Les équations de Maxwell

Exercice 1 Champ électromagnétique

On considère le champ électrique suivant, régnant dans une partie de l'espace vide de charge et de courant :

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + k z)\,\vec{u}_x + E_0 \sin(\omega t + k z)\,\vec{u}_y \qquad \text{avec} \qquad k = \omega\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}$$

1. Vérifier la compatibilité de cette expression avec les lois de Maxwell.
2. Déterminer le champ magnétique associé.
3. Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.

Exercice 2 Plaque de cuivre en régime permanent

Soit un repère orthonormé direct $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ et deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ parallèles au plan (Oxy) et de cotes respectives suivant zz' égales à $+\dfrac{a}{2}$ et $-\dfrac{a}{2}$. Ces plans délimitent une plaque de cuivre homogène, d'épaisseur a, de perméabilité μ_0, de permittivité ε_0 et de conductivité γ.

Une densité volumique de courant continu et constant $\vec{\jmath} = j\,\vec{u}_x$ ($j > 0$) parcourt ce conducteur de dimension infinie suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. La densité superficielle de courant est nulle.

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par cette distribution en un point M quelconque (intérieur ou extérieur de la plaque). On ne se contentera pas de vagues références à la symétrie, mais on s'attachera à construire une véritable démonstration, sans oublier d'étudier la parité du champ.
2. En déduire $\vec{B}(M)$ par le théorème d'Ampère.
3. Retrouver directement $\vec{B}(M)$ par les équations de Maxwell (à partir des composantes du rotationnel).
4. Calculer la densité volumique de puissance dissipée dans la plaque.
   Retrouver le résultat à l'aide du vecteur de Poynting.
   A.N. : $j = 1{,}0$ A.mm^{-2} ; $\gamma = 6{,}2.10^7$ S.m^{-1}.

Exercice 3 Plaque de cuivre dans un champ magnétique variable

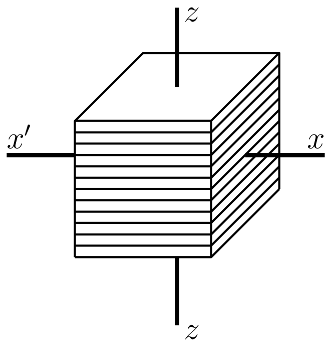
Cet exercice est la suite du précédent et la densité de courant précédente est supprimée.

1. Une source de champ magnétique uniforme et constant est placée au-dessus de $\mathscr{P}$.
   La présence de la plaque modifie-t-elle le champ magnétique ?
2. La plaque est maintenant plongée dans un champ uniforme mais alternatif : $\vec{B} = B\,\vec{u}_x$ avec $B = B_0 \cos(\omega t)$ (B_0 et ω constants).
   On supposera la fréquence suffisamment basse pour que le champ magnétique reste approximativement uniforme dans tout le conducteur.
   (a) Montre que l'existence du champ magnétique $\vec{B}$ variable dans le temps mplique l'apparition d'un champ électrique $\vec{E}$ et, dans la plaque, d'un courant induit de densité $\vec{\jmath}$.
   (b) Par des arguments de symétrie, qu'on s'attachera, ici encore, à rendre aussi précis que possible, montrer que $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{u}_y$ avec $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$.

(c) Par le calcul de la circulation de $\vec{E}$ sur un contour convenablement choisi, déterminer $\vec{E}(M)$.

Donner la densité de courant $\vec{\jmath}(M)$ correspondante et tracer le graphique de l'amplitude de cette densité en fonction de z.

3. On considère une portion de la plaque limitée par un cylindre droite de génératrices parallèles à (Oz) et dont les bases, situées dans les deux plans $z = \pm\dfrac{a}{2}$ ont pour aire S. On note le volume $\tau = S\,a$ le volume de cette portioni de plaque. Calculer la puissante $p(\tau)$ dissipée en moyenne, sur une période, par effet Joule dans le volume τ et la puissance volumique moyenne $\tilde{p} = \dfrac{p(\tau)}{\tau}$.
   Exprimer $\tilde{p}$ en fonction de γ, ω et B_0.
   A.N. : $a = 5{,}0$ cm ; $\omega = 100\,\pi$ rad.s^{-1} ; $B_0 = 1{,}0$ T.
4. Un cube fait de plaques de cuivre isolées et empilées comme l'indique la figure ci-dessous, peut être soumis à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\,\cos(\omega\,t)\,\vec{u}_z$ ou $\vec{B} = B_0\,\cos(\omega\,t)\,\vec{u}_x$.



   Dans quel cas la puissance volumique moyenne dissipée par les courants dans la plaque, appelés courants de Foucault, est-elle la plus grande ?

Exercice 4 Plaque soumise à un champ magnétique variable

On considère une plaque infinie selon les directions Oy et Oz de conductivité γ et d'épaisseur est e située entre les plans $x = -\dfrac{e}{2}$ et $x = +\dfrac{e}{2}$. Cette plaque est placée dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\cos(\omega\,t)\,\vec{u}_z$.

On se place dans l'approximation de l'ARQS, en régime sinusoïdal établi et on travaille en notation complexe, *i.e.* on cherchera $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sous la forme $\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E_0}}(x,y,z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$ et $\underline{\vec{B}}(M,t) = \underline{\vec{B_0}}(x,y,z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}$.

1. Montrer que le champ magnétique obéit à l'équation aux dérivées partielles : $\vec{\Delta}\,\vec{B} = \mu_0\,\gamma\,\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.
2. En supposant que le champ $\vec{B}$ en $x = \pm\dfrac{e}{2}$ s'écrit, en notation complexe, $\underline{\vec{B}} = B_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\vec{u}_z$, déterminer la distribution de courant volumique $\vec{\jmath}$ au sein de la plaque.
   On utilisera les fonctions hyperboliques complexes.

Exercice 5 Émission radioactive

Une masse radioactive, ponctuelle, initialement neutre, située au point O émet, à partir de l'instant $t = 0$, des particules α avec une vitesse supposée constante et de façon isotrope : à l'instant t la charge électrique située en O est $q(t) = q_0\,(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1)$.

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ pour $t > 0$ et commenter.
2. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ et la densité volumique de courant $\vec{\jmath}(M,t)$ pour $t > 0$.

3. Vérifier la compatibilité des résultats obtenus avec la relation locale de conservation de la charge et avec les équations de Maxwell.

   On donne, pour un champ $\vec{a} = a(r,t)\,\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques : $\operatorname{div}\vec{a} = \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial(r^2\,a)}{\partial r}$.

4. En déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique, le vecteur de Poynting et la puissance volumique fournie par le champ électromagnétique aux particules α. Commenter.

Exercice 6 Dispositif accélérateur d'ions

Deux plaques parallèles infiniment fines, distantes de d_0 sont placées dans le vide. Elles sont portées respectivement aux potentiels $V_1 = 0$ et V_2. On injecte des ions positifs de masse m, de charge e, près de la grille 1. Il apparaît alors entre les grilles une densité volumique de charge $\rho(x)$ et un vecteur densité de courant ionique $\vec{J} = J(x)\,\vec{u}_x$ où Ox est un axe perpendiculaire aux plaques, l'origine étant prise au niveau de la grille 1. On cherche à relier $J(x)$ à la différence de potentiel entre les grilles 1 et 2. En $x = 0$, les ions ont une vitesse nulle. À l'abscisse x, la vitesse d'un ion est $v(x)$.

1. Montrer que $J(x)$ est indépendant de x. On le note J_0.
2. Établir trois relations relations reliant le potentiel électrostatique $V(x)$, la vitesse d'un ion $v(x)$ et la densité volumique de charges $\rho(x)$ dans le plan d'abscisse x.

   Quel est le signe de $V(x)$.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$ et la résoudre.

   On mettra $V(x)$ sous la forme $V(x) = A\,x^{4/3}$ où A est une constante à déterminer en fonction de j_0, ε_0, m et e.
4. Exprimer J_0 en fonction de V_2 pour des ions de masse molaire $M = 40$ g.mol^{-1} et des électrodes distantes de 10 cm. Donner alors l'allure de la courbe $J_0(V_2)$.

   Données : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-11}$ F.m^{-1} ; $\mathscr{N}_\mathrm{A} = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1}.
5. Montrer que $v(x) = \left(\dfrac{x}{d_0}\right)^p v(d_0)$ où p est un exposant rationnel à déterminer.

   En déduire l'expression du temps de transit τ d'un ion entre les plaques en fonction du potentiel V_2.

Exercice 7 Potentiel écranté

Une solution de chlorure de sodium contient c_0 ions sodium et c_0 ions chlorure par unité de volume. Elle est en équilibre thermique à la température T. On se propose de déterminer le potentiel électrostatique qui règne autour d'un ion positif puis de déterminer la surpression due à la présence d'espèces chargées dans la solution.

On suppose que les densités volumiques d'ions positifs $n_+(r)$ et d'ions négatifs $n_-(r)$ à la distance r de cet ion obéissent à la loi de Boltzmann : la densité n de particules de charges q est liée au potentiel par $n = n_0 \exp\left(-\dfrac{q\,V}{k_\mathrm{B}\,T}\right)$ où k_B est la constante de Boltzmann.

1. (a) Exprimer la densité volumique $\rho(r)$ de charges en un point M situé à la distance r de l'ion étudié.

   Que devient $\rho(r)$ si $e\,V \ll k_\mathrm{B}\,T$? Cette approximation est valable dans la suite de l'exercice.

   (b) Déterminer entièrement le potentiel électrostatique au point M.

   Pour une fonction $\xi(r)$, on a, en coordonnées sphériques :

$$\triangle\,\xi(r) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial \xi(r)}{\partial r}\right) \qquad \text{ou} \qquad \triangle\,\xi(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 (r\,\xi(r))}{\partial r^2}$$

(c) En déduire le champ électrique en M et la charge $Q(r)$ contenue dans la sphère de rayon r centrée sur l'ion.
Que vaut $\lim\limits_{r\to\infty} Q(r)$? Commenter.

2. (a) Quelle est l'énergie électrostatique de l'ion étudié ?
En déduire l'énergie électrostatique de toute la solution et montrer qu'elle se met sous la forme $U(T,\mathscr{V}) = \dfrac{-\alpha}{\sqrt{T\,\mathscr{V}}}$ où α est une constante positive à exprimer en foncion des données du problème et $\mathscr{V}$ le volume de la solution.

(b) En dédurie l'énergie libre associée à cette énergie potentielle. On utilisera la relation entre l'énergie interne et l'énergie libre :

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right)_{\mathscr{V}} = -\frac{U}{T^2}$$

(c) En déduire la variation de pression due à ces interactions électrostatiques.
Effectuer l'application numérique pour une solution de concentration $c_0 = 10^{-3}$ mol.L^{-1} à la température $T = 300$ K.

Exercice 8 Condensateur en régime variable

Les armatures d'un condensateur plan sont deux disques de rayon a, distants de e, d'axe (Oz). On applique une différence de potentiels sinusoïdale entre les armatures du condensateur.

1. Dans un premier temps, on suppose que le champ électrique, dans l'espace entre les armatures, est $\vec{E}_0 = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\vec{u}_z$ et on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-permanents.
Calculer le champ magnétique $\vec{B}_1$ dans le condensateur.
2. Le champ magnétique $\vec{B}_1$ étant variable, il est lui-même source d'un champ électrique $\vec{E}_2$, que l'on suppose nul sur l'axe (Oz).
Déterminer $\vec{E}_2$ et en déduire l'expression du champ électrique à l'intérieur du condensateur sous la forme :

$$\vec{E} = \left(1 - \alpha\left(\frac{r\,\omega}{c}\right)^2\right)\vec{E}_0$$

où α est une constante à déterminer.
À quelle condition se trouve-t-on dans le cadre de l'ARQP ?
Le champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B}_1)$ est-il compatible avec l'équation de Maxwell – Ampère ?
Comment pourrait-on résoudre la difficulté qui se pose ?
3. On cherche une solution exacte du problème sous la forme :

$$\vec{E}(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r\,\omega}{c}\right)^n \vec{E}_0 = E(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,\vec{u}_z$$

Montrer que $\triangle E(r) = -\dfrac{\omega^2}{c^2}\, E(r)$.

Déterminer la relation de récurrence entre les a_n.

On donne, dans le cas particulier d'un champ scalaire à symétrie cylindrique, le laplacien en coordonnées cylindriques : $\triangle \xi(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial \xi(r)}{\partial r}\right)$.

4. On donne les valeurs numériques des trois premiers zéros de la fonction $\dfrac{E(x)}{E_O}$ où $x = \dfrac{r\,\omega}{c}$: 2,40 ; 5,52 ; 8,65.

   À partir de quelle fréquence observe-t-on une région de champ nul dans le condensateur ? On prendra $a = 4$ cm.

Exercice 9 Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres métalliques d'axe Oz, de rayons a et $b > a$. La couronne cylindrique située entre ces deux conducteurs a les propriétés électromagnétiques du vide. Elle est le siège de champs électrique et magnétiques tels que (en coordonnée cylindrique d'axe Oz) :

$$\vec{E}(M,t) = E(r)\,\cos(\omega\,t - k\,z)\,\vec{u}_r \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(M,t) = \vec{B}_0(r)\,\cos(\omega\,t - k\,z)$$

On pourra travailler en notation complexe. On admet que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls pour $r < a$ et $r > b$.

1. Déterminer $E(r)$. On posera $E_a = \lim\limits_{r \to a^+} E(r)$.
2. Calculer $\vec{B}_0(r)$. On donne $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\lambda\,\vec{a}) = \lambda\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} + (\overrightarrow{\text{grad}}\,\lambda) \wedge \vec{a}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\,(f(r)\,\vec{u}_r) = \vec{0}$.
3. Quelle est la relation entre k et ω ? On donne $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{u}_\theta}{r}\right) = \vec{0}$.
4. Déteminer les densités surfaciques de charges σ_a et σ_b et de courant $\vec{\jmath}_{s,a}$ et $\vec{\jmath}_{s,b}$ sur les armatures cylindriques (en $r = a$ et $r = b$).

   Vérifier que l'équation de conservation de la charge sur les armatures est bien compatibles avec les expressions trouvées.
5. Vérifier que $\vec{A} = -\dfrac{a}{c}\,\ln\dfrac{r}{b}\,E_a\,\cos(\omega\,t - k\,z)\,\vec{u}_z$ est un potentiel vecteur possible.

   En déduire le potentiel scalaire $V(r,z,t)$ qui isera pris nul en tout point du conducteur extérieur.
6. Soit $U(z,t) = V(a,z,t)$ le potentiel du conducteur intérieur à l'abscisse z à l'instant t et $I(z,t)$ l'intensité du courant électrique porté par ce même conducteur.

   Montrer que $Z = \dfrac{U(z,t)}{I(z,t)}$ est indépendant de z et de t.

   Donner sont expression et son interprétation physique.
7. Déterminer le vecteur de Poynting puis la puissance moyenne qui traverse une section droite du câble.

   Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de Z et commenter.