais réalisé⁵ et c'est la raison pour laquelle le coefficient de mutuelle inductance est majoré.

★ démonstration

- ◇ Rappelons que l'énergie magnétique possède deux expressions différentes, suivant la vision (électrocinétique ou électromagnétique) adoptée

$$\mathcal{E}_{\text{mg}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\text{mg}} = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2\mu_0} B^2(P) d\tau_P$$

- ◇ La deuxième expression montre de manière immédiate que l'énergie \mathcal{E}_{mg} est **toujours** positive.
- ◇ Cela implique

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad i_1^2 \left(\frac{1}{2} L_1 + \frac{1}{2} L_2 \frac{i_2^2}{i_1^2} + M \frac{i_2}{i_1} \right) \geq 0$$

- ◇ En divisant par $i_1^2 \geq 0$, nous voyons apparaître un trinôme en $X \triangleq \frac{i_2}{i_1}$ qui est toujours positif

$$\frac{1}{2} L_2 X^2 + M X + \frac{1}{2} L_1 \geq 0$$

- ◇ Nous savons alors que ce trinôme ne peut être tout le temps positif que si son discriminant est *négligeable*. Cela implique

$$M^2 - 4 \times \frac{1}{2} L_2 \times \frac{1}{2} L_1 \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad M^2 \leq L_1 L_2$$

I.6.v – circuits couplés par mutuelle

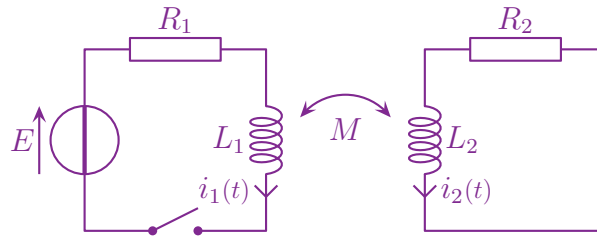
- ◇ Il s'agit là d'un exemple détaillé de l'utilisation en condition réelle de bobines couplées.

5. Mais il est possible de s'en rapprocher avec des matériaux qui « canalisent » les lignes de champ. Ce genre de pratiques est utilisée dans les transformateurs.

★ mise en équation

🕒 présentation de la situation

◇ Considérons les deux circuits couplés ci-dessous.



◇ L'interrupteur K est fermé à un instant considéré comme initial. Quelles sont les expressions des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$?

🕒 traduction du problème

◇ L'analyse est excessivement rapide ici :

→ nous avons deux circuits à une maille, deux inconnues en intensité, nous allons choisir une approche maillère ;

→ les grandeurs pertinentes sont R_1 , R_2 , L_1 , L_2 , M et E .

◇ Les deux lois des mailles s'écrivent sans difficulté

$$E - R_1 i_1(t) - L_1 \frac{di_1}{dt}(t) - M \frac{di_2}{dt}(t) = 0 \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R_2 i_2(t) = 0$$

◇ Ce qui donne

$$L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + R_1 i_1(t) = E \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R_2 i_2(t) = 0$$

◇ Il s'agit là d'équation différentielle couplées, pas forcément simples à résoudre.

★ résolution d'un cas particulier en régime transitoire

🕒 changement de problème

◇ Pour faciliter les calculs, nous allons considérer la simplification suivante

$$R_1 = R_2 \stackrel{\text{not}}{=} R \quad \text{et} \quad L_1 = L_2 \stackrel{\text{not}}{=} L$$

◇ Les équations se réécrivent alors

$$L \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + R i_1(t) = E \quad \text{et} \quad L \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R i_2(t) = 0$$

◇ En posant $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$ nous pouvons découpler facilement les équations précédentes en les additionnant et en les soustrayant.

◇ Commençons par les additionner

$$L \frac{dS}{dt}(t) + M \frac{dS}{dt}(t) + R S(t) = E \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dS}{dt}(t) + \frac{1}{\tau_S} S(t) = \frac{E}{L + M} \quad \text{avec} \quad \tau_S = \frac{L + M}{R}$$

◇ La soustraction donne, quant à elle,

$$L \frac{dD}{dt}(t) - M \frac{dD}{dt}(t) + R D(t) = E \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dD}{dt}(t) + \frac{1}{\tau_D} D(t) = \frac{E}{L-M} \quad \text{avec} \quad \tau_D = \frac{L-M}{R}$$

◇ Compte-tenu des conditions initiales $i_1(0) = 0$ et $i_2(0) = 0$, nous trouvons très vite

$$S(0) = 0 \quad \text{et} \quad D(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad S(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_S}\right) \quad \text{et} \quad D(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_D}\right)$$

🔗 retour au problème initial

◇ À partir des expressions de $S(t)$ et $D(t)$, nous trouvons

$$i_1(t) = \frac{S(t) + D(t)}{2} \quad \text{et} \quad i_2(t) = \frac{S(t) - D(t)}{2}$$

◇ Cela conduit à

$$i_1(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} \left(e^{-t/\tau_S} + e^{-t/\tau_D}\right) \quad \text{et} \quad i_2(t) = \frac{E}{2R} \left(e^{-t/\tau_D} - e^{-t/\tau_S}\right)$$

🔗 interprétation

◇ Nous voyons apparaître deux temps caractéristiques : τ_S et τ_D .

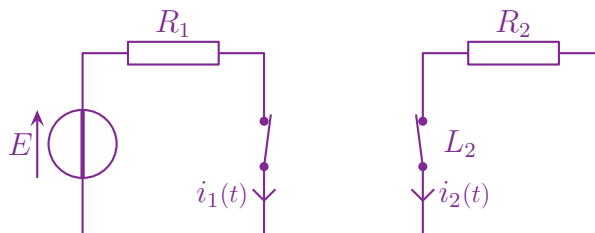
◇ Ces deux durées caractéristiques sont forcément positives car $|M| \leq L$, ce qui prouve que les deux courants ont bien une valeur limite finie (ouf).

◇ Tout se passe donc exactement comme dans le cas d'un circuit du 2^e ordre en régime aperiodique.

◇ Nous voyons aussi que

$$i_1(\infty) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad i_2(\infty) = 0$$

◇ Vérifions la cohérence du résultat précédent en représentant les équivalents des circuits en régime permanent stationnaire. Pour cela, il suffit de remplacer les bobines par des fils (qui ne peuvent, alors, avoir d'influence mutuelle). Cela donne



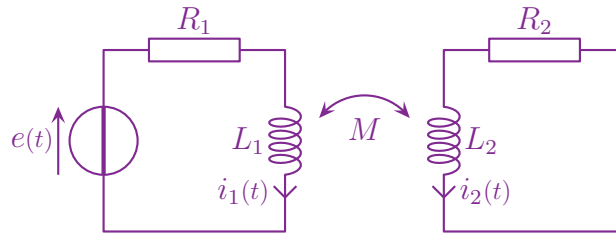
◇ Nous voyons donc immédiatement que nous avons bien

$$i_1(\infty) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad i_2(\infty) = 0$$

★ résolution en régime sinusoïdal forcé

🔗 retour au problème initial

◇ Reprenons la situation initiale mais avec un GBF et cherchons uniquement $i_1(t)$ en régime permanent.



- ◇ Comme nous avons affaire ici avec un régime sinusoïdal forcé et que les lois sont linéaires, nous allons naturellement utiliser la notation complexe.
- ◇ Les lois des mailles s'écrivent toujours

$$L_1 \frac{di_1}{dt}(t) + M \frac{di_2}{dt}(t) + R_1 i_1(t) = E \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt}(t) + M \frac{di_1}{dt}(t) + R_2 i_2(t) = 0$$

- ◇ Traduisons ces lois en version complexe. Pour cela remplaçons chaque dérivée temporelle par $j\omega$. Cela donne

$$j L_1 \omega \underline{I}_1 + j M \omega \underline{I}_2 + R_1 \underline{I}_1 = E \quad \text{et} \quad j L_2 \omega \underline{I}_2 + j M \omega \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2 = 0$$

- ◇ Nous pouvons réécrire ces deux lois sous la forme du système suivant

$$\begin{cases} (R_1 + j L_1 \omega) \underline{I}_1 + j M \omega \underline{I}_2 = E \\ j M \omega \underline{I}_1 + (R_2 + j L_2 \omega) \underline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

- ◇ La solution tombe alors très vite

$$\underline{I}_1 = \frac{E (R_2 + j L_2 \omega)}{(R_1 + j L_1 \omega) \times (R_2 + j L_2 \omega) - (j M \omega)^2}$$

- ◇ Cela peut se réécrire

$$\underline{I}_1 = \frac{E}{R_1 + j L_1 \omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + j L_2 \omega}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{I}_1 = \frac{E}{R_1 + j L_1 \omega + \underline{Z}_{\text{mut}}} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_{\text{mut}} = \frac{M^2 \omega^2}{R_2 + j L_2 \omega}$$

- ◇ Autrement dit, la présence d'un circuit couplé au premier revient à adjoindre une impédance supplémentaire au premier.
- ◇ Ce principe est utilisé dans la détection de métaux. En effet, un morceau de métal joue le rôle d'un circuit électrique conducteur influencé (donc couplé) avec un autre circuit. En rapprochant un circuit de référence (le détecteur) en régime sinusoïdal forcé d'un morceau de métal, le coefficient de couplage M change. Une mesure de la valeur efficace de l'intensité traversant le circuit de référence permet de contrôler cette variation et donc de déclencher une alarme en cas de présence de métal.

II – Circuit mobile dans un champ statique

L'induction qui existe dans un circuit mobile se déplaçant dans un champ magnétique constant (uniforme ou non) est appelée *induction de LORENTZ*.

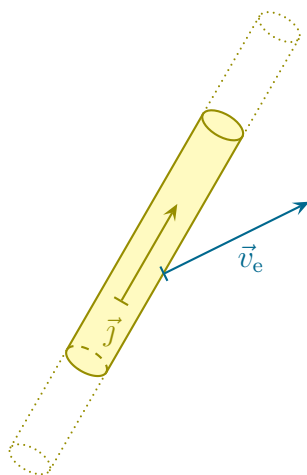
- ◇ Dans toute cette partie il ne faudra pas confondre « constant » (qui ne varie pas dans le temps) et « uniforme » (qui ne varie pas dans l'espace).

II.1 – Transformation galiléenne des champs

II.1.i – courant électrique dans deux référentiels différents

★ question

- ◇ Regardons une portion de circuit électrique.



- ◇ Cette portion :

- est parcourue par un courant \vec{j} ;
- est animée de la vitesse \vec{v}_e ;
- est plongée dans (\vec{E}, \vec{B}) .

- ◇ Question. Dans le référentiel \mathcal{R}' lié au conducteur (*i.e.* dans le référentiel où le conducteur est immobile), que deviennent les champs électrique et magnétique ?

★ réponse

🗨 énoncé

Dans un référentiel \mathcal{R}' en translation à la vitesse \vec{v}_e par rapport à \mathcal{R} , les champs électrique et magnétique s'écrivent

$$\vec{B}' = \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

🗨 démonstration

- ◇ Commençons par rappeler une loi fondamentale.

INVARIANCE GALILÉENNE DES FORCES

La force subie par un point matériel est la même quel que soit le référentiel galiléen choisi.

- ◇ Considérons une charge dans le conducteur.
- ◇ Les forces qu'elle subit dans les référentiel \mathcal{R} et \mathcal{R}' s'écrivent respectivement

$$\vec{f}_{|\mathcal{R}} = q \left(\vec{E} + \vec{v}_{|\mathcal{R}} \wedge \vec{B} \right) \quad \text{et} \quad \vec{f}_{|\mathcal{R}'} = q \left(\vec{E}' + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B}' \right)$$

- ◇ L'invariance galiléenne des forces implique

$$\vec{f}_{|\mathcal{R}} = \vec{f}_{|\mathcal{R}'} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} + \vec{v}_{|\mathcal{R}} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B}'$$

- ◇ Or la loi de composition des vitesses donne

$$\vec{v}_{|\mathcal{R}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{|\mathcal{R}'}, \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}_{|\mathcal{R}'} \wedge \vec{B}'$$

- ◇ Ce résultat doit être vrai quelle que soit la vitesse $\vec{v}_{|\mathcal{R}'}$. Cela implique donc le résultat attendu à savoir

$$\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \vec{E}' \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}'$$

★ et le courant ?

🗨 énoncé

Le courant est le même quel que soit le référentiel.

🗨 démonstration

- ◇ Rappelons que dans un conducteur il y a trois types de charges :
 - ➔ les électrons libres, qui bougent par rapport au conducteur ;
 - ➔ les électrons de valence, fixes par rapport au conducteur ;
 - ➔ les noyaux atomiques, fixes aussi par rapport au conducteur.
- ◇ La densité de courant en volume pour le référentiel \mathcal{R} s'écrit, par définition, en notant i chaque type de charge, n_i la densité particulaire associée et q_i la charge d'un porteur

$$\vec{j}_{|\mathcal{R}} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_{|\mathcal{R}}(i)$$

- ◇ Avec la loi de composition des vitesses, nous pouvons écrire cette densité de courant sous la forme

$$\vec{j}_{|\mathcal{R}} = \sum_i n_i q_i \left(\vec{v}_e + \vec{v}_{|\mathcal{R}'}(i) \right)$$

- ◇ En séparant la somme en deux, nous obtenons

$$\vec{j}_{|\mathcal{R}} = \sum_i (n_i q_i \vec{v}_e) + \sum_i (n_i q_i \vec{v}_{|\mathcal{R}'}(i))$$

- ◇ Nous pouvons remarquer que, pour le premier terme, \vec{v}_e est indépendant de la charge, nous pouvons donc le factoriser. De plus nous reconnaissons dans le 2^e terme, la densité de courant en volume dans le référentiel \mathcal{R}'

$$\vec{J}_{|\mathcal{R}} = \left(\sum_i (n_i q_i) \right) \times \vec{v}_e + \vec{J}_{|\mathcal{R}'}$$

- ◇ Or le fait même que le conducteur soit globalement neutre implique

$$\sum_i (n_i q_i) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{J}_{|\mathcal{R}} = \vec{0} + \vec{J}_{|\mathcal{R}'}$$

- ◇ Ce qui est bien le résultat recherché.

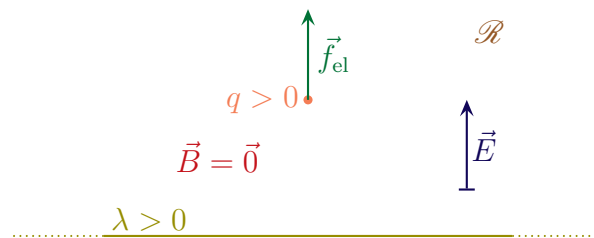
II.1.ii – oui mais non mais si



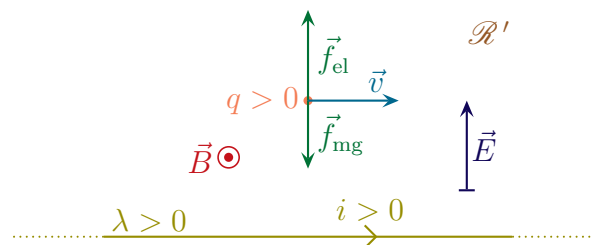
Ce qui suit est un terrain miné. Mieux vaut ne pas être le premier à en parler à l'oral.

★ un contre-exemple facile

- ◇ En fait les lois de transformations précédentes ne sont pas universelles et ont des contre-exemples simples, même en mécanique newtonienne.
- ◇ Considérons une charge $q > 0$ à proximité d'un fil infini chargé linéiquement $\lambda > 0$.



- ◇ Le fil crée un champ électrique \vec{E} radial et va « pousser » la charge.
- ◇ Considérons la même situation mais dans le référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme vers la gauche.
- ◇ Dans ces conditions, les charges semblent bouger vers la droite, ce qui implique que :
- q a une vitesse vers la droite ;
 - le fil est parcouru par un courant i orienté vers la droite.



- ◇ D'après les lois que nous connaissons, nous pouvons dire que le courant i crée un champ magnétique \vec{B}' comme orienté sur la figure et que le champ \vec{E}' est toujours radial **et** le même que \vec{E} (vu que $\vec{B} = \vec{0}$)
- ◇ Dans ces conditions, nous arrivons à une contradiction car la force de LORENTZ fait apparaître une composante magnétique non nulle $\vec{f}_m = q \vec{v}' \wedge \vec{B}'$ qui l'empêche d'être la même que dans le référentiel \mathcal{R} .

★ morale

- ◇ Les « vraies » lois de transformations font appel à la relativité restreinte mais sont identiques à celles que nous avons trouvées lorsque :
 - la charge globale est nulle ;
 - les vitesses sont faibles.
- ◇ Comme ces deux hypothèses seront toujours vérifiées, nous n'aurons pas de problème.
- ◇ Insistons une dernière fois : la démonstration que nous avons faite pour la transformation des champs, est *fausse* dans le cas générale. En revanche, sa faible longueur permet d'en faire un moyen mnémotechnique très utile pour retenir la loi.

II.2 – Induction dans un circuit en mouvement

II.2.i – champ électromoteur

★ loi

Le champ électromoteur \vec{E}_m induit lors d'une induction de LORENTZ s'écrit

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

La f.é.m. induite dans un circuit dans le cas d'une induction de LORENTZ s'écrit

$$e_{\text{ind}} = \oint_{P \in \text{circuit}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad e_{\text{ind}} = \oint_{P \in \text{circuit}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

★ précaution de lecture

- ◇ Il faut faire très attention à l'utilisation trop rapide des lois précédentes.
- ◇ Pour déterminer la f.é.m., il faut bien sommer $\left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$, *i.e.* il faut faire très attention au fait que le champ *et* la vitesse d'entraînement **peuvent dépendre** de P .

★ démonstration

- ◇ Considérons les référentiels \mathcal{R} où le conducteur est mobile et \mathcal{R}' lié au conducteur.
- ◇ Le but est de trouver le courant i dans \mathcal{R} . Sauf qu'avec un conducteur mobile, ce n'est pas évident. C'est pourquoi nous allons plutôt chercher i' , le courant dans \mathcal{R}' car le conducteur est immobile dans \mathcal{R}' et parce que nous savons déjà que $i = i'$.
- ◇ Intéressons-nous à la densité de courant \vec{j}' .



- ◇ La loi d'OHM nous dit que

$$\vec{j}' = \gamma \vec{E}'$$

- ◇ Avec la loi de composition des champs, cela s'écrit

$$\vec{j}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right)$$

◇ Or le champ électrique \vec{E} dans \mathcal{R} s'écrit (cf. lois de MAXWELL)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

◇ Sauf que dans le référentiel \mathcal{R} , le champ magnétique est statique, ce qui implique

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j}' = \gamma \left(-\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right)$$

◇ Nous pouvons écrire ce résultat sous la forme

$$\vec{j}' = \gamma \vec{E}' \quad \text{avec} \quad \vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

◇ Rappelons que, pour l'induction de NEUMANN nous avons

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V + \vec{E}_m \quad \text{avec} \quad \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

◇ Nous pouvons alors en déduire, par analogie, que, pour l'induction de LORENTZ

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

II.2.ii – et la loi de FARADAY ?

★ loi

🗨 énoncé

Un circuit continuellement défini plongé dans un champ magnétique statique possède une f.é.m. induite e_{ind} telle que

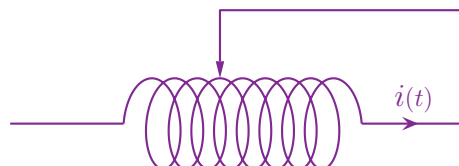
$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{où}$$

Φ_B est le flux de \vec{B} à travers le circuit orienté par i .

🗨 précaution

◇ Ici, pour que la loi fonctionne, il faut que le circuit soit défini à chaque instant.

◇ Imaginons la situation suivante : un contact électrique bouge le long d'une bobine, le tout plongé dans un champ magnétique.



◇ Nous avons bien un circuit électrique, mobile (le curseur), plongé dans un champ magnétique.

◇ Et pourtant il n'y a pas d'induction.

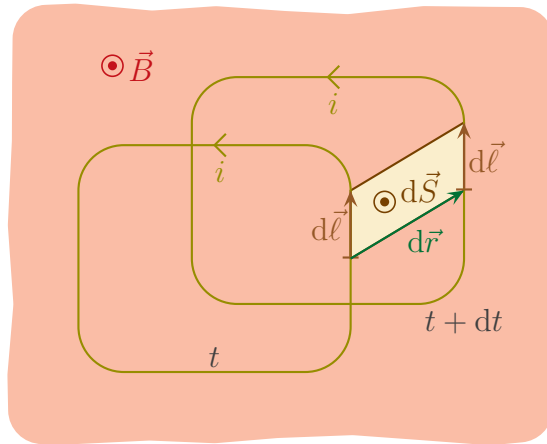
◇ Le fait est qu'ici le circuit n'est pas défini à *chaque instant*. En effet, entre le moment où le curseur « quitte » une spire pour aller rejoindre l'autre, le circuit est ouvert et le flux n'est plus définissable⁶.

6. Il en est de même si le curseur touche les deux spires en même temps.

- ◇ Cela explique pourquoi la loi de FARADAY n'est pas applicable ici et, donc, pourquoi il n'y a pas d'induction.
- ◇ Notons que ce genre de situation est rarissime dans les exercices (et ce d'autant plus que cela ne présenterait guère d'intérêt).

★ **idée de démonstration**

- ◇ Considérons un circuit mobile plongé dans un champ magnétique statique et dessinons-le à deux instants séparés de dt .



- ◇ Quelle est la f.é.m. élémentaire induite δe_{ind} dans la portion $d\vec{\ell}$ du circuit ?
- ◇ Par définition de la f.é.m. induite, nous avons

$$\delta e_{\text{ind}} = \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad \rightsquigarrow \quad \delta e_{\text{ind}} = (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

- ◇ Le produit mixte nous permet donc d'écrire

$$\delta e_{\text{ind}} = (d\vec{\ell} \wedge \vec{v}_e) \cdot \vec{B}$$

- ◇ Et en multipliant par dt , nous voyons apparaître le déplacement $d\vec{r}$ de la portion de circuit

$$\delta e_{\text{ind}} dt = (d\vec{\ell} \wedge \vec{v}_e dt) \cdot \vec{B} \quad \rightsquigarrow \quad \delta e_{\text{ind}} dt = (d\vec{\ell} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{B}$$

- ◇ Or le vecteur $d\vec{\ell} \wedge d\vec{r}$ est un vecteur orthogonal à $d\vec{\ell}$ et à $d\vec{r}$ et de norme égale à l'aire dS de la surface coloriée en jaune.

- ◇ Toutefois, avec la règle de la main droite et compte-tenu de l'orientation choisie pour $d\vec{S}$, nous avons

$$d\vec{\ell} \wedge d\vec{r} = -d\vec{S}$$

- ◇ Et ainsi

$$\delta e_{\text{ind}} dt = -d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

- ◇ Nous reconnaissons là le flux de \vec{B} à travers une portion de surface qui n'existait pas à l'instant t , *i.e.* nous pouvons dire qu'il s'agit de la *variation* du flux de \vec{B} à la travers la surface orientée dans le sens habituel, *i.e.* dans le sens donné par i .

- ◇ Techniquement, cela signifie que nous avons

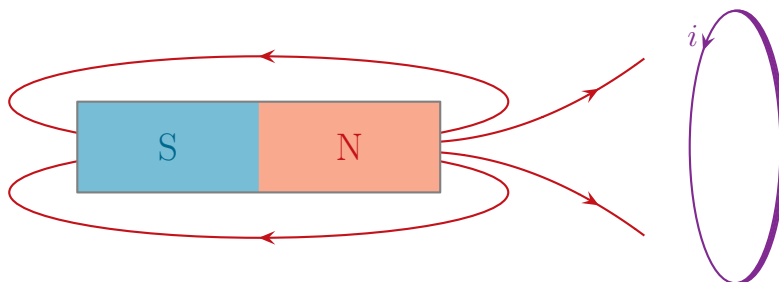
$$\delta e_{\text{ind}} dt = -\delta\Phi_B$$

- ◇ Par sommation, nous voyons que la f.é.m. induite est liée à la variation temporelle du flux de \vec{B} .

II.2.iii – aspect qualitatif

★ avec la loi de FARADAY

- ◇ Considérons un aimant permanent créant un champ magnétique non uniforme et approchons une spire circulaire de la face nord cet aimant⁷.



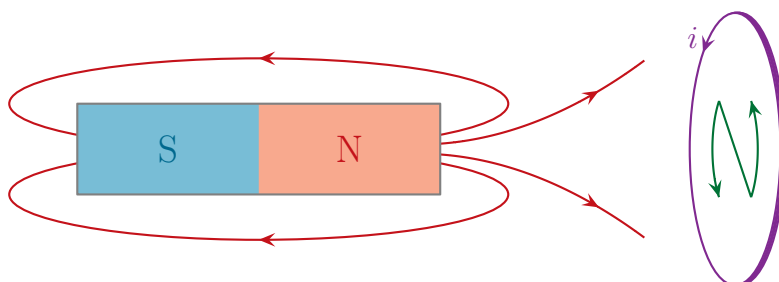
- ◇ Loin de l'aimant, le champ est plus faible, donc $|\Phi_B|$ est petit.
 ◇ Près de l'aimant, le champ est plus intense, donc $|\Phi_B|$ est grand.
 ◇ Or, étant donné l'orientation de la spire, nous pouvons dire que $\Phi_B < 0$.
 ◇ Dans ces conditions, lorsque la spire se rapproche, le flux passe de « un peu négatif » à « très négatif », *i.e.* le flux **diminue**.
 ◇ Nous avons donc $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$, ce qui implique $i > 0$.

★ avec la loi de LENZ

- ◇ Avec la loi de LENZ nous pouvons retrouver ce résultat rapidement (et avec bien moins de risque d'erreur).
 ◇ En effet, lorsque la spire se rapproche de la face nord de l'aimant, la loi de LENZ nous dit que les conséquences doivent s'opposer aux causes.
 ◇ Pour s'opposer aux causes, il faut donc que la spire s'oppose au rapprochement, *i.e.* que sa face à gauche se comporte comme une face « nord ».
 ◇ Or quand nous regardons une spire de face, la nature « nord » ou « sud » de la face vue est donnée simplement par



- ◇ Reprenons le schéma initial et dessinons une face « nord » sur la face de gauche de la spire (la face qui se rapproche de l'aimant).

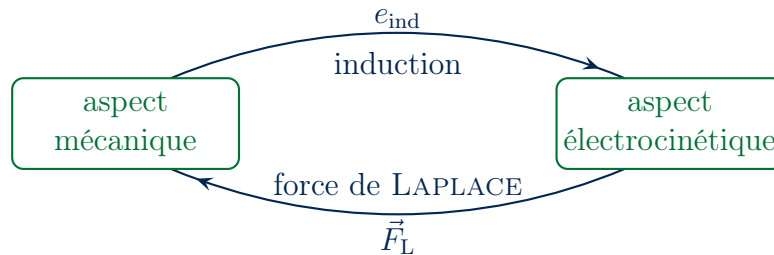


- ◇ Nous voyons que cela implique $i > 0$.

⁷ Rappelons que la partie « nord » d'un aimant est appelé ainsi parce qu'elle est attirée par le pôle nord géographique de la Terre. Cela implique que le pôle nord de la Terre est un pôle « sud » magnétique.

II.2.iv – analyser un problème d'induction de LORENTZ

- ◇ La base de l'analyse est le schéma suivant qui montre le couplage entre les aspects mécanique et électrique.



- ◇ Dans l'aspect mécanique :
- nous décrirons le mouvement par une (ou des) variable(s) de description $x(t)$, $\theta(t)$...
 - nous chercherons une loi *mécanique* (TCI, TMC...).
- ◇ Dans l'aspect électrocinétique :
- nous décrirons le circuit par un (rarement deux) courant(s) i ;
 - nous écrirons une loi *électrocinétique* (très souvent – toujours? – une loi des mailles).
- ◇ Pour le couplage mécanique \rightarrow électrocinétique, le but sera de déterminer e_{ind} . Pour cela trois méthodes :
- la loi de FARADAY;
 - la circulation de \vec{E}_m (méthode qui marche bien mieux que pour l'induction de NEUMANN);
 - la loi du couplage parfait que nous verrons dans la suite.
- ◇ Pour le couplage électrocinétique \rightarrow mécanique, le but sera de déterminer la force (ou le moment) de LAPLACE. Pour cela une seule méthode :
- commencer par découper la partie mobile en morceaux;
 - déterminer l'expression de la force élémentaire (ou du moment élémentaire) de LAPLACE;
 - sommer le tout.
- ◇ Comme nous pouvons le voir, l'induction de LORENTZ est un phénomène *complexe* puisqu'il fait intervenir de nombreux aspects et que ce n'est que lorsque tous ont été déterminés qu'il est possible d'avancer.
- ◇ En revanche, comme le lecteur pourra le constater, les situations sont la plupart assez *faciles* car les calculs techniques se font très bien et, notamment, bien plus facilement que pour l'induction de NEUMANN.

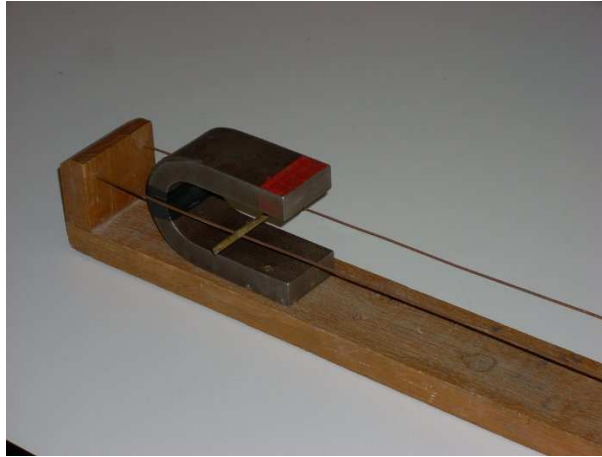
II.3 – Exemple : rails de LAPLACE

II.3.i – présentation

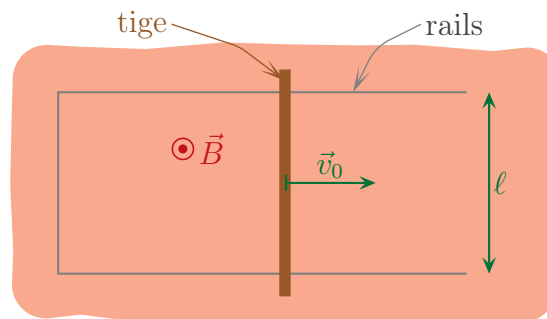
★ dispositif

- ◇ Considérons une barre métallique posée sur deux rails horizontaux et plongée dans un champ magnétique uniforme⁸.

8. Source : <http://lpo.lycee-carnot-bruay.com:8080/physique.carnot/images/magn1.JPG>.



◇ Schématiquement, vu de dessus, la situation peut se représenter de la manière suivante



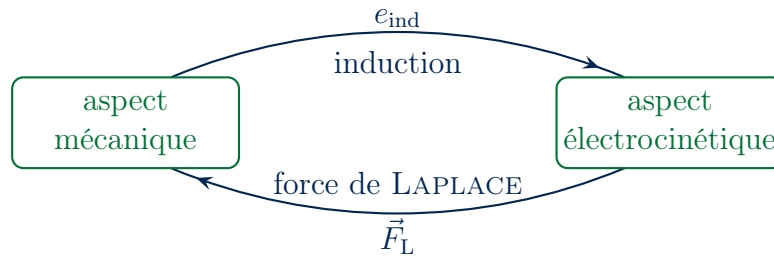
- ◇ À $t = 0$, la vitesse de la tige est \vec{v}_0 .
- ◇ Quelle est l'évolution de la tige ?

★ analyse

- ◇ Nous avons, ici, un conducteur en mouvement dans un champ magnétique statique.
- ◇ Nous pouvons résumer la situation de la manière suivante
 - un circuit est en mouvement dans un champ magnétique ;
 - il y a donc induction et apparition d'une f.é.m. induite ;
 - comme le circuit est fermé, cela implique la création d'un courant ;
 - la présence du courant implique l'existence d'une force de LAPLACE ;
 - la force de LAPLACE va influencer le mouvement de la tige.
- ◇ Comme la loi de LENZ implique que les effets de l'induction doivent s'opposer à la cause, nous pouvons dire que la force de LAPLACE va *freiner* la tige.
- ◇ Et comme il n'y a pas de source énergétique extérieure, nous pouvons en déduire que cette force de freinage va faire tendre vers 0 la vitesse.
- ◇ Les grandeurs pertinentes sont :
 - pour l'inertie : m (nous négligeons l'aspect « roulement » de la tige et, donc, J_Δ n'interviendra pas) ;
 - pour les actions : B_0 mais pas g (mouvement purement horizontal) ni f , les frottements (négligés) ;
 - pour l'aspect électrique : R la résistance totale du circuit (nous négligeons l'aspect auto-induction et, donc, L).

II.3.ii – freinage électromagnétique

◇ Rappelons que nous avons deux aspects à étudier, avec deux couplages.



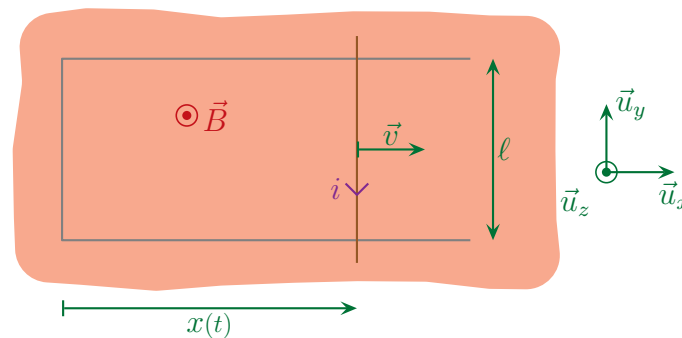
◇ Commençons par un bout et faisons le tour.

★ aspect mécanique

◇ Analyse :

- ici nous sommes face à une évolution à 1 DD, libre mais pas conservative ;
- nous ferons une approche en terme de force (comme systématiquement en induction) et écrirons, ici, le TCI.

◇ Reprenons la situation et posons un repérage pertinent.



◇ Liste de forces :

- forces à distance :
 - le poids, vertical, de projection nulle sur l'axe \vec{u}_x ;
 - la force de LAPLACE, notée \vec{F}_L ;
- forces de contact :
 - l'action du support, vertical car sans frottement⁹ ;
 - les forces de frottement exercés par l'air, négligés ici.

◇ Finalement le TCI projeté directement sur \vec{u}_x donne :

$$m \ddot{x}(t) = 0 + F_{L,x} + 0$$

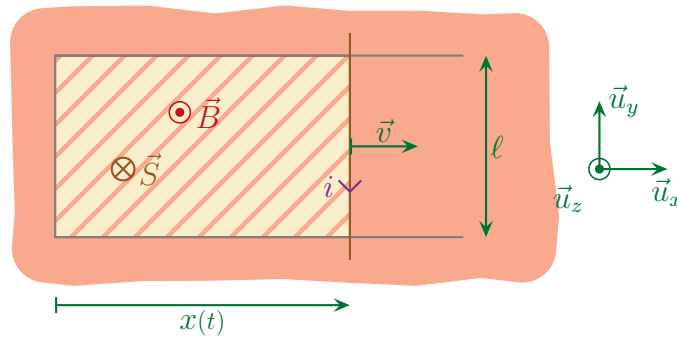
★ couplage par e_{ind}

◇ Pour une fois, faisons les deux méthodes pour retrouver e_{ind} : *via* la loi de FARADAY puis avec le champ électromoteur.

9. Rappelons que la prise en compte de la rotation de la tige implique des forces de frottement à projection horizontale. Toutefois, nous avons montré, dans le chapitre 2 de mécanique, qu'un mouvement de roulement sur un plan et sans glissement équivaut un mouvement sans rotation et sans frottements à condition de prendre la masse effective $m' = m + J/r^2$ avec r le rayon.

🔗 **version loi de FARADAY**

◇ Commençons par bien représenter la situation.



◇ La loi s'écrit

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}(t)$$

◇ Φ_B est calculé dans le sens de i (cf. sens de \vec{S}). Comme \vec{B} est uniforme partout, nous avons

$$\Phi_B = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = \vec{B}_0 \cdot \vec{S}$$

◇ Or géométriquement nous voyons que

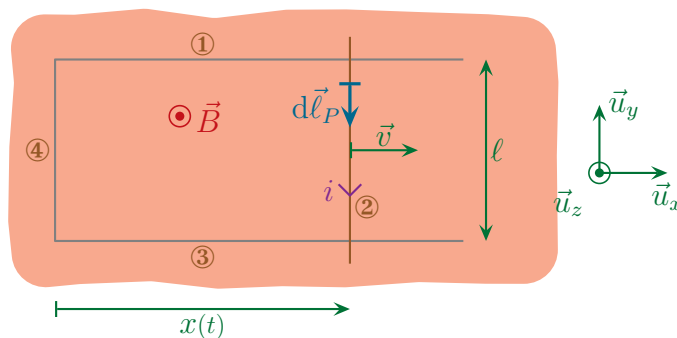
$$\vec{S} = -x(t) \ell \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad \Phi_B = -B_0 \ell x(t)$$

◇ Et ainsi

$$e_{\text{ind}}(t) = -\frac{d\Phi_B}{dt}(t) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = +B_0 \ell \frac{dx}{dt}(t)$$

🔗 **version champ électromoteur**

◇ Commençons là aussi par bien représenter la situation.



◇ La f.é.m. induite s'écrit

$$e_{\text{ind}}(t) = \oint_{P \in \text{circuit}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{l}_P \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = \oint_{P \in \text{circuit}} \left(\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{l}_P$$

◇ Ici nous pouvons tout naturellement couper la circulation en 4 morceaux.

$$e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{1}} (\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P)) \cdot d\vec{\ell}_P + \int_{P \in \textcircled{2}} (\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P)) \cdot d\vec{\ell}_P (\dots) \\ (\dots) + \int_{P \in \textcircled{3}} (\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P)) \cdot d\vec{\ell}_P + \int_{P \in \textcircled{4}} (\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P)) \cdot d\vec{\ell}_P$$

◇ Or, sur les portions ①, ③ et ④, nous avons

$$\vec{v}_e(P) = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}_m(P) = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \int_{P \in \textcircled{1,3,4}} (\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P)) \cdot d\vec{\ell}_P$$

◇ Il reste

$$e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{2}} (\vec{v}_e(P) \wedge \vec{B}(P)) \cdot d\vec{\ell}_P$$

◇ Sur la portion ②, tous les points P ont la même vitesse **et** le champ y est uniforme, ce qui donne

$$\vec{E}_m(P \in \textcircled{2}) = (\dot{x}(t) \vec{u}_x) \wedge (B_0 \vec{u}_z) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E}_m(P \in \textcircled{2}) = -\dot{x}(t) B_0 \vec{u}_y$$

◇ La circulation (à prendre dans le sens de i) s'écrit donc

$$e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{2}} (-\dot{x}(t) B_0 \vec{u}_y) \cdot (-d\ell_P \vec{u}_y) \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = \int_{P \in \textcircled{2}} +\dot{x}(t) B_0 d\ell_P$$

◇ Ce qui donne

$$e_{\text{ind}}(t) = +\dot{x}(t) B_0 \ell$$

◇ Il s'agit bien du même résultat (et heureusement).

🔗 différence entre les deux méthodes

◇ La loi de Faraday :

→ est pratique et rapide ;

→ nécessite de connaître \vec{B} sur une vaste zone (« dans » tout le circuit).

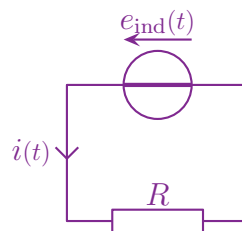
◇ La circulation du champ électromoteur

→ est un peu plus technique ;

→ ne nécessite de connaître \vec{B} qu'au niveau de la portion mobile.

★ aspect électrocinétique

◇ Faisons le schéma électrocinétique équivalent du dispositif en prenant soin de mettre $e_{\text{ind}}(t)$ dans le sens de i .

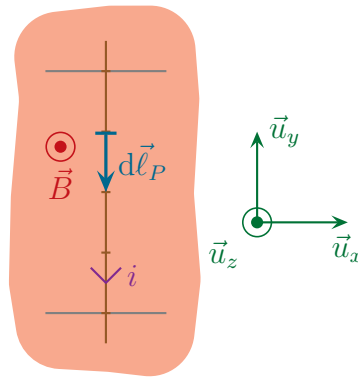


◇ Sans tergiversation, nous avons immédiatement

$$i(t) = \frac{e_{\text{ind}}}{R}$$

★ couplage par force de LAPLACE

◇ Pour trouver la résultante de la force de LAPLACE qui s'exerce sur la tige, découpons-la en morceaux.



◇ Nous avons alors, en faisant attention de ne sommer que sur la tige, et plus précisément sur la portion de la tige parcourue par un courant,

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} d\vec{F}_L \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_L = i d\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}$$

◇ Or, sur un point de la tige, comme la sommation se fait dans le sens de i

$$d\vec{\ell}_P = -dl_P \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{F}_L = -i dl_P B_0 \vec{u}_x$$

◇ Et ainsi

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} -i dl_P B_0 \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{F}_L = -i B_0 \ell \vec{u}_x$$

★ rassemblement

◇ Nous avons quatre lois, quatre « équations »

$$m \ddot{x}(t) = F_{L,x}; \quad e_{\text{ind}} = +B_0 \ell \dot{x}(t); \quad i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{R} \quad \text{et} \quad F_{L,x} = -B_0 i(t) \ell$$

◇ En remplaçant successivement, nous avons tout d'abord

$$i(t) = +\frac{B_0 \ell v(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad F_{L,x} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} \times v(t)$$

◇ Nous voyons apparaître là une force de frottement puisqu'opposée à la vitesse.

◇ Continuons à remplacer.

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R} \times v(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv}{dt}(t) + \frac{B_0^2 \ell^2}{m R} \times v(t) = 0$$

★ solution, interprétation

◇ Il s'agit là d'une équation différentielle d'ordre 1 dont la solution, compte-tenu de la condition initiale $v(0) = v_0$ est (quasi) immédiate

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2}$$

- ◇ Pour vérifier l'homogénéité, multiplions et divisons la durée caractéristique par i^2 de manière à faire apparaître des petites lois connues comme $R i^2$ (puissance) ou $B i \ell$ (force)

$$\tau \equiv \frac{m R i^2}{B^2 i^2 \ell^2} \rightsquigarrow \tau \equiv \frac{m \mathcal{P}}{F^2} \rightsquigarrow \tau \equiv \frac{m F v}{F \times F} \equiv \frac{m v}{F}$$

- ◇ Enfin, avec le PFD, nous savons que $F \equiv m a$ d'où

$$\tau \equiv \frac{m v}{m a} \rightsquigarrow \tau \equiv \frac{v}{a} \rightsquigarrow \tau \equiv t$$

- ◇ En ce qui concerne l'expression de τ , nous pouvons constater que, conformément à l'intuition, la durée caractéristique est d'autant plus grande que :

- l'inertie mécanique m est grande ;
- la résistance électrique R est grande (faiblesse du couplage).

II.3.iii – tout ça à cause de LORENTZ

- ◇ Il ne faut pas oublier qu'en « réalité » les électrons libres responsables du courant électriques sont mis en mouvement grâce à la force de LORENTZ.
- ◇ En effet, ceux-ci étant initialement immobiles par rapport à la barre, quand cette dernière se déplace vers la droite suivant $+\vec{u}_x$, les électrons, eux, vont subir la force

$$\vec{f}_L = q \vec{v} \wedge \vec{B} \rightsquigarrow \vec{f}_L = (-e) v \vec{u}_x \wedge B_0 \vec{u}_z \rightsquigarrow \vec{f}_L = +e B_0 \vec{u}_y$$

- ◇ Dans ces conditions, nous voyons bien que l'électron est accéléré suivant $+\vec{u}_y$ ce qui implique, parce qu'il a une charge négative, que le courant engendrée circule suivant $-\vec{u}_y$.
- ◇ Nous trouvons donc un courant négatif, ce qui est cohérent avec la relation

$$i(t) = -\frac{B_0 \ell v(t)}{R}$$

II.3.iv – bilan énergétique du freinage

★ aspect purement mécanique

- ◇ Le théorème de l'énergie mécanique nous donne

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W(\vec{R}_N) + W(\vec{F}_L)$$

- ◇ Or la variation d'énergie potentielle de pesanteur est nulle et la réaction normale du support ne travaille pas car nous avons supposé que le contact se faisait sans frottement. Il reste ainsi, entre l'instant initial et $t = +\infty$

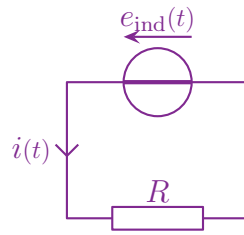
$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + W(\vec{F}_L) \rightsquigarrow W(\vec{F}_L) = -\frac{1}{2} m v_0^2$$

- ◇ Nous pouvons constater que le travail de la force de LAPLACE, dont nous avons déjà remarqué le caractère résistant, est bien négatif.

★ aspect purement électrique

- ◇ D'après le schéma électrocinétique ci-dessous équivalent au dispositif, la conservation de l'énergie s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{fournie par le générateur}} = \mathcal{E}_{\text{reçue par le résistor}}$$



◇ Déterminons l'expression de l'énergie fournie par le générateur. Par définition, nous avons

$$\mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \int_0^{\infty} u_{\text{géné}}(t) \times i(t) dt$$

◇ Avec ce que nous avons trouvé précédemment nous avons

$$u_{\text{géné}}(t) = e_{\text{ind}}(t) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \int_0^{\infty} \frac{e_{\text{ind}}^2(t)}{R} dt$$

◇ Et en remplaçant par l'expression de la f.é.m. induite $e_{\text{ind}}(t) = B_0 \ell \dot{x}(t)$, cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,\text{géné}} &= \int_0^{\infty} \frac{B_0^2 \ell^2}{R} v^2(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{B_0^2 \ell^2}{R} v_0^2 e^{-2t/\tau} dt \\ &= \frac{B_0^2 \ell^2 v_0^2}{R} \times \left[\frac{e^{-2t/\tau}}{-2/\tau} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{B_0^2 \ell^2 v_0^2}{R} \times \left(0 + \frac{\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

◇ En remplaçant par l'expression de τ , nous avons

$$\tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \frac{B_0^2 \ell^2 v_0^2}{R} \times \frac{m R}{2 B_0^2 \ell^2} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_{f,\text{géné}} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

◇ Et là nous constatons qu'il s'agit *exactement* de l'énergie qu'a fait perdre la force de LAPLACE...

★ **coïncidence ?**

🔗 **loi de couplage parfait**

Dans le cadre d'une induction de LORENTZ, la puissance (resp. l'énergie) fournie par le générateur induit au circuit électrique est l'opposé de la puissance (resp. l'énergie) fournie par les forces de LAPLACE au conducteur qui bouge.

$$\mathcal{P}_{f,\text{ind}} + \mathcal{P}_{f,\text{Laplace}} = 0$$

🕒 interprétation

◇ C'est une loi qui a de très grande répercussions pratiques. En effet elle implique

$$|\mathcal{P}_{f,\text{ind}}| = 1 \times |\mathcal{P}_{f,\text{Laplace}}|$$

◇ Cela signifie que *toute* l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique.

Le couplage électro-mécanique en induction de LORENTZ est parfait.

◇ Il s'agit là d'une situation non triviale car, rappelons-le, en thermodynamique, le couplage n'est **pas** parfait puisque le rendement de n'importe quelle machine est limitée :

→ $\eta_{\text{max}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ pour les moteurs ;

→ $e_{\text{max}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$ pour les pompes à chaleur.

◇ Le couplage étant parfait, en pratique, il est utilisé dans deux grandes situations :

→ la transformation mécanique → électrique a lieu dans toutes les centrales électriques (à gaz, charbon, nucléaire, éolienne, hydraulique...) ainsi que dans les dynamos ;

→ la transformation électrique → mécanique a lieu dans tous les moteurs électriques.

🕒 démonstration

◇ Considérons un volume $d\tau$. La puissance fournie par la force de LAPLACE ce volume s'écrit

$$\mathcal{P}_{f,L} = d\vec{F}_L \cdot \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{f,L} = (\vec{j}d\tau \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

◇ À l'aide du produit mixte, nous pouvons réécrire ce resultat sous la forme

$$\mathcal{P}_{f,L} = (\vec{B} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{j}d\tau$$

◇ Or, dans ce même volume, la puissance fournie par le champ électromoteur au circuit électrique s'écrit, parce que l'induction est une induction de LORENTZ

$$\mathcal{P}_{f,\text{ind}} = \vec{E}_m \cdot \vec{j}d\tau \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}_{f,\text{ind}} = (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{j}d\tau$$

◇ Et nous pouvons constater que nous avons bien, pour chaque volume élémentaire

$$\mathcal{P}_{f,L} = -\mathcal{P}_{f,\text{ind}}$$

🕒 aspect technique

Dans le cadre de l'induction de LORENTZ, pour un circuit d'une seule maille en translation, le couplage parfait se traduit par

$$e_{\text{ind}} \times i + F_L \times v = 0$$

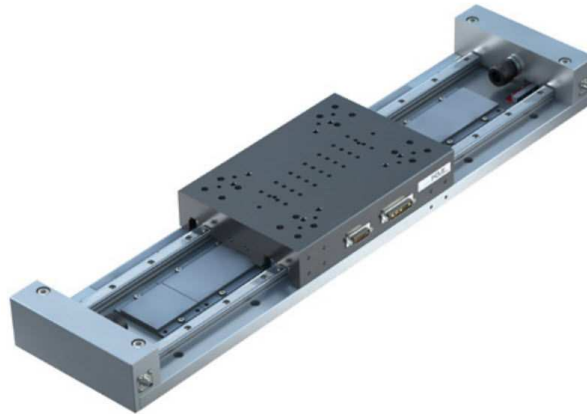
Dans le cadre de l'induction de LORENTZ, pour un circuit d'une seule maille en rotation, le couplage parfait se traduit par

$$e_{\text{ind}} \times i + \mathcal{M}(\vec{F}_L) \times \Omega = 0$$

- ◇ La loi de couplage est très pratique pour déterminer l'expression de e_{ind} dans le cas où le calcul de Φ_B est délicat.

II.3.v – moteur linéaire

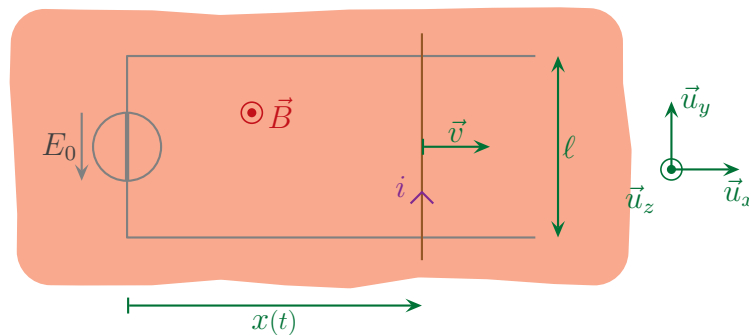
- ◇ Le moteur qui suit est dit « linéaire » car il génère directement un mouvement de translation alors même que la majorité des moteurs créent des mouvement de rotation (qui sont, après, convertis en translation).
- ◇ Voici une photo de moteur linéaire¹⁰.



★ dispositif, analyse

🕒 présentation

- ◇ Considérons une modélisation simple d'un moteur linéaire.



- ◇ Le dispositif ci-dessus ressemble beaucoup aux rails de LAPLACE vus au dessus. Il y a une tige mobile sans frottement sur deux rails, le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme. La grande différence est que, cette fois, il y a un générateur dans le circuit.
- ◇ À $t = 0$, l'interrupteur est fermé, la vitesse de la tige est nulle. Que se passe-t-il ensuite ?

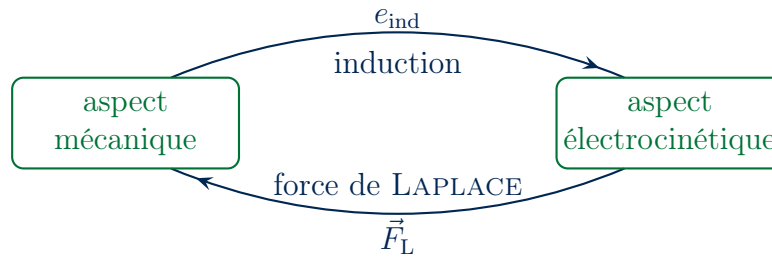
🕒 analyse

- ◇ Une fois l'interrupteur fermé :
- du courant va circuler dans la tige ;
 - le courant va engendrer une force de LAPLACE ;
 - la tige va se mettre en mouvement ;

10. Source : http://img.directindustry.fr/images_di/photo-g/unite-lineaire-motorisee-a-moteur-lineaire-63228-2847211.jpg

→ la tige en mouvement dans un champ magnétique va créer une f.é.m. induite qui va modifier le courant.

◇ Nous sommes face à une situation d'induction de LORENTZ classique qui peut se représenter par



◇ Les grandeurs pertinentes sont :

- pour l'inertie mécanique, m (roulement négligé) ;
- pour la géométrie, ℓ ;
- pour l'aspect électrique, R (auto-induction négligée) ;
- pour la contrainte extérieure, B_0, E_0 .

◇ Au niveau de l'analyse technique :

- pour le repérage, nous allons le choisir centré sur la position initiale de la tige ;
- pour e_{ind} , nous choisirons la méthode du couplage parfait (parce qu'elle est rapide et pour essayer).

★ mise en équation

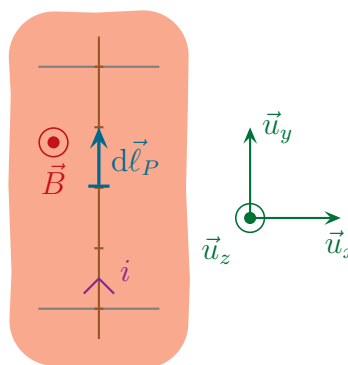
🕒 aspect mécanique

◇ Ici la tige est en translation et cela donne, exactement comme pour le dispositif des rails de LAPLACE

$$m \ddot{x}(t) = F_{L,x}$$

🕒 couplage par force de LAPLACE

◇ Commençons par découpons la tige en morceaux.



◇ Nous avons alors, comme toujours

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} d\vec{F}_L \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_L = i d\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}$$

◇ En faisant attention au sens de sommation

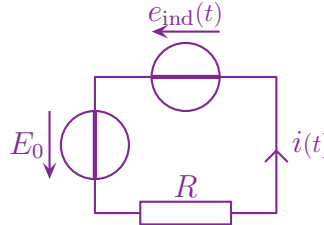
$$d\vec{\ell}_P = +d\ell_P \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_0 \vec{u}_z \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{F}_L = +i d\ell_P B_0 \vec{u}_x$$

◇ Et ainsi

$$\vec{F}_L = \int_{P \in \text{tige}} +i \, d\ell_P B_0 \vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{F}_L = +i B_0 \ell \vec{u}_x$$

🕒 aspect électrique

◇ Ici, plus qu'avant, il faut faire attention au sens de e_{ind} car un autre générateur est dans le circuit. De toute façon **le générateur induit est dans le sens du courant**. Cela donne, ici,



◇ Et nous avons aussitôt

$$i = \frac{E_0 + e_{\text{ind}}}{R}$$

🕒 couplage par e_{ind}

◇ La loi du couplage parfait s'écrit pour ce circuit à une maille en translation

$$e_{\text{ind}} \times i + F_{L,x} \times v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}}(t) = -B_0 \ell v(t)$$

🕒 rassemblement

◇ Nous avons quatre équations

$$m \ddot{x}(t) = F_{L,x}; \quad e_{\text{ind}} = -B_0 \ell \dot{x}(t); \quad i(t) = \frac{e_{\text{ind}}(t) + E_0}{R} \quad \text{et} \quad F_{L,x} = +B_0 i(t) \ell$$

◇ En remplaçant successivement, nous avons

$$i(t) = \frac{E_0 - B_0 \ell v(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad F_{L,x} = \frac{E_0 B_0 \ell - B_0^2 \ell^2 v(t)}{R}$$

◇ Et en injectant dans le PFD

$$m \frac{dv}{dt}(t) = \frac{E_0 B_0 \ell - B_0^2 \ell^2 v(t)}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv}{dt}(t) + \frac{B_0^2 \ell^2}{m R} \times v(t) = \frac{E_0 B_0 \ell}{m R}$$

★ solution, interprétation

🕒 solution

◇ L'équation différentielle se réécrit

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times v(t) = \frac{E_0 B_0 \ell}{m R} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2}$$

◇ La solution s'écrit, compte-tenu de la condition initiale $v(0) = 0$

$$v(t) = \frac{E_0}{B_0 \ell} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m R}{B_0^2 \ell^2}$$

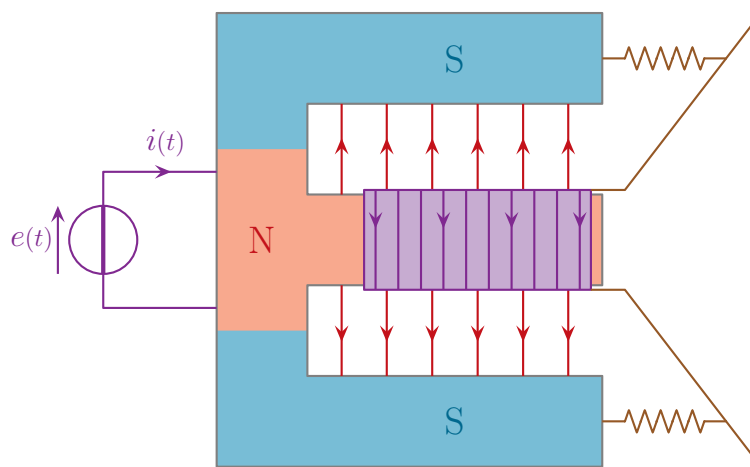
🕒 lecture du résultat

- ◇ Nous avons déjà vérifié l'homogénéité de l'expression de la constante de temps.
- ◇ Nous voyons que la vitesse tend vers la valeur limite $v_{\text{lim}} = \frac{E_0}{B_0 \ell}$.
- ◇ Cette vitesse correspond à celle qui crée une f.é.m. induite qui s'oppose *exactement* à E_0 . De la sorte, la f.é.m. totale dans le circuit est nulle et, donc, le courant aussi.
- ◇ Dès lors qu'il n'y a plus de courant, il n'y a plus de force de LAPLACE et la tige va à vitesse constante.

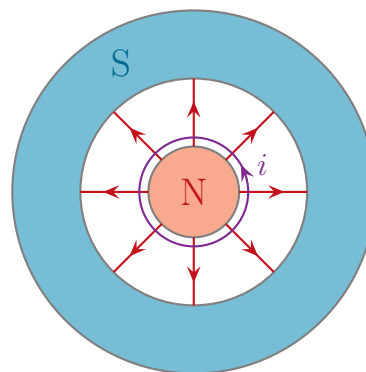
II.4 – Exemple : le haut parleur

II.4.i – présentation

- ◇ Un haut-parleur est un dispositif électro-mécanique qui transforme une tension en un son.
- ◇ Schématiquement le dispositif est équivalent à la représentation ci-dessous.



- ◇ Une bobine ①, reliée à un circuit externe, est mobile sans frottement le long d'un aimant ②. Cette bobine, lors de son mouvement, entraîne une membrane ③ dont la fixation (modélisée ici par les ressorts ④) la ramène à sa position de repos.
- ◇ L'aimant est un peu particulier car il est fabriqué de telle sorte que les lignes de champs soient radiales.



- ◇ Qualitativement :
 - ➔ la tension imposée par le circuit extérieur crée un courant qui traverse la bobine ;
 - ➔ la bobine parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique, subit une force de LAPLACE ;
 - ➔ la bobine, mue par la force de LAPLACE se déplace et entraîne avec elle la membrane ;
 - ➔ la membrane engendre des mouvements d'air qui se propagent, c'est le son.
- ◇ Il s'agit bien, ici, d'induction de LORENTZ puisque la bobine est un conducteur mobile dans un champ magnétique statique.

II.4.ii – lois de fonctionnement

★ aspect mécanique

◇ Considérons le système \mathcal{S} { bobine + membrane }.

◇ Ce système subit

→ forces à distance :

→ le poids de projection nulle sur l'axe \vec{u}_x ;

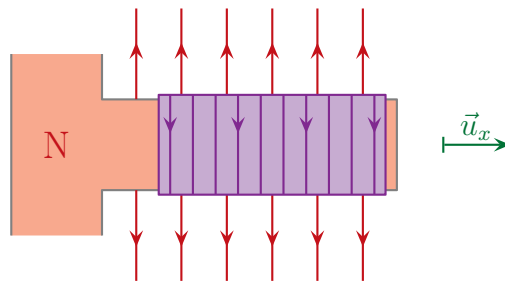
→ la force de LAPLACE ;

→ force de contact :

→ la force exercée par les ressorts $\vec{f}_r = -k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x$;

→ la force de contact au niveau de la bobine, de projection sur \vec{u}_x nulle puisque sans frottement ;

→ la force de frottement exercée par l'air $\vec{f}_a = -\lambda \vec{v}$, force que nous ne pouvons négliger puisqu'il s'agit là du phénomène qui permet de représenter l'énergie qui est transformée en énergie acoustique.



◇ La projection du TCI sur l'axe \vec{u}_x donne tout de suite

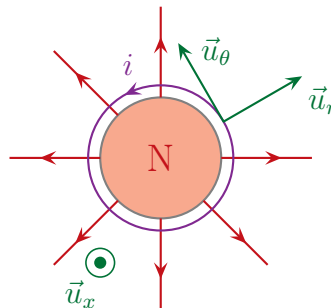
$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = F_{L,x} - k (\ell(t) - \ell_0) - \lambda \frac{dx}{dt}(t)$$

◇ Choisissons l'origine du repère telle que $x(t) = \ell(t) - \ell_0$. Cela donne

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = F_{L,x} - k x(t) - \lambda \frac{dx}{dt}(t)$$

★ couplage par force de LAPLACE

◇ Regardons d'un peu plus près la bobine.



◇ La force de LAPLACE s'écrit toujours, par découpage,

$$\vec{F}_L = \int d\vec{F}_L \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

◇ Ici, avec le repérage choisi, nous avons $d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_\theta$.

◇ De plus comme le champ magnétique est radial, nous avons $\vec{B} = B(r) \vec{u}_r$. Sauf que, comme la bobine est enroulée autour de l'aimant, le circuit qui la constitue est à $r = r_0 = C^{te}$. Autrement dit, chaque point de la bobine « voit » un champ magnétique de norme uniforme et c'est pourquoi nous noterons

$$\vec{B}_{(bobine)} = B_0 \vec{u}_r$$

◇ Cela donne donc

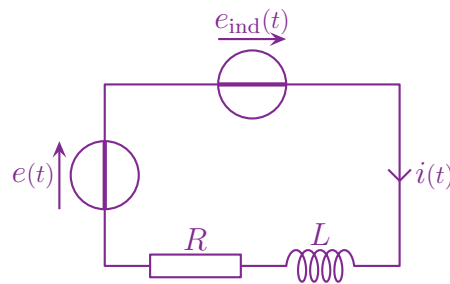
$$d\vec{F}_L = i d\ell \vec{u}_\theta \wedge (B_0 \vec{u}_r) \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{F}_L = -i B_0 d\ell \vec{u}_x$$

◇ Et en sommant sur la totalité de la longueur de la bobine

$$\vec{F}_L = -i B_0 \ell \vec{u}_x$$

★ aspect électrique

◇ Faisons le schéma équivalent du dispositif.



◇ Ici, comme nous parlons d'une *bobine*, nous ne pouvons faire abstraction de l'auto-induction. De même nous ne pouvons totalement négliger l'aspect résistif des fils.

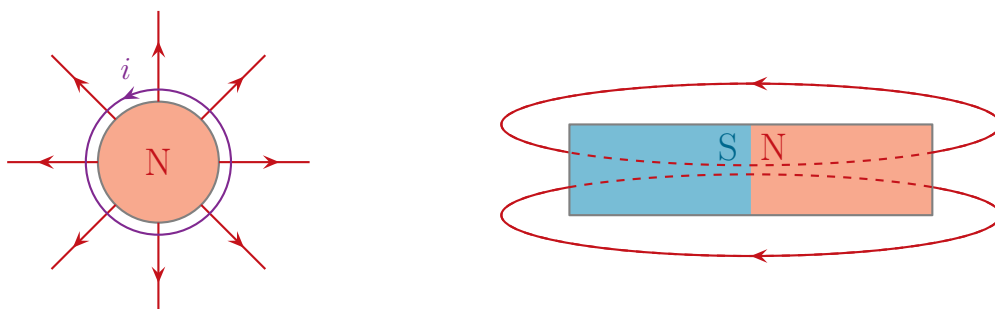
◇ La loi des mailles nous donne donc

$$e(t) + e_{\text{ind}}(t) - R i(t) - L \frac{di}{dt}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad e(t) = +R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) - e_{\text{ind}}(t)$$

★ couplage par e_{ind}

◇ Ici, s'il y a bien une méthode que nous ne pouvons pas utiliser, c'est la loi de FARADAY.

◇ En effet, si nous regardons la bobine « de face » nous voyons que nous aurons un problème pour calculer le flux qui la traverse étant donné que nous ne connaissons **pas** le champ magnétique à l'intérieur de l'aimant.



◇ Faisons les deux autres méthodes, pour voir.

🔗 version champ électromoteur

◇ Comme seule la bobine est mobile, nous pouvons limiter le calcul de la circulation du champ électromoteur sur elle. Cela donne

$$e_{\text{ind}} = \int_{P \in \text{bobine}} \vec{E}_m(P) \cdot d\vec{\ell}_P \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = \int_{P \in \text{bobine}} \left(\vec{v}(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P$$

◇ Or, pour chaque point de la bobine

$$\vec{v}(P) = \dot{x}(t) \vec{u}_x; \quad \vec{B}(P) = B_0 \vec{u}_r \quad \text{et} \quad d\vec{\ell}_P = d\ell_P \vec{u}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \left(\vec{v}(P) \wedge \vec{B}(P) \right) \cdot d\vec{\ell}_P = \dot{x}(t) B_0 d\ell_P$$

◇ Et en sommant sur toute la bobine

$$e_{\text{ind}} = \dot{x}(t) B_0 \ell$$

🔗 version couplage parfait

◇ Il s'agit d'un circuit à une maille et en translation donc nous avons

$$e_{\text{ind}} \times i + F_{L,x} \times v = 0 \quad \text{et} \quad F_{L,x} = -i B_0 \ell \quad \rightsquigarrow \quad e_{\text{ind}} = \dot{x}(t) B_0 \ell$$

◇ C'est quand même plus rapide...

◇ Le seul (vrai) inconvénient, c'est que si le calcul de $F_{L,x}$ est faux, e_{ind} le sera aussi.

II.4.iii – bilan d'énergie

★ bilan d'énergie mécanique

◇ Reprenons le TCI en remplaçant le terme de couplage

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -i B_0 \ell - k x(t) - \lambda v$$

◇ Pour faire apparaître les échanges énergétiques élémentaires, multiplions le TCI par $v dt = dx$. Cela donne

$$\underbrace{m dv v}_I = \underbrace{-i B_0 \ell v dt}_{II} \quad \underbrace{-k x dx}_{III} \quad \underbrace{-\lambda v^2 dt}_{IV}$$

◇ Les différents termes sont :

- I : la variation infinitésimale d'énergie cinétique dE_c ;
- II : le petit travail fourni par la force de LAPLACE $\delta \mathcal{E}_{f,L}$;
- III : l'énergie élémentaire emmagasinée sous forme d'énergie potentielle élastique $-dE_p$;
- IV : l'énergie élémentaire fournie par l'air au haut parleur, naturellement négative puisque le rôle d'un haut-parleur est de fournir de l'énergie à l'air $\delta \mathcal{E}_{f,\text{air}} = -\delta \mathcal{E}_{r,\text{air}}$.

◇ Et ainsi

$$dE_c = \delta \mathcal{E}_{f,L} - dE_p - \delta \mathcal{E}_{r,\text{air}}$$

★ bilan d'énergie électrique

◇ Reprenons la loi des mailles en remplaçant le terme de couplage

$$e(t) = +R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) - v(t) \ell B_0$$

◇ Pour faire apparaître les échanges énergétiques élémentaires, multiplions la par $i(t) dt$. Cela donne

$$\underbrace{e(t) i(t) dt}_A = \underbrace{+R i^2(t)}_B + \underbrace{+L i(t) di}_C - \underbrace{v(t) \ell B_0 i(t) dt}_D$$

◇ Les différents termes sont :

- A : l'énergie élémentaire fournie par le générateur $\delta \mathcal{E}_{f,\text{généré}}$;
- B : l'énergie élémentaire dissipée par effet JOULE $\delta \mathcal{E}_J$;
- C : l'énergie élémentaire emmagasinée sous forme d'énergie potentielle magnétique $-dE_g$;
- D : l'énergie élémentaire reçue de la part du générateur induite $\delta \mathcal{E}_{r,\text{ind}} = -\delta \mathcal{E}_{f,\text{ind}}$.

◇ Et ainsi

$$\delta \mathcal{E}_{f,\text{généré}} = \delta \mathcal{E}_J + dE_{\text{mg}} - \delta \mathcal{E}_{f,\text{ind}}$$

★ bilan total

◇ En s'appuyant sur le couplage parfait qui nous dit que $-\delta \mathcal{E}_{f,\text{ind}} = \delta \mathcal{E}_{f,L}$, le bilan complet s'écrit

$$\underbrace{\delta \mathcal{E}_{f,\text{généré}}}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\delta \mathcal{E}_J}_{\textcircled{2}} + \underbrace{dE_c + dE_{\text{mg}} + dE_p}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\delta \mathcal{E}_{r,\text{air}}}_{\textcircled{4}}$$

◇ Nous voyons quatre termes :

- ① : c'est le fournisseur d'énergie de l'ensemble, c'est normal de le retrouver ici ;
- ② : c'est de l'énergie complètement perdue, c'est à réduire autant que possible ;
- ③ : c'est de l'énergie récupérable, c'est bien, mais dont la rétention momentanée peut créer des distorsions dans la conversion du son ;
- ④ : rappelons que c'est l'objectif du haut-parleur que de convertir l'énergie électrique en énergie acoustique.

II.4.iv – vision purement électrique

★ idée

◇ Nous allons modéliser tous les phénomènes sous le seul aspect électrocinétique.

◇ Pour ce faire, nous allons utiliser la notation complexe car toutes les lois sont linéaires.

★ action

◇ Rappelons les deux lois (TCI et loi des mailles)

$$m \frac{dv}{dt}(t) = -i(t) B_0 \ell - k x(t) - \lambda v(t) \quad \text{et} \quad e(t) = +R i(t) + L \frac{di}{dt}(t) - v(t) \ell B_0$$

◇ Avec la notation complexe, cela donne

$$\begin{cases} m j \omega \underline{V} = -\underline{I} B_0 \ell - k \frac{\underline{V}}{j \omega} - \lambda \underline{V} \\ E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} - \underline{V} \ell B_0 \end{cases}$$

◇ Réorganisons

$$\begin{cases} \left(m j \omega + \frac{k}{j \omega} + \lambda \right) \underline{V} = -\underline{I} B_0 \ell \\ E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} - \ell B_0 \underline{V} \end{cases}$$

◇ Et exprimons la seule grandeur qui nous intéresse, \underline{I}

$$E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} + \ell B_0 \times \frac{\underline{I} B_0 \ell}{m j \omega + \frac{k}{j \omega} + \lambda} \quad \rightsquigarrow \quad E = +R \underline{I} + j L \omega \underline{I} + \frac{B_0^2 \ell^2}{m j \omega + \frac{k}{j \omega} + \lambda} \times \underline{I}$$

★ interprétation

◇ Nous pouvons écrire \underline{I} (ou plutôt la loi qui le donne) sous la forme

$$E = \left(R + j L \omega + \frac{1}{\frac{m j \omega}{B_0^2 \ell^2} + \frac{k}{j \omega B_0^2 \ell^2} + \frac{\lambda}{B_0^2 \ell^2}} \right) \underline{I}$$

◇ Ce que nous pouvons encore réinterpréter sous la forme

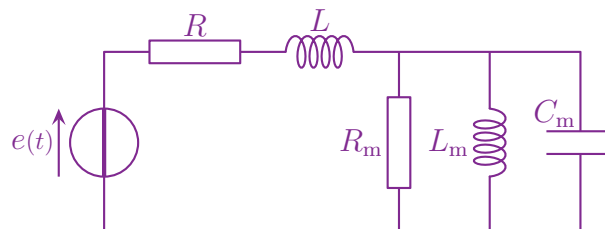
$$E = \left(R + j L \omega + \frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{j L_m \omega} + j C_m \omega} \right) \underline{I}$$

◇ Nous avons posé

$$C_m = \frac{m}{B_0^2 \ell^2} ; \quad \frac{1}{L_m} = \frac{k}{B_0^2 \ell^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_m} = \frac{\lambda}{B_0^2 \ell^2}$$

◇ L'indice « m » fait référence à l'aspect « motionnel » des composants.

◇ Cela correspond à l'intensité dans le circuit schématisé ci-dessous.



Induction

Au niveau du cours

★ Programme concerné

◇ Programme de 2^e année :

- I.B.2 Induction électromagnétique : cas d'un circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps
- I.B.3 Induction électromagnétique : cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

★ Les définitions

◇ Sont à savoir :

- induction, induction de NEUMANN, induction de LORENTZ ;
- champ électromoteur ;
- auto-induction, champ propre, flux propre, inductance ;
- solénoïde, bobine ;
- induction mutuelle, couplage, mutuelle inductance, coefficient de couplage ;
- transformation galiléenne des champs.

★ Les grandeurs

◇ Connaître les unités de :

- $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ en $V.m^{-1}$;
- $\mathcal{E} = \frac{1}{2} L i^2(t)$ en J ;
- M en H.

★ Les lois

◇ Sont à connaître :

- la loi de FARADAY et notamment toutes les **obligations** de choix de sens de courant, de signe, d'intégration... ;
- le lien entre f.é.m. et champ électromoteur ;
- le champ électromoteur de NEUMANN, de LORENTZ ;
- la relation courant – tension pour une bobine ;
- la relation courant – tension pour une paire de bobines couplées ;
- l'expression de l'énergie électrocinétique pour une paire de bobines couplées ;
- les valeurs limites pour le coefficient de couplage ;
- les expressions de \vec{E} , \vec{B} , \vec{j} lors d'un changement de référentiel ;
- la loi de couplage parfait.

★ la phénoménologie

◇ Connaître :

- les conditions d'applications de l'induction de NEUMANN, de LORENTZ ;
- la loi de LENZ et son utilisation ;
- la modélisation d'un bobinage par une juxtaposition de spires indépendantes ;

- le lien entre inductance et nombre de spires pour un solénoïde ;
- le lien entre sens de parcours du courant dans une spire et « face » d'un aimant ;
- le principe de fonctionnement d'un haut-parleur.

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

◇ Connaître parfaitement :

- le schéma d'analyse linéaire pour une induction de NEUMANN ;
- le schéma d'analyse circulaire pour une induction de LORENTZ.

★ Analyse technique

◇ Savoir choisir entre :

- l'approche mésoscopique et l'approche en terme de spire pour une induction de NEUMANN en volume ;
- les trois méthodes possible de calcul de la f.é.m. induite pour une induction de LORENTZ.

Au niveau des savoir-faire

★ exercices classiques

◇ Savoir refaire :

- le calcul du courant induit dans une spire circulaire immobile plongée dans $\vec{B}(t)$;
- l'interprétation de l'énergie électrocinétique contenue dans une bobine en terme d'énergie électromagnétique ;
- l'exemple de l'évolution d'une tige dans le dispositif des rails de LAPLACE avec et sans générateur ;
- un bilan énergétique sur le dispositif des rails de LAPLACE.