

## Mécanique du point

---

### ✿ Exercice 1

Ici, c'est l'équilibre. Intuitivement, nous pouvons déjà dire que plus  $m_1$  est grand, plus  $m_2$  sera haut donc plus  $\theta$  sera petit. Ceci dit, nous ne connaissons pas de lois permettant d'étudier un système comportant plusieurs masses. Il faudra donc étudier chaque masse à part et ensuite rassembler les résultats. Concrètement, il est évident que ce qui lie les trois masses est le point de jonction des trois fils. C'est donc lui qu'il faudra étudier à un moment ou à un autre.

► **Étude des systèmes  $m_1$ .** Chacune des deux masses  $m_1$  est soumise à deux forces : son poids  $\vec{P}_1$  et la tension du fil  $\vec{T}_1$ .

La condition d'équilibre donne :  $\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = \vec{0}$  soit, en norme :  $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{P}_1\|$ , i.e.  $T_1 = P_1 = m_1 g$ .

► **Étude du système  $m_2$ .** Ce système est lui aussi soumis à deux forces : la tension  $\vec{T}_2$  du fil et son poids  $\vec{P}_2$ . Avec le même raisonnement que ci-dessus, nous arrivons à  $P_2 = T_2$  soit à  $T_2 = m_2 g$ .

► **Étude du point de jonction des trois cordes.** Considérons le point de jonction qui un point matériel sans masse (les fils considérés sont idéaux, donc sans masse). Sur ce point matériel s'appliquent trois forces :

- il n'y a pas de poids puisque le point matériel est sans masse
- la force  $\vec{T}'_1$  exercée par le fil de gauche
- la force  $\vec{T}''_1$  exercée par le fil de droite
- la force  $\vec{T}'_2$  exercée par le fil du dessous

En projetant la condition d'équilibre sur  $\vec{u}_z$ , nous arrivons à  $T'_1 \sin \theta + T''_1 \sin \theta - T'_2 = 0$  (☼).

► **Caractérisation de l'équilibre.** Comme les fils et les poulies sont idéaux, nous  $T'_1 = T_1$ ,  $T''_1 = T_1$  et  $T'_2 = T_2$ .

En utilisant, dans l'équation (☼), les expressions précédemment trouvées pour  $T_1$  et  $T_2$ , nous aboutissons à :  $\boxed{\sin \theta = \frac{m_2}{2m_1}}$ .

☞ *Remarque.* comme nous pouvions envisager notre intuition, même si  $m_1$  devient très grande l'équilibre sera toujours possible (avec  $\theta$  de plus en plus petit) mais si  $m_2$  est vraiment trop grand (ici  $m_2 > 2m_1$ ), l'équilibre n'est plus possible.

### ✿ Exercice 2

Nous sentons bien que si l'une des deux masses est plus élevée que l'autre, c'est elle qui tombera pendant que l'autre remontera. De plus étant donné la présence du fil, le mouvement est contraint pour les deux points matériels : il sera rectiligne.

Techniquement parlant, nous ne pouvons pas étudier les deux masses en même temps puisque nous ne connaissons qu'une loi de dynamique qui ne parle que d'un point. Il va donc falloir étudier séparément les deux masses.

Étudions le mouvement dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Le système constitué par la masse  $m_1$  est soumis à 2 forces : son poids  $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$  et la tension que le fil exerce sur elle  $\vec{T}_1 = T_1 \vec{u}_z$  ( $\vec{u}_z$  est vertical vers le haut). Ainsi le PFD appliqué à  $M_1$  s'écrit (en projection sur  $\vec{u}_z$ ) :  $m_1 a_1(t) = -m_1 g + T_1$ .

Le même raisonnement appliqué à  $m_2$  donne :  $m_2 a_2(t) = -m_2 g + T_2$ .

Comme le fil est idéal avec une poulie idéale, nous pouvons écrire (loi constitutive du fil)  $T_1 = T_2$ .

Remarquons qu'à ce niveau là, nous avons juste dit que les masses étaient reliées par un fil, nous n'avons pas dit précisément comment ils étaient reliés c'est-à-dire ce que nous pouvons déduire du mouvement de l'un connaissant le mouvement de l'autre.

De plus, comme le fil est inextensible, si  $M_1$  monte  $M_2$  descend et réciproquement, ce qui nous donne la relation  $a_1(t) = -a_2(t) \stackrel{\text{not}}{=} a(t)$ .

En rassemblant ces deux résultats et en « éliminant »  $T_1$  et  $T_2$  dans les équations précédentes, nous arrivons à :

$$(m_1 + m_2) a(t) = -(m_1 - m_2) g \quad \rightsquigarrow \quad a(t) = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = C^{\text{te}}$$

Ainsi nous retrouvons bien que si  $m_2 > m_1$ ,  $a_1 = a > 0$ , i.e. que si  $M_2$  est plus lourde que  $M_1$ ,  $M_1$  est accélérée vers le haut.

*Rien de tel qu'un bon PFD pour trouver une force de contact inconnue.*

Le PFD donne  $T_1 = m_1 a_1 + m_1 g$  soit, après calculs :  $T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$ .

☞ *Remarque.* nous constatons donc que  $T_1 \neq m_2 g$  ce qui est contraire à l'idée reçue selon laquelle  $T_1 = P_2$ , i.e. que  $M_2$  « tire »  $M_1$  vers le haut de tout son poids. Et pourtant il n'y a aucune raison pour que la force que le fil exerce sur  $M_1$  soit de même intensité que la force que la Terre exerce sur  $M_2$  !

### ✿ Exercice 3

1. Le terme en  $\alpha m$  est un terme indépendant de la vitesse, il vient d'un frottement de type solide. Il peut s'agir :

- soit d'un glissement des roues sur la route (un dérapage) lorsque celles-ci sont bloquées ;
- soit du contact du frein sur le disque de frein lorsque le chauffeur freine sans déraper. La force de freinage est alors indépendante de  $m$  en toute rigueur mais reste néanmoins constante.

2. *Analyse physique.* Ici la trajectoire est horizontale et rectiligne. La seule partie intéressante du PFD sera sa projection horizontale. Pour le reste, il n'y a pas grand chose à dire : tout est décrit dans l'énoncé ce qui réduit cet exercice à un exercice de calcul. Nous nous consolerons au niveau de la physique avec la première question et en interprétant les résultats.

*Analyse technique.* Nous cherchons une évolution temporelle puisqu'il nous faut la date d'arrêt. Soit, ce sera un PFD. Après, il faudra user de force brute pour résoudre l'équation différentielle non linéaire qui se profile à l'horizon.

Le PFD appliqué à la voiture s'écrit, en projection sur  $\vec{u}_x$  (direction et sens de déplacement) :

$$m \frac{dv(t)}{dt} = -\alpha m - m \beta v^2(t)$$

#### ► Résolution classique en $v(t)$ et $x(t)$ .

Le PFD peut se réécrire sous la forme d'une équation différentielle à variables séparables :

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\alpha - \beta v^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv}{\alpha + \beta v^2} = -dt$$

Nous pouvons alors la primitiver car nous reconnaissons la fonction  $\frac{1}{a^2 + x^2}$  :

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha \beta}} \left[ \arctan \left( v(t) \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) - \arctan \left( v_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \right] = -(t - 0)$$

Nous pouvons alors isoler  $v(t)$  :

$$\boxed{v(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tan \left[ \sqrt{\alpha \beta} (T - t) \right]} \quad \text{où} \quad \boxed{T = \frac{1}{\sqrt{\alpha \beta}} \arctan \left( v_0 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right)}$$

$T$  s'interprète comme la durée au bout de laquelle le véhicule stoppe. Nous pouvons constater que plus les frottements sont importants (*i.e.* plus  $\alpha$  ou  $\beta$  sont grands), plus cette durée est courte. C'est évident pour  $\alpha$  et pour  $\beta$  il n'est pas trop difficile de le voir en pensant que  $\arctan x$  est une fonction bornée.

Pour obtenir  $x(t)$ , il suffit de primitiver la fonction précédente ( $\tan x$ ) ce qui ne pose aucune autre difficulté que de bien faire attention aux constantes multiplicatives :

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{\cos(\sqrt{\alpha \beta} T)}{\cos(\sqrt{\alpha \beta} (T - t))} \right)}$$

### ► Résolution en $v(x)$ .

Nous pouvons toujours éliminer  $t$  entre les deux expressions de la vitesse (en pensant notamment à la relation  $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ ) mais nous pouvons aussi résoudre directement en  $v(x)$ .

Pour cela il faut transformer l'équation différentielle à l'aide de la relation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \times \frac{dv}{dx} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

Cela donne :

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\alpha - \beta v^2(t) \quad \rightsquigarrow \quad v \frac{dv}{dx} = -\alpha - \beta v^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{v dv}{\alpha + \beta v^2} = -dx$$

Il s'agit aussi d'une équation différentielle à variables séparables qui s'intègre en :

$$\frac{1}{2\beta} \ln \left( \frac{\alpha + \beta v^2}{\alpha + \beta v_0^2} \right) = -x \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v^2(x) = \frac{1}{\beta} \left[ (\alpha + \beta v_0^2) e^{-2\beta x} - \alpha \right]}$$

Le lecteur vérifiera que dans les deux cas nous obtenons  $\boxed{L = \frac{1}{2\beta} \ln \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} v_0 \right)}$ .

Là aussi nous pouvons constater sans surprise que  $L$  est d'autant plus petit que  $\alpha$  ou  $\beta$  sont grands. Cela se voit toujours aussi bien pour  $\alpha$  et c'est toujours aussi caché pour  $\beta$ . Ici, il suffit de penser que la fonction  $\ln(1+x)$  croît moins vite que la fonction  $x$ .

### ✿ Exercice 4

*Analyse physique. Pas de problème de référentiel ici. La masse  $M$  va tout d'abord descendre grâce à la tige puis remonter le long de la gouttière. Sa trajectoire étant contrainte, il s'agit d'un problème à un degré de description. Il n'y a aucun frottement nul part et pas de moteur non plus : c'est un mouvement conservatif libre. Les grandeurs pertinentes seront  $m$  pour décrire la masse,  $R$  pour décrire le dispositif (tant la tige que la gouttière) et  $g$  pour le poids.*

**[1.]** *Analyse technique. Mouvement à un degré de liberté en régime libre et en plus conservatif ? Approche énergétique sans hésiter. Ici pour éviter les problèmes de l'expression du travail fourni par la tige à la masse, mieux vaut utiliser une approche systémique.*

Utilisons un théorème de l'énergie cinétique sur { tige + masse }. Les forces qui s'exercent sont :

→ le poids (conservatif)

→ la réaction d'axe sans frottement donc de travail nul.

Nous avons ainsi  $\Delta E_c = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$  mais comme le système étudié forme un solide,  $W_{\text{int}} = 0$  et il reste  $W_{\text{ext}} = W_{\text{poids}} = -\Delta E_{\text{p,pes}}$ .

Avec  $\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 - 0$  et  $-\Delta E_p = -(m g z_A - m g z_B)$  nous arrivons à  $v_1 = \sqrt{4 g R}$ .

☞ *Remarque.* la vitesse obtenue est la même que lors d'une chute libre de hauteur  $2 R$  ce qui est général à toute chute non dissipative.

**2.** *Analyse technique.* Pour les mêmes raisons que précédemment nous allons utiliser un théorème énergétique qui sera, là, le théorème de la puissance cinétique puisqu'il s'agit de déterminer une équation d'évolution.

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit  $\frac{dE_m(t)}{dt} = \mathcal{P}_{\text{nc}}$

Tant que  $M$  reste sur la sphère, le mouvement est circulaire (et là on dit : ☺) donc :

→ l'énergie cinétique s'écrit  $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2(t)$

→ l'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{\text{p,p}} = m g h = m g R (1 - \cos \theta(t))$

→ la puissance fournie par les forces non conservative est nulle car la seule force non conservative qui s'exerce est la réaction normale du cerceau qui est, justement, normale à la trajectoire.

Nous avons donc :

$$m R^2 \ddot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) + m g R \dot{\theta}(t) \sin \dot{\theta}(t) = 0$$

Et en simplifiant par la solution inintéressante  $\dot{\theta}(t)$  correspondant à l'équilibre, nous arrivons à :

$$R \ddot{\theta}(t) + g \sin \dot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left( \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + \omega^2 \theta(t) = 0 \right) \quad \text{avec} \quad \left( \omega^2 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{g}{R} \right)$$

**3.** Pour déterminer  $N(t)$  qui est une force de contact de liaison, le PFD va être nécessaire ici car  $N(t)$  ne sert à rien d'autre qu'à guider la masse. Encore,  $N(t)$  aurait eu une influence énergétique, nous aurions pu nous en sortir avec un théorème éponyme. Mais ce n'est pas le cas.

Tant que  $M$  reste sur la sphère, les forces qui s'exercent sont :

→ le poids  $\vec{P} = m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$

→ la réaction normale du cerceau  $\vec{N} = N \vec{u}_r$  avec  $N < 0$ .

Comme l'accélération s'écrit  $\vec{a} = -R \dot{\theta}^2(t) \vec{u}_r + R \ddot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$ , la projection du PFD sur  $\vec{u}_r$  donne

$$-m R \dot{\theta}^2(t) = m g \cos \theta(t) + N \quad \rightsquigarrow \quad N(t) = -m R \dot{\theta}^2(t) - m g \cos \theta(t)$$

Reste maintenant à exprimer  $\dot{\theta}^2(t)$  en fonction de  $\theta(t)$  et pour ça, rien de tel qu'un bon théorème énergétique.

Le TEC utilisé entre  $A$  et une position quelconque donne :

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\Delta E_p + 0 = -(m g z - m g z_A)$$

Avec  $z = -R \cos \theta$ ,  $v = R \dot{\theta}(t)$  et  $v_A^2 = 4 g R$  nous obtenons :

$$m R \dot{\theta}^2 = 2 m g (1 + \cos \theta) \quad \rightsquigarrow \quad N = -2 m g (1 + \cos \theta) - m g \cos \theta \quad \rightsquigarrow \quad \left( N = -m g (2 + 3 \cos \theta) \right)$$

$M$  est sur la sphère tant que  $n < 0$ , i.e. tant que  $m g (2 + 3 \cos \theta) > 0$  ce qui conduit à :

$$\cos \theta > -\frac{2}{3} \quad \rightsquigarrow \quad \left( \theta \leq \arccos \left( -\frac{2}{3} \right) = \theta_C \right)$$

Au point  $C$  où  $M$  quitte la sphère, nous avons, en reprenant le TEC puis en simplifiant :

$$m v_C^2 = 2 m g R (1 + \cos \theta_C) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v_C^2 = \frac{2}{3} g R}$$

La méthode qui suit est usuelle pour déterminer une durée grâce à une intégrale. Elle consiste à exprimer une durée infinitésimale  $dt$  à partir de la conservation de l'énergie. Une fois  $dt$  connu, il n'y a plus qu'à les sommer pour avoir une durée quelconque.

Le TEC peut s'écrire, compte tenu du fait que  $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$  :  $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega^2(1 + \cos \theta)$ .

Nous pouvons alors exprimer  $\frac{d\theta}{dt}$  (attention au signe) :  $\frac{d\theta}{dt} = +\omega \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$ .

Cela donne une équation différentielle à variables séparables :

$$dt = \frac{d\theta}{\omega \sqrt{2(1 + \cos \theta)}} \text{ qui s'intègre en } \boxed{t_C - t_A = \int_{\theta_A}^{\theta_C} \frac{d\theta}{\omega \sqrt{2(1 + \cos \theta)}}$$

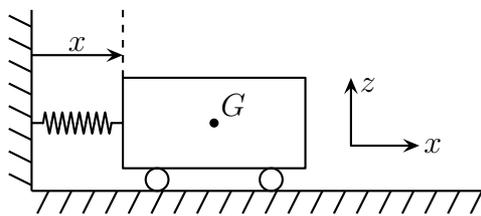
4. Après la masse  $M$  n'est plus attachée à rien du tout : c'est une chute libre et suit donc une trajectoire parabolique.

## ✿ Exercice 5

*Analyse physique.* Ici il s'agit d'étudier un mouvement qui est globalement libre et conservatif puisqu'il n'y a pas de frottement et que le contact ressort / obstacle ne fait pas non plus perdre d'énergie. Le mouvement est à un degré de description puisqu'il est rectiligne. Les grandeurs pertinentes sont  $m$  pour décrire le wagon,  $k$  et  $\ell_0$  pour le ressort,  $v_0$  pour les conditions initiales. Notons que  $g$  ne devrait pas intervenir vu que le mouvement est horizontal et qu'il n'y a pas de force de frottement solide.

Le fait qu'un wagon soit modélisé par un point matériel n'est pas choquant ni même faux. Il s'agit simplement de son centre de masse. Il est nécessaire, en revanche, de discuter un peu plus sur le fait que « rouler » soit équivalent à « glisser sans frottement ». Cette vision des choses est d'autant plus juste que l'inertie des roues (pas la masse, l'inertie) est négligeable devant celle du wagon.

1. *Analyse technique.* Bien sûr l'approche énergétique serait la plus simple ici ... s'il n'y avait pas la dernière partie de la question « déterminer la force  $F(t)$  ». Dans ce cas, vu le classicisme de la question, autant tout faire rapidement en terme de forces.



Le PFD sur le wagon dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit (une fois que le ressort est en contact avec le mur) :

$$\vec{P} + = \vec{R}_N + \vec{T}_{\text{ressort}} = m \vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{T}_{\text{ressort}} = -k(\Delta\ell) \vec{u}_{\text{sortant}} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x$$

La projection du PFD sur  $\vec{u}_x$  donne donc, puisque  $\ell(t) = x(t)$  :  $-k(x(t) - \ell_0) = m \ddot{x}(t)$ .

L'équation différentielle est donc

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{k}{m} \ell_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Les conditions initiales (*i.e.* à l'instant où l'équation différentielle commence à être valable donc à l'instant où le ressort touche le mur) sont

$$x(0) = \ell_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = -v_0$$

Comme la solution générale s'écrit  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0$  nous trouvons :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{v_0}{\omega_0} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$$

La durée  $\tau$  telle que le ressort se comprime puis se détende jusqu'à sa longueur naturelle où le contact se rompt (car la force est alors nulle) correspond à une demi-période du mouvement oscillatoire. Nous avons alors :

$$\tau = \frac{T_0}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\tau = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

L'enfoncement est maximal pour  $\sin(\omega_0 t) = 1$  et nous avons alors

$$\boxed{|\Delta \ell|_{\max} = \frac{v_0}{\omega_0} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

☞ *Remarque.* Il est normal que l'enfoncement maximal soit d'autant plus grand que la vitesse initiale est grande, que la masse est grande et que la raideur est faible. C'est à commenter à l'oral.

Pour que le résultat reste physiquement possible, il faut avoir  $|\Delta \ell|_{\max} \leq \ell_0$ , *i.e.* il faut que la vitesse  $v_0$  ne soit pas trop grande (ce qui, intuitivement, se comprend bien).

La force maximale exercée vaut alors  $f_{\max} = k |\Delta \ell|_{\max}$  soit  $\boxed{f_{\max} = v_0 \sqrt{k m}}$ .

2. Lorsque  $k \rightarrow \infty$  nous avons :

$$\boxed{\tau \rightarrow 0}; \quad \boxed{|\Delta \ell| \rightarrow 0} \quad \text{et} \quad \boxed{f_{\max} \rightarrow \infty}$$

Nous avons

$$f_{\max} |\Delta \ell|_{\max} = v_0 \sqrt{k m} \times v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{f_{\max} |\Delta \ell|_{\max} = m v_0 \pi = C^{\text{te}}}$$

3. À la fin,  $t = \tau$  et  $\dot{x}(\tau) = +v_0$  et donc  $\boxed{v_{\text{après}} = +v_0}$  : le wagon repart avec sa vitesse d'arrivée, mais en sens opposé ce qui est est, somme toute, très logique compte-tenu du caractère conservatif du mouvement.

En partant du PFD appliqué au wagon, nous obtenons successivement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \quad \rightsquigarrow \quad d\vec{p} = \vec{f}(t) dt \quad \rightsquigarrow \quad \int_{\text{début}}^{\text{fin}} d\vec{p} = \int_0^\tau \vec{F}(t) dt$$

Puis :

$$\Delta \vec{p} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{f}(t) dt \quad \rightsquigarrow \quad -m \vec{v}_0 - m \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{f}(t) dt \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{f}(t) dt = -2 m \vec{v}_0}$$

### ✿ Exercice 6

Aucune difficulté physique ici, la seule difficulté est technique. Il faut taper (fort) sur les équations différentielles.

1. La projection du PFD sur  $\vec{u}_x$  vers le bas donne (en supposant que la vitesse est vers le bas **donc** que la force de frottement soit vers le haut) :  $\ddot{x}(t) = +mg - \lambda v^2(t)$ .

La vitesse limite  $u$  est telle que  $0 = +mg - \lambda u^2$  et ainsi en remplaçant :  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g \left( 1 - \frac{v^2}{u^2} \right)$ .

2. (a) Nous pouvons réécrire l'équation différentielle du mouvement sous la forme  $\frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v^2}{u^2} \right)$  ce qui donne une équation différentielle à variables séparables qui se primitive de la manière suivante

$$\frac{dv}{1 - \frac{v^2}{u^2}} = +g dt \quad \rightsquigarrow \quad \frac{u}{2} \ln \left| \frac{u+v}{u-v} \right| = gt$$

En remarquant que  $v < u$  nous pouvons nous débarrasser des valeurs absolues et ainsi :

$$\frac{u+v}{u-v} = e^{2gt/u} \quad \rightsquigarrow \quad v(t) = u \times \frac{e^{2gt/u} - 1}{e^{2gt/u} + 1}$$

Et en divisant numérateur et dénominateur par  $e^{gt/u}$  :  $v(t) = u \times \frac{e^{gt/u} - e^{-gt/u}}{e^{gt/u} + e^{-gt/u}} = u \tanh \left( \frac{gt}{u} \right)$ .

Nous constatons que  $v(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u$  par valeur inférieure, ce qui semble logique : la vitesse tend vers la vitesse limite sans jamais la dépasser.

2. (b) Primitivons l'expression de la vitesse compte tenu des conditions initiales :

$$x(t) = \frac{u^2}{g} \times \ln \frac{e^{gt/u} + e^{-gt/u}}{2} = \frac{u^2}{2} \ln \left[ \cosh \left( \frac{gt}{u} \right) \right]$$

3. (a) L'équation différentielle est la même, mais cette fois les conditions initiales sont telles que :

$$\frac{u}{2} \left( \ln \left| \frac{u+v}{u-v} \right| - \ln 3 \right) = gt \quad \rightsquigarrow \quad \ln \left( \frac{u+v}{v-u} \right) = \ln 3 + \frac{2gt}{u}$$

Nous avons fait attention ici au fait que  $v > u$  lorsque nous avons enlevé les valeurs absolues.

Nous pouvons alors introduire alors l'instant  $t_0$  tel que  $\ln 3 + \frac{2gt}{u} = \frac{2g(t+t_0)}{u}$ .

Nous avons alors, par identification  $t_0 = \frac{u \ln 3}{2g}$ . Et ainsi :

$$\frac{u+v}{v-u} = e^{2g(t+t_0)/u} \quad \rightsquigarrow \quad v(t) = -u \times \frac{1 + e^{2g(t-t_0)/u}}{1 - e^{2g(t-t_0)/u}}$$

Ce qui donne  $v(t) = u \times \frac{e^{g(t+t_0)/u} + e^{-g(t+t_0)/u}}{e^{g(t+t_0)/u} - e^{-g(t+t_0)/u}}$ .

En n'oubliant pas que  $e^{gt_0/u} = \sqrt{e^{2gt_0/u}} = \sqrt{e^{\ln 3}} = \sqrt{3}$ , nous retrouvons bien le fait que  $v(0) = 2u$  et que  $v \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u$ .

3. (b) En primitivant la fonction  $v(t)$  nous avons tout de suite

$$x(t) = \frac{u^2}{g} \ln \left( \frac{e^{g(t+t_0)/u} - e^{-g(t+t_0)/u}}{e^{gt_0/u} - e^{-gt_0/u}} \right)$$

Et nous pouvons constater aisément que  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ .

## ✱ Exercice 7

*Analyse physique.* Tant qu'il n'y a pas décollage de la masse, cette dernière va osciller verticalement ce qui fait que le mouvement est à un degré de description. Ceci dit, nous sentons bien que si les oscillations sont de trop grande amplitude, il peut y avoir un problème, nous nous attendons donc à trouver une valeur maximale pour  $A$ . Les grandeurs pertinentes sont ici  $m$  pour la masse,  $k$  et  $\ell_0$  pour le ressort et  $g$  pour le poids.

*Analyse technique.* Le repérage est évident : centré sur la position d'équilibre (puisque celle-ci est mise en avant dans l'énoncé) et avec  $\vec{u}_z$  vertical vers le haut. Quant à l'approche, puisqu'il s'agit d'un problème de contact, donc allons utiliser une approche en termes de forces. Nous allons ainsi déterminer la force que le plateau exerce sur la masse en supposant que la masse ne décolle pas.

### ► Hypothèse de non décollage.

→ *Équation d'évolution.* Étudions le système constitué par la masse. Celle-ci n'est soumise qu'à deux forces : son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et l'action du plateau  $\vec{R}$ . Le PFD s'écrit alors  $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}(t)$ .

Ici, nous sentons bien que la masse bouge « grâce » au ressort, mais la masse ne touche pas le ressort. Et comme ce qui relie masse et ressort n'est autre que le plateau, c'est en étudiant avec des lois physiques le plateau que nous pourrions, sinon déterminer  $\vec{R}$ , pour le moins la relier à la force exercée par le ressort.

→ *Détermination de  $\vec{R}$ .* Pour déterminer  $\vec{R}$  qui est, a priori, inconnue, utilisons le PFD sur le plateau.

Sur le plateau s'exerce 2 forces : la tension  $\vec{T}$  exercée par le ressort et l'action de contact avec la masse sur  $\vec{R}'$ .

Comme le plateau est sans masse, le PFD s'écrit :  $\vec{T} + \vec{R}' = M\vec{a}' = \vec{0}$  d'où  $\vec{R}' = -\vec{T}$ .

Mais comme la troisième loi de Newton postule que  $\vec{R} = -\vec{R}'$ , nous pouvons en déduire que  $\vec{R} = \vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0)(-\vec{u}_z) = +k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_z$ .

Remarquons que pour que l'intuition fonctionne, à savoir que tout se passe « comme si » le ressort exerçait sa force directement sur la masse, il faut utiliser le fait que le plateau soit sans masse. Ce qui ne sera pas toujours le cas. Ce qui signifie que l'intuition sera parfois fautive...

→ *Équation du mouvement.* À l'équilibre de la masse nous avons :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad -mg + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

En remarquant que  $z(t) = \ell_{\text{eq}} - \ell(t)$  et que le repère a été choisi de telle sorte que  $z_{\text{eq}} = 0$ , le PFD se réécrit :

$$-mg + k(\ell_{\text{eq}} - z(t) - \ell_0) = m\ddot{z}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2}(t) + \frac{k}{m}z(t) = 0$$

Cette équation différentielle a pour solution :  $z(t) = \lambda \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\lambda$  et  $\varphi$  à déterminer avec les conditions initiales qui sont  $z(0) = -A$  et  $\dot{z}(0) = 0$ . Tous calculs faits, nous aboutissons à  $z(t) = -A \cos(\omega t)$ .

### ► Validation de l'hypothèse

Comme la masse est simplement posée sur le plateau, la réaction de celui-ci ne peut être que verticale vers le haut.

Ainsi il faut  $R \geq 0$  sans quoi la masse décolle.

Or d'après le PFD initial, nous avons  $\vec{R} = m\vec{a} - \vec{P}$ , ce qui donne, en projetant sur  $\vec{u}_z$  et en calculant  $\ddot{z}(t) : R = Ak \cos(\omega t) + mg$ . La valeur minimale étant obtenue en  $\omega t = \pi$ , la condition s'écrit finalement :  $A \leq \frac{mg}{k}$ . Nous trouvons là une valeur minimale, ce qui est rassurant.

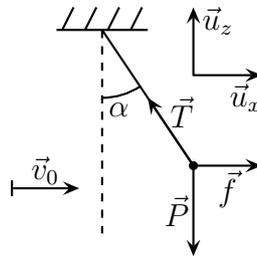
En fait, nous aurions pu faire plus court à partir du moment où nous avons trouvé que la force exercée par le plateau sur la masse était égale à celle du ressort sur le plateau.

En effet, pour que la première soit nulle, il faut et il suffit que la seconde soit nulle, i.e. que le ressort atteigne sa longueur naturelle. Or entre la longueur naturelle et la longueur à l'équilibre, il y a une différence de  $\frac{mg}{k}$ . Il ne faut donc pas que les oscillations soient d'une amplitude supérieure à  $\frac{mg}{k}$  ce qui implique, parce que la masse est lâchée sans vitesse initiale, qu'il ne faut pas écarter la masse de plus de  $\frac{mg}{k}$  de sa position d'équilibre.

## ✿ Exercice 8

1. Analyse physique. Il s'agit d'un équilibre dans le référentiel lié au laboratoire. Comme il y a présence de force de frottement fluide, nous ne pouvons pas utiliser une approche énergétique.

Le dispositif est représenté ci-dessous.



L'équilibre de la masse, soumise aux trois forces poids  $\vec{P}$ , tension du fil  $\vec{T}$  et force de frottement  $\vec{f}$  s'écrit, dans le référentiel terrestre considéré galiléen et en projetant sur  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_x$  :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad T \cos \alpha - mg = 0 \quad \text{et} \quad k \pi a^2 v_0^2 - T \sin \alpha = 0$$

Ces deux équations donnent :

$$\begin{cases} T \cos \alpha = mg \\ T \sin \alpha = k \pi a^2 v_0^2 \end{cases} \rightsquigarrow \tan \alpha = \frac{k \pi a^2 v_0^2}{mg} \rightsquigarrow k = \frac{mg \tan \alpha}{\pi a^2 v_0^2}$$

Et comme  $m = \rho \times \frac{4}{3} \pi a^3$ , nous arrivons à

$$k = \frac{4 \rho g a \tan \alpha}{3 v_0^3} = 0,251304 \text{ kg.m}^{-3}$$

2. (a) En réalité, les deux expressions sont rigoureusement identiques car les forces de frottement fluide font intervenir la vitesse de l'objet par rapport au fluide. Or dans la première question l'objet est immobile par rapport au référentiel d'étude, il reste donc  $v_0$  la vitesse du fluide par rapport au référentiel d'étude alors que dans la deuxième question c'est le contraire : c'est le fluide qui est immobile.

2. (b) Analyse physique. Étant donné les forces en présence et les conditions initiales, nous pouvons dire que le mouvement est rectiligne, c'est donc un mouvement à un degré de description.

Analyse technique. Nous pouvons utiliser ici soit une approche en terme de forces, soit une approche énergétique avec un théorème de la puissance cinétique. Comme il est demandé, à la fin, de comparer des intensités de forces, autant choisir l'approche éponyme dès le début.

Lors de sa chute, la masse n'est plus soumise qu'à deux forces : son poids  $\vec{P}$  et la force de frottement  $\vec{f}$ . Le PFD s'écrit alors

$$\vec{P} + \vec{f} = m \frac{d\vec{v}}{dt}(t)$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte,  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$  et  $\vec{P} + \vec{f} = \vec{0}$  c'est-à-dire, en projection sur l'axe vertical

$$-m g + k \pi a^2 v_{\text{lim}}^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{m g}{k \pi a^2}} = \underline{76,7872 \text{ m.s}^{-1}}$$

En chute libre (départ arrêté), la vitesse  $v$  est liée à la hauteur de chute  $h$  par  $v = \sqrt{2gh}$ . Ainsi la vitesse limite précédente correspond à une chute de  $\underline{3,00830 \text{ hm}}$ .

2. (c) D'après la questions précédente, s'il n'y avait pas de frottements il faudrait une chute de plusieurs centaines de mètres pour atteindre la vitesse limite. Avec des frottements, il faudra une chute plus longue.

Ainsi pour une chute de 2 mètres, les frottement ne vont pas, *a priori*, se faire sentir, autrement dit nous allons les négliger en première approximation. Dans ces conditions, nous avons

$$v = \sqrt{2gh} \quad \rightsquigarrow \quad v = \underline{6,26099 \text{ m.s}^{-1}}$$

Vérifions que nous avons bien le droit de négliger les frottements. À la vitesse précédente, la force de frottement correspondante a une intensité

$$f = \underline{3,09482} \times 10^{-3} \text{ N} \quad \rightsquigarrow \quad \left( \frac{f}{P} = \underline{0,664826} \% \right)$$

Pas de doute : les frottements sont bien parfaitement négligeables pour une chute de si faible hauteur.

## ✳ Exercice 9

1. *Analyse physique.* Il s'agit là d'un mouvement de particules dans un champ électromagnétique, le poids sera négligeable et puisque le champ est un champ électrique uniforme, la trajectoire sera parabolique. Le mouvement est à trois degrés de liberté mais à seulement deux degrés de description puisque le mouvement sera plan. Les paramètres pertinents sont  $m$  et  $e$  pour les électrons,  $E$  pour le champ et  $v_0$  et  $\alpha$  pour les conditions initiales.

*Analyse technique.* Étant donné qu'il y a deux degrés de description nous allons utiliser une approche en terme de forces.

La détermination des équations du mouvement de la particule donne :

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \quad \text{et} \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{e E}{2 m} t^2$$

Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré, le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$  ayant été négligé devant la force de Lorentz  $\vec{f}_L = q \vec{E}$ .

La trajectoire a donc pour équation :  $y = x \tan \alpha - \frac{e E}{2 m v_0 \cos \alpha} x^2$ .

Pour recueillir les électrons à la fente B, il faut :  $x_c = L$  avec  $x_c$  l'abscisse du point où les électrons auront à nouveau une cote nulle.

Cela se traduit formellement par  $y(x_c) = 0$  soit, après résolution :  $L = \frac{m v_0^2}{e E} \sin(2\alpha)$  (♣).

Pour que la dispersion soit la plus faible possible, il faut minimiser  $dx_c$ , c'est-à-dire la dispersion au point d'impact.

Pour ce faire, en voyant  $x_c$  comme une fonction  $x_c(E, \alpha)$  des deux variables **indépendantes**  $E$  et  $\alpha$ , nous cherchons donc à avoir  $dx_c = 0$  avec

$$dx_c = \frac{\partial x_c}{\partial E} dE + \frac{\partial x_c}{\partial \alpha} d\alpha$$

Pour ce fait, nous cherchons donc à avoir  $\frac{\partial x_c}{\partial \alpha} = 0$  et **en même temps**  $\frac{\partial x_c}{\partial E} = 0$ .

Or  $\frac{\partial x_c}{\partial \alpha} = \frac{2 m v_0^2}{e E} \cos(2\alpha)$  qui s'annule pour  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Mais nous avons  $\frac{\partial x_c}{\partial E} = -\frac{m}{e E^2}$  qui est non annulable.

La condition recherchée était donc  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ .

En rapprochant (1) et (2), nous obtenons :  $E = \frac{m v_0^2}{e L}$ .

2. Si seul l'angle initial est susceptible de varier,  $x_c$  ne dépend alors que de  $\alpha$ , soit  $x_c(\alpha) = L \sin 2\alpha$ .

En faisant un développement limité (à l'ordre 2) autour de la valeur optimale recherchée  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ , nous avons :

$$x_c(\alpha) = L + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} \frac{d^2 x_c}{d\alpha^2} \rightsquigarrow x_c(\alpha) = L - 2(\alpha - \alpha_0)^2 L$$

Comme  $x_c(\alpha_0)$  est un maximum, nous aurons  $\Delta L = x_{c\max} - x_{c\min}$  avec  $x_{c\min}$  atteint en  $\pm \frac{\Delta\alpha}{2}$ .

Finalement :  $\Delta L = 2 \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right)^2 L$ . Nous trouvons  $\Delta\alpha = 0,141421 \text{ rad} = 8,10285^\circ$ .

## ❁ Exercice 10

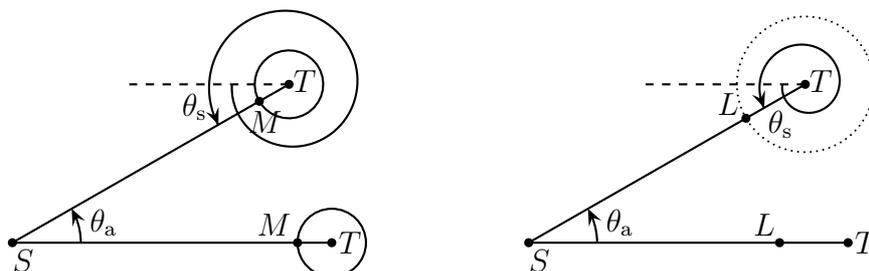
1. Pour un observateur  $M$ , le Soleil est au zénith lorsque les points  $M$ ,  $S$  et  $T$  sont alignés.

Sur le premier schéma ci-dessous, nous constatons qu'entre deux positions successives du Soleil au zénith, la Terre s'est déplacée de l'angle  $\theta$  sur son orbite (dans le référentiel héliocentrique, celui dans lequel le centre du Soleil est fixe). Il faudra donc que la Terre effectue une rotation d'angle  $\theta_s = 2\pi + \theta_a$  sur elle-même pendant la même durée, à savoir  $T_m$ .

En notant  $\Omega_a$  et  $\Omega_s$  les vitesses angulaires correspondant aux rotations de périodes respectives  $T_a$  et  $T_s$ , nous obtenons l'égalité angulaire suivante :  $\Omega_a T_m + 2\pi = \Omega_s T_m$ .

En exprimant chacune des vitesses angulaires en fonction de la période  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ , nous obtenons bien le résultat demandé. Numériquement :  $T_m - T_s = 235,904437 \text{ s}$ .

☞ *Remarque.* cela signifie que la Terre tourne sur elle-même en  $T_s = 86164 \text{ s} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$ .



2. La nouvelle Lune correspond à l'alignement dans cet ordre du Soleil, de la Lune et de la Terre.

Le cercle en pointillés sur le deuxième schéma ci-dessus correspondent à la trajectoire de la Lune dans le référentiel géocentrique. Entre deux passages de la Lune entre la Terre et le Soleil, la Terre a tourné de l'angle  $\theta$  sur sa propre trajectoire. Ainsi, pendant la durée  $T_n$ , la Terre a tourné de l'angle  $\theta_a$  et la Lune de l'angle  $\theta_s = 2\pi + \theta_a$ .

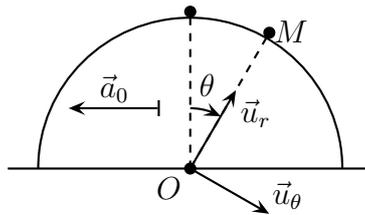
En introduisant les vitesses angulaires  $\Omega_a$  et  $\Omega_s$  correspondant aux rotations de périodes respectives  $T_a$  et  $T_s$ , nous obtenons l'égalité angulaire suivante :  $2\pi + \Omega_a T_n = \Omega_s T_n$ .

En exprimant chacune des vitesses angulaires en fonction de la période  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ , nous obtenons bien le résultat demandé.  $\boxed{T_n - T_s = 2,205326 \text{ j}}$ .

### ✿ Exercice 11

*Analyse physique.* Commençons par faire un schéma de la situation dans le référentiel lié à la demi-sphère. Ce référentiel est non galiléen et nous pouvons voir que la trajectoire y est circulaire. Les grandeurs pertinentes sont  $m$  (inertie du palet),  $R$  (caractéristique géométrique du dispositif),  $g$  (poids) et  $a_0$  (caractéristique de la force d'inertie).

*Analyse technique.* Puisqu'il s'agit d'un mouvement circulaire dans ce référentiel, les coordonnées cylindro-polaires s'imposent. Ici comme nous cherchons une condition de contact, le PFD s'impose pour trouver  $R_N$ .



Commençons par faire l'hypothèse que le palet reste sur la demi-sphère.

La masse est soumise à 3 forces :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = m g (-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta)$  ;
- force de contact : la réaction du support  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_{\text{sortant}} = R_N \vec{u}_r$  ;
- force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_0 = m a_0 (-\sin\theta\vec{u}_r - \cos\theta\vec{u}_\theta)$ .

Le PFD appliqué au palet s'écrit, dans le référentiel non galiléen lié à la demi-sphère et projeté sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  :

$$m\vec{a}(t) = m\vec{g} + \vec{R}_N + \vec{f}_{ie} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta + ma_0\sin\theta & (\clubsuit) \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta + ma_0\cos\theta & (\heartsuit) \end{cases}$$

La projection sur  $\vec{u}_r$  nous fournit une expression de  $R_N$  mais en fonction de  $\dot{\theta}^2$  ce qui n'est pas la panacée. Il faut donc trouver une expression de  $\dot{\theta}^2$  en fonction de  $\theta$ , ce qui revient soit à trouver une vitesse au carré en fonction d'une position (ce qui fait penser à un TEM), soit à trouver la primitive de l'équation  $(\heartsuit)$  (ce que nous pourrions faire en multipliant au préalable par  $\dot{\theta}$  et en faisant attention aux conditions initiales)

Le théorème de la puissance mécanique s'écrit :  $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{ie}$ , soit, comme  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_0$  et avec  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  :

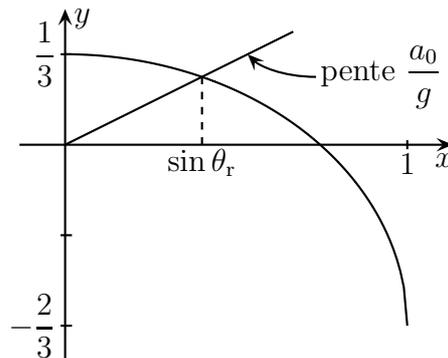
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + m g R \cos\theta \right) = m a_0 R \dot{\theta} \cos\theta \quad (\heartsuit)$$

Intégrons (♥) :

$$\left( \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + m g R \cos \theta \right) - m g R = m a_0 R \sin \theta \quad \rightsquigarrow \quad R \dot{\theta}^2 = 2 g (1 - \cos \theta) + 2 a_0 \sin \theta$$

Cette dernière expression permet de déterminer  $R_N$  en la remplaçant dans (♣) :

$$R_N = m g \left( 3 \cos \theta - 2 - \frac{3 a_0}{g} \sin \theta \right)$$



L'angle de rupture est donc l'angle pour lequel  $R_N = 0$  soit l'angle  $\theta_r$  solution de l'équation

$$0 = 3 \cos \theta - 2 - 3 \frac{a_0}{g} \sin \theta \quad (\text{iii})$$

(iii) s'écrit

$$\cos \theta - \frac{2}{3} = \frac{a_0}{g} \sin \theta \quad \rightsquigarrow \quad \sqrt{1 - \sin^2 \theta} - \frac{2}{3} = \frac{a_0}{g} \sin \theta \quad (\text{iv})$$

Ainsi en traçant les deux courbes  $y_1(x) = \sqrt{1 - x^2} - \frac{2}{3}$  et  $y_2(x) = \frac{a_0}{g} x$  et en posant  $x = \sin \theta$  l'abscisse de leur point d'intersection est solution de l'équation (iv). Nous pouvons vérifier le résultat intuitif : plus  $a_0$  est grand, plus l'angle de rupture est petit.

## ✿ Exercice 12

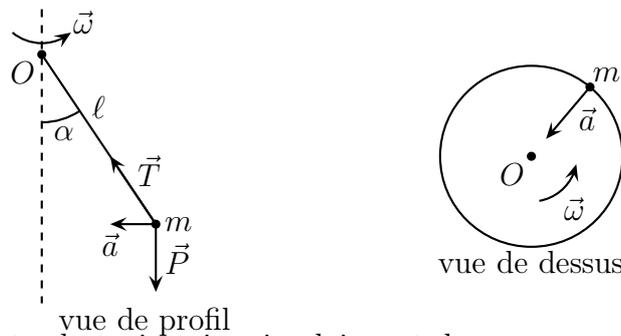
*Analyse physique.* Ici la situation est en régime stationnaire puisque le pendule fait un angle  $\alpha = \text{C}^{\text{te}}$  avec la verticale. il y a donc deux référentiels naturels : soit le galiléen dans lequel le pendule tourne soit le non galiléen, tournant avec le pendule, dans lequel ce dernier est à l'équilibre. Les grandeurs pertinentes pour l'expression de  $\alpha$  sont  $\omega$ ,  $g$ ,  $m$  et  $\ell$ . Nous pouvons remarquer tout de suite que pour des raisons d'homogénéité,  $\alpha$  sera indépendant de  $m$ .

**1.** *Analyse technique.* Ici nous n'avons pas le choix de l'approche puisque l'énoncé demande une analyse en terme de force. En revanche, nous avons le choix du référentiel. Comme dans la deuxième question il est demandé de faire une étude dans le référentiel non galiléen nous allons, pour varier, faire l'étude en terme de forces dans le référentiel galiléen.

Plaçons-nous dans le référentiel terrestre galiléen.

Dans ces conditions, si  $\alpha = \text{C}^{\text{te}}$ , alors la tige décrit un cône et la masse décrit un cercle. Le problème revient donc à étudier un point sur une trajectoire circulaire et là ☺.

La situation est la suivante.



Dans le référentiel terrestre la trajectoire circulaire est de rayon  $r = \ell \sin \alpha$  et comme la vitesse angulaire est  $\omega$ , cela donne une accélération  $\vec{a} = -r \omega^2 \vec{u}_r$ .

Or, d'après le PFD (appliqué à  $m$ ) :  $\sum \vec{f} = m \vec{a}$  et comme ici les seules forces qui s'exercent sont  $\vec{T}$  et  $\vec{P}$  nous obtenons en projection sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_z$  :

$$-T \sin \alpha = -m r \omega^2 \quad \text{et} \quad T \cos \alpha - m g = 0$$

En divisant les deux relations et en n'oubliant pas que  $r = \ell \sin \alpha$  nous arrivons à  $\boxed{\cos \alpha = \frac{g}{\ell \omega}}$ .

Cette relation n'est valable que pour  $\frac{g}{\ell \omega} \leq 1$ , i.e. pour  $\boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$ , i.e. il faut que le pendule tourne **suffisamment vite**.

**2.** Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la tige, la tige ne tourne pas autour de  $\vec{u}_z$ . Il s'agit donc d'un mouvement à un seul degré de description qu'est  $\alpha$ .

Ainsi dans  $\mathcal{R}'$ , quand  $\alpha = C^{\text{te}}$ , la masse  $m$  est immobile. Il s'agit donc d'un problème d'équilibre que nous traiterons préférentiellement avec la méthode énergétique.

Comme la masse est relié à une tige, nous allons plutôt étudier le système { masse + tige } de manière à mettre de côté l'interaction entre la masse et la tige car elle n'est pas connue.

Dans le référentiel tournant *non galiléen*, les forces qui s'exercent sur { masse + tige } sont :

- le poids de la masse (conservatif) ;
- l'action de l'axe de travail nul puisque la rotation dans le plan vertical se fait sans frottement ;
- la force d'inertie d'entraînement (conservatif) et la force d'inertie de Coriolis (non conservative mais de travail nul).

L'énergie potentielle s'écrit donc, avec  $r = \ell \sin \alpha$  la distance de la masse  $m$  à l'axe et  $h$  la hauteur prise à partir du point  $O$ .

$$E_p = E_{p,\text{pes}} + E_{p,\text{ie}} = m g z - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

Géométriquement nous voyons que (attention au signe)  $h = -\ell \cos \alpha$ .

Ainsi l'énergie potentielle totale s'écrit

$$\boxed{E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha - m g \cos \alpha}$$

L'équilibre se caractérise par  $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$ . Ainsi :

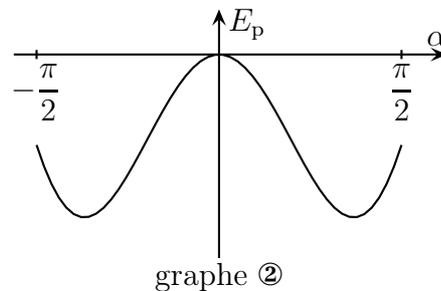
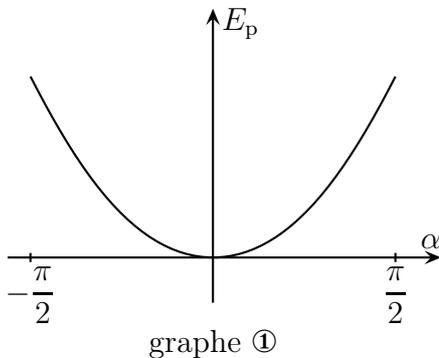
$$-m \omega^2 \ell^2 \sin \alpha \cos \alpha + m g \ell \sin \alpha = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega^2 \ell \cos \alpha = g \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\cos \alpha_{\text{eq}} = \frac{g}{\ell \omega^2}}$$

Ce qui est (heureusement) la même relation que celle trouvée à la question précédente.

**3.** ➤  $\frac{g}{\ell \omega^2} < 1$ . L'allure de l'énergie potentielle est représentée ci-dessous sur le graphe ① (en ajoutant la constante adéquate telle que  $E_p(0) = 0$ ).

Nous voyons alors que  $\alpha$  est une position d'équilibre stable puisque  $E_p$  est un minimum local pour la valeur  $\alpha = 0$ .

►  $\frac{g}{\ell \omega^2} > 1$ . L'allure de l'énergie potentielle est représentée ci-dessous sur le graphe deux (en ajoutant la constante idoine telle que  $E_p(0) = 0$ ). Nous voyons alors que  $\alpha$  est une position d'équilibre instable puisque  $E_p$  est un maximum local pour la valeur  $\alpha = 0$ .



### ✿ Exercice 13

Ici la tige-support va tourner et le point  $M$  coulisse dessus. Nous avons le choix du référentiel pour étudier ce mouvement. Comme les questions qui suivent parlent d'équilibre par rapport à la tige, plaçons-nous tout de suite dans le référentiel lié à la tige.

*Analyse physique.* La tige, dans le référentiel tournant, ne bouge pas et le point  $M$ , coulissant, a un mouvement purement rectiligne. C'est un mouvement à un degré de description. Le point  $M$  est attiré vers le bas grâce au poids et loin de l'axe grâce à la force centrifuge. Ces deux effets étant antagonistes, il peut y avoir des positions d'équilibre. Ceci étant si  $M$  est sur une position d'équilibre et qu'il s'éloigne un tout petit peu de l'axe, la force centrifuge devient plus grande alors que son poids reste constant. Il aura tendance à s'éloigner encore plus de l'axe : la position d'équilibre est instable. Les grandeurs pertinentes sont  $m$  (inertie),  $\alpha$  (géométrie),  $\omega$  (force centrifuge) et  $g$  (poids).

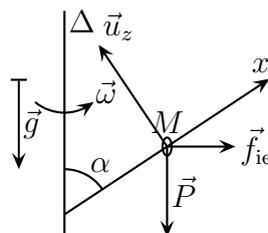
**1.** *Analyse technique.* Nous allons repérer le point  $M$  par  $x(t)$  l'abscisse sur l'axe que constitue la tige. C'est un problème à un degré de description ? En régime libre dans le référentiel lié à la tige ? Il n'y a pas de force de frottement solide ? Alors nous allons utiliser une approche énergétique.

Notons que par rapport au référentiel du labo, le mouvement est un mouvement forcé ! L'approche énergétique ne sera alors pas la plus adaptée.

☞ *Remarque.* Il aurait été tout à fait possible de repérer le point  $M$  par sa distance  $r$  à l'axe de rotation, mais c'est alors un peu plus délicat pour déterminer les composantes des forces dans la dernière question.

Plaçons-nous dans le référentiel lié à la tige.

Dans ce référentiel (dans lequel la tige **ne tourne pas**) la situation est schématisée par la représentation ci-dessous.



La masse  $m$  subit les forces suivantes :

→ son poids  $\vec{P} = m \vec{g}$  d'énergie potentielle  $E_{p,p} = m g h = m g x \cos \alpha$  ;

→ la force de contact de liaison exercée par la tige  $\vec{R}_N$  de travail nul (pas de frottement) ;

- la force d'inertie d'entraînement (ou force centrifuge)  $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 \overrightarrow{HM}$  d'énergie potentielle associée  $E_{p,ie} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \sin^2 \alpha$  ;
- la force d'inertie de CORIOLIS  $\vec{f}_{ic}$  qui ici est nulle puisque nous nous intéressons à l'équilibre. Nous avons ainsi  $E_p = -\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \sin^2 \alpha + m g x \cos \alpha$ .

Comme l'équilibre est caractérisé par  $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0$ , nous trouvons :

$$-m\omega^2 x_{\text{éq}} \sin^2 \alpha + m g \cos \alpha = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x_{\text{éq}} = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}}$$

**2.** Pour déterminer la stabilité de la position d'équilibre nous pouvons simplement utiliser le critère  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) > 0$  pour une position d'équilibre stable.

Or ici  $\frac{d^2 E_p(x)}{dx^2} = -m\omega^2 \sin^2 \alpha$  ce qui est négatif quelle que soit la valeur de  $x$  donc en particulier pour la seule valeur intéressante :  $x_{\text{éq}}$ .

**L'équilibre n'est pas stable.**

*Analyse technique.* Nous cherchons cette fois une évolution temporelle et comme nous voulons le faire avec une approche énergétique, cela signifie que nous allons utiliser le théorème de la puissance mécanique.

Utilisons le théorème de la puissance mécanique :  $\frac{dE_m(t)}{dt} = \sum \mathcal{P}_{nc}$ .

Les deux forces non conservatives (la réaction de l'axe et la force d'inertie de CORIOLIS) ne travaillent pas. Nous avons donc  $\frac{dE_m(t)}{dt} = 0$ .

De plus, comme  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$ , nous arrivons à :

$$m \ddot{x}(t) \dot{x}(t) + m g \dot{x}(t) \cos \alpha - m \omega^2 \dot{x}(t) x(t) \sin^2 \alpha = 0$$

En simplifiant par la solution inintéressante  $\dot{x}(t) = 0$  correspondant à l'équilibre et en utilisant la condition d'équilibre  $g \cos \alpha = x_{\text{éq}} \omega^2 \sin^2 \alpha$ , nous arrivons à :

$$\ddot{x}(t) = -g \cos \alpha + \omega^2 x(t) \sin^2 \alpha \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) = \omega^2 \sin^2 \alpha (x(t) - x_{\text{éq}})$$

Pour résoudre cette équation introduisons  $X(t) \stackrel{\text{not}}{=} x(t) - x_{\text{éq}}$ .

$X(t)$  vérifie alors l'équation  $\dot{X}(t) = \Omega^2 X(t)$  où  $\Omega \stackrel{\text{not}}{=} \omega \sin \alpha$ .

La solution est du type  $X(t) = A \cosh(\Omega t) + B \sinh(\Omega t)$  et les conditions initiales  $X(0) = a$  et  $\dot{X}(0) = 0$  amènent finalement à  $\boxed{X(t) = a \cosh(\Omega t)}$ .

Nous voyons alors bien que  $|X(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ , *i.e.* que la masse a tendance à s'éloigner de sa position d'équilibre, ce qui confirme, s'il le fallait, que cette position d'équilibre est instable.

**3.** *Analyse technique.* Le but est ici de trouver une force qui n'a pas d'autre influence sur le mouvement que celui de le guider. Autrement dit la force en question n'a aucun impact énergétique. Pas de choix possible, il va falloir utiliser un bon vieux PFD.

Nous avons ainsi (voir schéma à la question **1.**) :

- $\vec{P} = -m g \cos \alpha \vec{u}_x - m g \sin \alpha \vec{u}_z$  ;
- $\vec{f}_{ie} = +m\omega^2 r (\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_z)$  ;
- $\vec{\omega} = \omega (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z)$  et  $\vec{v}(t) = \dot{x} \vec{u}_x$  ;
- $\vec{f}_{ic} = -2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2 m \omega \dot{x}(t) \sin \alpha \vec{u}_y$  ;
- $\vec{R}_N = R_{Nz} \vec{u}_z + R_{Ny} \vec{u}_y$ .

Le PFD s'écrit donc :  $\vec{R}_N + \vec{P} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}$ .

Or l'accélération est portée par  $\vec{u}_x$  ce qui donne, grâce à des projections respectives sur  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_y$  :

$$\boxed{R_{Nz} = m g \sin \alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{Ny} = 2 m \Omega^2 \sinh(\Omega t)}$$

☞ *Remarque.* Nous pouvons constater que la réaction n'est pas portée uniquement par  $\vec{u}_z$ . Cela vient du fait qu'elle sert non seulement à « compenser » le poids **mais aussi** à « compenser » la force bien peu intuitive qu'est la force d'inertie de Coriolis.

## ✿ Exercice 14

*Il s'agit là d'une méthode classique de raisonnement : chercher une solution exacte dans un cas idéal puis perturber cette solution par un terme correctif.*

**1.** *Analyse physique.* Ici le mouvement est à trois degrés de liberté puisque la chute se fait a priori dans l'espace. Ceci dit, comme la seule force qui intervient est le poids, force de direction constante, et que la condition initiale sur la vitesse est sur le même axe, nous pouvons d'ores et déjà dire que le mouvement sera à un seul degré de description.

*Analyse technique.* En termes énergétiques ou en terme de force, peu importe, c'est un mouvement uniformément accéléré et rectiligne, pas question de perdre du temps là-dessus, il faut savoir le faire très vite sans se tromper.

Compte-tenu du fait qu'il n'y a pas de frottement, nous obtenons avec  $\vec{u}_z$  vers le haut :

$$\boxed{\vec{v}(t) = (v_0 - gt) \vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{z(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2}$$

Si la hauteur atteinte est  $h$  c'est que la vitesse initiale vaut  $v_0 = \sqrt{2gh}$ .

Avec  $\Omega \simeq \frac{2\pi}{86400}$  nous trouvons :

$$\eta \simeq \frac{2\pi}{86400} \times \frac{\sqrt{2 \times 9,81 \times 300}}{9,81} \simeq \frac{6}{100\,000} \times \sqrt{\frac{6}{10}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\eta \simeq 10^{-4}}$$

Étant donné la valeur de  $\eta$ , nous pouvons dire que les forces d'inertie de CORIOLIS seront très faibles devant le poids.

☞ *Remarque.* La période de révolution de la Terre sur elle-même n'est pas exactement de 86 400 s mais plutôt de 86 164 s. 86 400 s est la période de rotation du Soleil autour de la Terre dans le référentiel terrestre. Autrement dit c'est la durée d'une journée.

**2.** La force d'inertie de CORIOLIS s'écrit

$$\vec{f}_{ie} = -2 m \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega} = \Omega (\cos \lambda \vec{u}_y + \sin \lambda \vec{u}_z)$$

En faisant l'approximation que  $v(t)$  au premier ordre est porté uniquement par  $\vec{u}_z$  nous trouvons

$$\vec{f}_{ie} = -2 m \Omega' v(t) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega' \stackrel{\text{not}}{=} \Omega \cos \lambda}$$

La projection du PFD sur  $\vec{u}_x$  donne  $\boxed{x(t) = -2 \Omega' (v_0 - gt)}$  ce qui se primitive en :

$$\dot{x}(t) = \Omega' g t^2 - 2 \Omega' v_0 t \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{\Omega' g t^3}{3} - \Omega' v_0 t^2}$$

**3.** La durée de la chute est telle que  $z(t_0) = 0$  ce qui donne  $t_0 = \frac{2v_0}{g}$ .

Nous avons alors :

$$x(t_0) = \frac{\Omega' g}{3} \left( \frac{2v_0}{g} \right)^3 - \Omega' v_0 \left( \frac{2v_0}{g} \right)^2 \rightsquigarrow \boxed{x(t) = -\frac{4}{3} \frac{\Omega' v_0^3}{g^2} < 0}$$

Cette déviation correspond à une déviation vers l'ouest.

Numériquement  $\boxed{\Delta x = -5,52554 \text{ cm}}$ .

### ✿ Exercice 15

*Analyse physique.* Le mouvement se fait sur un axe, c'est donc un mouvement à un degré de description. Le ressort va osciller, mais pas tout à fait sinusoidalement à cause des frottements solides. Le régime est libre mais pas conservatif. Les grandeurs pertinentes vont donc être  $m$  pour caractériser la masse,  $k$  et  $\ell_0$  pour caractériser l'action du ressort,  $g$  pour le poids (qui va intervenir non en tant que cause du mouvement mais parce qu'il sera à l'origine de forces de frottement) et  $\lambda$  pour les forces de frottement.

**1.** *Analyse technique.* Nous pouvons utiliser une approche énergétique en comptant les forces de frottements solides dans les forces conservatives. Ceci dit, pour les forces de frottement solide, comme il faut à un moment déterminer la réaction normale et donc utiliser un PFD, autant choisir l'approche PFD dès le début. Notons que l'énorme avantage du repérage choisi, c'est que nous avons directement  $\Delta \ell = x$ , ce qui facilitera l'écriture de la force que le ressort va exercer.

L'équilibre se traduit par, en projection sur  $\vec{u}_x$ ,

$$-kx + f_x = 0$$

L'équation du mouvement suivant  $\vec{u}_z$  s'écrit

$$N - mg = 0 \rightsquigarrow N = mg$$

Ainsi  $f_x = kx$  et comme il faut, lorsque  $\vec{v} = \vec{0}$ ,  $\|\vec{f}\| < \lambda N$ , cela se traduit par

$$-\lambda mg < f_x < \lambda mg \rightsquigarrow -\frac{\lambda mg}{k} < x < \frac{\lambda mg}{k}$$

Ainsi, il est possible de réaliser un équilibre sur une large plage de valeurs

$$-a < x < a \quad \text{avec} \quad \boxed{a = \frac{\lambda mg}{k}}$$

Dans un tel cas, où un léger écart par rapport à une position d'équilibre est une autre position d'équilibre, l'équilibre est dit *indifférent*.

**2.** Lorsqu'il y a mouvement,  $|f_x| = \lambda mg$  et comme  $f_x \times \dot{x} < 0$ , nous avons

$$f_x = \varepsilon \lambda mg$$

Ainsi le PFD appliqué à la masse et projeté sur  $\vec{u}_x$  donne

$$\boxed{m \ddot{x}(t) = -kx(t) + \varepsilon \lambda mg}$$

**3. (a)** Si  $\varepsilon = 1$ ,  $\dot{x}(t) < 0$  et le mouvement se fait de la droite vers la gauche. L'ED régissant le mouvement de la masse s'écrit, avec sa solution (le  $+a$  est la solution particulière de l'ED) :

$$m \ddot{x}(t) + kx(t) = \lambda mg \rightsquigarrow x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + a$$

Déterminons  $A$  et  $B$  avec les conditions initiales

$$A + a = X_1 \quad \text{et} \quad \dot{x}_1(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t) \rightsquigarrow \omega_0 B = 0$$

Finalement

$$x_1(t) = (X_1 - a) \cos(\omega_0 t) + a$$

(b) Le mouvement se fait de la gauche vers la droite. Avec la même méthode que ci-dessus, l'équation différentielle et sa solution sont :

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = -\lambda m g \quad \rightsquigarrow \quad x_2(t) = (X_2 + a) \cos(\omega_0 t) - a$$

4. (a) En notant  $(x, y)$  les coordonnées d'un point dans le plan de phase, il faut montrer que

$$(x - a)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{avec} \quad R \text{ à trouver}$$

Ici

$$y = \frac{\dot{x}_1}{\omega_0} = -(X_1 - a) \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad x = x_1$$

Cela donne, en remplaçant  $x$  et  $y$  par leurs expressions

$$(x - a)^2 + y^2 = (X_1 - a)^2$$

Il s'agit bien de la forme recherchée.

La trajectoire dans le plan de phase est donc bien portée par un cercle de rayon  $X_1 - a > 0$  dans le demi plan inférieur (car  $\dot{x} < 0$ ). La masse obéit à cette ED tant que  $\dot{x} < 0$ , *i.e.* tant que la trajectoire n'a pas atteint l'axe  $\vec{u}_x$  du plan de phase.

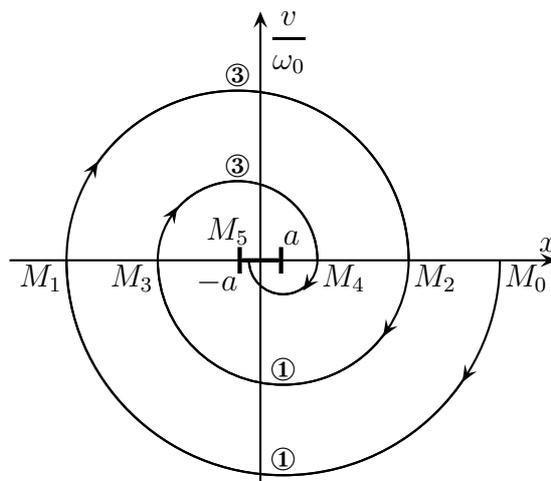
La trajectoire est donc bien le demi-cercle en entier.

4. (b) Avec le même raisonnement, nous trouvons

$$(x + a)^2 + y^2 = (X_2 + a)^2$$

Le rayon du demi-cercle est  $-X_2 - a > 0$ .

4. (c) Suivre les explications avec le schéma ci-dessous.



① Tracer le demi cercle centré sur  $(a, 0)$  passant par le point  $(X_0, 0)$  dans le demi plan inférieur.

② Si l'extrémité  $M_1$  de ce cercle est dans le segment de l'axe  $\vec{u}_x$  compris entre  $-a$  et  $a$ , cela signifie que la masse a une vitesse nulle dans la plage de stabilité. Elle est donc à l'équilibre et son mouvement s'arrête. Si ce n'est pas le cas, passer à l'étape suivante.

③ Tracer le demi cercle centré sur  $(-a,0)$  passant par le point  $M_1$  dans le demi-plan supérieur.

④ Si l'extrémité  $M_2$  est dans le segment compris entre  $-a$  et  $a$  de l'axe  $\vec{u}_x$ , pour les mêmes raisons qu'en ②, la masse s'arrête. Sinon, continuer en recommençant en ① en prenant comme nouveau point  $M_0$  le point  $M_2$ .

### ✿ Exercice 16

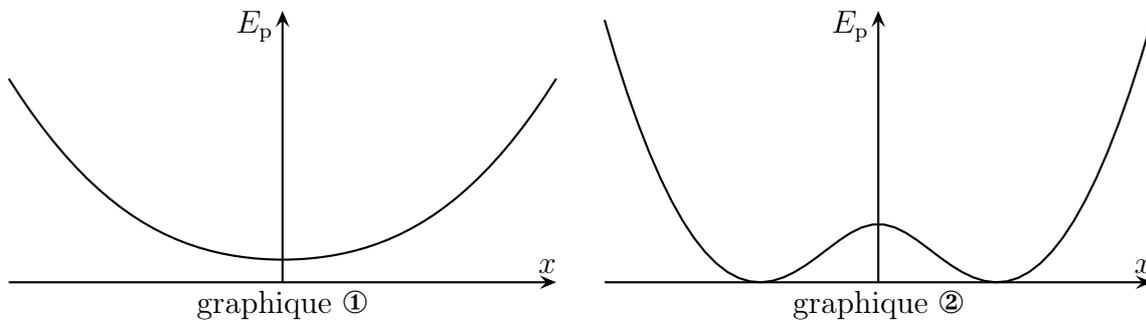
1. Phénoménologiquement, le ressort essaie de recouvrer sa longueur naturelle donc :

→ si  $\ell_0 < h$ , il y aura une position d'équilibre stable en  $x = 0$  car c'est en cette position que le ressort aura sa longueur minimale

→ si  $\ell_0 > h$ , il y a aura une position d'équilibre instable en  $x = 0$  (car le ressort va pousser la masse orthogonalement à l'axe) et deux position d'équilibre stables en  $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$  (en des endroits où le ressort a sa longueur naturelle)

Nous retrouvons ces résultats en considérant l'énergie potentielle de la masse (qui se réduit à l'énergie potentielle élastique) :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \left( \sqrt{x^2 + h^2} - \ell_0 \right)^2$$

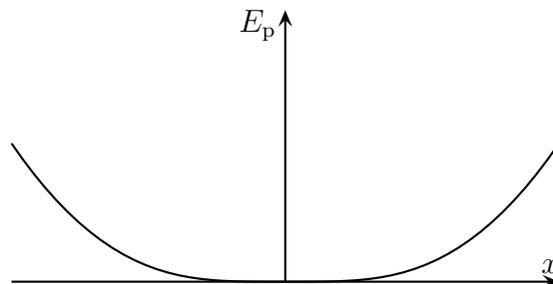


Si  $h > \ell_0$  (cf. graphique ①) alors quelle que soit la position  $x$ ,  $E_p > 0$  et la valeur minimale est atteinte en  $x = 0$ .

En revanche, si  $h < \ell_0$  (cf. graphique ②), l'énergie potentielle est minimale pour la valeur  $x$  qui annule l'expression, *i.e.*  $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$ .

En ce qui concerne la stabilité, il est inutile de calculer  $\frac{d^2 E_p(x)}{dx^2}$  car nous savons déjà que la solution trouvée correspond à un minimum d'énergie potentiel ( $E_p(x_{eq}) = 0$  alors que  $E_p(x) \geq 0$ ); l'équilibre est donc stable.

2. Dans le cas étudié, l'énergie potentielle a l'allure ci-dessous.



Commençons par développer l'énergie potentielle à l'ordre deux :

$$E_p(x) = \frac{1}{2} k \left( \sqrt{x^2 + \ell_0^2} - \ell_0 \right)^2 = \frac{1}{2} k \ell_0^2 \left( \sqrt{1 + \frac{x^2}{\ell_0^2}} - 1 \right)^2$$

Or  $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ , d'où (après simplifications) :  $E_p(x) = \frac{k x^4}{8 \ell_0^2}$ .

La conservation de l'énergie mécanique s'écrit alors :  $E_c + E_p = E_p(a)$  soit :  $\frac{m}{2} \dot{x}^2 = \frac{k}{8 \ell_0^2} (a^4 - x^4)$ .

Pour écrire la durée d'un mouvement conservatif sous la forme d'une intégrale, la méthode est toujours la même : partir de la conservation de l'énergie, isoler  $dt$  puis sommer les durées infinitésimales.

Une durée infinitésimale  $dt$  peut s'écrire  $dt = \frac{dt}{dx} dx = \frac{dx}{\dot{x}}$ .

Ici, nous allons dire que la durée pour aller de  $x = 0$  à  $x = a$  nécessite un quart de période soit :

$$T = 4 \int_0^a \frac{dx}{\dot{x}} = 4 \int_0^a dt = 8 \sqrt{\frac{m}{k}} \ell_0 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$

Faisons le changement de variable :  $u = \frac{x}{a}$ . Cela donne :  $T = 8 \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\ell_0}{a} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}$ .

Nous trouvons le résultat demandé en faisant le changement de variable  $u = \sin \varphi$ .

### ✿ Exercice 17

*Analyse physique.* La masse va se mettre à bouger à cause du mouvement du bâti. C'est un régime forcé (avec une source énergétique, le moteur, non représenté) et contraint (sur l'axe vertical). Comme le mouvement du bâti est sinusoïdal et que l'ensemble du dispositif est linéaire, le mouvement de la masse sera aussi sinusoïdal.

*Analyse technique.* Ici le repérage est imposé, pas de problème. Comme il s'agit d'un régime forcé et que le ressort n'a pas une de ses extrémité fixe, nous ne pourrions pas utiliser l'approche énergétique, il faudra faire un PFD. Bien sûr, avec des mouvements sinusoïdaux, nous utiliserons la notation complexe.

1. Les trois forces s'exerçant sur  $M$  sont :

- force à distance : le poids  $\vec{P} = m \vec{g} = +m g \vec{u}_z$  ;
- force de contact : les frottements fluides :  $\vec{f}(t) = -h \vec{v}(t) = -h \dot{z}(t) \vec{u}_z$  ;
- force de contact : l'action exercée par le ressort  $\vec{T} = -k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = -k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_z$ .

De plus nous pouvons voir (géométriquement) que  $\ell(t) = z(t) - z_B(t)$ .

Le PFD en projection sur l'axe  $\vec{u}_z$  donne donc :

$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{f} = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -k (z(t) - z_B(t) - \ell_0) + m g - h \dot{z}(t) = m \ddot{z}(t)$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_B(t) + g} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{k m}}{h}}$$

2. Pour déterminer  $z_{\text{éq}}$ , reprenons l'équation d'évolution précédente avec  $z(t) = z_{\text{éq}} = C^{te}$  et  $z_B(t) = 0$ .

Nous arrivons alors à

$$\boxed{z_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{m g}{k}}$$

De plus nous avons  $\dot{x}(t) = \dot{z}(t)$  et  $\ddot{x}(t) = \ddot{z}(t)$ , ce qui donne, en remplaçant dans l'équation d'évolution obtenue dans la question précédente :

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 z_B(t)}$$

3. Avec la notation complexe nous avons :

$$\ddot{\underline{x}}(t) = (j\omega)^2 \underline{x}(t) = (j\omega)^2 \underline{X}_m e^{j\omega t} \quad \dot{\underline{x}}(t) = j\omega \underline{x}(t) = j\omega \underline{X}_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{z}_B(t) = A e^{j\omega t}$$

L'équation d'évolution se réécrit alors, en simplifiant par  $e^{j\omega t}$

$$(j\omega)^2 \underline{X}_m + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{X}_m + \omega_0^2 \underline{X}_m = \omega_0^2 A \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{X}_m = \frac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}}$$

Comme  $v(t) = \dot{z}(t) = \dot{x}(t)$ , nous avons  $\underline{V}_m = j\omega \underline{X}_m$  soit, en notant  $V_0 \stackrel{\text{not}}{=} \omega_0 A$  :

$$\boxed{\underline{V} = \frac{j\omega\omega_0 V_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}}$$

4. Le déphasage  $\phi$  recherché vaut simplement :  $\phi = \arg(\underline{X}_m) = -\arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}\right)$  (////).

Comme la partie réelle change de signe, nous allons factoriser par  $j$  ce qui va simplifier les choses.

$$\phi = -\arg\left[j\left(\frac{\omega\omega_0}{Q} + j(\omega^2 - \omega_0^2)\right)\right] = -\arg(j) - \arg\left(\frac{\omega\omega_0}{Q} + j(\omega^2 - \omega_0^2)\right)$$

Et ainsi

$$\boxed{\phi = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}\right)}$$

Comme  $\underline{V}_m = j\omega \underline{X}_m$  et que  $\varphi = \arg(\underline{V})$  cela donne  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \phi$  et

$$\boxed{\phi = -\arctan\left(Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0}\right)}$$

5. (a) La puissance fournie par les frottement s'écrit  $\mathcal{P}_f(t) = f(t) \times v(t) = -h v^2(t)$ .

Sur une période nous avons donc

$$\mathcal{E}_f = \int_0^T -h v^2(t) dt = -\int_0^T h V_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt \rightsquigarrow (\dots) \rightsquigarrow \boxed{\mathcal{E}_f = -\frac{h V_m^2 T}{2}}$$

Cette énergie fournie est négative. Rien de plus normal puisque ces frottements dissipent de l'énergie.

5. (b) La puissance fournie par le ressort s'écrit

$$\mathcal{P}_r(t) = T(t) \times v(t) = -k(z(t) - z_B(t) + l_r - l_0) \times v(t)$$

Sur une période nous avons donc

$$\mathcal{E}_r = -\int_0^T (x(t) - z_B(t) + z_{\text{éq}} + l_r - l_0) v(t) dt$$

En constatant que  $\int_0^T (z_{\text{éq}} - \ell_0) V_m \cos(\omega t + \varphi) dt = 0$ , il reste :

$$\mathcal{E}_r = -k \int_0^T [X_m \cos(\omega t + \phi) - A \cos(\omega t)] V_m \cos(\omega t + \varphi) dt$$

Cela donne, après calculs

$$\mathcal{E}_r = -k \frac{X_m V_m T}{2} \cos(\phi - \varphi) + k \frac{A V_m T}{2} \cos \varphi$$

Mais comme  $\phi - \varphi = -\frac{\pi}{2}$  nous arrivons finalement à  $\mathcal{E}_r = k \frac{A V_m T}{2} \cos \varphi$ .

5. (c) Nous avons de même

$$\mathcal{E}_p = \int_0^T m g v(t) dt = \int_0^T m g V_m \cos(\omega t + \varphi) dt \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{E}_p = 0$$

5. (d) L'énergie cinétique maximale vaut  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2$  et comme  $v_{\text{max}} = V_m$  nous avons tout de suite

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m V_m^2$$

5. (e) Cette différence d'énergie potentielle vaut  $\Delta \mathcal{E}_{pp} = m g \Delta z$  avec  $\Delta z = X_m$ , ce qui nous donne

$$\Delta \mathcal{E}_{pp} = m g X_m$$

6. Le bilan énergétique traduit le fait que, sur une période, l'ensemble des forces apporte une énergie nulle. Si tel n'était pas le cas, le théorème de l'énergie cinétique sur une période donnerait  $\Delta E_c \neq 0$ , i.e.  $V_m$  (amplitude de la vitesse) non constante, ce qui est contraire à l'état de régime permanent. Ainsi le bilan s'écrit simplement

$$\mathcal{E}_f + \mathcal{E}_r + \mathcal{E}_p = 0$$

☞ *Remarque.* Il n'y a aucune raison d'avoir  $\mathcal{E}_c = \Delta \mathcal{E}_{pp}$ , car le mouvement de la masse n'est pas, loin s'en faut, une chute libre.

► **Vérification.** Comme  $\mathcal{E}_p = 0$ , il reste à vérifier que  $\mathcal{E}_r \stackrel{?}{=} -\mathcal{E}_f$ , i.e.  $h V_m \stackrel{?}{=} k A \cos \varphi$ .

Comme  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \phi$ ,  $\cos \varphi = -\sin \phi$ . À l'aide de (4) (question 4), nous trouvons que

$$-\sin \phi = \frac{\omega \omega_0}{Q \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

Après, les expressions de  $V_m$  et de  $Q$  permettent de vérifier que nous avons effectivement  $\mathcal{E}_r = -\mathcal{E}_f$ .

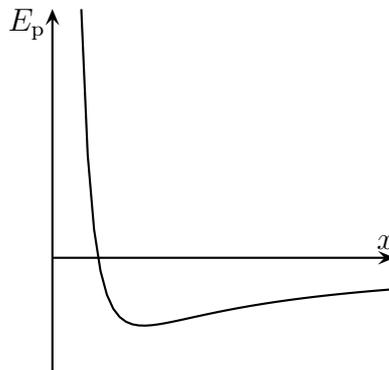
## ✿ Exercice 18

Il est important de lire tout l'énoncé avant de se lancer dans la résolution, cela nous permet d'apprendre beaucoup de choses.

Ici nous pouvons voir que l'exercice traite d'une évolution conservative puisque nous donne l'énergie potentielle associée. Peu importe comment est créé ce potentiel, il suffit de le connaître et de le traiter comme tel.

Nous pouvons voir que dans une première partie il est demandé de trouver la position d'équilibre pour ensuite étudier le mouvement autour de cette position d'équilibre. En ce qui concerne le développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, nous savons que cela va conduire à une évolution sinusoidale : toute évolution autour d'une position d'équilibre stable est sinusoidale pourvu qu'elle soit suffisamment petite. En revanche, en développant à l'ordre 3, cette évolution ne sera plus sinusoidale, il y aura des termes non linéaires correctifs.

1. Voir ci-dessous.



2. Faisons une analyse dimensionnelle de l'énergie potentielle.  $x$  étant une longueur, nous trouvons rapidement que  $a$  est aussi une longueur et  $E_0$  une énergie. À partir de là nous pouvons tout de suite imaginer que la position d'équilibre ne sera fonction que de  $a$ . En effet, en écrivant  $x_{\text{éq}} = a^\alpha E_0^\beta$  nous voyons rapidement que les dimension de masse contenue dans l'énergie doivent disparaître, ce qui signifie que  $E_0$  doit disparaître aussi.

La position d'équilibre est caractérisée par  $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0$ .

Avec  $\frac{dE_p}{dx}(x) = E_0 \left( -\frac{2a^2}{x^3} + \frac{a}{x^2} \right)$ , nous arrivons rapidement à  $x_{\text{éq}} = 2a$ .

3. (a) Étant donné la question suivante, autant faire le DL à l'ordre 3 tout de suite et le tronquer à l'ordre 2 pour cette question.

N'oublions pas non plus qu'étant donné qu'il s'agit d'une position d'équilibre, le terme d'ordre 1 doit disparaître car il s'agit de  $(x - x_{\text{éq}}) \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}})$  qui est nul de par la condition d'équilibre.

Réécrivons d'abord  $E_p$  autour de la valeur à l'équilibre :

$$E_p(2a + \varepsilon) = E_0 \left( \frac{a^2}{(2a + \varepsilon)^2} - \frac{a}{2a + \varepsilon} \right) = \frac{E_0}{2} \left( \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2a} \right)^2} - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2a}} \right)$$

Utilisons ensuite l'expression du développement limité à l'ordre 3 :

$$(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha \varepsilon + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \varepsilon^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} \varepsilon^3$$

Nous allons utiliser cette formule avec  $\alpha = -2$  et  $\alpha = -1$  et «  $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2a}$  ».

Surtout pour les DL, il faut bien organiser ses calculs et les faire lentement : d'abord développer chaque terme et ensuite, seulement ensuite, les regrouper. Il ne faut pas y aller trop vite car l'homogénéité est quasi-impossible à vérifier étant donné que nous avons fait apparaître des termes sans dimension  $\frac{\varepsilon}{2a}$ .

$$E_{p(2a+\varepsilon)} = \frac{E_0}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \frac{\varepsilon}{2a} + 3 \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right)^2 - 4 \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right)^3 \right) - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2a} + \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right)^3 \right) \right]$$

$$= \frac{E_0}{2} \left( -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2a} + \frac{\varepsilon}{2a} \right) + \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \right) \frac{\varepsilon^2}{a^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \frac{\varepsilon^3}{a^3}$$

Et nous arrivons à  $E_{p(2a+\varepsilon)} = \frac{E_0}{4} \left( -1 + \frac{\varepsilon^2}{4a^2} - \frac{\varepsilon^3}{4a^3} \right)$ , ce qui donne, pour l'ordre 2 :

$$E_{p(x_{\text{éq}}+\varepsilon)} = \frac{E_0}{4} \left( -1 + \frac{\varepsilon^2}{x_{\text{éq}}^2} \right)$$

3. (b) Comme il s'agit de petites oscillations autour de l'équilibre, nous savons déjà qu'il y a isochronisme, c'est-à-dire que la pulsation recherchée sera indépendante de  $X_m$ .

De plus pour obtenir une pulsation en  $s^{-1}$  à partir d'une énergie en  $kg.m.s^{-2}$  et d'une position d'équilibre en  $m$ , il faudra se débarrasser de la dimension masse. Pour cela, ne doutons pas de voir apparaître la masse inertielle dans le résultat, ce qui est d'autant plus normal que cette grandeur caractérise un mouvement, ce que nous cherchons ici.

Comme l'évolution est conservative (car l'ensemble des forces que subit le point matériel dérive d'une énergie potentielle), nous avons :  $E_c(t) + E_p(t) = C^{\text{te}}$ .

Or  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$  (mouvement sur un axe) et avec  $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$ , nous avons  $\dot{x}(t) = \dot{\varepsilon}(t)$  ce qui donne :

$$\frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2(t) + \frac{E_0}{4} \left( -1 + \frac{\varepsilon^2(t)}{x_{\text{éq}}^2} \right) = C^{\text{te}}$$

En dérivant cette équation (et en simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{\varepsilon}(t) = 0$ ), nous arrivons à

$$m \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{E_0}{2 x_{\text{éq}}^2} \varepsilon(t) = 0$$

C'est une équation différentielle de solution

$$\varepsilon(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{E_0}{2 m x_{\text{éq}}^2}$$

Et comme  $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$ , il s'agit bien du résultat proposé.

4. (a) Le développement limité a déjà été effectué (merci la prévoyance) et nous avons trouvé :

$$E_{p(x_{\text{éq}}+\varepsilon)} = \frac{E_0}{4} \left( -1 + \frac{\varepsilon^2}{x_{\text{éq}}^2} - 2 \frac{\varepsilon^3}{x_{\text{éq}}^3} \right)$$

Nous pouvons ici aussi dériver par rapport au temps la conservation de l'énergie. Cela donne :

$$\frac{1}{2} m \dot{\varepsilon}^2(t) + E_{p(x_{\text{éq}}+\varepsilon(t))} = C^{\text{te}} \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{\varepsilon}(t) + \frac{E_0}{2 x_{\text{éq}}^2} \varepsilon(t) - \frac{3 E_0}{2 x_{\text{éq}}^3} \varepsilon^2(t) = 0$$

Il s'agit d'une équation d'évolution non linéaire, autrement dit impossible à résoudre dans le cas général de manière analytique.

4. (b) En posant  $\varepsilon(t) = A + X_m \cos(\omega_0 t) + B \cos(2\omega_0 t)$ , nous avons :

$$\ddot{\varepsilon}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t) - 4\omega_0^2 B \cos(2\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \varepsilon^2(t) = X_m^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{X_m^2}{2} + \frac{X_m^2}{2} \cos(2\omega_0 t)$$

☞ *Remarque.* Nous nous limitons *a priori* pour  $\varepsilon^2(t)$  au seul terme  $X_m \cos(\omega_0 t)$  car il s'agit là d'un terme correctif, ce qui fait que nous l'approximons par la solution obtenue à l'ordre précédent. De toutes façons, si nous avions gardé les autres termes, nous aurions été obligé de les négliger après.

En injectant ces résultats dans l'équation d'évolution, nous arrivons à :

$$\left( \frac{E_0 A}{2x_{\text{éq}}^2} - \frac{3E_0}{2x_{\text{éq}}^3} \frac{X_m^2}{2} \right) + \left( -m\omega_0^2 X_m + \frac{E_0 X_m}{2x_{\text{éq}}^2} \right) \cos(\omega_0 t) + \dots \\ \dots + \left( \frac{E_0 B}{2x_{\text{éq}}^2} - 4m\omega_0^2 B - \frac{3E_0}{2x_{\text{éq}}^2} \frac{X_m^2}{2} \right) \cos(2\omega_0 t) = 0$$

Après quelques (!) simplifications basées sur l'expression de  $\omega_0^2$  et sur la multiplication de l'ensemble par  $\frac{2x_{\text{éq}}^2}{E_0}$  nous obtenons :

$$\left( A - \frac{3X_m^2}{2x_{\text{éq}}} \right) - \left( 3B + \frac{3X_m^2}{2x_{\text{éq}}} \right) \cos(2\omega_0 t) = 0$$

Pour que cette fonction de  $t$  soit constamment nulle, il faut que le facteur devant  $\cos(2\omega_0 t)$  et le terme constant soient constamment nuls, ce qui donne

$$\boxed{A = \frac{3X_m^2}{2x_{\text{éq}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{X_m^2}{2x_{\text{éq}}}}$$

Nous pouvons (devons!) vérifier que  $\frac{A}{X_m} \ll 1$  et  $\frac{B}{X_m} \ll 1$ , ce qui est bien le cas parce que  $\frac{X_m}{x_{\text{éq}}} \ll 1$ .

4. (c) Si nous autorisons une plus grande amplitude pour le mouvement du point matériel autour de  $x_{\text{éq}}$ , alors nous constatons que  $\langle x(t) \rangle = \langle x_{\text{éq}} + \varepsilon(t) \rangle = x_{\text{éq}} + a \neq x_{\text{éq}}$ . En d'autres termes, la particule s'éloigne, en moyenne, de sa position d'équilibre.

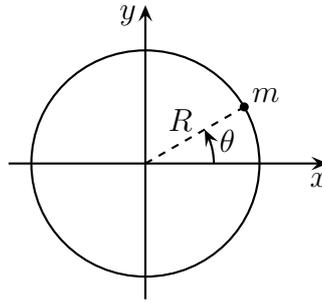
☞ *Remarque.* Un résultat fondé sur des calculs analogues est à l'origine de l'explication du phénomène de dilatation des solides. Chaque paire d'atomes voisins étant liée par une interaction de ce type (répulsif à courte distance, attractif à grande distance) une augmentation de la température implique une augmentation de l'énergie cinétique, *i.e.* une augmentation de l'amplitude et ainsi un décalage de la valeur moyenne de la distance interatomique. En revanche, pour la matière, les interactions ne sont **pas** en  $1/r^2$  et  $1/r$ . Ces potentiels ayant été choisis pour faciliter les calculs.

## ✿ Exercice 19

*C'est un exercice à savoir faire les yeux fermés à la limite du par cœur et sans respirer car il constitue très souvent soit le début soit une partie d'un problème de mécanique spatiale.*

1. *Analyse physique.* La trajectoire est circulaire, il va donc y avoir un seul degré de description  $\theta(t)$ . Le mouvement est libre, conservatif et les grandeurs caractéristiques sont  $M, G, m, R$ .

*Analyse technique. Le repérage sera cylindro-polaire et pour déterminer la loi à laquelle obéit  $\theta(t)$ , rien de tel que l'énergie (mouvement à un degré de description libre et conservatif).*



Écrivons la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{m M}{R} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - G \frac{m M}{R}$$

Puisque  $R = C^{te}$  (mouvement circulaire) et  $E_m = C^{te}$  (évolution conservative), alors  $\dot{\theta} = C^{te}$ .

Comme la trajectoire est circulaire, la vitesse s'écrit  $\vec{v}(t) = r \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta$  ce qui implique  $\|\vec{v}(t)\| = C^{te}$  ou encore que le mouvement est uniforme.

*Pour trouver la vitesse du satellite, nous devons utiliser une loi physique, mais ça ne peut pas être l'énergie (ou pas seulement) puisque l'énergie n'est pas une grandeur caractéristique du problème. Cela ne pourra pas être non plus le TMC qui ne pourra donner que « la quantité de rotation est constante ». Reste le PFD.*

Projetons le PFD appliqué au satellite (dans le référentiel galiléen centré sur le centre de l'astre attracteur) sur  $\vec{u}_r$  :

$$-G \frac{m M}{R^2} \vec{u}_r = m \vec{a}(t) \quad \rightsquigarrow \quad -G \frac{m M}{R^2} = -R \dot{\theta}^2 = -m \frac{v^2}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{G M}{R}}}$$

Comme le mouvement est uniforme, nous pouvons écrire  $v = \frac{\ell}{T}$  où  $\ell$  est la distance parcourue en une période. Comme  $\ell = 2\pi R$  nous arrivons à  $T = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{G M}}$ .

Par définition, le moment cinétique par rapport au centre vaut  $\vec{\sigma} = \vec{R} \wedge m \vec{v} = R \vec{u}_r \wedge m v \vec{u}_\theta = m r v \vec{u}_z$ . Donc, avec l'expression de  $v$  :  $\sigma = m \sqrt{G M r}$ .

L'énergie mécanique vaut :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m M}{R} = \frac{G m M}{2 R} - \frac{G m M}{R} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{E_m = -\frac{G m M}{2 R}}$$

☞ *Remarque.* Nous retrouvons, sans surprise :  $E_m = -E_c$ .

2. En élevant au carré l'expression de la période et en n'oubliant que pour une trajectoire circulaire le rayon n'est autre que le demi-grand axe, nous obtenons :

$$T^2 = R^3 \frac{4\pi^2}{G M} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M}}$$

## ✿ Exercice 20

Il s'agit là d'un exercice très classique dans l'esprit : d'abord une solution exacte dans un cas simple voire « idéal » et puis ensuite perturbation de cette solution en changeant quelques petits détails. Dans la nouvelle solution il faut alors conserver certaines caractéristiques de la solution idéale. Notons que même plus tard en physique, dans la recherche, c'est une méthode très commune : trouver une solution dans un cas et la perturber est généralement la première chose à laquelle il est possible de penser surtout lorsque les perturbations sont faibles. Cette méthode est aussi utilisée dans l'exercice Déviation vers l'ouest.

**1.** Analyse physique. Le satellite a une trajectoire circulaire donc ☉. Après c'est du classique à maîtriser parfaitement.

L'énergie potentielle s'écrit directement (loi à connaître) :  $E_p = -G \frac{m M}{r}$ .

L'énergie cinétique s'écrit  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$  et avec un PFD projeté sur  $\vec{u}_r$  nous obtenons :

$$-\frac{m v^2}{r} = -G \frac{m M}{r^2} \quad \rightsquigarrow \quad E_c = \frac{G m M}{2r} > 0$$

Nous trouvons alors  $E_m = E_c + E_p = -\frac{G m M}{2r}$  résultat négatif. Rien de plus normal pour un état lié.

**2.** Les frottements font diminuer l'énergie mécanique du satellite. Or, d'après l'expression de  $E_m$ , une **diminution** de  $E_m < 0$  implique  $|E_m|$  qui augmente, c'est-à-dire que  $r$  diminue : le satellite a tendance à se rapprocher de la surface de la Terre.

Dans le même temps, l'expression de l'énergie cinétique nous indique que si  $r$  diminue,  $E_c$  et **donc**  $v$  augmente. Ici les frottements permettent à la vitesse d'augmenter.

✿ *Remarque.* il ne faut pas confondre cette situation avec celle où les frottements permettent de mettre en mouvement un objet, *i.e.* une situation où les frottements fournissent un travail positif. Ici les frottements fournissent bien un travail négatif mais c'est l'énergie *mécanique* qui diminue et non l'énergie cinétique. C'est comme la boule d'une roulette au casino. Avec les frottements elle se met à tomber et, en tombant, elle convertit son énergie potentielle en énergie cinétique ce qui a tendance à augmenter sa vitesse.

**3.** D'un point de vue dimensionnel,  $\tau$  est une constante de temps. Étant donné que cette constante fait intervenir la force de frottement (par l'intermédiaire de  $k$ ), nous pouvons dire qu'elle représente la durée caractéristique de diminution de la vitesse  $\vec{v}$ .

**4.** En supposant les forces de frottements très faibles par rapport à l'interaction gravitationnelle, nous allons pouvoir traiter ce mouvement en terme perturbatifs par rapport à la trajectoire circulaire, ce qui signifie que les expressions précédentes restent valables.

Pour que l'approximation soit valable, il faut que l'intensité des forces de frottement soit négligeable devant la force gravitationnelle. Cela s'écrit :

$$k v \ll \frac{G m M}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{\tau} \ll \frac{v}{r}$$

En notant  $T$  la période de révolution du satellite sur son orbite nous obtenons  $\tau \gg \frac{T}{2\pi}$ , *i.e.* il faut que la durée caractéristique de perte de vitesse soit très grande devant la durée d'une révolution, *i.e.* il faut que sur un tour, la vitesse ne diminue que très peu ce qui est, somme toute, très logique.

Nous avons alors, sur une révolution :  $\Delta E_m = W_{\text{frott}}$ .

En assimilant  $\Delta E_m$  à  $dE_m$  cela donne :

$$dE_m = +\frac{G m M}{2r^2} dr \quad \rightsquigarrow \quad \Delta E_m = \frac{v^2}{2r} \Delta r$$

De plus comme les frottements sont d'intensité constante (faible variation de vitesse) et toujours opposée au mouvement :  $W_{\text{frottement}} = -2\pi r k v$ .

En rassemblant, on obtient :

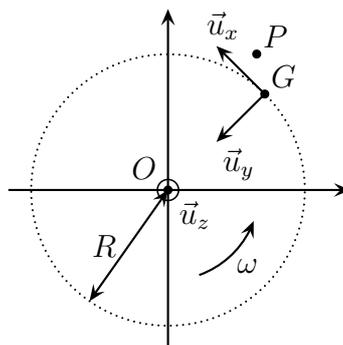
$$\Delta E_m = \frac{m v^2}{2r} \Delta r = 2\pi k r v \rightsquigarrow \frac{\Delta r}{r} = \frac{2\pi r}{v} \times \frac{k}{m} \times 2 \rightsquigarrow \boxed{\frac{\Delta r}{r} = -2 \frac{T}{\tau} \ll 1}$$

## ✿ Exercice 21

Il s'agit d'un exercice un peu délicat au niveau calcul pas tellement au niveau de la technicité qu'ils demandent (après tout ce ne sont que des développements limités d'ordre 1), mais surtout à cause de leur longueur. Il y a beaucoup de petits calculs à faire et à rassembler et, à la fin, cela peut provoquer de sérieuses difficultés pour quelqu'un de mal organisé.

Analyse physique. Ici l'énoncé impose l'utilisation du référentiel  $G(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  qui est un référentiel en translation et en rotation ! En conséquence de quoi il faudra utiliser les lois de composition les plus générales.

Et n'oublions pas la règle générale : tout d'abord un beau schéma avec les axes, les points intéressants et les grandeurs utiles.



**1.** Analyse physique. Ici il s'agit du mouvement d'un point par rapport à un satellite. Les seules forces qui s'exercent sont la gravitation et, puisque le référentiel est non galiléen, les forces d'inertie d'entraînement et de CORIOLIS. Les grandeurs pertinentes vont être  $m$  (pour décrire la masse),  $\omega$  (pour décrire les forces d'inertie) et la norme de la force de gravitation exercée par la Terre sur  $S$  (car c'est, à l'ordre 0 celle que subit  $M$ ).

Analyse technique. Pas de subtilité, c'est un mouvement à 3 degrés de description, donc nous allons utiliser un bon vieux PFD.

Nous allons simplement faire un PFD sur le point  $P$  dans le référentiel **non galiléen**  $\mathcal{R}_S$ .

**STOP** Le référentiel  $\mathcal{R}_S$  n'est ni en translation ni en rotation pure par rapport au référentiel géocentrique, il va donc falloir prendre les expressions complètes des accélérations d'entraînement et de CORIOLIS.

Les forces s'exerçant sur  $P$  sont :

- l'interaction gravitationnelle exercée par la Terre :  $\vec{f} = -G \frac{m M_T}{OP^3} \vec{OP}$ ;
- la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = -m \left( \vec{a}(G/\mathcal{R}_0) - \omega^2 \overline{HM} \right)$ ;
- la force d'inertie de CORIOLIS :  $\vec{f}_{ic} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}_S)$ .

Simplifions l'écriture de chacune des forces.

### ► Interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

Nous avons  $\vec{OP} = x \vec{u}_x - (R - y) \vec{u}_y + z \vec{u}_z$  et ainsi en faisant un développement limité à l'ordre 1 en  $\frac{x}{R}$ ,  $\frac{y}{R}$  et  $\frac{z}{R}$  :

$$\frac{1}{OP^3} = \left( (R-y)^2 + x^2 + z^2 \right)^{-3/2} = R^{-3} \left( 1 - \frac{2y}{R} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} \right)^{-3/2} \stackrel{DL}{\approx} R^{-3} \times \frac{3y}{R}$$

### ► Force d'inertie d'entraînement

→ Le terme  $\vec{a}(G/\mathcal{R}_0)$

Pour déterminer l'accélération de  $G$ , centre de masse du satellite, nous allons utiliser un PFD sur le satellite dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  galiléen.

Le satellite ne subit que l'attraction de la Terre, soit :

$$M_S \vec{a}(G/\mathcal{R}_0) = -G \frac{M_S M_T}{R^3} \vec{OG} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{a}(G/\mathcal{R}_0) = -G \frac{M_T}{R^3} \vec{OG}$$

En plus, comme le satellite a une trajectoire circulaire :  $-M_S R \omega^2 = -G \frac{M_S M_T}{R^2}$ .

Nous avons ainsi la relation  $\omega^2 = \frac{G M_T}{R^3}$  qui resservira.

→ Le terme  $-\omega^2 \overrightarrow{HM}$

Là, il faut vraiment faire attention :  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe du référentiel portant la rotation c'est-à-dire ici  $(G, \vec{u}_z)$ .

Nous avons donc  $-\omega^2 \overrightarrow{HM} = -\omega^2 (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y)$

☞ *Remarque.* Le terme  $-\omega^2 \overrightarrow{HM}$  vient en fait de  $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$ . Il était tout à fait possible de calculer le double produit vectoriel.

### ► Force d'inertie de CORIOLIS

La vitesse du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}_S$  s'écrit :  $\vec{v}(P/\mathcal{R}_S) = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$

Avec l'expression de  $\vec{\Omega}$ , nous arrivons à :  $\vec{f}_{ic} = 2 m \omega (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y)$ .

### ► Rassemblement

En écrivant le PFD après avoir simplifié par la masse  $m$  nous obtenons, en utilisant la relation  $\omega^2 = \frac{G M_T}{R^3}$  :

$$\begin{aligned} \vec{a}(P/\mathcal{R}_S) &= -\omega^2 \left( 1 + \frac{3y}{R} \right) \overrightarrow{OP} + \omega^2 \overrightarrow{OG} + \omega^2 (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y) + 2 m \omega (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y) \\ &= -\omega^2 (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG}) - \omega^2 \frac{3y}{R} \overrightarrow{OP} + \omega^2 (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y) + 2 m \omega (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y) \\ &= -\omega^2 \overrightarrow{GP} - \omega^2 \frac{3y}{R} \overrightarrow{OP} + \omega^2 (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y) + 2 m \omega (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y) \end{aligned}$$

et comme  $\overrightarrow{GP} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$  :

$$= -\omega^2 z \vec{u}_z - \omega^2 \frac{3y}{R} (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}) + 2 m \omega (\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y)$$

Le terme en  $\overrightarrow{GP}$  a été négligé dans la dernière expression car il s'agit d'un terme d'ordre 1 devant  $\overrightarrow{OG}$  ET que le coefficient multiplicateur  $\frac{3y}{R}$  est déjà d'ordre un. Le résultat  $\frac{3y}{R} \overrightarrow{GP}$  est donc un terme d'ordre 2 que nous sommes obligé de négliger étant donné que les développements limités sont faits à l'ordre 1 depuis le début.

Il reste donc, puisque  $\vec{OG} = -R \vec{u}_y$  en vectoriel et en projection :

$$\boxed{\vec{a}(P/\mathcal{R}_S) = -\omega^2 z \vec{u}_z + \omega^2 3y \vec{u}_y + 2m\omega(\dot{y} \vec{u}_x - \dot{x} \vec{u}_y)} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) \\ \ddot{x}(t) = 2\omega \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = 3\omega^2 y(t) - 2\omega \dot{x}(t) \end{array} \right.$$

2. Dans ces équations, les termes en  $\dot{x}(t)$  et  $\dot{y}(t)$  proviennent de la force d'inertie de CORIOLIS et ne font « que » dévier la trajectoire de  $P$ . Les autres termes, statiques, traduisent la légère différence de gravitation entre le point  $P$  et le point  $G$ . Il s'agit de termes de marée créés par la Terre au niveau du satellite.

3. Nous savons que  $\omega^2 = \frac{GM_T}{R^3}$ .

Or, à la surface de la Terre, l'accélération de pesanteur  $g_0$  est à peu près égale à l'attraction gravitationnelle  $\frac{GM_T}{R_T^2}$  et ainsi :

$$\omega^2 = \frac{g_0 R_T^2}{(R_T + h)^3} \simeq \frac{g_0 R_T^2}{R_T^3} \rightsquigarrow \omega^2 = \frac{g_0}{R_T}$$

Le rapport entre le champ statique  $z\omega^2$  et l'accélération de pesanteur vaut donc  $\frac{z}{R_T}$  ce qui correspond à une accélération résiduelle d'environ  $\boxed{10^{-7} g}$ .

4. ► **L'équation sur  $\vec{u}_z$ .** La solution est, compte tenu des conditions initiales :

$$\boxed{z(t) = c \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)}$$

► **L'équation sur  $\vec{u}_x$ .** Nous pouvons d'abord la primitiver une fois en faisant attention aux conditions initiales, cela donne

$$\dot{x}(t) = 2\omega y(t) - 2\omega b + \alpha\omega$$

En remplaçant cette expression de  $\dot{x}(t)$  dans l'équation en  $\ddot{y}$  nous obtenons :

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t) + 4\omega^2 b - 2\omega^2 \alpha = -\omega^2 y(t) + 2\omega^2 (2b - \alpha)$$

Il s'agit d'une équation dont la solution est, compte-tenu des conditions initiales et de la solution particulière (constante) de l'équation,

$$\boxed{y(t) = (2\alpha - 3b) \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) + 2(2b - \alpha)}$$

► **L'équation sur  $\vec{u}_x$ , 2<sup>e</sup>!** Nous pouvons maintenant remplacer  $y(t)$  dans l'expression intégrée de l'équation différentielle en  $\ddot{x}(t)$ , ce qui donne :

$$\ddot{x}(t) = -2\omega^2 (2\alpha - 3b) \sin(\omega t) + 2\omega^2 \beta \cos(\omega t)$$

Nous obtenons, en primitivant deux fois successives et en faisant attention aux conditions initiales à chaque fois :

$$\boxed{x(t) = 2(2\alpha - 3b) \sin(\omega t) - 2\beta \cos(\omega t) + 3\omega(2b - \alpha)t + 2\beta + a}$$

☞ *Remarque.* Dans l'expression de  $x(t)$ , il y a un terme proportionnel à  $t$ !

5. ► **Premier cas.** Nous trouvons, en reprenant les expressions précédentes :

$$\boxed{z(t) = 0} \quad \boxed{y(t) = -3b \cos(\omega t) + 4b} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = -6b \sin(\omega t) + 6\omega b t}$$

Nous constatons que le mouvement est dans le plan orbital du satellite et que  $x(t)$  tend à diverger.

En fait, dans le référentiel terrestre,  $P$  va avoir une trajectoire elliptique (normal : il n'est attiré **que** par la Terre) de demi-axe légèrement plus petit. La vitesse (dans  $\mathcal{R}_0$ ) de  $P$  sera alors plus grande que celle de  $G$  et  $P$  dépassera inexorablement  $G$ , ce que confirme  $x(t) \rightarrow \infty$  quand  $b > 0$ . D'un autre côté, cette expression de  $x(t)$  ne sera pas valable indéfiniment puisqu'elle résulte d'un développement limité autour de  $G$ .

► **Deuxième cas.** Nous trouvons, en reprenant les expressions précédentes :

$$\boxed{z(t) = 0} ; \quad \boxed{y(t) = \beta \sin(\omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = -2\beta \cos(\omega t) + 2\beta}$$

Là, l'ellipse de la trajectoire de  $P$  dans  $\mathcal{R}_0$  est synchrone avec  $G$  donc  $P$  ne s'éloigne jamais à l'infini de  $G$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  cela correspond à une trajectoire elliptique synchrone avec celle du satellite  $S$ . Cela implique d'après la 3<sup>e</sup> loi de KÉPLER que les deux trajectoires elliptique ont le même demi-grand-axe.

► **Troisième cas.** Nous trouvons, en reprenant les expressions précédentes :

$$\boxed{z(t) = 0} \quad \boxed{y(t) = 2\alpha \cos(\omega t) - 2\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{x(t) = 4\alpha \sin(\omega t) - 3\omega\alpha t}$$

Comme pour le premier cas, nous pouvons voir que le terme  $x(t)$  diverge. Cela signifie que les trajectoire dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  ne sont pas synchrones. Au bout de quelques révolutions le point  $M$  sera sensiblement décalé du centre de masse  $G$  du satellite.

## ✿ Exercice 22

1. Comme indiqué dans l'exercice sur la trajectoire circulaire, cette question est un classique.

La vitesse de la station est déterminée en projetant le PFD appliqué à la station sur  $\vec{u}_r$ , vecteur de la base cylindro-polaire. Nous trouvons alors  $v_s = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_0}} = \underline{7,393044} \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$ .

Nous pouvons écrire  $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_s}$  car le mouvement est uniforme (projection du PFD sur  $\vec{u}_\theta$ ).

Nous trouvons :  $T_0 = \underline{6,17011} \times 10^3 \text{ s}$ .

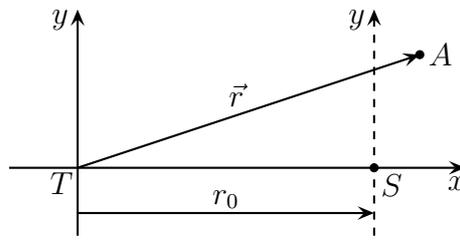
2. (a) Si  $A$  est sur la même orbite, il lui est impossible de rejoindre la station en restant sur cette trajectoire. En effet, il faudrait pour cela augmenter (ou diminuer)  $\dot{\theta}$  histoire de gagner (ou perdre) du terrain sur la station.

Malheureusement à  $r_0$  fixé, il n'y a qu'une valeur de  $\dot{\theta}$  qui permet une trajectoire circulaire. Changer  $\dot{\theta}$  impliquerait donc un changement d'orbite : il serait alors impossible de rejoindre la station.

☞ *Remarque.* nous pouvons imaginer faire en sorte que les réacteurs compensent le changement de trajectoire. Sauf que cette solution est gourmande en carburant et que le carburant est une des choses qu'il convient d'économiser au maximum.

2. (b) Faisons le schéma dans le référentiel  $\mathcal{R}$  non galiléen mais en rotation pure et uniforme (cool! ☺) par rapport au référentiel géocentrique.

Analyse technique. Étant donné qu'il y a au moins deux degrés de description ( $x(t)$  et  $y(t)$ ), ça sera un PFD.



Le référentiel  $\mathcal{R}$  n'est pas galiléen. Ainsi, le satellite  $A$  subit :

→ la force de gravitation exercée par la terre :  $\vec{f}_{\text{grav}} = -\frac{GM_T m}{r^3} \vec{r}$ . Or, d'après la question

précédente  $v_s = r_0 \omega$ , ce qui donne  $\vec{f}_{\text{grav}} = -\frac{m \omega^2 r_0^3}{r^3} \vec{r}$

→ la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{\text{ie}} = m \omega^2 \vec{r}$

→ la force d'inertie de CORIOLIS  $\vec{f}_{\text{ic}} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}$

2. (c) Le PFD dans  $\mathcal{R}$  non galiléen permet d'aboutir, après factorisation, à :

$$\vec{a} = \omega^2 \left( 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \vec{r} - 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

3. Il s'agit ici d'un changement de repérage. Au lieu de repérer par rapport à  $A$ , nous repérons par rapport à  $S$ . Remarquons que puisque  $S$  est immobile par rapport à  $A$ , ce n'est pas un changement de référentiel ! Ne pas hésiter à me poser des questions au cas où la nuance entre changement de repérage et changement de référentiel ne serait pas comprise car il s'agit là d'une notion fondamentale en physique : un repérage ne change pas l'interprétation physique alors que le référentiel, si.

Nous avons  $\vec{r} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SA}$  donc :

$$r^2 = (\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SA})^2 = r_0^2 + SA^2 + 2 \overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{SA} = r_0^2 + SA^2 + 2 r_0 x$$

En négligeant  $SA^2 = x^2 + y^2$  qui est d'ordre 2, cela donne  $r^2 = r_0^2 \left( 1 + \frac{2x}{r_0} \right)$ .

Toujours en continuant les DL à l'ordre 1 :  $\frac{r}{r_0} = 1 + \frac{x}{r_0}$  et  $\frac{r^3}{r_0^3} = 1 + \frac{3x}{r_0}$ .

Nous avons donc  $1 - \frac{r_0^3}{r^3} = -\frac{3x}{r_0}$ .

Le PFD s'écrit finalement dans le plan ( $Sxy$ ) :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = 3\omega^3 \frac{x(t)}{r_0} \begin{pmatrix} r_0 + x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + 2\omega \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

4. Dans le cas où les points  $S$  et  $A$  sont très proches nous pouvons négliger les termes d'ordres 2 en  $x^2$  et  $xy$  devant les termes à l'ordre 1. Les équations se simplifient alors bien en les expressions proposées.

4. (a) Ces termes proviennent de  $\vec{f}_{\text{ic}}$  (la force d'inertie de CORIOLIS).

4. (b) L'intégration de la seconde équation donne :  $\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -2\omega(x(t) - x(0))$  soit, en tenant compte des conditions initiales :  $\dot{y}(t) = -2\omega x(t)$ .

4. (c) En utilisant cette expression de  $\dot{y}(t)$  dans la première équation, nous trouvons  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ , de solution (en tenant compte des conditions initiales)  $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$ .

Nous en déduisons alors que  $\dot{y}(t) = -2v_0 \sin(\omega t)$  soit  $y(t) = -\frac{2v_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t)) + y_0$ .

4. (d) En éliminant le paramètre temps entre ces deux équation (en faisant par exemple  $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ ), nous obtenons l'équation de la trajectoire :  $\left(\frac{x}{v_0/\omega}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0 + 2v_0/\omega}{2v_0/\omega}\right)^2 = 1$ .

La trajectoire est bien une ellipse de demi-axes  $a = \frac{v_0}{\omega}$  et  $b = \frac{2v_0}{\omega}$ , centrée au point de coordonnées  $x = 0$  et  $y = y_0 - 2v_0/\omega$ .

L'arrimage est réalisé pour  $t = t_1$  tel que  $x = 0$  et  $y = 0$ . Nous avons alors  $\omega t_1 = \pi$  soit  $t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi r_0}{v_s} = \frac{T_0}{2}$  d'où  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Il faut alors  $0 = -\frac{2v_0}{\omega}(1 + 1) + y_0$  soit  $y_0 = \frac{4v_0}{\omega}$ .

Ainsi, si  $A$  est en avant de la station ( $y_0 > 0$ ), il faut lui donner une impulsion tendant à augmenter le rayon de sa trajectoire ( $v_0 > 0$ ) et si  $A$  est en arrière de la station ( $y_0 < 0$ ), il faut le faire « plonger » vers la Terre ( $v_0 < 0$ ).

☞ *Remarque.* cette dernière constatation peut s'interpréter dans le référentiel géocentrique. Une impulsion en direction de la Terre ne modifie pas le moment cinétique du satellite. En revanche cela modifie sa distance à la Terre. Or avec  $\sigma = mR^2\dot{\theta}$ , si le satellite est en avance, il faut le « ralentir », donc diminuer  $\dot{\theta}$  i.e. augmenter  $r$ . De manière analogue, si le satellite est en retard sur la station, il faut le faire plonger vers la Terre de telle sorte que  $r$  diminue et  $\dot{\theta}$  augmente. N'oublions pas, enfin, que le satellite a une trajectoire elliptique dans le référentiel géocentrique.

### ☛ Exercice 23

1. (a) Voir cours de 1<sup>re</sup> année.  $\vec{\mathcal{M}}_A(M) = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T)$  où  $\vec{\mathcal{G}}_A(M)$  est le champ de gravitation créé par l'astre au point  $M$ .

1. (b) Écrivons les deux champs de gravitation :

$$\vec{\mathcal{G}}_A(M) = \frac{GM_A}{r^2} \vec{u}_1 \quad \text{où} \quad \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = \cos\theta \vec{u}_x - \sin\theta \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}_A(T) = \frac{GM_A}{d^2} \vec{u}_x$$

Nous obtenons ainsi  $\vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(T) = GM_A \frac{1}{r^2} (\cos\theta \vec{u}_x - \sin\theta \vec{u}_y) - GM_A \frac{1}{d^2} \vec{u}_x$ .

De plus avec PYTHAGORE, nous pouvons écrire :

$$r^2 = (d - R \cos\lambda)^2 + R^2 \sin^2\lambda \quad \rightsquigarrow \quad r^2 = d^2 \left( \left(1 - \frac{R}{d} \cos\lambda\right)^2 + \frac{R^2}{d^2} \sin^2\lambda \right)$$

En faisant un développement limité au premier ordre (i.e. les termes en  $\frac{R^2}{d^2}$  sont négligés) nous obtenons

$$r^2 = d^2 \left(1 - \frac{2R}{d} \cos\lambda\right)$$

En remplaçant  $r^2$  dans l'expression initiale et avec  $\cos\theta = 1$  et  $\sin\theta = \theta = \frac{R \sin\lambda}{d}$  à l'ordre 1, nous obtenons finalement le résultat demandé.

1. (c) Nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{TF} - \overrightarrow{TM} = 3\overrightarrow{TP} - \overrightarrow{TM}$$

Or

$$\overrightarrow{TM} = R(\cos \lambda \vec{u}_x + \sin \lambda \vec{u}_y) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{TP} = R \cos \lambda \vec{u}_x$$

Nous obtenons donc

$$\overrightarrow{MF} = R(2 \cos \lambda \vec{u}_x - \sin \lambda \vec{u}_y)$$

Il s'agit bien du résultat attendu avec  $\kappa = R$ .

Nous constatons que  $\overrightarrow{MF}$  et  $\vec{\mathcal{M}}_A$  sont tous les deux colinéaires à  $\vec{u} \stackrel{\text{not}}{=} 2 \cos \lambda \vec{u}_x - \sin \lambda \vec{u}_y$ , ils sont donc colinéaires entre eux. La construction de PROCTOR est ainsi justifiée car construire  $\overrightarrow{MF}$  revient à construire  $\vec{\mathcal{M}}_A$ .

2. Pour interpréter les marées, il faut se placer dans le référentiel terrestre. Avec  $\vec{u}_z$  la verticale locale et  $\vec{u}_x$  le vecteur qui pointe vers la côte, si le terme de marée a une composante positive sur  $\vec{u}_x$ , cela signifie qu'il y a marée haute.

Dans le type ① nous voyons bien que lors d'une demi-rotation de la Terre, *i.e.* au bout d'une demi-journée, il y a une marée haute identique à celle 12 heures auparavant. La période des marées est donc d'une demi-journée, soit « semi-diurne ».

Dans le type ②, au bout de 12 heures nous pouvons constater qu'il existe bien une autre marée haute mais d'intensité différente, c'est pourquoi la période des marées est bien d'une demi-journée, mais ce sont des marées « inégales », d'où « semi-diurne à inégalité diurne ».

Pour le type ③, nous constatons qu'au bout de 12 heures, la composante horizontale (pour le point  $M$ ) du terme de marée a une direction opposée, *i.e.* il y a marée basse. C'est pourquoi dans ce cas il n'y a qu'une marée par jour, soit une marée « diurne ».