

Électromagnétisme

Chapitre 4

Ondes dans un milieu diélectrique

Ondes dans un milieu diélectrique

Dans le chapitre précédent nous avons étudié comment les ondes électromagnétiques se propageaient et quelles étaient leurs structures. Toutefois nous nous sommes cantonné au cas où les ondes se propageaient soit dans le vide soit dans des milieux suffisamment peu denses pour pouvoir négliger la rétroaction.

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser au cas de la propagation dans les milieux diélectriques qui sont, en première approximation, des milieux isolants. Le chapitre sera naturellement divisé en deux : la première partie fera la part belle à la description et la modélisation de tels milieux tandis que dans la deuxième partie nous verrons comment les ondes s'y propagent et en particulier nous démontrerons les lois de SNELL – DESCARTES.

Table des matières

Biographies succinctes	5
I Milieux diélectriques	6
I-1 Présentation	6
I-1 <i>·i</i> kesako ?	6
I-1 <i>·ii</i> modélisation	6
I-2 Comportement du matériau : vecteur polarisation	7
I-2 <i>·i</i> définition microscopique	7
I-2 <i>·ii</i> courant de polarisation	7
expression	8
démonstration	8
I-2 <i>·iii</i> charges de polarisation	9
expression, interprétation	9
démonstration	9
I-2 <i>·iv</i> petit résumé	10
I-3 Susceptibilité	10
I-3 <i>·i</i> conditions d'étude	10
I-3 <i>·ii</i> susceptibilité complexe	11
définition	11
expression	11
I-3 <i>·iii</i> représentation de la susceptibilité	12
parties réelle et imaginaire	12
graphiques	12
trois domaines	12
I-3 <i>·iv</i> généralisation	13
expression	13
cas de l'eau	13
I-3 <i>·v</i> milieu LHI	14
Linéaire	15
Homogène	15
Isotrope	15
II Ondes électromagnétiques	16
II-1 Au milieu d'un milieu	16
II-1 <i>·i</i> équations de MAXWELL dans un milieu polarisable	16
II-1 <i>·ii</i> structure d'une OPPM dans un milieu DLHI	16
et encore une coïncidence !	16
champs transverse	16
permittivité relative	17
II-1 <i>·iii</i> équation de propagation	17
équation d'onde	17
célérité	18
relation de dispersion	18
II-1 <i>·iv</i> champ électromagnétique	19
champ \vec{E}	19
champ \vec{B}	19
vecteur de POYNTING	19
II-1 <i>·v</i> indice complexe	20

	apparition	20
	mais... c'est une loi connue!	20
II·2	Passage d'un milieu à l'autre	22
II·2·i	situation envisagée	22
II·2·ii	lois physiques	22
	préliminaire	22
	relations de passage	23
II·2·iii	lois de SNELL – DESCARTES	23
	préliminaire	23
	lois de la réflexion	24
	lois de la réfraction	25
	morale	26
II·2·iv	coefficient de réflexion et transmission d'amplitude	26
	situation, solution <i>a priori</i>	26
	traduction des conditions aux limites	27
	coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{E}	27
	coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{B}	27
	interprétation	28
	remarque	28
II·2·v	coefficients de réflexion et transmission en puissance	29
	expression du vecteur de POYNTING	29
	les coefficients	29
	conservation de l'énergie	30
	exemple numérique	30
	Fiche de révision	31

Biographies succinctes

Willebrord SNELL

(1580 Leyde – 1626 Leyde)



Le père de Willebrord est professeur de mathématiques à l'université de Leyde et bien que ce dernier l'incite à suivre des études de droit, il préfère les mathématiques. À 20 ans il quitte les Pays-Bas pour faire un petit tour d'Europe (durant lequel il rencontrera Tycho BRAHÉ et KÉPLER) avant de revenir en 1608 et de devenir professeur à l'université de Leyde. Ce n'est qu'en marge de ses travaux mathématiques qu'il découvre la loi de la réfraction en 1621 mais ne la publie pas. Il meurt à 46 ans alors qu'il allait être nommé recteur.

René DESCARTES

(1596 La Haye, Touraine – 1650 Stockholm)



De père conseiller au parlement et de mère issue de la noblesse, René n'aura guère de soucis financier dans sa vie. Il fait ses études au lycée de La Flèche et reçoit une solide formation en mathématique, physique et philosophie. Après les rencontres avec BEEKMAN et le père MERSENNE il écrit *Le discours de la méthode* en 1637, ouvrage dans lequel il expose sa méthode qui lui permettra d'écrire LA DIOPTRIQUE et *La géométrie*. Il publie la loi de la réfraction que SNELL avait découverte sans la publier mais il existe un doute sur le fait que DESCARTES avait connaissance de ces travaux, doutes émis par HUYGENS en particulier.

Augustin CAUCHY

(1789 Paris – 1857 Sceaux, Hauts-de-Seine)



Arrivé deuxième au concours d'entrée à l'école Polytechnique, Augustin fut au cœur des bouleversements politiques de l'époque. Il reste malgré tout l'un des plus grands mathématiciens français avec plus de 800 publications et 7 ouvrages. La loi de CAUCHY connue en optique n'est qu'un tout petit résultat face à ce qu'il a fait en probabilité, géométrie, algèbre, analyse et analyse complexe.

I – Milieux diélectriques

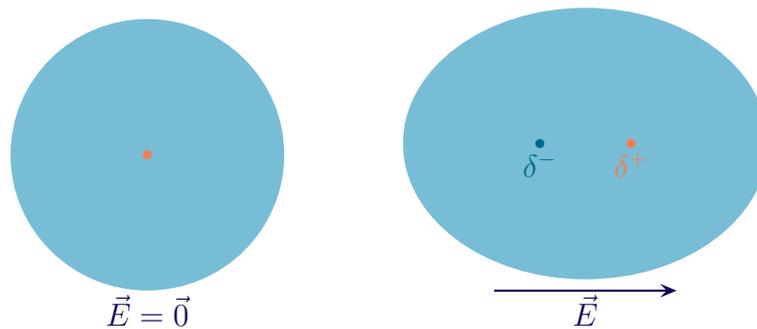
I.1 – Présentation

I.1.i – kesako ?

- ◇ Même si nous préciserons plus loin ce qu'est un diélectrique, pour l'instant nous pouvons considérer qu'un diélectrique est un *isolant* électrique.
- ◇ Les deux archétypes d'isolants sont l'air et le verre, mais il y a aussi tous les matériaux plastiques, les minéraux. . .
- ◇ L'eau est un cas particulier¹ mais, en ce qui concerne les ondes lumineuses, nous pouvons la considérer comme diélectrique.
- ◇ L'expérience montre que lorsqu'une onde arrive sur un matériaux diélectrique, pourvu qu'il soit transparent, nous observons des phénomènes particuliers comme la réfraction ou la dispersion (effet prisme).

I.1.ii – modélisation

- ◇ Pour expliquer de tels phénomène, nous allons modéliser la matière à l'échelle microscopique *mais* nous l'étudierons à l'échelle mésoscopique, de manière à pouvoir considérer simultanément de (très) grandes quantités de molécules et pouvoir faire des moyennes statistiques.
- ◇ Ce type d'approche a déjà été utilisée lors de la théorie cinétique des gaz parfait (cf. cours de première année).
- ◇ C'est ainsi que, dans la suite – sauf précision contraire –, lorsque nous parlerons d'un milieu diélectrique, nous ferons l'hypothèse qu'il est *parfaitement* isolant.
- ◇ Dans ces conditions, pour un milieu diélectrique, il n'y aura pas d'électrons libres, mais uniquement des électrons de cœur et de valence.
- ◇ Ces derniers, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, sont associés à des « nuages » qui vont légèrement se déformer en présence d'un champ.



- ◇ Ces déformations, nous le savons, vont correspondre à des mouvements de charges, donc à des courants électriques.
- ◇ Ce courant électrique est différent du courant électrique usuel car il est dû à des électrons qui, globalement, restent « attachés » à leurs noyaux. Dès lors, le courant associé aurait pu s'appeler « courant attaché », mais l'usage l'appelle *courant lié*.
- ◇ Remarquons que, comme les électrons responsables du courant ne peuvent pas s'éloigner de trop de leur point de départ, nous pouvons d'ores et déjà dire que le courant lié ne peut pas être continu. Il sera obligatoirement alternatif.

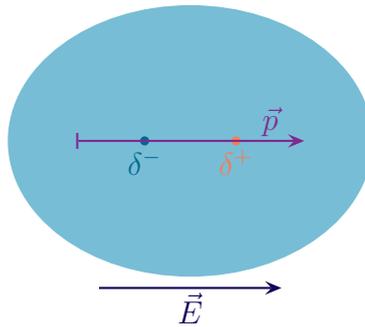
1. Nous apprenons tous, très tôt, que l'eau conduit l'électricité et que c'est la raison pour laquelle il faut faire très attention dans une salle de bain.

- ◇ Insistons. Le courant lié est un *vrai* courant électrique car il correspond vraiment à des charges en mouvement. Seul le courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ n'est pas vraiment un courant électrique puisqu'il existe même dans le vide.

I.2 – Comportement du matériau : vecteur polarisation

I.2.i – définition microscopique

- ◇ Considérons un matériau ne comportant pas d'électron libre.
 ◇ Les nuages électroniques peuvent se déformer, en particulier sous l'influence d'un champ électrique extérieur.



Un matériau est dit *diélectrique* lorsque ses constituants microscopiques acquièrent un moment dipolaire en présence d'un champ électrique.

- ◇ En fait tous les matériaux sont diélectriques, même les métaux, mais seuls ceux qui ne sont *que* diélectriques présentent des phénomènes qui leur sont propres.
 ◇ Rappelons que, pour nous, diélectrique implique « non conducteur ».
 ☺ *Remarque.* Il est possible de définir, de même, des matériaux *diamagnétiques*.

Le *vecteur polarisation* \vec{P} est défini par

$$\sum \vec{p}_i = \vec{P} d\tau \quad \text{où :}$$

- $d\tau$ est un volume élémentaire quelconque ;
- \vec{p}_i est le moment dipolaire de chaque molécule.

Le vecteur polarisation est la densité volumique de moment dipolaire.

Le vecteur polarisation est une grandeur intensive et, en terme d'unité

$$[\vec{P}] = \text{C.m}^{-2}$$

- ◇ Sachant qu'un moment dipolaire \vec{p} est en C.m, le résultat tombe immédiatement.

I.2.ii – courant de polarisation

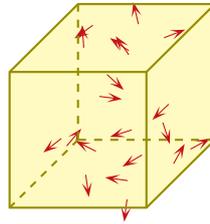
★ **expression**

Des courants électriques dus à la modification de la polarisation d'un milieu sont appelés *courants de polarisation*.

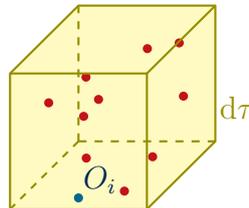
Le courant de polarisation \vec{j}_p d'un milieu est relié à son vecteur polarisation \vec{P} par

$$\vec{j}_p(M,t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(M,t)$$

- ◇ À ce niveau, peu importe l'origine de la polarisation du milieu.
- ◇ Dans le cas particulier où la polarisation associée à un courant de polarisation est due à la polarisation d'un milieu diélectrique, le courant de polarisation obtenu est le *courant lié*.

★ **démonstration**

- ◇ Considérons un volume élémentaire $d\tau$ et cherchons la densité de courant électrique en volume \vec{j} .



- ◇ Nous savons que la densité de courant électrique s'écrit

$$\vec{j} = n q \vec{v}_{\text{moy}}$$

- ◇ Ici n est la densité particulière de charges, q la charge d'une particule en mouvement et \vec{v}_{moy} leur vitesse moyenne.
- ◇ Par définition de la densité particulière puis de la vitesse moyenne, nous avons

$$n = \frac{dN}{d\tau} \rightsquigarrow \vec{j} = \frac{dN}{d\tau} q \vec{v}_{\text{moy}} = \frac{q}{d\tau} \times (dN \vec{v}_{\text{moy}}) \rightsquigarrow \vec{j} = \frac{q}{d\tau} \times \sum \vec{v}_i$$

- ◇ Considérons un matériau diélectrique pour lesquelles, les seules charges qui bougent sont des électrons autour de leurs noyaux.
- ◇ Notons M_i la position d'un électron et O_i la position de son noyau. Nous avons alors, comme le noyau est immobile

$$\vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO}_i}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O}_iM_i}{dt} \rightsquigarrow \vec{v}_i = \frac{d\overrightarrow{O}_iM_i}{dt}$$

- ◇ En reprenant l'expression de \vec{j} , cela donne

$$\vec{j} = \frac{q}{d\tau} \times \sum \frac{d\overrightarrow{O_i M_i}}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \sum \frac{d}{dt} \left(q \overrightarrow{O_i M_i} \right)$$

◇ Nous reconnaissons la définition du moment dipolaire engendré par l'électron i , ce qui conduit, par linéarité de la dérivée, à

$$\vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \frac{d}{dt} \left(\sum \vec{p}_i \right)$$

◇ Et avec la définition du vecteur polarisation, nous arrivons à

$$\vec{j} = \frac{1}{d\tau} \times \frac{d\vec{P} d\tau}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{j} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

◇ Et comme \vec{P} dépend de l'espace et du temps, et que nous avons raisonné à lieu fixé, nous avons bien

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

I.2.iii – charges de polarisation

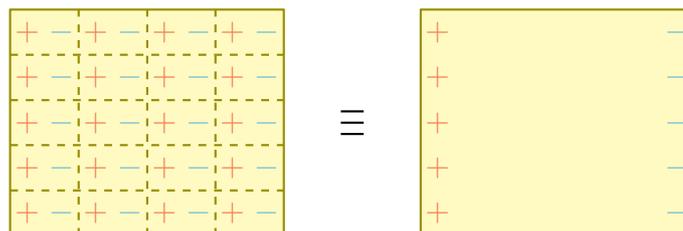
★ expression, interprétation

Les *charges de polarisation* sont les charges qui apparaissent lors de la polarisation d'un milieu.

La densité volumique des charges de polarisation s'écrit

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

◇ Qualitativement, lorsqu'un milieu se polarise, chaque petite zone « sépare » une charge positive et une charge négative qui se voit alors compensée par la voisine.



★ démonstration

◇ Écrivons l'équation de conservation de la charge pour les charges associées à la polarisation

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_p = 0$$

◇ Avec l'expression du courant de polarisation, cela donne

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\text{div} \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right)$$

◇ Nous pouvons intervertir les dérivées spatiales et temporelles, ce qui conduit à

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{P})$$

◇ Et en primitivant par rapport au temps

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P} + \rho_{p0}(\vec{r})$$

◇ Le terme supplémentaire est forcément nul puisque nous avons un milieu neutre lorsqu'il n'y a pas de polarisation.

I.2.iv – petit résumé

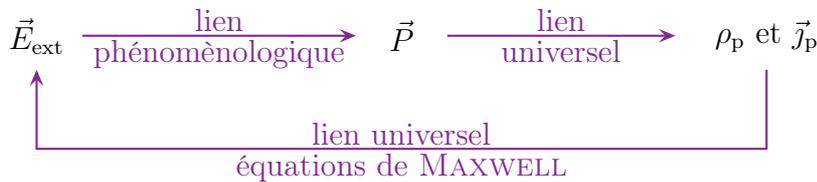
◇ Les matériaux diélectriques sont tels que :

- lorsque $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$, la matière est globalement neutre ;
- lorsque $\vec{E}_{\text{ext}} \neq \vec{0}$, il n'y a pas de courant électrique car il s'agit d'un isolant *mais* il y a création :
 - d'un moment dipolaire \vec{p} pour chaque atome, molécule... (vision microscopique) ;
 - d'un vecteur polarisation \vec{P} dans un volume $d\tau$ (vision mésoscopique).

◇ Le vecteur polarisation \vec{P} décrit la « réaction » du milieu face à \vec{E}_{ext} et engendre :

- un courant de polarisation $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$;
- des charges de polarisation $\vec{j}_p = -\operatorname{div} \vec{P}$.

◇ L'ensemble peut se résumer ainsi



I.3 – Susceptibilité

I.3.i – conditions d'étude

◇ Nous allons chercher à généraliser à l'échelle mésoscopique ce que nous avons trouvé à l'échelle microscopique.

- Nous voulons pouvoir négliger le champ créé par un dipôle sur ses proches voisins. Pour ce faire, il *faut* que le matériau ne soit pas trop dense.
- Le moment dipolaire \vec{p} créé ne l'est que par l'action du champ \vec{E}_{ext} . Dans le cas de moment dipolaires intrinsèques (comme pour la molécule d'eau), nous utiliserons le principe de superposition.

◇ Nous allons donc regarder le comportement d'un atome plongé dans le champ électrique

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

◇ Reprenons le modèle de l'électron élastiquement lié :

- il y a une force de rappel du type « élastique » pour modéliser l'action du noyau

$$\vec{f} = -m\omega_0^2 \vec{r}$$

→ il y a une force de frottement pour modéliser la perte énergétique due au rayonnement

$$\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$$

→ l'électron est non-relativiste, ce qui implique que :

→ l'action de \vec{B} est négligeable devant l'action de \vec{E} ;

→ \vec{E} est uniforme à l'échelle de l'atome, ce qui nous permet d'écrire

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$$

I.3.ii – susceptibilité complexe

★ définition

La *susceptibilité complexe* $\underline{\chi}(\omega)$ d'un milieu est définie par

$$\underline{\vec{P}} \triangleq \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \underline{\vec{E}}$$

★ expression

◇ Posons le PFD sur un électron (en négligeant, bien évidemment, le poids)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_0^2 \vec{r} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - e \vec{E} + \vec{0}$$

◇ En notation complexe, cela donne

$$j\omega m \underline{\vec{V}} = -m\omega_0^2 \underline{\vec{r}} - \frac{m}{\tau} \underline{\vec{V}} - e \underline{\vec{E}}$$

◇ Or $\underline{\vec{P}}$ s'écrit, avec n la densité particulaire,

$$\underline{\vec{P}} = n \times \underline{\vec{p}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{P}} = -n e \underline{\vec{r}}$$

◇ Nous pouvons isoler $\underline{\vec{r}}$

$$\underline{\vec{V}} = j\omega \underline{\vec{r}} \quad \rightsquigarrow \quad \left(-m\omega^2 + m\omega_0^2 + j\omega \frac{m}{\tau} \right) \underline{\vec{r}} = -e \underline{\vec{E}}$$

◇ Et ainsi

$$\underline{\vec{P}} = -n e \times \frac{-e \underline{\vec{E}}}{-m\omega^2 + m\omega_0^2 + j\omega \frac{m}{\tau}}$$

◇ Ce que nous pouvons réécrire

$$\underline{\vec{P}} = \frac{n e^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \times \varepsilon_0 \times \underline{\vec{E}}$$

◇ Par identification, nous obtenons

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \varepsilon_0}$$

◇ ω_p est appelée la pulsation plasma.

I-3·iii – représentation de la susceptibilité

★ parties réelle et imaginaire

◇ Séparons les parties imaginaires et réelles de la susceptibilité

$$\underline{\chi}(\omega) \stackrel{\text{not}}{=} \chi'(\omega) + j \chi''(\omega)$$

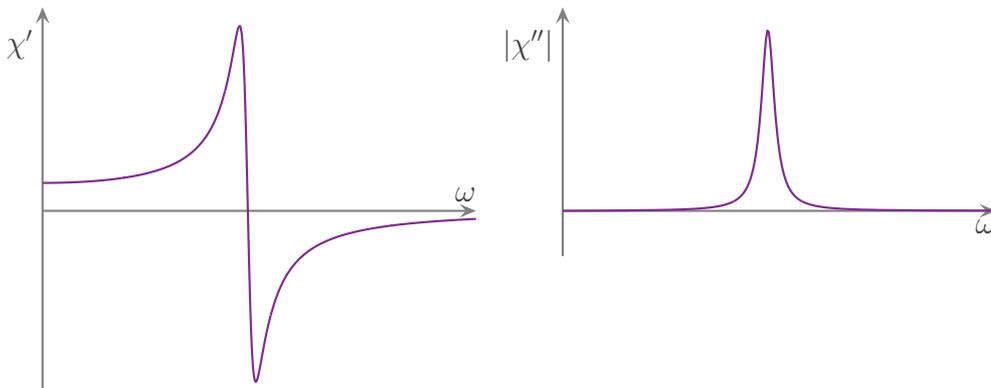
◇ Nous avons, en multipliant par la quantité conjuguée

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2 \times \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{j\omega}{\tau} \right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

◇ Et ainsi

$$\chi'(\omega) = \frac{\omega_p^2 \times (\omega_0^2 - \omega^2)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = -\frac{\omega_p^2 \times \frac{\omega}{\tau}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

★ graphiques



◇ Les dessins ci-dessus ne sont pas à l'échelle car, numériquement, nous avons

$$\omega_0 \tau \sim 10^{-3}$$

◇ Cela correspond à des facteurs de qualité (*i.e.* à des finesses de pic) de l'ordre de 10^3 .

★ trois domaines

🕒 basses fréquences

◇ Pour $\omega \ll \omega_0$, la susceptibilité tend vers

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$$

- ◇ Nous pouvons constater, alors, que la susceptibilité est réelle, ce qui signifie que \vec{P} et \vec{E} sont des vecteurs colinéaires et dans le même sens.

$$\vec{P} = \chi(\omega) \times \varepsilon_0 \times \vec{E}$$

- ◇ C'est tout à fait normal : en basses fréquences, les atomes ont « le temps » de réagir et, donc, de s'aligner sur le champ \vec{E} .

🕒 à la pulsation propre

- ◇ Pour $\omega = \omega_0$, la susceptibilité vaut

$$\underline{\chi}(\omega_0) = -j \frac{\omega_p^2}{\tau}$$

- ◇ \vec{P} et \vec{E} sont en quadrature.
 ◇ C'est à cette pulsation que les effets dissipatifs se font le plus sentir comme le montre la présence de τ dans l'expression de la susceptibilité.

🕒 hautes fréquences

- ◇ Pour $\omega \gg \omega_0$, la susceptibilité tend vers

$$\underline{\chi}(\omega) = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

- ◇ Plus la pulsation est grande, plus la susceptibilité est faible, *i.e.* plus la polarisation engendrée par le champ diminue.
 ◇ À la limite, le vecteur polarisation est nulle, tout se passe comme si l'onde « voyait » du vide, le milieu est *transparent*.

👉 *Remarque.* Bien sûr, il faut des hautes fréquences, mais pas trop pour ne pas entrer en contradictions avec les hypothèses de départ.

I.3.iv – généralisation

★ expression

- ◇ Pour chaque type d'électron dans un molécule constituant un matériau, nous pouvons associer une susceptibilité complexe $\underline{\chi}_i(\omega)$ et ainsi, la susceptibilité totale s'écrit, par superposition

$$\underline{\chi}(\omega) = \sum \underline{\chi}_i(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\chi}(\omega) = \sum \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau_i}}$$

★ cas de l'eau

- ◇ L'eau est un cas particulier de par la nature même de sa molécule déjà polaire.
 ◇ Schématiquement, les parties réelles et imaginaires de sa susceptibilités peuvent se représenter par les graphiques ci-dessous²

2. Source : Cours de physique, *Électromagnétisme 4, milieux diélectriques et milieux aimantés*, M. BERTIN, J.-P. FAROUX, J. RENAULT, éd. Dunod.

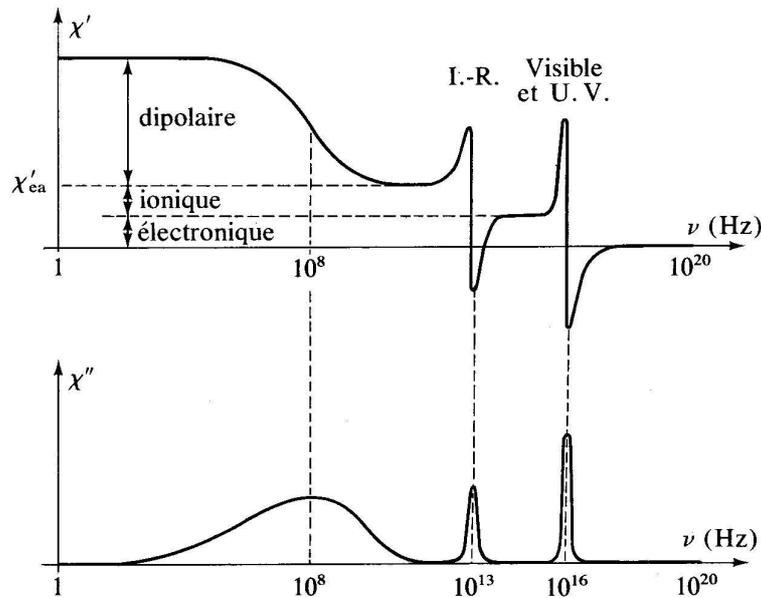


Fig. 7. L'étude de χ' et χ'' en fonction de la fréquence permet de préciser le rôle des divers types de polarisation.

- ◇ Les trois domaines sont liés à des variations de la polarisation de la molécule suivant trois procédés différents :
 - la polarisation dipolaire est associée à la rotation de la molécule d'eau sur elle-même ;
 - la polarisation ionique est associée à la déformation de la molécule d'eau ;
 - la polarisation électronique est associée à la déformation des nuages électroniques plongés dans un champ (c'est ce que nous venons de faire).
- ◇ L'absorption (caractérisée par χ'') autour de 10^8 Hz constitue le principe de base d'un four à micro-ondes. Un tel four ne chauffe « que » les molécules d'eau et comme la majorité des aliments en sont constitués. . .
- ◇ L'absorption dans l'infra-rouge est très pratique lors de la dégustation d'une raclette. En effet, pour éviter que son verre de vin³ ne chauffe, il est très facile d'interposer entre celui-ci et l'appareil, un verre d'eau. Transparent au spectre visible, il est très absorbant dans l'infra-rouge et limitera l'échauffement du vin⁴.

I.3.v – milieu DLHI

Un milieu *DLHI* est un milieu Diélectrique, Linéaire, Homogène, Isotrope.

Quand un milieu est un DLHI, nous pouvons écrire

$$\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \underline{\vec{E}}$$

3. À consommer avec modération.

4. Pour préserver un verre du chauffage créé par l'appareil, il est aussi possible de l'entourer de papier aluminium. L'auteur se dégage de toute responsabilité quant aux réactions des autres convives face à quelqu'un qui emballerait son verre ainsi.

★ Linéaire

- ◇ « Linéaire » signifie que le vecteur polarisation et le champ électrique sont proportionnels.
- ◇ Si tel n'était pas le cas, il faudrait ajouter une composante du type

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \vec{E} + \underline{\alpha}(\omega) \times \|\vec{E}\| \times \vec{E}$$

★ Homogène

- ◇ La susceptibilité ne dépend pas du point considéré.
- ◇ Techniquement parlant, cela signifie que nous pouvons « sortir » $\underline{\chi}(\omega)$ des opérateurs de dérivation spatiale

$$\operatorname{div}(\vec{P}) = \operatorname{div}(\varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \vec{E}) = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \operatorname{div}(\vec{E})$$

★ Isotrope

- ◇ Avec un matériaux non isotrope, la composante sur \vec{u}_x de la polarisation pourrait dépendre de la composante sur \vec{u}_y du champ.
- ◇ Cela donnerait une relation du type

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \times \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

II – Ondes électromagnétiques

II.1 – Au milieu d'un milieu

II.1.i – équations de MAXWELL dans un milieu polarisable

◇ Réécrivons les deux lois de MAXWELL contenant des termes de source.

◇ L'équation de MAXWELL – GAUSS s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \times \operatorname{div} \vec{P}$$

◇ Pour trouver ce résultat, nous avons supposé que les seules charges dans le matériau étaient dues à la polarisation de celui-ci.

◇ Nous allons faire de même en ce qui concerne le courant et supposer que le seul qui existe soit dû à la polarisation. Dans ces conditions, l'équation de MAXWELL – AMPÈRE s'écrit

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

II.1.ii – structure d'une OPPM dans un milieu DLHI

◇ Nous allons rechercher une onde sous la forme d'une OPPM (pourquoi pas complexe), soit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{avec} \quad \vec{k} = k' + j k''$$

◇ De plus, comme le milieu est supposé DLHI, cela implique

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \vec{E}$$

★ et encore une coïncidence !

Une onde électromagnétique dans un DLHI est une onde transverse pour les deux champs électrique et magnétique. De plus le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

★ champs transverse

◇ Avec la loi des DLHI, l'équation de MAXWELL – GAUSS donne

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \times \operatorname{div} \left(\varepsilon_0 \times \underline{\chi}(\omega) \times \vec{E} \right) = -\operatorname{div} \left(\underline{\chi}(\omega) \times \vec{E} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \left((1 + \underline{\chi}(\omega)) \vec{E} \right) = 0$$

◇ Et comme, pour une OPPM, nous avons $\vec{\nabla} = -j \vec{k}$, nous trouvons

$$-j(1 + \underline{\chi}(\omega)) \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

◇ Ce qui prouve le caractère transverse du champ électrique.

◇ Le caractère transverse du champ magnétique se prouve à l'aide de l'équation de MAXWELL – THOMSON.

◇ L'équation de MAXWELL – AMPÈRE donne, quant à elle,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}(\omega)) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

◇ Et avec l'écriture équivalent de nabla

$$-j \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}(\omega)) j \omega \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{k}}{\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \underline{\chi}(\omega)) \omega}$$

★ permittivité relative

La *permittivité relative* $\varepsilon_r(\omega)$ est définie par

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}(\omega)$$

◇ C'est une définition qui n'a l'air de rien mais qui, en fait, est très pratique car, comme nous avons pu le voir au-dessus, au sein de la matière, c'est davantage la grandeur $1 + \chi$ qui va être intéressante, bien plus que χ tout seul.

II.1.iii – équation de propagation

★ équation d'onde

◇ Avant de commencer, simplifions les équations de MAXWELL et commençons par MAXWELL – GAUSS

$$\text{div} \left((1 + \chi) \vec{E} \right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon_r \text{div} \vec{E} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{div} \vec{E} = 0$$

◇ L'équation de MAXWELL – AMPÈRE donne, quant à elle,

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

◇ Nous pouvons alors faire la méthode usuelle.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{E} \right) - \vec{\Delta} \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\vec{\Delta} \vec{E}$$

◇ De plus

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right)$$

◇ Ce qui donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

◇ Et, finalement

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

◇ En fait, dans ce qui précède, si nous supposons que la susceptibilité dépend de ω , c'est comme si nous nous restreignons, déjà, à une OPPM.

- ◇ Toutefois, nous pouvons remarquer que nous n'avons pas *précisément* besoin de savoir de quelle grandeur est fonction χ . Après tout, nous pourrions très bien essayer de le déterminer pour autre chose qu'une OPPM. Mais les calculs seraient, pour le coup, bien plus compliqués. Et cela ne nous empêcherait pas de le considérer comme une constante par rapport au temps.

★ célérité

- ◇ Nous pouvons remarquer tout de suite que, la plupart du temps⁵

$$|\varepsilon_r| > 1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{c^2} > \mu_0 \varepsilon_0$$

- ◇ En d'autres termes

$$c_{\text{milieu DLHI}} < \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c_{\text{vide}}$$

- ◇ Nous venons de prouver que les ondes ont une célérité plus faible dans la matière que dans le vide. Ce que nous savions déjà⁶.
- ◇ De plus, la célérité dans les milieux dépend de ε_r , lui-même associé à χ qui est une fonction de ω . Nous voyons poindre là le phénomène de dispersion.

★ relation de dispersion

- ◇ Recherchons directement la relation de dispersion pour une OPPM complexe.

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = (\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}}) \times \underline{\vec{k}} - \underline{\vec{k}}^2 \times \underline{\vec{E}}$$

- ◇ Le premier terme est nul (cf. MAXWELL – GAUSS) donc il reste

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = -\underline{\vec{k}}^2 \times \underline{\vec{E}}$$

- ◇ De plus, l'équation de MAXWELL – FARADAY implique

$$\underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = \underline{\vec{k}} \wedge (\omega \underline{\vec{B}}) = \omega \times \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{B}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\vec{k}} \wedge (\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}) = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{\vec{E}}$$

- ◇ En rapprochant les deux résultats et sachant qu'il est vrai quel que soit $\underline{\vec{E}}$

$$\underline{\vec{k}}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

- ◇ Ce que nous noterons, avec c la célérité dans le vide

$$\underline{\vec{k}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \times \varepsilon_r$$

5. Pour cela, il suffit d'avoir $\text{Re}(\chi') > 0$, ce qui est vrai la plupart du temps, du moins pour le visible avec des milieux usuels. Le cas où $-2 < \text{Re}(\chi') < 0$ et qui implique $v_\varphi > c$ demande une étude particulière.

6. Ceci étant, nous avons déjà rencontré des ondes dont la vitesse de phase est plus grande que c . Mais nous avons aussi montré que ce n'était pas grave et que ce qui comptait, c'était la vitesse de déplacement de l'information, *i.e.* de l'énergie.

II.1.iv – champ électromagnétique

◇ Comme $\underline{\chi}(\omega)$ comporte une partie imaginaire, il en sera de même pour $\underline{\varepsilon}_r(\omega)$ et, donc, pour \underline{k} , que nous allons noter

$$\underline{k}(\omega) = k'(\omega) + j k''(\omega)$$

◇ Nous savons déjà que k'' caractérise l'atténuation, c'est donc bien que χ'' aussi.

★ champ \vec{E}

◇ Considérons une onde polarisée rectilignement sur \vec{u}_y et se propageant suivant \vec{u}_x .

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_y$$

◇ En développant \underline{k} cela donne

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - k'x)} e^{+k''x} \vec{u}_y$$

◇ Puis en notation réelle

$$\vec{E} = E_0 e^{+k''x} \cos(\omega t - k'x) \vec{u}_y$$

◇ Avec $k' > 0$ (propagation suivant $+\vec{u}_x$), nous voyons qu'il faut $k'' < 0$ dans le cas d'un milieu passif infini pour éviter une divergence du champ électrique et, donc, de l'énergie.

★ champ \vec{B}

◇ La relation de structure (provenant de l'équation de MAXWELL – FARADAY) s'écrit

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \vec{u}_x \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{\underline{k} E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{u}_z$$

◇ En développant

$$\underline{\vec{B}} = \frac{(k' + j k'') E_0}{\omega} e^{j(\omega t - k'x)} e^{+k''x} \vec{u}_z$$

◇ Puis en notation réelle

$$\vec{B} = \frac{k_0 E_0}{\omega} e^{+k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi) \vec{u}_z \quad \text{où} \quad \underline{k} \stackrel{\text{not}}{=} k_0 e^{j\varphi}$$

◇ Il est important de remarquer que la partie imaginaire non nulle de \underline{k} engendre un déphasage entre les champs magnétique et électrique. Autrement dit, à un endroit et à un instant donné, l'un des deux champs peut être nul sans que l'autre ne le soit.

★ vecteur de POYNTING

◇ Nous avons, comme d'habitude

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right)$$

◇ En remplaçant, nous obtenons

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{E_0^2 e^{2k''x}}{\omega \mu_0} \times (k' - j k'') \vec{u}_x \right)$$

◇ Ce qui donne

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 \times k'}{2 \omega \mu_0} \times e^{2k''x} \vec{u}_x$$

◇ Là aussi nous retrouvons le fait que si l'énergie va suivant $+\vec{u}_x$, ce qui correspond, ici, à $k' > 0$, alors la passivité du milieu implique que $k'' < 0$ pour éviter la divergence de l'énergie.

II.1.v – indice complexe

★ apparition

L'indice complexe \underline{n} d'un milieu est défini pour une OPPM par

$$\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

◇ Comme toute grandeur complexe, nous pouvons écrire

$$\underline{n} = n' + j n''$$

◇ De plus le vecteur d'onde s'écrit

$$\underline{k} = k' + j k'' \quad \text{avec}$$

→ k' qui caractérise la propagation ;

→ k'' qui caractérise l'atténuation.

◇ Nous pouvons donc en conclure

$n'(\omega)$ caractérise la propagation et $n''(\omega)$ caractérise l'atténuation.

◇ Dans ces conditions, nous avons

La vitesse de phase s'écrit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$$

★ mais... c'est une loi connue !

◇ Rappelons l'expression de la susceptibilité complexe

$$\underline{\chi}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau}}$$

◇ Cherchons l'expression de \underline{n} suivant les étapes suivantes

$$\underline{\chi} \xrightarrow{\text{déf}} \underline{\varepsilon}_r \xrightarrow{\text{déf}} \underline{n} \xrightarrow{\text{approximation}} n$$

◇ Nous avons tout d'abord

$$\underline{\varepsilon}_r = 1 + \underline{\chi}(\omega) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\varepsilon}_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau}}$$

◇ La relation de dispersion conduit à

$$\underline{k}^2 = \underline{\varepsilon}_r \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{et} \quad \underline{k}^2 = \underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r$$

◇ Considérons le cas particulier où l'absorption est négligeable.

◇ Dans ces conditions, il faut négliger le terme en $j \frac{\omega}{\tau}$ car

→ le terme en $j \frac{\omega}{\tau}$ caractérise les pertes énergétiques ;

→ techniquement c'est ce terme qui apporte une partie imaginaire.

◇ Et maintenant, simplifions n^2

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \\ &= \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \times \left(1 + \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \\ &\stackrel{\text{not}}{=} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) \times \left(1 + \alpha \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \end{aligned}$$

◇ En prenant la racine, cela nous conduit à

$$n \stackrel{\text{DL}}{=} \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \times \left(1 + \frac{\alpha}{2} \times \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

◇ Et avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ cela nous donne

$$n = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} + \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2} \times \frac{1}{\lambda_0^2}$$

◇ Ce qui peut s'écrire

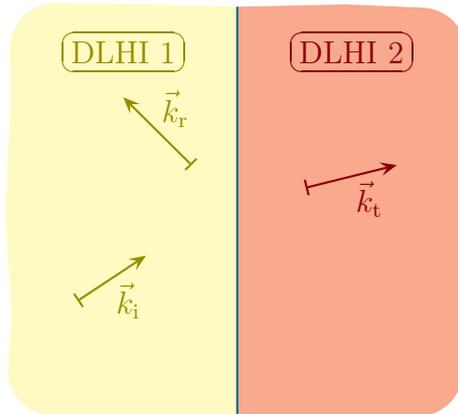
$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

◇ Il s'agit ni plus ni moins que la loi de CAUCHY!

II.2 – Passage d'un milieu à l'autre

II.2.i – situation envisagée

◇ Considérons une OPPM arrivant sur un dioptré plan.



◇ L'OPPM étant *quelconque*, nous pouvons écrire le champ électrique associé sous la forme⁷

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

- ◇ Qualitativement, les particules présentes dans le milieu ② vont être excitées par l'onde incidente (qui pénètre dans le milieu ② puisqu'aucune loi physique ne l'interdit).
- ◇ Ces molécules vont, dès lors, rayonner, *i.e.* vont engendrer une nouvelle onde qui va se superposer à l'onde incidente dans le milieu ② pour « fabriquer » l'onde transmise.
- ◇ Ceci étant, l'onde rayonnée peut aussi ressortir. Cela donne ni plus ni moins que l'onde réfléchie.
- ◇ Comme tous les phénomènes qui ont lieu sont *linéaires*, nous pouvons d'ores et déjà dire que les pulsations de toutes ces ondes (incidente, transmise et réfléchie) sont identiques.

II.2.ii – lois physiques

★ préliminaire

◇ Commençons par traduire le fait que les ondes sont des ondes planes.

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$$

◇ Comme nous l'avons vu précédemment, le vecteur d'onde d'une onde plane se propageant au sein d'un milieu matériel s'écrit

$$\vec{k}_i = k_i \vec{u}_i = n_1 k_0 \vec{u}_i ; \quad \vec{k}_t = k_t \vec{u}_t = n_2 k_0 \vec{u}_t \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = k_r \vec{u}_r = n_1 k_0 \vec{u}_r$$

7. Rappelons que dans le cas d'une polarisation rectiligne, nous aurions écrit

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$$

★ relations de passage

- ◇ Cherchons, à l'aide du moyen mnémotechnique rencontré dans le chapitre 1 d'électromagnétisme, les relations de passage (Rel. Pa.).
- ◇ Pour MAXWELL – THOMSON cela donne

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \xrightarrow{\text{DLHI}} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

- ◇ Pour MAXWELL – FARADAY

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{DLHI}} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

- ◇ MAXWELL – AMPÈRE

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \xrightarrow{\text{DLHI}} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{0}$$

- ◇ Et, la dernière, MAXWELL – GAUSS

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\text{DLHI}} \operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\text{Rel. Pa.}} \vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = -\vec{n}_{12} \cdot \left(\frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{\varepsilon_0} \right)$$

- ◇ Nous allons donc retenir les lois suivantes.

Le champ magnétique \vec{B} est continu à l'interface entre deux milieux DLHI.

La composante tangentielle du champ électrique est continu à l'interface entre deux milieux DLHI.

- ◇ Nous n'utiliserons pas la *discontinuité* du champ électrique à l'interface entre deux milieux DLHI.

II.2.iii – lois de SNELL – DESCARTES

★ préliminaire

- ◇ Reprenons donc la situation et traduisons la continuité de la composante normale du champ magnétique, composante notée « sur \vec{u}_z ».
- ◇ Dans le milieu ①, le champ magnétique est la superposition du champ magnétique de l'onde incidente et du champ magnétique de l'onde réfléchi.

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_i + \vec{B}_r$$

- ◇ Dans le milieu ②, le champ magnétique se réduit au champ magnétique de l'onde transmise.

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_t$$

- ◇ La continuité de la composante sur \vec{u}_z du champ magnétique se traduit donc par

$$\underline{B_{1z}}(\text{surface}, t) = \underline{B_{2z}}(\text{surface}, t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{B_{i,z}}(\text{surface}, t) + \underline{B_{r,z}}(\text{surface}, t) = \underline{B_{t,z}}(\text{surface}, t)$$

◇ Nous avons donc

$$\underline{B_{i0,z}} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM})} + \underline{B_{r0,z}} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{OM})} = \underline{B_{t0,z}} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{OM})}$$

◇ En simplifiant par $e^{j\omega t}$ nous obtenons

$$\underline{B_{i0,z}} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{OM}} + \underline{B_{r0,z}} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{OM}} = \underline{B_{t0,z}} e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{OM}}$$

◇ Comme ceci est vrai **pour tout point** M de la surface, nous pouvons en déduire que les trois arguments dans les exponentielles sont les mêmes. Cela donne, pour tout point M de la surface

$$\vec{k}_i \cdot \vec{OM} = \vec{k}_r \cdot \vec{OM} \quad \text{et} \quad \vec{k}_i \cdot \vec{OM} = \vec{k}_t \cdot \vec{OM}$$

◇ En considérant un autre point N de la surface, nous avons

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{OM} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{ON} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{MN} = 0$$

◇ De même

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{OM} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{ON} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{MN} = 0$$

★ lois de la réflexion

◇ Reprenons l'expression précédente vraie pour tous points M et N de l'interface

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{MN} = 0$$

◇ Cette relation traduit le fait $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ est orthogonal à tout vecteur tangent à l'interface.

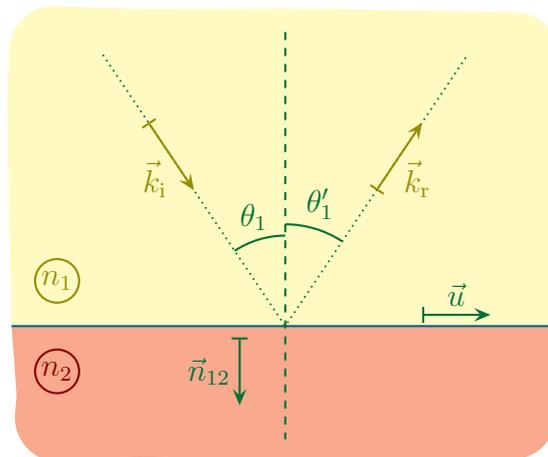
◇ Dans ces conditions $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ ne peut être que normal à l'interface, ce qui peut s'écrire

$$\vec{k}_i - \vec{k}_r = \alpha \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_r = \vec{k}_i - \alpha \vec{n}_{12}$$

◇ Nous voyons que \vec{k}_r est combinaison linéaire de \vec{k}_i et \vec{n}_{12} , *i.e.* le vecteur d'onde de l'onde réfléchi est dans le plan constitué par le vecteur d'onde incident et par le vecteur normal à l'interface.

Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.

◇ Faisons le schéma dans le plan d'incidence et notons \vec{u} le vecteur unitaire de ce plan tangent à l'interface.



◇ Nous avons ainsi

$$\vec{k}_r = \vec{k}_i - \alpha \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_r \cdot \vec{u} = \vec{k}_i \cdot \vec{u} + 0$$

◇ Ce qui nous donne

$$k_r \sin \theta'_1 = k_i \sin \theta_1 \quad \text{et} \quad k_r = k_i = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \sin \theta'_1 = \sin \theta_1$$

Dans le cas de la réflexion, les angles d'incidence et de réflexion sont identiques.

★ lois de la réfraction

◇ Pour la réfraction, c'est le même raisonnement.

◇ Tout d'abord

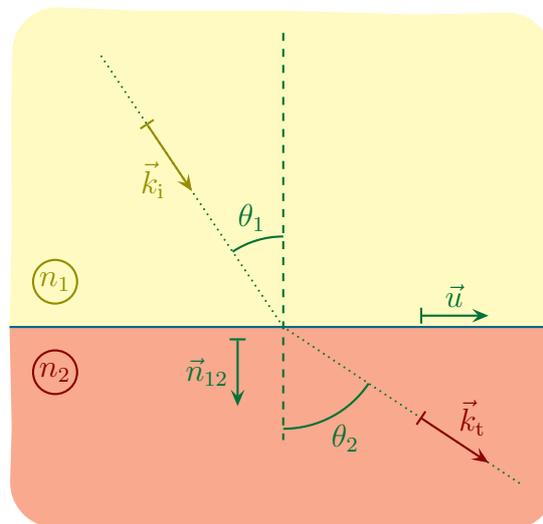
$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{MN} = 0$$

◇ Ainsi $\vec{k}_i - \vec{k}_t$ ne peut être que normal à l'interface, ce qui peut s'écrire

$$\vec{k}_i - \vec{k}_t = \beta \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_t = \vec{k}_i - \beta \vec{n}_{12}$$

Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.

◇ Reprenons le schéma dans le plan d'incidence.



◇ Nous avons de même

$$\vec{k}_t = \vec{k}_i - \alpha \vec{n}_{12} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k}_t \cdot \vec{u} = \vec{k}_i \cdot \vec{u} + 0$$

◇ Puis

$$k_t \sin \theta_2 = k_i \sin \theta_1 \quad \text{avec} \quad k_t = n_2 \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k_i = n_1 \frac{\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

Dans le cas de la réflexion, les angles d'incidence et de réfraction sont tels que

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

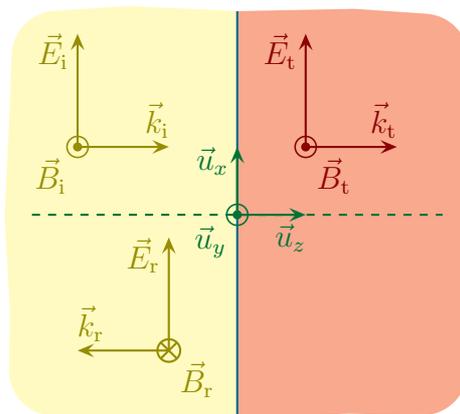
★ morale

- ◇ Comme nous venons de le voir, les lois de SNELL – DESCARTES sont contenues dans :
 - les lois de MAXWELL ;
 - le modèle du milieu DLHI.
- ◇ Insistons pour dire que nous n'avons pas prouvé que la loi de la réflexion est la même sur les milieux métalliques.
- ◇ Le lecteur curieux pourra s'y essayer sachant que la méthode est la même, à savoir la traduction des relations de passage, sans oublier que dans un métal (parfait), le champ électromagnétique est nul.

II.2.iv – coefficient de réflexion et transmission d'amplitude

★ situation, solution *a priori*

- ◇ Regardons le cas particulier de l'incidence normale.
- ◇ Imaginons une onde électromagnétique qui arrive sur une interface entre deux milieux DLHI. Cela engendre à la fois une onde réfléchie et une onde transmise.



- ◇ Considérons une onde électromagnétique polarisée rectilignement.
- ◇ Le caractère « onde polarisée rectilignement » ne restreint pas la généralité de l'étude qui suit *dans le cas d'une incidence normale*. En effet :
 - l'invariance par rotation du problème autour de l'axe normal à l'interface nous assure que les coefficients que nous trouverons seront les mêmes quelle que soit la polarisation ;
 - le caractère linéaire des phénomènes nous permet de considérer chaque composante séparément.
- ◇ Dans ces conditions, avec le repérage choisi, l'onde électrique incidente s'écrit

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_x$$

- ◇ Comme il s'agit d'une OPPM, nous pouvons utiliser la relation de structure et ainsi

$$\vec{B}_i = \frac{(+k_1 \vec{u}_z) \wedge \vec{E}_i}{\omega} \rightsquigarrow \vec{B}_i = \frac{E_{0i} k_1}{\omega} e^{j(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_y$$

- ◇ De même, sans oublier que $\vec{k}_r = -k_1 \vec{u}_z$

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_{0r} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_r = -\frac{\underline{E}_{0r} k_1}{\omega} e^{j(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_y$$

◇ Et pour l'onde transmise

$$\underline{\vec{E}}_t = \underline{E}_{0t} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_t = \frac{\underline{E}_{0t} k_2}{\omega} e^{j(\omega t - k_2 z)} \vec{u}_y$$

★ traduction des conditions aux limites

- ◇ Nous avons déjà traduit le fait que le milieu ② s'étendait à l'infini en ne faisant pas intervenir d'onde retour dans le milieu ②.
- ◇ Reste l'interface. . .
- ◇ Nous avons affaire à trois ondes, dont deux sont considérées comme inconnues (l'onde incidente est censée être quelconque).
- ◇ Il nous faut donc *deux* conditions aux limites que seront les continuités des champs électrique *et* magnétique.
- ◇ La continuité de la composante sur \vec{u}_x du champ électrique impose

$$E_1(0^-) = E_2(0^+) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{E}_{i0} + \underline{E}_{r0} = \underline{E}_{0t}$$

◇ De même, la continuité du champ magnétique sur \vec{u}_y donne

$$\frac{\underline{E}_{i0} k_1}{\omega} - \frac{\underline{E}_{r0} k_1}{\omega} = \frac{\underline{E}_{0t} k_2}{\omega} \quad \text{et} \quad k = \frac{n\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad n_1 \underline{E}_{i0} - n_1 \underline{E}_{r0} = n_2 \underline{E}_{0t}$$

★ coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{E}

◇ Les deux conditions aux limites donnent

$$-\underline{E}_{r0} + \underline{E}_{0t} = \underline{E}_{i0} \quad \text{et} \quad n_1 \underline{E}_{r0} + n_2 \underline{E}_{0t} = n_1 \underline{E}_{i0}$$

◇ Il s'agit là d'un système de deux équations à deux inconnues dont les solutions sont

$$\underline{E}_{r0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \times \underline{E}_{i0} \quad \text{et} \quad \underline{E}_{t0} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \times \underline{E}_{i0}$$

◇ Ce qui conduit aux coefficients de réflexion et de transmission en amplitude électrique

$$r_E = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t_E = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

★ coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour \vec{B}

◇ Nous avons, par définition du coefficient de réflexion en amplitude pour \vec{B}

$$r_B = \frac{\underline{B}_{r0}}{\underline{B}_{i0}}$$

◇ Avec le lien qui existe entre champs électrique et magnétique, nous obtenons successivement

$$\underline{B}_{r0} = -\frac{k_1}{\omega} \underline{E}_{r0} \quad \text{et} \quad \underline{B}_{i0} = +\frac{k_1}{\omega} \underline{E}_{i0} \quad \rightsquigarrow \quad r_B = -\frac{\underline{E}_{r0}}{\underline{E}_{i0}} = -r_E = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$

◇ De même, pour le coefficient de transmission en amplitude pour \vec{B}

$$t_B = \frac{B_{t0}}{B_{i0}} \quad \text{et} \quad \underline{B_{t0}} = +\frac{k_2}{\omega} \underline{E_{i0}} \quad \rightsquigarrow \quad r_B = \frac{k_2 \underline{E_{t0}}}{k_1 \underline{E_{i0}}} = \frac{n_2}{n_1} t_E = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

★ interprétation

- ◇ Si $n_1 = n_2$ il n'y a pas de réflexion **même avec deux milieux matériels différents**.
- ◇ En plongeant ainsi une bouteille de verre remplie de glycérine, d'indice très proche, dans de la glycérine celle-ci disparaît presque⁸.



- ◇ Nous constatons aussi que suivant le signe de $n_1 - n_2$, le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique peut être positif ou négatif :
 - $r_E > 0$ pour $n_1 > n_2$, *i.e.* E_{r0} et E_{i0} sont *phase* ;
 - $r_E < 0$ pour $n_1 < n_2$, *i.e.* E_{r0} et E_{i0} sont *en opposition de phase*.
- ◇ C'est la raison pour laquelle, en optique ondulatoire, lorsqu'il y avait une réflexion vitreuse, *i.e.* une réflexion telle que $n_2 > n_1$, il fallait rajouter un déphasage de π .
- ◇ Rappelons que, comme c'est le champ E qui interagit avec la matière dans le cas des ondes électromagnétiques, c'est lui dont la phase est importante.

★ remarque

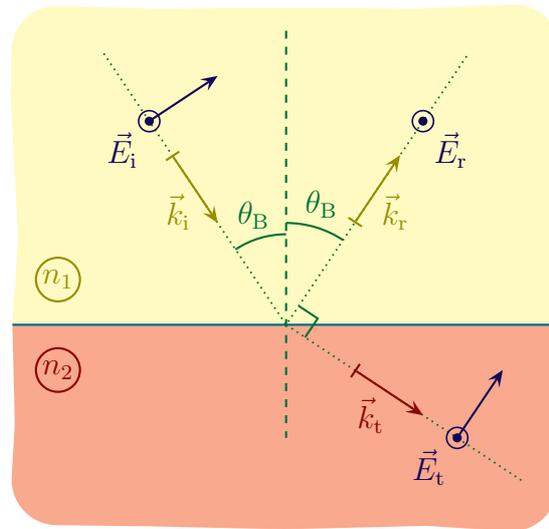
- ◇ Ici nous avons fait les calculs avec un indice n réel.
- ◇ Ce sont les mêmes raisonnements (et les mêmes calculs) pour des milieux avec des indices complexes.
- ◇ En revanche, si l'incidence n'est plus normale, les raisonnements sont identiques (traduction des relations de passage) mais les calculs sont plus lourds.
- ◇ En particulier l'angle d'incidence influence les coefficients de réflexion et de transmission.
- ◇ Si l'expression générale de ces coefficients n'est pas à connaître, un résultat l'est.

L'angle de BREWSTER est l'angle d'incidence tel que le vecteur d'onde réfléchi et le vecteur d'onde transmis sont orthogonaux.

⁸. Il s'agit d'une expérience facile à réaliser à la maison car la glycérine est un produit en vente libre. L'image est issue d'un film amateur dont le lien est :

<http://tapas.palats.com/video/1976/comment-rendre-bouteille-invisible.html>

Quand l'angle d'incidence est l'angle de BREWSTER, alors le champ électrique réfléchi est tangent à l'interface.



II.2.v – coefficients de réflexion et transmission en puissance

★ expression du vecteur de POYNTING

◇ Nous avons, par définition,

$$\vec{\Pi}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}$$

◇ Cela donne donc

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*}{\mu_0} \right)$$

◇ Ce qui conduit, très vite, à (pour un indice réel)

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{i0}^2}{\omega} \vec{k}_i$$

◇ De même, nous obtenons rapidement

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{r0}^2}{\omega} \vec{k}_r \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Pi}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_{t0}^2}{\omega} \vec{k}_t$$

★ les coefficients

◇ Définissons le coefficient de réflexion R en puissance par

$$R = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_r \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|}$$

◇ Nous obtenons donc

$$R = \frac{E_{r0}^2}{E_{i0}^2} = r_E^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

◇ De même, définissons le coefficient de transmission en puissance par

$$T = \frac{\left\| \langle \vec{\Pi}_t \rangle \right\|}{\left\| \langle \vec{\Pi}_i \rangle \right\|}$$

◇ Et nous trouvons

$$T = \frac{k_2 E_{t0}^2}{k_1 E_{i0}^2} = \frac{n_2}{n_1} \times t_E^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

★ conservation de l'énergie

◇ Le lecteur vérifiera aisément que

$$R + T = 1$$

◇ Ce qui traduit la conservation de l'énergie au niveau de l'interface.

★ exemple numérique

◇ Prenons

$$n_{\text{air}} = 1 \quad \text{et} \quad n_{\text{verre}} = 1,5$$

◇ Nous trouvons alors

$$R = 0,04 \quad \text{et} \quad T = 0,96$$

◇ Cela signifie que, dans la vie de tous les jours, 4 % (environ) de la lumière est réfléchiée par la simple interface air – verre.

Ondes dans un milieu diélectrique

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 2^e année :
 - I.C.5 Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - milieu diélectrique / isolant, diélectrique parfait, diamagnétique ;
 - échelle mésoscopique ;
 - courant de polarisation, charges de polarisation ;
 - susceptibilité ;
 - milieu linéaire, homogène, isotrope ;
 - permittivité / permittivité relative d'un milieu ;
 - indice complexe.

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - vecteur polarisation ;
 - susceptibilité ;
 - indice.
- ◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leurs interprétations :
 - $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$; vecteur polarisation \vec{P} ;
 - $\underline{\vec{P}} = \varepsilon_0 \underline{\chi_e} \underline{\vec{E}}$.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - expressions des courants et des charges de polarisation.

★ la phénoménologie

- ◇ Connaître :
 - savoir interpréter d'où viennent les courants et les charges de polarisation ;
 - connaître les conditions d'étude permettant de trouver l'expression de la susceptibilité complexe ;
 - connaître la structure d'une OPPM dans un milieu diélectrique LHI, la différence avec une OPPM dans le vide.

Au niveau des savoir-faire

★ petits gestes

- ◇ Savoir :
 - savoir réécrire les équations de MAXWELL dans un milieu diélectrique LHI.

★ **exercices classiques**

◇ Savoir refaire / retrouver :

- l'expression de la susceptibilité complexe d'un milieu ;
- les lois de SNELL – DESCARTES ;
- les coefficients de réflexion et de transmission dans le cas de l'incidence normale.