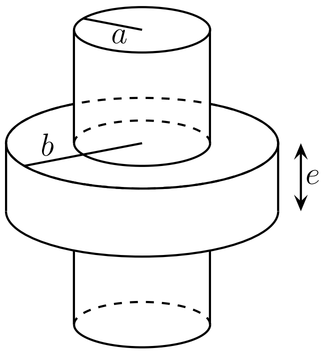
Induction

Exercice 1 Chauffage par induction

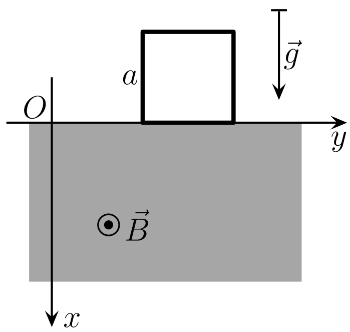
Le champ magnétique $\vec{B} = B(t)\,\vec{u}_z$ est uniforme dans le cylindre de rayon a.



Calculer la puissance moyenne perdue par effet Joule dans le disque conducteur de conductivité γ, d'épaisseur e et de rayon b. On justifiera auparavant que $\vec{E} = E(r,z,t)\,\vec{u}_\theta$. Il n'y a pas de conducteur à l'intérieur du cylindre de rayon a.

Exercice 2 Freinage par induction

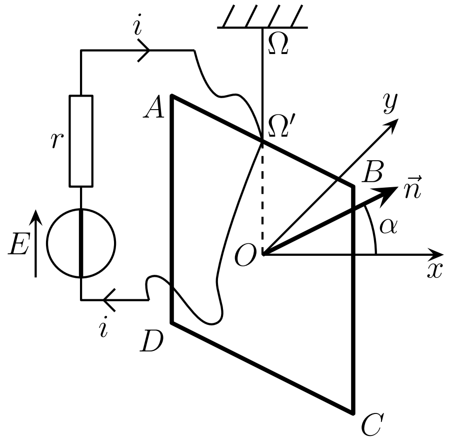
Une spire carrée de coté a, de masse m, tombe dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\,\vec{u}_x$. Dans le demi-espace $x > 0$, règne le champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B_0\,\vec{u}_z$. À l'instant $t = 0$, la spire se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-dessous, sa vitesse est $\vec{v} = v_0\,\vec{u}_x$, son côté inférieur est en $x = 0$.

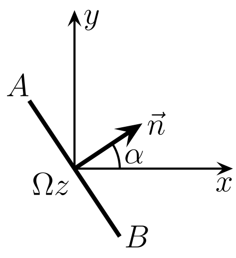


1. Montrer que le mouvement ultérieur de la spire reste une translation verticale selon l'axe Ox.
2. Soit R la résistance de la spire. Déterminer la vitesse $v(t)$ de la spire.
3. La spire a maintenant une résistance nulle (spire supraconductrice) et on note L son inductance propre. Reprendre l'étude précédente et préciser la condition d'oscillation de la spire.

Exercice 3 Appareil à cadre mobile

$ABCD$ est un cadre conducteur, de côté $2\,a$, de résistance R, de coefficient d'auto-induction négligeable, de moment d'inertie J par rapport à Ωz, constitué d'un enroulement de N spires identiques de surface S. Il est suspendu à un fil de torsion $\Omega\Omega'$, de longueur b, de constante de torsion C (on rappelle que le couple de rappel qui s'exerce sur le fil s'écrit $\vec{\Gamma} = -C\,\alpha\,\vec{u}_z$, où α est l'angle de torsion du fil). L'ensemble est plangé dans un champ magnétique radial, de norme uniforme au niveau des côtés AD et BC : $\vec{B} = B_0\,\vec{u}_{AB}$ où $\vec{u}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2\,a}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.





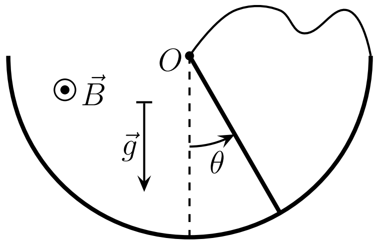
vue de dessus

La position du cadre est repérée par l'angle α entre l'axe Ox et la normale $\vec{n}$ au cadre. Quand le système est à l'équilibre, $\alpha = 0$. Au cours de son mouvement le cadre est soumis à un couple de frottement fluide : $\vec{\Gamma}_{\text{frott}} = -h\,\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z$. Le cadre est fermé sur un circuit électrique comportant en série une source de tension de f.é.m. E et une résistance r. Le système est abandonné sans vitesse dans la position définie par l'angle $\alpha_0 = 0$.

1. Analyser ce qui se passe.
2. Déterminer le moment des forces de LAPLACE par rapport à l'axe Ωz et la force électromotrice induite.
   En déduire l'équation mécanique du système puis l'équation électrique du circuit.
   On posera $\Phi_0 = 4\,a^2\,N\,B_0$.
3. Montrer que l'équation du mouvement du cadre se met sous la forme :
   $$\frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\,\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\,\alpha(t) = {\omega_0}^2\,\alpha_{\text{éq}}$$
   où τ, ω_0 et $\alpha_{\text{éq}}$ sont des constantes à déterminer en fonction des caractéristiques du système.
   Discuter des différents mouvements possibles selon les paramètres du problème.
4. Montrer que la mesure de la position d'équilibre du cadre permet de déterminer le courant i circulant dans le circuit électrique.

Exercice 4 BARRE MOBILE SUR UN RAIL CIRCULAIRE

Une barre conductrice est mobile sur un fil conducteur circulaire. Le circuit est fermé par un fil. La barre, de masse m et de longueur ℓ, est lâchée à l'instant $t = 0$, l'angle $\theta(0)$ étant petit, dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\vec{u}_z$. La liaison avec l'axe est parfaite. La résistance de la barre est R, les résistances des autres éléments du circuit sont négligeables.



Déterminer son mouvement et effectuer un bilan énergétique entre t et $t + \mathrm{d}t$.

On supposera que le champ magnétique est assez faible pour que le mouvement soit pseudo-périodique.

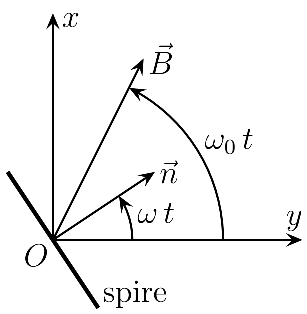
On donne : $J_{Oz} = \dfrac{m\,\ell^2}{3}$ et $J_{Gz} = \dfrac{m\,\ell^2}{12}$.

Exercice 5 Moteur asynchrone

Une spire plate, de surface S, de résistance R et d'inductance L, peut tourner librement autour de l'axe Oz. Elle est soumise à un champ magnétique uniforme dont la norme reste égale à B_0 mais dont la direction tourne au cours du temps : $\vec{B}(t) = B_0\,\vec{u}(t)$ où $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire orthogonal à Oz faisant l'angle $\varphi(t) = \omega_0\,t$ avec le vecteur $\vec{u}_x$.

La spire est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire ω. On pose $(\vec{u}_x,\vec{n}) = \omega\,t$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la spire (à l'instant $t = 0$, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{u}$ coïncident.)

On rappelle qu'une spire plane parcourue par un courant i, de surface S, de normale $\vec{n}$ orientée par i, est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathscr{M}} = i\,S\,\vec{n}$. Placée dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ uniforme sur sa surface, elle est soumise aux forces de Laplace dont la résultante est nulle et le moment égal à $\vec{\Gamma} = \vec{\mathscr{M}} \wedge \vec{B}$.



1. Déterminer, en régime permanent, l'intensité $i(t)$ dans la spire, le moment des forces de Laplace s'exerçant sur la spire puis sa moyenne temporelle.
   Commenter.
2. Effectuer un bilan énergétique entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.
   Le couplage est-il parfait ? Interpréter.
3. Comment peut-on créer le champ magnétique tournant ?

Exercice 6 Freinage d'un cylindre par induction

Un cylindre plein métallique, de conductivité γ, homogène, de masse m, de rayon R et de longueur L, roule sans glisser sur le sol horizontal.

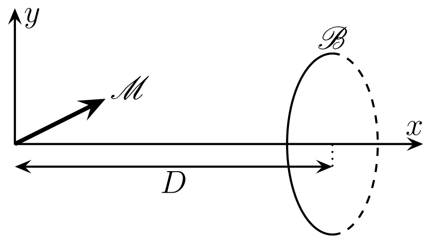
Tous les points de son axe ont une vitese $\vec{v}_0$, perpendiculaire à l'axe. Ce cylindre pénètre, à l'instant initial, dans une zone de champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ parallèle à $\vec{v}_0$. Ce champ existe sur une profondeur h inférieur à L de telle sorte que les deux extrémités du cylindre se trouvent à l'extérieur de la zone de champ.

Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe est noté J.

1. Décrire qualitativement la suite du mouvement.
2. Exprimer le champ électromoteur en un point M à l'instant t :
$$\vec{E}_{\mathrm{m}} = \vec{v}(M,t) \wedge \vec{B}_0$$
3. On admet que la loi d'Ohm s'écrit $\vec{\jmath} = \gamma\,\vec{E}_{\mathrm{m}}$ et on rappelle la densité volumique des forces de Laplace : $\vec{f}_{\mathrm{v}} = \vec{\jmath} \wedge \vec{B}_0$.
   (a) Établir les expressions de la résultante des forces de Laplace sur le cylindre et de leur moment par rapport à l'axe Oz.
   (b) Étudier l'évolution de la vitesse du cylindre.

Exercice 7 Interaction d'une bobine et d'un aimant tournant

Un dipôle magnétique de moment $\mathscr{M}$, contenu dans le plan (Oxy), tourne autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω. Une bobine $\mathscr{B}$ plate contenant N spires d'axe (Ox), de rayon a, de résistance totale R, d'inductance propre négligeable, est placée à la distance D de O.



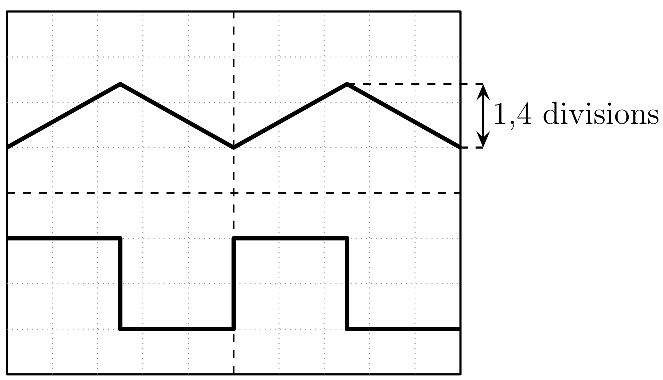
On rappelle qu'un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathscr{M}}$ est soumis de la part d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ à un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{\mathscr{M}} \wedge \vec{B}$.

1. Analyser le phénomène et justifier l'aciton d'un opérateur pour maintenir constante la vitesse de rotation du dipôle.
2. Déterminer le couple moyen $\left\langle \vec{\Gamma}_{\text{op}} \right\rangle$ que doit exercer l'opérateur pour maintenir constante la vitesse de rotation du dipôle.
   On posera $\Phi_0 = \dfrac{\mu_0 \, N \, a^2 \, \mathscr{M}}{2 \, (a^2 + D^2)^{3/2}}$.
3. L'opérateur cesse son action, à un instant pris comme origine des temps.
   Que se passe-t-il alors ?
   Déterminer l'équation vérifiée par θ dont a tourné le dipôle avant son arrêt. Le moment d'inertie du dipôle par rapport à l'axe (Oz) est noté J.

Exercice 8 Mesure d'un coefficient d'inductance mutuelle

On considère deux bobines identiques, formées de N spires circulaires de rayon R (bobines plates bobinées sur une seule épaisseur), d'inductance L, que l'on place de façon que les deux bobinages soient coaxiaux, avec le même sens d'enroulement, la distance entre leurs centres étant repérée le long de l'axe commun Oz par la longueur d. On se propose de mesurer le couplage entre les deux bibines en envoyant dans l'une d'elles, dite la première, une tension triangulaire et en comparant à l'oscilloscope cette tension avec la tension induite dans l'autre, celle-ci étant en circuit ouvert. On a branché en série entre le générateur de fonction et la première bobine une résistance $R' = 100\ \Omega$. On néglige la résistance R des bobines.

1. Faire le schéma du montage.
2. Les traces observées sur l'oscilloscope ont l'allure suivante :



Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

➜ balayage horizontal : 0,2 ms/div ;

➜ trace supérieure : 1 V/div ;

➜ trace inférieure variable (voir tableau).

En faisant varier la distance d entre les bobines, on observe pour l'amplitude crête à crête A du signal induit, mesurée en divisions de l'écran, les valeurs suivantes :

Calibre	0,01 V/div			5 mV/div			2 mV/div		1 mV/div
d (cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
A	4,3	3,3	2,6	4,3	3,4	2,3	4	2,1	2,4

Écrire les équations électriques du circuit.

Établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les deux bobines en fonction de la période T du signal d'entrée, de son amplitude crête à crête Δe, de l'amplitude crête à crête A du signal induit et de la résistance R'.

Calculer alors, en mH, l'inductance mutuelle entre les deux bobines pour chaque valeur de d.

3. Le champ magnétique créé par la première bobine, parcourue par un courant I_1, en un point de son axe situé à la distance z de son centre, est de la forme $\vec{B} = B_0(z)\,\vec{u}_z = I_1\,\varphi(z)\,\vec{u}_z$.

   Déterminer $\varphi(z)$.

   Montrer que, en un point proche de l'axe, le champ magnétique est, à l'ordre 2 en r :

$$\vec{B}(r,z) = -\frac{r}{2}\,\frac{\mathrm{d}B_0(z)}{\mathrm{d}z}\,\vec{u}_r + \left(B_0(z) - \frac{r^2}{4}\,\frac{\mathrm{d}^2B_0(z)}{\mathrm{d}z^2}\right)\vec{u}_z$$

   Exprimer le flux du champ magnétique créé par la première bobine à travers la deuxième.

   En déduire l'expression du coefficient d'inductance mutuelle entre les deux bobines, en fonction de R, N, $\varphi(d)$ et $\varphi''(d)$.

   On prend des bobines de 7 cm de rayon, comportant 100 spires. Le modèle théorique ci-dessus donne $M = 43\ \mu$H pour $d = 20$ cm et $M = 0{,}16$ mH pour $d = 5$ cm.

   Ces résultats sont-ils en accord avec les résultats expérimentaux ? Commenter.