Ondes dans un milieu diélectrique

Exercice 1 Onde dans un milieu diélectrique LHI

On considère une onde électromagnétique, de fréquence 1 GHz dont le champ électrique est polarisé rectilignement selon $\vec{u}_y$ et se propageant selon $\vec{u}_x$ dans un milieu diélectrique de permitivité relative $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 2{,}56$, de perméabilité magnétique μ_0, non conducteur.

1. Donner la relation de dispersion.
2. Calculer la norme du vecteur d'onde.
3. Déterminer le champ magnétique et calculer le rapport des normes des champs électrique et magnétique.
4. Calculer la célérité de l'onde.

Exercice 2 Couche anti-reflet

Une OPPM polarisée rectilignement se propage dans l'air (d'indice 1 !) dans la direction des z croissants et atteint sous incidence normale une plaque de verre d'indine n, recouverte d'une couche d'épaisseur e, transparente, d'indice n_0 (on choisira l'origine de l'axe des z au milieu de la couche d'indice n_0). L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans l'air, une onde réfléchie, une onde transmise dans la couche intermédiaire et une onde transmise dans le verre d'indice n.

Écrire les champs électriques et magnétiques de chacune de ces ondes (en notation complexe) puis les relations de continuité en $z = -\dfrac{e}{2}$ et $z = \dfrac{e}{2}$.

Comment faut-il choisir n_0 et e pour annuler l'onde réfléchie dans l'air ?

Exercice 3 Incidence de Brewster

Une OPPM polarisée rectilignement se propage dans le vide et atteint sous une incidence définie par l'angle i un milieu diélectrique transparent d'indice n. On cherche un angle i particulier pour lequel aucune onde n'est réfléchie. Cet angle, noté i_{B}, est appelé *angle de Brewster*.

Rappeler les conditions aux limites que doivent satisfaire les champs de part et d'autre de la surface de séparation entre le vite et le diélectrique.

Déterminer l'angle de Brewster en privilégiant le dessin au calcul. On envisagera les cas où le champ électrique est polarisé dans plan d'incidence ou perpendiculairement à celui-ci.

Calculer sa valeur pour $n = 1{,}5$.

Exercice 4 Réflexion-transmission sous incidence quelconque v.2

Reprendre le calcul du coefficient de réflexion en amplitude de l'exercice précédent dans le cas d'une onde polarisée rectilignement dans le plan d'incidence.

Commenter.

Les champs électriques des ondes incidente, réfléchie et transmise sont notés :

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{E}_{\mathrm{i}}(\vec{r},t) = E_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}_{\mathrm{i}}\cdot\vec{r})}\,\vec{u}_{\mathrm{i}} \\ \vec{E}_{\mathrm{r}}(\vec{r},t) = r'\,E_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{r})}\,\vec{u}_{\mathrm{r}} \\ \vec{E}_{\mathrm{t}}(\vec{r},t) = t'\,E_0\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}_{\mathrm{t}}\cdot\vec{r})}\,\vec{u}_{\mathrm{t}}\end{array}\right.$$

où $\vec{u}_{\mathrm{i}}$, $\vec{u}_{\mathrm{r}}$ et $\vec{u}_{\mathrm{t}}$ sont les vecteurs unitaires donnant les directions des champs électriques. Ils appartiennent au plan d'incidence xOz défini par le vecteur d'onde incident $\vec{k}_{\mathrm{i}}$ et la normale au dioptre

$\vec{N} = \vec{u}_z$ et se déduisent respectivement des vecteurs $\vec{k}_\mathrm{i}$, $\vec{k}_\mathrm{r}$ et $\vec{k}_\mathrm{t}$ par une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ autour du vecteur $\vec{u}_y$ normal au plan d'incidence. Les angles de ce plan sont orientés par $\vec{u}_y$.

Exercice 5 Susceptibilité d'un diélectrique

On étudie un modèle microscopique de milieu diélectrique parfait, homogène, isotrope, localement neutre.

Il est constitué d'atomes schématisés selon le modèle de Thomson : chaque noyau, de charge $+e$, est supposé fixe, l'électron de charge $-e$, qui lui est associé est soumis de sa part à une force de rappel $\vec{f} = -\lambda\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur position de l'électron par rapport au noyau autour duquel il est lié et λ une constante positive.

On note N le nombre d'atomes par unité de volume et m la masse d'un électron. On étudie la propagation d'une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique, décrite en notation complexe par :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = \underline{\vec{E}_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

1. Écrire l'équation régissant le mouvement d'un électron.
   La simplifier compte tenu du fait que l'électron n'est pas relativiste.
2. Définir et exprimer le vecteur densité de courant $\vec{\jmath}$ lié au mouvement des électrons du milieu.
3. Établir l'expression de la susceptibilité électrique $\underline{\chi_\mathrm{e}}(\omega)$ du milieu étudié.
   Tracer les courbes représentant sa partie réelle et sa partie imaginaire en fonction de ω.
4. Déterminer l'équation de dispersion $\underline{k}^2 = f(\omega^2)$.
   Tracer la courbe correspondante.
   Dans quel domaine de fréquence l'onde peut-elle se propager dans le milieu ?

Exercice 6 Réflexion totale, onde évanescente

Un milieu diélectrique d'indice d'indice $n > 1$ occupe le demi-espace $y < 0$ tandis que l'air d'indice 1 occupe le demi-espace $y > 0$. Une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}_\mathrm{i}$, se propageant dans le milieu d'indice n tombe sur la surface de séparation $y = 0$ avec un angle d'incidence $(\vec{u}_y,\vec{k}_\mathrm{i}) = \theta$. On pose $\alpha = \dfrac{n\,\omega}{c}\cos\theta$ et $\beta = \dfrac{n\,\omega}{c}\sin\theta$.

1. Rappeler sans démonstration les lois de Snell – Descartes.
   Quelle est la valeur limite θ_L de θ au-delà de laquelle il y a réflexion totale ?
   Dans toute la suite on supposera $\theta_\mathrm{L} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.
2. Le champ électrique de l'onde incidente s'écrit, en un point M de l'espace, en notation complexe : $\underline{\vec{E}_\mathrm{i}} = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - \vec{k}_\mathrm{i}\cdot\vec{r})}\,\vec{u}_x$ où E_0 est une constante réelle et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$;
   Exprimer le champ magnétique $\vec{B}_\mathrm{i}$ de l'onde incidente.
3. Nous admettrons que le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit en notation complexe :
   $$\underline{\vec{E}_\mathrm{r}} = \underline{\vec{E}_{0\mathrm{r}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - \vec{k}_\mathrm{r}\cdot\vec{r})}\,\vec{u}_x$$
   Exprimer le champ $\vec{B}_\mathrm{r}$ de l'onde réfléchie.
4. Montrer que l'onde incidente donne naissance, en plus de l'onde réfléchie détrite ci-dessus, à une onde transmise.

5. On admet que le champ électrique de l'onde transmise s'écrit :

$$\underline{\vec{E}_{\rm t}} = \underline{\vec{E}_{\rm 0t}}\,\mathrm{e}^{-k_2\,y+\mathrm{j}\,(\omega\,t-k_1\,z)}\,\vec{u}_x$$

   Établir une relation entre k_1 et θ, puis une relation entre k_2 et θ.

6. (a) Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{r} = \dfrac{\underline{E_{\rm 0r}}}{\underline{E_0}}$, puis le coefficient de réflexion en énergie en $y = 0$.
   (b) Déterminer le coefficient de transmission en amplitude $\underline{t} = \dfrac{\underline{E_{\rm 0t}}}{\underline{E_0}}$, puis le coefficient de transmission en énergie en $y = 0$.
   (c) Conclure quant au transfert en énergie.
7. Le milieu diélectrique, d'indice $n > 1$, occupe des domaines $y < 0$ et $y > L$, tandis que l'air, d'indice 1, occupe la zone $0 < y < L$. Une onde plane progressive harmonique se propage dans la zone $y < 0$ et arrive sur la surface de séparation $y = 0$ avec un angle $\theta > \theta_{\rm L}$.
   Expliquer qualitativement ce qu'il se passe si L est « assez faible » (à préciser).

Exercice 7 Polarisation d'orientation

Dans cet exercice, nous considérons un milieu matériel dont les molécules présentent un moment dipôlaire permanent $\vec{p}$. En l'absence de champ électrique extérieur, sous l'effet de l'agitation thermique, l'orientation des dipôles est aléatoire et le vecteur polarisation est nul. Sous l'action d'un champ électrique, le matériau acquiert une polarisation $\vec{P}$ relié au champ électrique par l'équation :

$$\tau\,\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} + \vec{P} = \varepsilon_0\,\chi_0\,\vec{E}$$

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive, monochromatique, dont le champ électrique s'écrit en complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$$

On suppose que le champ électrique de l'onde est transverse.

Le vecteur d'onde $\underline{\vec{k}}$ est éventuellement complexe. Ce milieu est conducteur, de conductivité σ et il n'a pas de propriétés magnétiques.

1. Quelle est la signification physique de la constante τ ?
2. (a) Déterminer la susceptibilité complexe $\underline{\chi_{\rm e}}(\omega)$ de ce milieu, en fonction de τ, ω et χ_0.
   (b) On pose $\underline{\chi_{\rm e}}(\omega) = \chi'_{\rm e}(\omega) - \mathrm{i}\,\chi''_{\rm e}(\omega)$.
   Exprimer $\chi'_{\rm e}(\omega)$ et $\chi''_{\rm e}(\omega)$, tracer l'allure de leur graphe.
   Interpréter le comportement du matériau aux fréquences faibles et aux fréquences élevées.
   (c) On se place dans le cas de l'eau : $\tau = 10^{-12}$ s, à la fréquence d'utilisation des fours à micro-onde : $f = 2{,}45$ GHz.
   Calculer $\omega\,\tau$, en déduire une expression simplifiée de $\underline{\chi_{\rm e}}$.
3. Établir la relation de dispersion $\underline{k}^2 = f(\omega)$ en fonction de ω, c, χ_0, τ et σ.
4. À la fréquence de 2,45 GHz utilisée dans les fours à micro-onde, l'eau a une permitivité relative $\underline{\varepsilon_{\rm r}}$ de module $|\underline{\varepsilon_{\rm r}}| = 76$.
   (a) Pour l'eau pure, $\sigma = 10^{-7}$ S.m^{-1}.
   Comparer $\dfrac{\sigma}{\omega\,\varepsilon_0}$ et $\chi_0\,\omega\,\tau$ puis conclure.

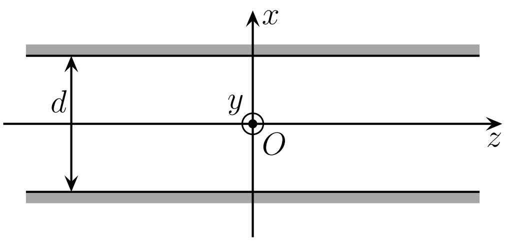
(b) Une pâte alimentaire humide (de la pâte à brioche par exemple) contient toujours des composés ioniques. On considère que le produit $\chi_0\,\tau$ pour la pâte humide est du même ordre de grandeur que pour l'eau. La conductivité de la pâte est $\sigma = 0{,}01$ S.m^{-1}.
Les sels minéraux ont-ils une influence ?

(c) En déduire une expression simplifiée de $\underline{k}^2$.

5. On pose $\underline{k} = k_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\Phi}$.
Donner les expressions de k_0 et Φ en fonction de χ_0, ω, τ et des constantes usuelles.
6. On suppose que $\vec{\underline{k}} = \underline{k}\,\vec{u}_z$.
Montrer que l'onde est absorbée par le milieu et déterminer la distance caractéristique d'atténuation de l'onde en amplitude, notée δ.
7. (a) Dans le cas de l'eau, calculer Φ et δ.
(b) Même question dans le cas d'une pâte alimentaire sèche de permitivité relative $\varepsilon_\mathrm{r} = 10$ et de même temps de relaxation que l'eau.
Conclure.
8. Donner un ordre de grandeur de la taille caractéristique de la pâte pour que la puissance fournie par l'onde soit à peu près uniforme dans tout son volume. On s'intéressera à une pâte humide puis à une pâte sèche.
9. Pour éviter que les micro-ondes ne sortent du four, on recouvre ses parois d'une épaisseur e d'aluminium.
Interpréter et évaluer l'épaisseur e minimale nécessaire.

Exercice 8 Principe de guidage d'une onde lumineuse

On s'intéresse à la propagation d'une onde électromagnétique de pulsation ω dans un guide représenté sur la figure ci-dessous :



Ce guide est constitué d'une couche cœur infinie d'arséniure de gallium (GaAs), d'épaisseur d, insérée entre deux plans parfaitement conducteurs, totalement réfléchissants. L'arséniure de gallium est un matériau semi-conducteur que l'on considérera comme un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope et non magnétique. À la pulsation ω de l'onde, son indice vaut $n = 3{,}3$.

1. Montrer que le champ électrique de l'onde obéit à l'équation :

$$\vec{\Delta}\,\vec{E} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\omega^2\,n^2\,\vec{E} = \vec{0}$$

2. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par le champ électromagnétique ?
3. On se limite au cas de la propagation des ondes transverses électriques pour lesquelles le champ $\vec{E}$ est orienté selon Oy et on cherche une solution de l'équation vérifiée par $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E}(M,t) = \mathfrak{Re}\big(F(x,y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\beta\,z-\omega\,t)}\big)\,\vec{u}_y$$

où β est une constante positive.

(a) Justifier le fait que $F(x,y)$ ne dépendent pas de y.

(b) Écrire l'équation différentielle et les conditions aux limites vérifiées par $F(x)$. On posera $k = \dfrac{\omega}{c}$ où c est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.
Montrer que ces conditions ne peuvent être satisfaites que si $\beta < k\,n$.

(c) On pose $\alpha^2 = k^2\,n^2 - \beta^2$ avec α positif.
Montrer alors que les solutions n'existent que pour des valeurs discrètes α_p de α que l'on déterminera.

(d) Dans le cas d'une onde de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1{,}4\ \mu$m, comment doit-on choisir l'épaisseur d de la couche de GaAs pour que le guide n'admette qu'un seul mode propre ?

4. On se place dans les conditions où le guide n'admet qu'un seul mode.
Donner l'expression du champ électrique correspondant à ce mode.