Onde électromagnétique

Exercice 1 Polarisation des ondes électromagnétiques

1. Décrire l'état de polarisation des ondes suivantes :
   (a) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega\, t + k\, z)\, \vec{u}_x + E_0 \cos\left(\omega\, t + k\, z + \dfrac{\pi}{3}\right) \vec{u}_y$
   (b) $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega\, t - k\, z - \dfrac{\pi}{8}\right) \vec{u}_x + E_0 \cos\left(\omega\, t - k\, z - \dfrac{\pi}{8}\right) \vec{u}_y$
2. Donner l'expression d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le sens des x négatifs, à polarisation circulaire droite.

Exercice 2 Onde électromagnétique

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos\left(\dfrac{\pi\, y}{a}\right) \exp(\mathrm{j}\,(\omega\, t - k_0\, z)) \\ \underline{\alpha}\, E_0 \sin\left(\dfrac{\pi\, y}{a}\right) \exp(\mathrm{j}\,(\omega\, t - k_0\, z)) \end{array} \right.$$

où $\underline{\alpha}$ est complexe et k_0 positif.

1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0, ω, a et c.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à cette onde.
3. Cette onde est-elle plane ? progressive ? harmonique ? transverse électrique ? transverse magnétique ?
4. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.

Exercice 3 Réflexion d'une OPPMPC

Une OPPM polarisée circulairement droite se propageant dans le vide suivant le vecteur d'onde $\vec{k} = k\, \vec{u}_x$ tombe en $x = 0$ sur un plan métallique parfaitement conducteur.

On admet que le champ électrique est nul en $x = 0$.

On choisit l'origine de temps de telle sorte que $E_{\mathrm{i},z}(0,0) = 0$ et $E_{\mathrm{i},y}(0,0) = E_0 > 0$.

1. Écrire les composantes du champ électrique $\vec{E}_{\mathrm{i}}(x,t)$ de l'onde incidente en fonction de x, ω, t, k et E_0.
   En déduire les expressions du champ magnétique et du vecteur de Poyting de l'onde incidente.
2. Quel est le vecteur d'onde de l'onde réfléchie ?
   Déterminer les composantes du champ électrique $\vec{E}_{\mathrm{r}}(x,t)$ de l'onde réfléchie en fonction de x, ω, t, k et E_0.
   Quelle est sa polarisation ?
   En déduire les expressions du champ magnétique et du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie.
   Même question pour l'onde résultante (superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie).
3. Déterminer les densités surfaciques de charges et de courant à la surface du conducteur parfait.

Exercice 4 Réflexion sur un métal réel

Une onde électromagnétique, plane, progressive, monochromatique, arrive sous incidence normale sur un milieu conducteur, de conductivité γ, occupant le demi espace $z > 0$. Le vecteur d'onde de l'onde incidente est $\vec{k}_0 = k_0\,\vec{u}_z$, son champ électrique s'écrit, en notation complexe : $\vec{E}_\text{i} = \vec{E}_0\,\text{e}^{\text{j}\,(\omega\,t - k_0\,z)}$.

1. Établir la relation de dispersion dans le métal en faisant les approximations qui s'imposent.
2. L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie et à une onde transmise.
   Déterminer les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ pour l'amplitude du champ électrique.
3. Déterminer le pouvoir réflecteur du milieu métallique défini comme le rapport de l'énergie réfléchie et de l'énergie incidente en $z = 0$.
4. Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre d'axe Oz, de surface de base S, s'étendant du plan $z = 0$ jusqu'à l'infini.
   Comparer à la puissance transmise par l'onde incidente en $z = 0$. Conclusion.

Exercice 5 Dispersion dans le plasma interstellaire

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m, de charge $-e$, de nombre volumique n, en mouvement non relativiste de vitesse v, et d'ions supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes électromagnétiques. Avec ces hypothèses, on cherche des solutions des équations de Maxwell sous la forme d'ondes planes progressives monochromatiques (appelées OPPM dans la suite) de vecteur d'onde $\vec{k}$, de pulsation ω :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\,\text{e}^{\text{i}\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t)} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\,\text{e}^{\text{i}\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t)}$$

1. (a) Montrer que de telles solutions n'existent que si la densité de courant $\vec{\jmath}$ des électrons est elle-même une OPPM de même vecteur d'onde et de même pulsation, c'est-à-dire de la forme :

   $$\vec{\jmath}(\vec{r},t) = \vec{\jmath}_0\,\text{e}^{\text{i}\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\,t)}$$

   (b) Montrer que $\vec{\jmath}$ est orthogonal à $\vec{k}$.
2. Écrire l'équation du mouvement de l'électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable.
   Montrer que les vecteur $\vec{\jmath}$ et $\vec{E}$ son colinéaires et déterminer la conductivité $\underline{\sigma}$ du plasma. Commenter.
3. À l'aide des équations de Maxwell, exprimer $\vec{\jmath}_0$ en fonction de ω, $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$.
   En déduire une nouvelle expression de $\underline{\sigma}$.
4. En déduire la relation de dispersion $\omega(k)$.
   En posant $K = \sqrt{\dfrac{\mu_0\,n\,e^2}{m}}$, établir les expressions des vitesses de phase et de groupe des ondes électromagnétiques dans le plasma.
   Quelle relation vérifient-t-elles ?
5. Deux trains d'ondes de longueur d'onde respectives λ_1 et $\lambda_2 > \lambda_1$ sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L.
   En supposant $K_2\,{\lambda_1}^2 \ll 1$ et $K_2\,{\lambda_2}^2 \ll 1$, montrer que le terme principal dans la différence $\delta t = t_2 - t_1$ des temps de réception des deux signaux est donné par :

$$\delta t = \frac{L\,K^2}{8\,\pi^2\,c}({\lambda_2}^2 - {\lambda_1}^2)$$

A.N. : des mesures de dispersion à partir de de signaux émis par le pulsar du Crabe conduisent à une limite supérieure égale à $2{,}8.10^4$ m^{-3} pour le nombre volumique n des électrons du plasma interstellaire.

Quelle serait dans ces conditions la limite δt pour $\lambda_1 = 0{,}4$ μm et $\lambda_2 = 0{,}8$ μm de signaux émis par une étoile située à $L = 10^3$ année lumière.

Exercice 6 Pression de radiation

1. Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence ν, de propageant dans la direction et le sens de $\vec{u}_x$, dont le champ électrique est $\vec{E} = E_0\,\cos(\omega\,t - k\,x)\,\vec{u}_y$. On rappelle que l'éclairement $\mathscr{E}$ est la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation.
   Exprimer $\mathscr{E}$ en fonction de ε_0, c et E_0.
2. On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de $\vec{u}_x$. L'énergie d'un photon associé à cette onde est $h\,\nu$ et sa quantité de mouvement est $\dfrac{h\,\nu}{c}\,\vec{u}_x$.
   (a) Exprimer le nombre N_0 de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à Ox en fonction de $\mathscr{E}$ et de ν.
   (b) L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à Ox d'aire S, parfaitement réfléchissante. On étudie le rebond des photons sur cette surface.
   Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon – paroi ?
   Quelle est la force subie par la paroi en fonction de $\mathscr{E}$, S et c ?
   Exprimer la pression p subie par la paroi en fonction de $\mathscr{E}$ et c puis en fonction de ε_0 et E_0.
   (c) Reprendre la question ci-dessus lorsque la paroi est parfaitement absorbante.
   (d) Calculer $\mathscr{E}$, E_0 et p sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre $d = 5$ mm et une puissance moyenne de 100 W (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles.)
3. (a) L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon a, bien inférieure au rayon du faisceau.
   Quelle est, en fonction de $\mathscr{E}$, a et c la force $\vec{F}$ subie par la sphère ?
   (b) Le Soleil donne au voisinage de la Terre (juste au dessus de l'atmosphère terrestre) l'éclairement $\mathscr{E} = 1{,}4.10^3$ W.m^{-2}. L'émission est isotrope, la distance Terre – Soleil est égale à $D = 150.10^6$ km et sur une surface de dimension petites devant D, l'onde arrivant du Soleil est quasi plane.
   Quelle est la puissance P_0 émise par le Soleil ?
   Un objet sphérique, de rayon a, de masse volumique μ, est, dans le vide interplanétaire, à la distance r du Soleil et absorbe totalement le rayonnement solaire.
   Évaluer le rapport entre la force due à l'absorption du rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :
   ➜ cas d'une météorite : $\mu = 3{,}0.10^3$ kg.m^{-3} et $a = 1$ m
   ➜ cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3} et $a = 0{,}1$ μm
   Commenter.
   On donne la constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} et la masse du Soleil : $M_\text{S} = 2.10^{30}$ kg.

Exercice 7 Onde cylindrique

On étudie une onde électromagnétique cylindrique, émise par des sources situées le long d'un axe Oz. En coordonnées cylindriques d'axe Oz, le champ électrique s'écrit $\vec{E}(M,t) = E(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k r)}\,\vec{u}_z$ où $E(r)$ est réel dans la zone de champ lointain où $k\,r \gg 1$. L'onde se propage dans le vide.

1. Déterminer le champ magnétique associé à ce champ électrique.
   Commenter son expression.
2. Quelle est la valeur moyenne $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle$ du vecteur de Poynting ?
   En déduire la puissance moyenne rayonnée à traver un cylindre d'axe Oz de hauteur $h = 1$ m et de rayon $r \gg \dfrac{1}{k}$.
3. En déduire l'expression de $E(r)$ en fonction de r, $\mathscr{P}$, k, ω et μ_0.
4. En déduire la relation de dispersion reliant k et ω en négligeant les termes en $\left(\dfrac{1}{k\,r}\right)^2$.
   On rappelle l'expression du laplacien d'un champ scalaire de la forme $U(r,t)$ en coordonnées cylindriques :
   $$\triangle U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial U}{\partial r}\right)$$
5. Donner les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et décrire la structure de l'onde.

Exercice 8 Rayonnement d'une antenne demi-onde

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz, de longueur ℓ, centrée à l'origine, est le siège d'un courant électrique sinusoïdal d'intensité $\underline{I}(z,t) = \underline{I_0}\,\cos\left(\dfrac{2\,\pi\,z}{\lambda}\right)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$ avec $\lambda = \dfrac{2\,\pi\,c}{\omega}$.

On suppose que $\ell = \dfrac{\lambda}{2}$ (antenne demi-onde).

On admet que cette antenne se comporte comme un ensemble de dipôles électriques oscillants de moment $\mathrm{d}\underline{\vec{p}} = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega}\,I(z,t)\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_z$, *i.e.* qu'un élément de longueur $\mathrm{d}z$ est assimilable à un dipôle de moment $\mathrm{d}\underline{\vec{p}} = q\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_z$ avec $i(z,t) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

1. Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) d'origine O, d'axe Oz. Soient (r',θ',φ') les coordonnées sphériques de M dans un système d'origine S, point de Oz, et toujours d'axe Oz. On se place dans la zone de rayonnement, $r \gg \lambda$.
   Montrer que l'on a approximativement $r' = r - z\,\cos\theta$ et $\dfrac{\sin\theta}{r} = \dfrac{\sin\theta'}{r'}$.
   En déduire, en utilisant la formule du champ de rayonnement d'un dipôle oscillant, l'expression du champ magnétique $\mathrm{d}\vec{B}$ créé par l'élément de longueur $\mathrm{d}z$ de l'antenne.
   Montrer alors que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :
   $$\underline{\vec{B}}(M,t) = \mathrm{j}\,\frac{\mu_0\,I_0}{2\,\pi\,r}\,\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\,\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,(t - r/c)}\,\vec{u}_\varphi$$
2. On admet que localement le champ électromagnétique rayonné par l'antenne a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation $\vec{u}_r$.

Calculer alors le vecteur de Poynting en M et sa valeur moyenne dans le temps.
Dans quelle direction rayonne-t-elle le plus d'énergie ?
Calculer la puissance moyenne $\mathscr{P}$ rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r.

On donne $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 1{,}22$.

En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne définie par $\mathscr{P} = R\,{I_{\text{eff}}}^2$.