

# Mécanique du solide

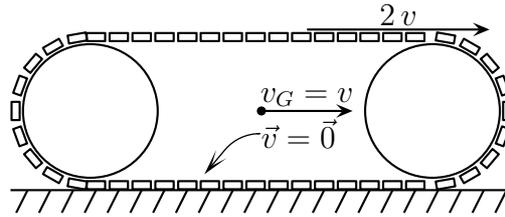
## ✿ Exercice 1

Il s'agit ici d'un pur exercice de cinématique, il n'y a donc pas tellement (euphémisme) de physique.

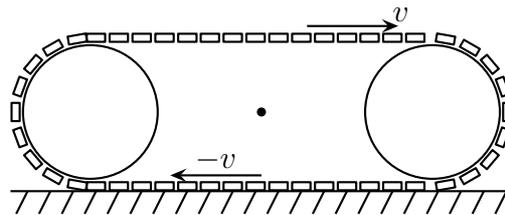
Analyse technique. Étant donné que la chenille a un mouvement d'ensemble, nous allons plutôt utiliser une approche systémique pour déterminer son énergie cinétique.

Utilisons KœNIG :  $E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*)$ .

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  la situation est la suivante et nous voyons bien que la vitesse du centre de masse n'est autre que  $v$ .



Dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  la situation est la suivante et nous constatons alors que chacune des petites masses a une vitesse  $v$  par rapport à  $\mathcal{R}^*$ .



L'énergie cinétique vaut alors  $E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \frac{1}{2} m v^2$ .

Finalement nous obtenons :  $E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = m v^2$ .

## ✿ Exercice 2

1. Pour avoir  $J = m \ell^2$ , il faudrait que toute la masse soit concentrée à une distance  $\ell$  du centre de masse, *i.e.* ici aux extrémités du bâton.

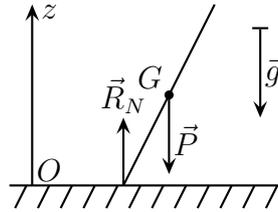
Comme la tige est homogène tel n'est pas le cas, il y a des parties massiques plus proche de  $G$ , cela implique un moment d'inertie plus petit, *i.e.*  $\eta = \frac{J}{m \ell^2} < 1$ .

2. Analyse physique. Ici la tige possède 4 degrés de liberté : 2 pour décrire la position du point de contact sur le sol et 2 angle pour permettre de décrire l'inclinaison (un pour décrire vers où penche la tige et un autre pour décrire quel est l'angle formé avec la verticale). Toutefois la tige n'est soumise qu'à des forces verticales, ce qui implique que son mouvement d'ensemble (= la trajectoire de  $G$ ) sera vertical. Il ne reste qu'un degré de description !

Analyse technique. Pour trouver une trajectoire quand il y a beaucoup de degrés de liberté, rien de tel qu'un bon PFD !

On choisit d'étudier le système  $\mathcal{S}$  { tige } dans le référentiel terrestre galiléen. Les forces extérieures qui s'exercent dessus sont :

- le poids  $\vec{P} = m \vec{g}$  vertical ;
- la réaction normale du sol (car sans frottement) :  $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$ .



La projection du TCI sur  $\vec{u}_x$  donne alors  $0 = m \ddot{x}(t)$  soit, puisque la tige est abandonnée (la pauvre!) sans vitesse initiale ( $x(t) = 0$ ).

Nous obtenons bien le même résultat que celui trouvé lors de l'analyse physique préliminaire :

la trajectoire de  $G$  est purement verticale

**3.** *Analyse physique.* Étant donné que la trajectoire de  $G$  est verticale, le dispositif est à un seul degré de description, ici nous choisirons  $\alpha$ . De plus l'évolution est libre et conservative.

*Analyse technique.* Un degré de description + régime libre = théorème énergétique. Comme la tige a clairement un mouvement d'ensemble, nous allons la décrire sous forme systémique.

La seule force non conservative  $\vec{R}_N$  subie par la tige ne travaille pas car le point (de la tige) qui subit la force a une trajectoire (horizontale) orthogonale à la force (qui est verticale). De plus comme la puissance des interactions intérieures est nulle (la tige est un solide), nous avons  $E_m(\mathcal{S}) = C^{\text{te}}$ .

► **L'énergie cinétique.** KENIG, un beau matin, a dit :  $E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m v_G^2(t) + E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*)$ .

Comme la trajectoire de  $G$  est verticale, sa vitesse est uniquement portée par  $\vec{u}_z$ , ce qui donne  $v_G(t) = \dot{z}_G(t)$ .

Or, géométriquement nous pouvons constater que  $z_G(t) = \ell \cos \alpha$  ce qui nous donne, en dérivant :  $\dot{z}_G(t) = -\ell \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t)$ .

De plus dans le référentiel barycentrique comme la rotation se fait avec une vitesse angulaire  $\dot{\alpha}(t)$  nous obtenons  $E_c(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2(t)$ .

► **L'énergie potentielle.** Avec  $E_{p,\text{pes}} = m g h_G$  nous avons  $E_{p,\text{pes}} = m g \ell \cos \alpha$ .

► **Théorème.** La conservation de l'énergie mécanique donne  $E_m(\alpha) = E_m(0)$  soit :

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2(t) \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2(t) + m g \ell \cos \alpha = 0 + m g \ell$$

En factorisant et en isolant  $\dot{\alpha}(t)$  nous trouvons (attention au signe) :

$$\dot{\alpha} = -\sqrt{\frac{2g}{\ell} \frac{(1 - \cos \alpha)}{\eta + \sin^2 \alpha}}$$

### ✿ Exercice 3

Pourquoi une « intégrale première du mouvement » au lieu de « conservation de l'énergie » ?

La base de la dynamique est la 2<sup>e</sup> loi de NEWTON, c'est-à-dire une loi avec des dérivées d'ordre 2. Trouver une intégrale première du mouvement revient à intégrer cette loi de sorte qu'il n'y ait plus que des dérivées d'ordre 1. En effet, il est plus facile de résoudre numériquement des équations différentielles d'ordre 1 que des équations différentielles d'ordre 2.

Après, il est vrai que si la façon la plus simple d'obtenir une intégrale première du mouvement est d'écrire une loi de conservation énergétique, il n'est pas impossible d'imaginer des cas où cette intégrale première du mouvement ne serait pas une loi énergétique.

**1.** *Analyse physique.* Étant donné qu'il n'y a pas glissement, nous pouvons voir que le mouvement est à un degré de description. De plus il est libre et conservatif.

*Analyse technique. Avoir une intégrale première du mouvement c'est écrire (la plupart du temps) une loi de conservation énergétique. Alors soit. En ce qui concerne l'approche, nous pouvons voir que l'objet qui roule est la réunion de deux choses distinctes. Nous allons donc traiter cet objet sous forme particulière en distinguant les contributions de chacune de ses parties.*

Considérons le système  $\mathcal{S} \{ P + \text{disque } \mathcal{D} \}$  dont nous pouvons constater qu'il s'agit d'un solide. Son énergie mécanique est constante car :

→ il frotte sans glisser sur son support immobile

→ en tant que solide, la puissance de ses interactions intérieures est nulle

L'énergie cinétique de  $\mathcal{S}$  vaut, par extensivité :  $E_c(\mathcal{S}) = E_c(P) + E_c(\mathcal{D})$ .

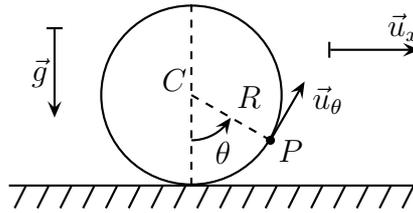
D'après Kœnig :  $E_c(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} M v_C^2 + E_c^*(\mathcal{D})$ .

Or, dans  $\mathcal{R}^*$ , le disque a un mouvement de rotation pure ce qui donne :

$$E_c^*(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad \rightsquigarrow \quad E_c(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique de  $P$  s'écrit  $E_c(P) = \frac{1}{2} m v^2(P)$  avec, par loi de composition,  $\vec{v}(P) = \vec{v}(C) + R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ . Et ainsi :

$$\begin{aligned} E_c(P) &= \frac{1}{2} m \left( v_C \vec{u}_x + R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \right)^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m \vec{v}_C \cdot (R \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m v_C R \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned}$$



De plus comme la condition de non glissement s'écrit  $v_C = -R \dot{\theta}$  (attention au signe), nous arrivons, en rassemblant le tout à :

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \left( (M + 2m) R^2 + J \right) \dot{\theta}^2 - m R^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

L'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur donc  $E_p = m g h_P = m g R(1 - \cos \theta)$ .

Ainsi, en rassemblant le tout :

$$\boxed{\frac{1}{2} \left( (M + 2m) R^2 + J \right) \dot{\theta}^2 - m R^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + m g R(1 - \cos \theta) = C^{\text{te}}}$$

2. Inutile de discuter pour dire que la position d'équilibre stable est  $\theta_{\text{eq}} = 0$ .

*Pour déterminer les oscillations autour de l'équilibre, il est possible soit de dériver l'expression complète de l'énergie puis de faire un DL à l'ordre 1, soit de faire un DL à l'ordre 2 de l'énergie puis de dériver. Étant donné qu'ici il y a du  $\dot{\theta}^2 \cos \theta$ , nous allons opter pour la deuxième méthode.*

Le développement à l'ordre 2 de l'énergie s'écrit :

$$E_m(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \left( (M + 2m) R^2 + J \right) \dot{\theta}^2 - m R^2 \dot{\theta}^2 \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + m g R \left( 1 - \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right)$$

Le terme en  $\dot{\theta}^2 \theta^2$  étant d'ordre 4, nous sommes **obligé** de le simplifier. Il reste :

$$E_m(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} \left( (M + m) R^2 + J \right) \dot{\theta}^2 + m g R \frac{\theta^2}{2}$$

Et en dérivant, nous obtenons, après avoir simplifié par la solution inintéressante  $\dot{\theta}(t)$  correspondant à l'équilibre :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{m g R}{J + (M + m) R^2} \theta(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m g R}{J + (M + m) R^2}}$$

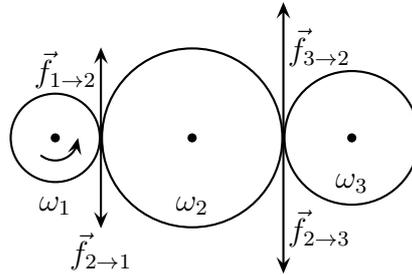
3. Le disque avance toujours dans le même sens lorsque  $E_c(\theta = \pi) > 0$ , ce qui correspond, puisqu'alors l'énergie potentielle est à son maximum  $E_{p,\max} = 2 m g R$  :  $E_m > 2 m g R$ .

#### ✿ Exercice 4

*Analyse physique.* Ici le dispositif est à un seul degré de description puisque les engrenages impliquent des roulements sans glissement au niveau des points de contact.

*Analyse technique.* Le but est de trouver l'évolution de l'engrenage ③ connaissant l'excitation de ①. Pour cela il faudra passer par deux, c'est-à-dire utiliser à un moment ou à un autre la loi des actions réciproques. Nous ne pouvons en effet pas utiliser de loi systématique car nous ne connaissons pas de loi permettant de déterminer le moment d'un couple s'exerçant sur un axe par rapport à un autre axe. Typiquement quel est le moment du couple  $\Gamma_m$  par rapport à l'axe de rotation de ③ ?

Faisons tout d'abord un beau schéma des forces qui s'exercent un peu partout.



Posons le sens de rotation positif **valable pour les trois roues** dans le sens trigonométrique.

Le TMCS appliqué au disque 1 par rapport à son axe donne :  $J_1 \dot{\omega}_1(t) = \Gamma_m - f_{2 \rightarrow 1} r_1$ .

Le TMCS appliqué au disque 2 par rapport à son axe donne :  $J_2 \dot{\omega}_2(t) = -f_{1 \rightarrow 2} r_2 + f_{3 \rightarrow 2} r_2$ .

Le TMCS appliqué au disque 3 par rapport à son axe donne :  $J_3 \dot{\omega}_3(t) = f_{2 \rightarrow 3} r_3 - \Gamma_f$ .

De plus les conditions de non glissement des roues les unes par rapport aux autres donnent :  $r_2 \omega_2 = -r_3 \omega_3$  et  $r_2 \omega_2 = -r_1 \omega_1$ .

Enfin, il faut tenir compte de la 3<sup>e</sup> loi de Newton qui dit  $f_{1 \rightarrow 2} = f_{2 \rightarrow 1}$  et  $f_{3 \rightarrow 2} = f_{2 \rightarrow 3}$  (attention ce sont des relations en norme et pas en vecteurs, d'où l'absence de signe -).

Nous obtenons ainsi, avec des remplacements successifs en partant du 3<sup>e</sup> TMCS :

$$\begin{aligned} J_3 \dot{\omega}_3 &= r_3 \left( f_{1 \rightarrow 2} + \frac{J_2}{r_2} \dot{\omega}_2 \right) - \Gamma_f \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= -J_2 \frac{r_3^2}{r_2^2} \dot{\omega}_3 - \Gamma_f + r_3 \left( \frac{\Gamma_m}{r_1} - \frac{J_1 \dot{\omega}_1}{r_1} \right) \\ \left( J_3 + J_2 \frac{r_3^2}{r_2^2} \right) \dot{\omega}_3(t) &= \Gamma_m \times \frac{r_3}{r_1} - \Gamma_f - \frac{r_3}{r_1} J_1 \frac{\cancel{r_3}}{r_1} \dot{\omega}_3 \end{aligned}$$

$$\text{et ainsi : } \left( J_3 + \frac{r_3^2}{r_2^2} J_2 + \frac{r_3^2}{r_1^2} J_1 \right) \dot{\omega}_3(t) = \frac{r_3}{r_1} \Gamma_m - \Gamma_f.$$

Nous pouvons constater que tout se passe comme si le moteur exerçait un couple de moment  $\frac{r_3}{r_1} \Gamma_m$  sur la roue ③. Cela correspond à quelque chose de bien connu en vélo : plus le plateau ( $r_1$ ) est petit et plus les pignons sont grands ( $r_3$ ), plus il est facile de pédaler. Mais moins ça va vite !

### ✿ Exercice 5

*Analyse physique.* Ici la boule va commencer à rouler vers le bas, entraînée par son poids. Étant donné qu'au début il n'y a pas de glissement, le dispositif est à un degré de description. Les paramètres pertinents vont être  $r$ ,  $R$ ,  $m$ ,  $J$ ,  $g$  et  $f$ .

**1.** *Analyse technique.* Ici l'évolution est libre et à un degré de description. Nous allons utiliser une approche énergétique. De plus comme la seule partie en mouvement est un solide, nous utiliserons les lois de KÆNIG.

Ici, la seule force non conservative qui s'exerce sur le système c'est la force de contact (avec frottement) exercée par le demi-cylindre, mais celle-ci ne travaille pas étant donné qu'il y a roulement sans glissement. En effet, puisqu'il n'y a pas de glissement, le point de la sphère qui subit la force a la même vitesse que le point du cylindre avec lequel il est en contact. Comme le cylindre est immobile, le point de la sphère en contact avec le cylindre est immobile. La puissance qu'il reçoit est nulle. Ainsi :

$$E_m(\mathcal{B}) = E_c(\mathcal{B}) + E_p(\mathcal{B}) = C^{\text{te}}$$

En ce qui concerne l'énergie cinétique, KÆNIG a dit :

$$E_c(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_c^*(\mathcal{B})$$

Comme le centre de masse  $G$  a une trajectoire circulaire de rayon  $(R+r)$  et de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et que dans le référentiel barycentrique, la boule tourne autour de son axe passant par  $G$  à la vitesse  $\dot{\alpha}$ , nous obtenons :

$$E_c(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} m (R+r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$$

Pour trouver la relation entre  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{\theta}$ , nous allons écrire que la vitesse de glissement de la boule sur le demi-cylindre est nulle.

Or  $\vec{v}_g(\mathcal{B}/\mathcal{C}) = \vec{v}(I \in \mathcal{B}/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \mathcal{C}/\mathcal{R})$  mais comme le demi-cylindre est immobile :  $\vec{v}(I \in \mathcal{C}/\mathcal{R}) = \vec{0}$ . Ainsi, avec le champ des vitesses d'un solide, nous trouve (avec  $\vec{u}_Z$  tel que  $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \vec{u}_Z$ ) :

$$\vec{v}_g(\mathcal{B}/\mathcal{C}) = \vec{v}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = (R+r)\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\alpha}\vec{u}_Z \wedge (-r\vec{u}_r) = [(R+r)\dot{\theta} - r\dot{\alpha}]\vec{u}_\theta$$

Et comme cette vitesse est nulle :  $\dot{\alpha} = \frac{r+R}{r} \dot{\theta}$  ce qui donne

$$E_c(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} m (R+r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \left( \frac{r+R}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m (R+r)^2 \left( 1 + \frac{J}{m r^2} \right) \dot{\theta} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{2} m (R+r)^2 (1 + \beta) \dot{\theta}^2$$



lorsque le support n'est pas plan, il n'est pas facile « d'intuiter » la condition de non glissement.

L'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur soit  $E_p = m g z_G = m g (R+r) \cos \theta$ .

En rassemblant le tout et en tenant compte des conditions initiales nous arrivons à :

$$E_m = 12 m (R + r)^2 (1 + \beta) \dot{\theta}^2 + m g (R + r) \cos \theta = m g (R + r) \quad (//)$$

En dérivant l'expression précédente par rapport au temps et en simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{\theta}(t) = 0$ , nous obtenons :

$$(R + r)^2 (1 + \beta) \ddot{\theta}(t) - m g (R + r) \sin \theta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{g}{(R + r)(1 + \beta)} \theta(t) = 0}$$

**2.** La condition de non glissement est vérifiée tant que  $R_T \leq f R_N$ . Il faut donc déterminer  $R_T$  et  $R_N$  et, pour cela, rien ne vaut un bon TCI :  $m \vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$  qui donne en projection respectivement sur  $\vec{u}_r$  et sur  $\vec{u}_\theta$  (sans oublier que  $G$  a une trajectoire circulaire ☺) :

$$-m(R + r)\dot{\theta}^2 = -m g \cos \theta + R_N \quad \text{et} \quad m(R + r)\ddot{\theta} = m g \sin \theta - R_T$$

Nous avons ainsi  $R_N = m g \cos \theta - m(R + r)\dot{\theta}^2$  et avec l'équation (//) :

$$R_N = m g \cos \theta - m \cancel{(R + r)} \times \frac{m g \cancel{(R + r)} (1 - \cos \theta)}{\frac{1}{2} \cancel{(R + r)}^2 m (1 + \beta)} = m g \cos \theta - m g \times \frac{2(1 - \cos \theta)}{1 + \beta}$$

Et finalement  $R_N = m g \times \frac{(3 + \beta) \cos \theta - 2}{1 + \beta}$

De plus  $R_T = m g \sin \theta - m(R + r)\ddot{\theta}$  et avec l'équation différentielle précédente :

$$R_T = m g \sin \theta - m \cancel{(R + r)} \times \frac{g \sin \theta}{\cancel{(R + r)}^2 (1 + \beta)} = m g \times \frac{\beta \sin \theta}{1 + \beta}$$

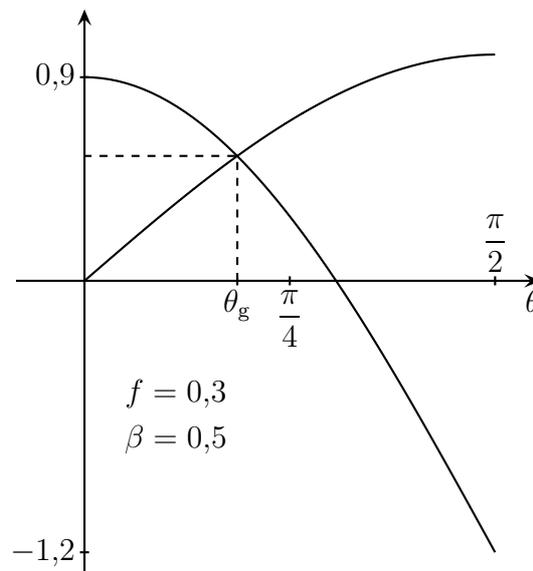
La condition de non glissement s'écrit donc

$$m g \times \frac{\beta \sin \theta}{1 + \beta} \leq f m g \times \frac{(3 + \beta) \cos \theta - 2}{1 + \beta}$$

Cette relation se simplifie en  $\sin \theta \leq f \frac{(3 + \beta) \cos \theta - 2}{\beta}$ .

En traçant les graphiques des fonctions  $f_1(\theta) = \sin \theta$  et  $f_2(\theta) = f \frac{(3 + \beta) \cos \theta - 2}{\beta}$  nous voyons qu'il existe une valeur de  $\theta$  pour laquelle cette condition n'est plus remplie :

$$\boxed{\sin \theta_g \leq f \frac{(3 + \beta) \cos \theta_g - 2}{\beta}}$$



3. *Analyse technique. Étant donné d'une part qu'il y a deux degrés de liberté (puisque'il y a glissement) et que le mouvement n'est plus conservatif d'autre part, l'approche énergétique ne suffit plus. Nous allons donc regarder du côté des forces. Et comme seul le paramètre  $\theta(t)$  nous est demandé, nous allons nous contenter d'un bon TCI.*

Le TCI précédent est toujours valable ici aussi. De plus comme il y a glissement, nous savons que  $|R_T| = f R_N$  soit, en faisant attention au signe :

$$-m(R+r)\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R_N \quad \text{et} \quad m(R+r)\ddot{\theta} = mg \sin \theta - f R_N$$

En éliminant  $R_N$  entre les deux équations, nous trouvons :

$$m(R+r)\ddot{\theta} - m f(R+r)\dot{\theta}^2 = m g (\sin \theta - f \cos \theta)$$

4. *Nous ne pouvons plus utiliser la conservation de l'énergie mais nous pouvons utiliser la méthode aboutissant, habituellement, à cette conservation.*

Partons de la projection sur  $\vec{u}_\theta$  du TCI :

$$-f R_N = \frac{1}{\dot{\theta}} \left( m(R+r)\ddot{\theta}\dot{\theta} - m g \dot{\theta} \sin \theta \right) = \frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m(R+r)\dot{\theta}^2 + m g \cos \theta \right)$$

En utilisant maintenant la projection du TCI sur  $\vec{u}_r$ , pour éliminer le terme en  $\dot{\theta}^2$  :

$$\begin{aligned} -f R_N &= \frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d}{dt} \left( \frac{m g \cos \theta}{2} - \frac{R_N}{2} + m g \cos \theta \right) = \frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d}{dt} \left( \frac{3 m g \cos \theta}{2} - \frac{R_N}{2} \right) \\ &= -\frac{3 m g \sin \theta}{2} - \frac{1}{2 \dot{\theta}} \frac{d\theta}{dt} \frac{dR_N}{d\theta} \end{aligned}$$

Et ainsi  $\left[ \frac{dR_N(\theta)}{d\theta} - 2 f R_N(\theta) = -3 m g \sin \theta \right]$ .

La solution de cette équation différentielle s'écrit  $R_N(\theta) = R_{N,\text{part}}(\theta) + \lambda e^{2f\theta}$ .

En cherchant  $R_{N,\text{part}}(\theta)$  sous la forme  $R_{N,\text{part}}(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta$ , nous aboutissons à

$$R_N(\theta) = \frac{3 m g}{1 + 4 f^2} (\cos \theta + f \sin \theta) + \lambda e^{2f\theta}$$

Il faut maintenant déterminer  $\lambda$  avec les conditions initiales :  $R_N(\theta_g) = f R_{T,\text{sans glissement}}(\theta_g)$  donné par l'expression de la question [2].

Nous trouvons, pour  $f = 0,3$  et  $\beta = 0,5$ ,  $\lambda = -1,51407 m g$  et ainsi  $R_N = 0$  pour (numériquement) :  $\theta_r = \underline{35,0612^\circ}$ .

### ✳ Exercice 6

*Analyse physique.* Ici nous sentons bien que suivant les masses  $m_2$  et  $m$  soit c'est  $m$  qui va descendre et  $m_2$  qui va monter, soit le contraire. Étant donné que ce ne sont pas de simple masse ponctuelle, il vaut mieux prendre la précaution de ne pas dire que le cas limite est pour  $m = m_2$ . De plus nous pouvons voir que le mouvement est à un degré de description, puisqu'il n'y a pas de glissement, et qu'il est conservatif. Les grandeurs pertinentes seront :  $m$ ,  $m_1$ ,  $r_1$ ,  $m_2$ ,  $r_2$  (inutile de parler de  $J_1$  et  $J_2$  puisque les moments d'inerties sont reliés à la masse et à la géométrie des poulies), et  $g$ .

*Analyse technique.* Un degré de description et une évolution libre (qui plus est conservative) ont toujours donné naissance à une approche énergétique. Soit ! En ce qui concerne l'ensemble du dispositif, comme il est complexe, nous allons considérer le système  $\{ \text{fil} + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + m \}$  et l'étudier de manière particulière, c'est-à-dire chaque partie séparément. Il faudra juste faire attention au fait que  $m$  ne fait que se translater,  $m_1$  ne fait que tourner et  $m_2$  tourne et se translate.

#### ► Évolution conservative.

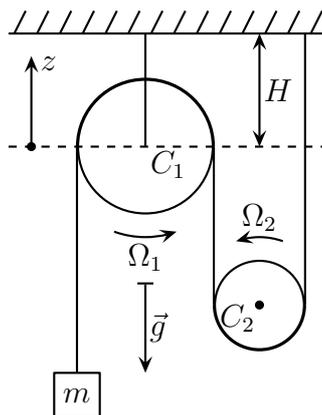
L'ensemble du dispositif est à évolution conservative. Nous allons donc utiliser un théorème énergétique sur le système  $\mathcal{S} \{ \text{fil} + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + m \}$ .

En ce qui concerne les forces extérieures non conservatives :

- l'action de l'axe sur la poulie 1 ne travaille pas car il n'y a pas de frottements
- l'action du bâti sur le fil ne travaille pas parce que le point d'application de la force est immobile (forcément : le fil est attaché)

En ce qui concerne les interactions intérieures :

- $m \leftrightarrow \text{fil}$  ne travaille pas parce que  $m$  et le fil sont en liaison totale
- $\text{fil} \leftrightarrow \mathcal{P}_1$  ne travaille pas parce qu'il y a frottement sans glissement
- $\text{fil} \leftrightarrow \mathcal{P}_2$  ne travaille pas parce qu'il y a frottement sans glissement



L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_1 \Omega_1^2 + E_{c,2} \quad \text{avec} \quad E_{c,2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_2^2$$

L'énergie potentielle se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur soit, en prenant l'origine au niveau de  $C_1$  :

$$E_p(\mathcal{S}) = m g z + m_2 g z_2$$

### ► Un seul degré de description

Traduisons maintenant les conditions de liaison qui font que dispositif est à un degré de description.

La longueur du fil est constante donc :

$$\ell(t) = -z(t) + \pi r_1 - 2 z_2(t) + \pi r_1 + H \rightsquigarrow z(t) = -2 z_2(t) + C^{\text{te}} \rightsquigarrow \dot{z}(t) = -2 \dot{z}_2(t)$$

La condition de non glissement du fil sur la poulie 1 s'écrit  $\dot{z}(t) = r_1 \Omega_1$  et celle sur fil sur la poulie 2 s'écrit :  $\dot{z}_2(t) = r_2 \Omega_2$ . Cela donne  $\Omega_2 = \frac{\dot{z}_2}{r_2}$  et  $\Omega_1 = -\frac{2 \dot{z}_2}{r_1}$ .

En remplaçant le tout nous obtenons d'abord :

$$\frac{1}{2} m (4 \dot{z}_2(t)) + \frac{1}{2} J_1 \times \frac{4 \dot{z}_2^2(t)}{r_1^2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) + \frac{1}{2} J_2 \frac{\dot{z}_1^2(t)}{r_2^2} + g (m_2 - 2 m) z_2(t) = C^{\text{te}}$$

Dérivons et simplifions par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{z}_2(t) = 0$  :

$$\left( 4m + 4 \frac{J_1}{r_1^2} + m_2 + \frac{J_2}{r_2^2} \right) \ddot{z}_2(t) = (2m - m_2) g$$

le résultat est bien cohérent puisque si  $m$  est trop grand, la poulie 2 est accélérée vers le haut alors que si  $m_2$  est trop faible, c'est la masse  $m$  qui accélérée vers le haut.

### ✿ Exercice 7

*Analyse physique. L'ensemble va osciller à cause du ressort. Le mouvement est libre, conservatif, à un degré de liberté (une connue la longueur du ressort, tout le reste peut être parfaitement positionné). Les résultats vont dépendre de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k$ ,  $\ell_0$ ,  $g$  et  $R$  rayon de la poulie. Cela dit, avec un ressort, la pulsation des oscillations fait rarement intervenir le poids : seule la position de l'équilibre dépend du poids.*

*Analyse technique. Un degré de liberté ? un mouvement conservatif ? La décision est déjà prise : ce sera une approche énergétique. Ici pour étudier l'ensemble, nous passerons évidemment par un système mais que nous regarderons de manière particulière et non systémique car la position du centre de masse n'est clairement pas pertinente ici.*

Choisissons le système suivant : { la poulie + le fil + les deux masses }. Ce système est à évolution conservative.

En effet les forces extérieures auxquelles est soumis ce système sont : le poids (conservatif), la tension du ressort (conservative) et la force exercée par le support sur le fil. Cette dernière force, non conservative, ne travaille pas car le point d'application (le bout du fil) ne se déplace pas, donc  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . L'évolution est bien conservative.

L'origine du repère est en  $O$  avec  $\vec{u}_z$  orienté vers le haut, donc  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  sont négatifs.

► **Énergie potentielle.** Notons  $\ell(t) = -z_1(t)$  est la longueur du ressort et  $\ell_0 = -z_0$  sa longueur naturelle. Alors :

$$E_p = E_{p,p} + E_{p,el} = m_1 g z_1(t) + m_2 g z_2(t) + \frac{1}{2} k (\ell(t) - \ell_0)^2$$

► **Ramener à un degré de liberté.** Si tout est relié, c'est à cause du fil et surtout de son inextensibilité. Traduisons-la.

Notons  $d$  la longueur du fil,  $z_t(t)$  la cote du point d'attache et  $R$  le rayon de la poulie. Nous avons donc :  $d = (z_1(t) - z_t(t)) + \pi R + (z_1(t) - z_2(t))$ .

Or  $d = C^{\text{te}}$ , donc  $\dot{d} = 0$  ce qui donne :  $2 \dot{z}_1(t) = \dot{z}_2(t)$

► **Énergie cinétique :**  $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) = \frac{m_1 + 4 m_2}{2} \dot{z}_1^2(t)$

► **Conservation de l'énergie mécanique.** Celle-ci s'écrit :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g(m_1 + 2m_2)\dot{z}_1(t) + k(z_1(t) - z_0)\dot{z}_1(t) + (m_1 + 4m_2)\dot{z}_1(t)\ddot{z}_1(t) = 0$$

En simplifiant par la solution inintéressante  $\dot{z}_1(t) = 0$  correspondant à l'équilibre, nous trouvons :

$$\boxed{\ddot{z}_1(t) + \omega^2 z_1(t) = \omega^2 z_{\text{éq}}}$$
 avec  $\boxed{z_{\text{éq}} = z_0 - \frac{g}{k}(m_1 + 2m_2)}$  et  $\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m_1 + 4m_2}}$

La solution de cette équation est donc bien une solution sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ce qui donne bien le résultat proposé.

### ✿ Exercice 8

*Analyse physique.* Lorsque la bille va tomber, le cône va se mettre à tourner car la bille va le pousser en arrière. L'évolution sera donc conservative (aucun phénomène dissipatif) mais à deux degrés de description : la rotation du cône et la translation de la bille. Les grandeurs pertinentes sont :  $m$  et  $J$  pour décrire l'inertie du dispositif,  $\alpha$  et  $h$  pour la géométrie et  $g$  pour les forces.

*Analyse technique.* Ici le dispositif est à deux degrés de description. Autrement dit une approche énergétique ne sera pas suffisante ! Ce n'est pas pour cela qu'il faut jeter le bébé énergie dans l'eau du bain ! En effet, deux degrés de description, cela signifie deux lois. La première sera la conservation de l'énergie. Et la seconde ? Soit le TCI soit le TMC, et comme ça tourne, ça sera ... le TMC !

► **Aspect énergétique.**

Le système { cône + bille } est à évolution conservative. En effet, en ce qui concerne les forces extérieures :

→ le poids est conservatif

→ les réactions d'axe  $\vec{R}$  ne travaillent pas parce qu'il n'y a pas de frottements

L'interaction intérieure cône – bille ne travaille pas parce qu'il n'y a pas de frottement entre les deux.

☞ *Remarque.* comme il n'y a pas de frottements entre la bille et le cône, la bille glisse sans rouler dans la rainure, mais cela ne change rien à l'analyse qui suit.

La conservation de l'énergie mécanique donne  $E_m = E_c + E_p = C^{\text{te}}$  soit, entre la position initiale et le moment où la bille quitte le cône :  $\frac{1}{2}J\Omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$ .

► **Aspect rotatoire.**

Le théorème du moment cinétique scalaire appliqué au système s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{\Delta}(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}(\vec{P})$$

Comme le poids est vertical  $\mathcal{M}(\vec{P}) = 0$  et comme il n'y a pas de frottements sur l'axe  $\mathcal{M}(\vec{R}) = 0$  ce qui implique  $\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = 0$  soit  $\sigma_{\Delta} = C^{\text{te}} = 0$  (grâce à l'immobilité initiale).

Or, à la fin, le moment cinétique du système s'écrit  $\sigma_{\Delta} = J\Omega + mvR$  et ainsi  $v = -\frac{J}{mR}\Omega$ .

► **Rassemblement**

En rassemblant le tout, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}J\Omega^2 + \frac{1}{2}\frac{J^2}{mR^2}\Omega^2 = mgh \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\Omega^2 = \frac{2mgh}{J\left(1 + \frac{J}{mR^2}\right)}}$$

☞ *Remarque.* à cause de la présence de la bille, le centre de masse  $G$  n'est pas sur l'axe de rotation, si  $\mathcal{M}(\vec{P}) = 0$  c'est bien parce que l'axe de rotation est vertical. Cela peut se sentir en imaginant que le cône soit relié au plafond par un fil à son sommet. En posant  $m$  très lourde dessus, le cône s'inclinerait, ce qui est caractéristique d'une rotation autour d'un axe **horizontal** ou encore d'un poids de moment vectoriel non nul.

### ✿ Exercice 9

*Analyse physique.* Le cylindre va tomber. Tant que le cylindre ne glisse pas, il n'y a qu'un degré de description et, en plus, l'évolution est conservative. Les grandeurs pertinentes sont  $r$ ,  $m$ ,  $J$  et  $g$ .

*Analyse technique.* Pour déterminer l'évolution, ici, rien de tel qu'un bon théorème énergétique car le dispositif est à un degré de description et en régime libre. En revanche, quand il s'agira de déterminer l'instant à partir duquel le cylindre glisse, nous ferons une approche en terme de forces.

Considérons le système { cylindre }. Nous pouvons dire qu'il est à évolution conservative car :

- en ce qui concerne les forces extérieures :
  - le poids est conservatif
  - la réaction du support *immobile* ne travaille pas tant qu'il n'y a pas glissement
- la puissance des interactions intérieures est nulle car il s'agit d'un solide.

Ainsi  $E_m = E_c + E_p = C^{te}$  et comme le cylindre tourne à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  dans le référentiel barycentrique, nous pouvons dire, d'après KÉNIG :

$$E_c = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

De plus l'énergie potentielle s'écrit  $E_p = m g r \cos \theta$ , ce qui donne, compte tenu des conditions initiales :

$$E_m = \frac{1}{2} (J + m r^2) \dot{\theta}^2 + m g r \cos \theta = m g r$$

En dérivant et en simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{\theta}(t) = 0$  nous obtenons :

$$(J + m r^2) \ddot{\theta}(t) - m g r \sin \theta = 0$$

Le TCI s'écrit alors, en projection sur  $\vec{u}_r$  et sur  $\vec{u}_\theta$  et sachant que  $G$  a une trajectoire circulaire de rayon  $r$  :

$$-m r \dot{\theta}^2 = -m g \cos \theta + R_N \quad \text{et} \quad -m r \ddot{\theta} = +m g r \sin \theta + R_T$$

Nous trouvons ainsi en utilisant la conservation de l'énergie :

$$R_N = m g \cos \theta - m r \times \frac{2 m g r (1 - \cos \theta)}{J + m r^2} = m g \cos \theta - \frac{2 m g (1 - \cos \theta)}{1 + \frac{J}{m r^2}}$$

Et avec  $J = \frac{1}{2} m r^2$  :  $R_N = m g \times \frac{4 \cos \theta - 1}{3}$ .

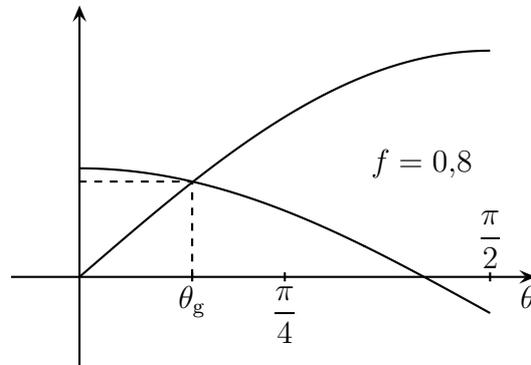
De plus avec l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  :

$$\begin{aligned} R_T &= -m r \ddot{\theta} - m g \sin \theta = -m r \times \frac{m g r \sin \theta}{J + m r^2} - m g \sin \theta \\ &= -\frac{m g \sin \theta}{1 + \frac{J}{m r^2}} - m g \sin \theta = -\frac{5}{3} m g \sin \theta \end{aligned}$$

La condition de non glissement s'écrit donc :  $|R_T| \leq f R_N$ , ce qui donne :

$$\frac{5}{3} m g \sin \theta \leq m g \times \frac{4 \cos \theta - 1}{3} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\sin \theta \leq f \times \frac{4 \cos \theta - 1}{5}}$$

Nous pouvons voir sur le graphique ci-dessous que cette condition n'est vérifiée que pour  $\theta \leq \theta_g$ .



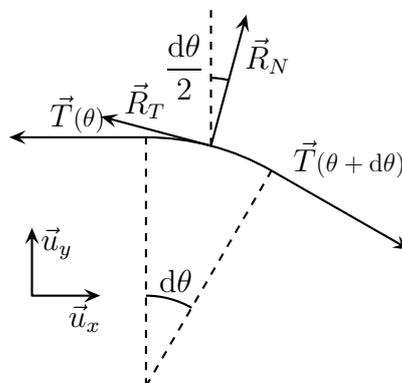
☞ *Remarque.* nous constatons bien que plus  $f$  est grande, *i.e.* plus il y a de frottement, plus la valeur limite  $\theta_g$  de  $\theta$  est grande.

### ✿ Exercice 10

*Analyse physique.* Ici le problème est un problème de statique avec un fil, c'est-à-dire un système de point. Étant donné la souplesse du fil, il y a a priori une infinité de degré de description. Sauf qu'ici la position du fil est parfaitement défini (enroulement autour d'un cylindre) : le seul paramètre descriptif qui lui reste, c'est la force qu'il exerce à ses extrémités. Les paramètres pertinents sont  $T_0$  en tant que tension à une extrémité,  $f$  pour le coefficient de frottement et  $r$  pour la description géométrique de l'enroulement. Comme nous voulons déterminer  $T(\alpha)$ , d'un point de vue purement dimensionnel, nous pouvons dire tout de suite que  $r$  n'interviendra pas. De plus comme il s'agit ici d'un problème en statique, que la corde soit avec ou sans masse, cela ne va rien changer.

*Analyse technique.* Réduite à pas grand chose puisque l'énoncé nous dit quoi faire : un PFD et considérer l'équilibre limite. Être en équilibre limite signifie qu'il y a non glissement (donc vitesse de glissement nul) et que la condition de non glissement est tout juste tout juste respectée, autrement dit  $R_T = f R_N$ . Nous savons quoi faire, alors, c'est parti !

**1.** Commençons par schématiser la situation en prenant en compte l'effet qui semblera important : l'effet de courbure du fil. Pour cela, dessinons la situation avec un fil suffisamment petit pour faire des développements limités, mais suffisamment grand pour voir sa courbure apparaître.



Comme dans tout problème où l'étude se fait à un niveau infinitésimal, le point « exact » où s'applique la force de contact n'est pas très importante. Il est possible de la prendre à un bout (au début ou à la fin)

ou au milieu. Au milieu c'est peut-être plus naturel, mais en général ça complique un (micro-)poil l'aspect technique.

Écrivons écrit l'équilibre pour l'élément de corde en exprimant les composantes des forces sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  :

$$\rightarrow \vec{T}(\theta) = -T(\theta)\vec{u}_x$$

$$\rightarrow \vec{T}(\theta + d\theta) = T(\theta + d\theta) \times (\cos(d\theta)\vec{u}_x - \sin(d\theta)\vec{u}_y) = T(\theta + d\theta) \times (\vec{u}_x - d\theta\vec{u}_y)$$

$$\rightarrow \vec{R}_N = R_N \left( \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)\vec{u}_x + \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)\vec{u}_y \right) = R_N \left( \frac{d\theta}{2}\vec{u}_x - \vec{u}_z \right)$$

$$\rightarrow \vec{R}_T = R_T \left( -\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)\vec{u}_x + \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)\vec{u}_y \right) = R_T \left( \frac{d\theta}{2}\vec{u}_x - \vec{u}_z \right)$$

La projection sur  $\vec{u}_x$  donne (à l'équilibre limite) :

$$-T(\theta) + T(\theta + d\theta) - R_T - \frac{d\theta}{2} R_N = 0$$

Or  $R_N = f R_N$  ce qui implique, puisque  $d\theta$  est infinitésimal,  $R_T \gg \frac{R_N d\theta}{2}$ .

Dans ces conditions, la relation se simplifie en  $T(\theta + d\theta) - T(\theta) = f R_N$

La projection sur  $\vec{u}_z$  donne (à l'équilibre limite) :

$$0 - d\theta \times T(\theta + d\theta) + R_N + \frac{R_T d\theta}{2} = 0$$

Or  $R_N = f R_N$  ce qui implique, puisque  $d\theta$  est infinitésimal,  $R_N \gg \frac{R_T d\theta}{2}$  et nous obtenons :

$$R_N = d\theta \times T(\theta + d\theta)$$

En rassemblant le tout nous avons tout d'abord :

$$T(\theta + d\theta) - T(\theta) = f T(\theta + d\theta) d\theta \quad \rightsquigarrow \quad \frac{T(\theta + d\theta) - T(\theta)}{d\theta} = f T(\theta + d\theta)$$

Et en passant à la limite pour  $d\theta \rightarrow 0$  :  $\left[ \frac{dT(\theta)}{d\theta} = f T(\theta) \right]$ .

2. Il s'agit d'une équation différentielle dont la solution est  $\left[ T(\theta) = T_0 e^{f\theta} \right]$

3. Nous obtenons donc :

	$2\pi$	$4\pi$	$6\pi$
$\frac{T(\theta)}{T_0}$	6,58	43,4	286

Nous constatons que la force devient très rapidement intense au fur et à mesure que le fil s'enroule. Cela signifie qu'avec une force de 10 N (le poids d'une masse d'environ 1 kg), il est possible d'exercer, en trois tours de câble, une force 286 fois plus intense, *i.e.* retenir sans difficulté une masse de plus de 250 kg!

Ce principe est mis en œuvre, notamment dans les dispositifs de sécurité pour les grimpeurs.

## ✿ Exercice 11

*Analyse physique.* Le cylindre va se mettre à rouler sur le prisme et, tout en roulant, à le pousser vers l'arrière. Ce dernier pourra bouger puisqu'il repose sans frottement sur la table. Dès lors nous pouvons constater qu'il y a deux degrés de description : la position du prisme et la position du cylindre sur le prisme. Il y aurait glissement, cela ferait trois degrés de description. Ici les grandeurs pertinentes sont :  $m$ ,  $M$  et  $J$  (pour l'inertie),  $r$  et  $\alpha$  pour la description géométrique et  $g$  et  $f$  pour les forces.

*Analyse technique. Là, pas trop le choix. Étant donné qu'il y a deux degrés de description, l'approche énergétique seule ne sera pas suffisante. Il va donc falloir commencer soit par le TCI soit par le TMC pour l'ensemble du dispositif. Comme ce dernier ne tourne visiblement pas autour d'un axe, nous allons nous concentrer d'abord sur le TCI.*

Étudions le système  $\mathcal{S} = \{ \text{prisme } \mathcal{P} + \text{cylindre } \mathcal{C} \}$  soumis aux forces extérieures :

→ son poids  $\vec{P} = (m + M)\vec{g}$  force verticale

→ la réaction du support sur le prisme  $\vec{R}_{\text{support} \rightarrow \mathcal{P}}$  vertical car sans frottement.

Le TCI pour  $\mathcal{S}$  donne, en projection sur  $\vec{u}_x$  l'axe horizontal :

$$(m + M) \vec{a}(\mathcal{S}) = \vec{P} + \vec{R}_{\text{support} \rightarrow \mathcal{P}} \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}_G(t) = 0$$

Or, comme à l'instant initial  $\dot{x}_G(0) = 0$  et  $x_G(0) = 0$ , nous obtenons  $x_G(t) = 0$  puis, avec la définition du centre de masse :

$$x_G(t) = \frac{M x_{\mathcal{P}}(t) + m x_{\mathcal{C}}(t)}{M + m} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m x_{\mathcal{C}}(t) = -M x_{\mathcal{P}}(t)}$$

*Nous avons là maintenant un parfait couplage entre les deux degrés de description. En conséquence de quoi il n'en reste qu'un. Et l'évolution est conservative! Donc... donc... ?*

Par hypothèse, le roulement se fait sans glissement au moins au début. donc le dispositif est à évolution conservative. En effet :

→ en ce qui concerne les forces extérieures :

→ le poids est conservatif

→ la réaction du support *immobile* sur le prisme ne travaille pas car il n'y a pas de frottement

→ l'interaction  $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{C}$  ne travaille pas car il y a roulement sans glissement

☞ *Remarque.* en tant que force extérieure, la force que le prisme exerce sur le cylindre **travaille**, même s'il y a roulement sans glissement, car le support du cylindre (qui est alors le prisme) n'est **pas** immobile.

Écrivons alors la conservation de l'énergie avec :

→  $E_c(\mathcal{P}) = \frac{1}{2} M \dot{x}_{\mathcal{P}}^2(t)$

→  $E_c(\mathcal{C}) = \frac{1}{2} m v_{\mathcal{C}}^2(t) + \frac{1}{2} J \Omega^2$  où  $v_{\mathcal{C}}$  est la vitesse du centre de masse du cylindre  $\mathcal{C}$  et  $\Omega$  sa vitesse angulaire de rotation sur lui-même

→  $E_p = m g z_{\mathcal{C}}(t)$  car il est inutile de prendre en compte l'énergie potentielle de pesanteur du prisme, ce dernier ayant une trajectoire horizontale.

### ► Les contraintes.

*L'écriture des termes énergétiques a fait apparaître des grandeurs telles que  $v_{\mathcal{P}}$ ,  $z_{\mathcal{C}}$  et  $\Omega$  dont nous savons qu'elles sont toutes reliées entre elles. Nous devons donc rechercher ces liens.*

Il faut tout d'abord remarquer que le cylindre reste sur le prisme.

Dans ces conditions, lorsque nous nous plaçons *dans le référentiel lié au prisme*, i.e. lorsque nous faisons *comme si* le prisme était immobile, nous avons  $\tan \alpha = \frac{z(\mathcal{C}/\mathcal{P})}{x(\mathcal{C}/\mathcal{P})}$ .

Or le mouvement du prisme  $\mathcal{P}$  par rapport au référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  est une simple translation, d'où :

$$z(\mathcal{C}/\mathcal{P}) = z(\mathcal{C}/\mathcal{R}) \stackrel{\text{not}}{=} z(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad x(\mathcal{C}/\mathcal{P}) = x(\mathcal{C}/\mathcal{R}) - x(\mathcal{R}/\mathcal{R}) \stackrel{\text{not}}{=} x_{\mathcal{C}} - x_{\mathcal{P}}$$

Cela donne, avec la condition précédente :

$$x(\mathcal{C}/\mathcal{P}) = \left(1 + \frac{m}{M}\right) x_{\mathcal{C}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{z_{\mathcal{C}}(t) = \tan \alpha \left(1 + \frac{m}{M}\right) \times x_{\mathcal{C}}(t)}$$

La condition de non glissement s'écrit  $\vec{v}(I \in \mathcal{C}/\mathcal{P}) = \vec{0}$ .

En développant, cela donne :  $\vec{v}(I \in \mathcal{D}/\mathcal{R}) = \vec{I}(I \in \mathcal{P}/\mathcal{R})$ .

Et comme (champ de vitesse d'un solide) :

$$\vec{v}(I \in \mathcal{D}/\mathcal{R}) = \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{x}_{\mathcal{D}}(t) - r \Omega \vec{u}_X \quad \text{où} \quad \vec{u}_X \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\overrightarrow{CB}}{CB} \quad \text{et} \quad \vec{v}(I \in \mathcal{P}/\mathcal{R}) = \dot{x}_{\mathcal{P}}(t)$$

Nous obtenons tout d'abord :

$$\dot{x}_{\mathcal{D}}(t) \vec{u}_x + \dot{z}_{\mathcal{D}}(t) \vec{u}_z - r \Omega \vec{u}_X = \dot{x}_{\mathcal{P}}(t) \vec{u}_x$$

Compte tenu des relations précédentes, cela se simplifie en :

$$r \Omega \vec{u}_X = \dot{x}_{\mathcal{C}} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) (\vec{u}_x + \tan \alpha \vec{u}_z) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{r^2 \Omega^2 = \frac{\dot{x}_{\mathcal{C}}^2(t)}{\cos^2 \alpha} \left( 1 + \frac{m}{M} \right)^2}$$

### ► Rassemblement.

Nous pouvons donc en déduire, en utilisant toutes les relations précédentes :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left( \frac{M}{m} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{J}{m r^2 \cos^2 \alpha} \left( 1 + \frac{m}{M} \right)^2 \right) \dot{x}_{\mathcal{C}}^2(t) + m g \tan \alpha \left( 1 + \frac{m}{M} \right) x_{\mathcal{C}}(t)$$

Nous noterons ce résultat sous la forme simplifiée :

$$E_m = \frac{1}{2} m \eta \dot{x}_{\mathcal{C}}^2(t) + m g \tan \alpha \left( 1 + \frac{m}{M} \right) x_{\mathcal{C}}(t)$$

### ► Équation différentielle.

En dérivant l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps et en simplifiant par la solution inintéressante  $\dot{x}_{\mathcal{C}}(t)$  correspondant à l'équilibre, nous arrivons à :

$$\boxed{\ddot{x}_{\mathcal{C}}(t) = -\frac{g \tan \alpha}{\eta} \left( 1 + \frac{m}{M} \right)}$$

Il s'agit là d'un mouvement uniformément accéléré.

### ► Vérification du non-glissement.

Pour cela il faut déterminer une force tangentielle. Et là, rien de tel qu'un bon TCI!

Écrivons le TCI pour le disque.

Les forces qui s'exercent sont, outre le poids, les réactions normale et tangentielle exercées par le prisme :

$$m \vec{a}_{\mathcal{C}}(t) = \vec{P} + \vec{R}_{N, \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}} + \vec{R}_{T, \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}}$$

Projetons le TCI sur les vecteurs  $\vec{u}_N$  et  $\vec{u}_T$  respectivement normal et tangent (vers le haut) à la surface du prisme. Cela donne

$$\vec{u}_N = -\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{u}_T = +\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z$$

De plus :

$$\vec{a}_{\mathcal{C}}(t) = \ddot{x}_{\mathcal{C}}(t) \vec{u}_x + \ddot{z}_{\mathcal{C}}(t) \vec{u}_z = \ddot{x}_{\mathcal{C}}(t) \vec{u}_x + \ddot{x}_{\mathcal{C}}(t) \tan \alpha \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \vec{u}_z = \ddot{x}_{\mathcal{C}}(t) \left( \vec{u}_x + \tan \alpha \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \vec{u}_z \right)$$

Ainsi en projetant le TCI sur  $\vec{u}_N$ , nous trouvons :

$$R_N = m \ddot{x}_{\mathcal{E}}(t) \left( -\sin \alpha + \sin \alpha \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \right) + m g \cos \alpha$$

Et comme  $\ddot{x}_{\mathcal{E}}(t) = C^{\text{te}}$ , nous aboutissons à  $R_N(t) = C^{\text{te}}$ .

De même en projetant le TCI sur  $\vec{u}_T$ , nous avons :

$$R_T = m \ddot{x}_{\mathcal{E}}(t) \left( \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \right) + m g \sin \alpha \quad \rightsquigarrow \quad R_T(t) = C^{\text{te}}$$

Finalement, comme  $R_N(t) = C^{\text{te}}$  et  $R_T = C^{\text{te}}$ , si la condition de non glissement est vérifiée à l'instant  $t = 0^+$ , elle sera vérifiée à tout instant, *i.e.* le cylindre ne se mettra jamais à glisser (et heureusement parce que sinon je n'ose imaginer ce qu'auraient donné les calculs).

## ✿ Exercice 12

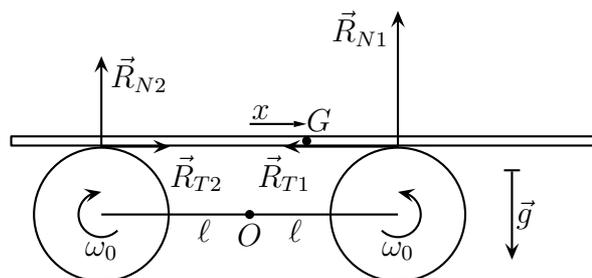
*Analyse physique.* Ici le mouvement est à un degré de description mais est en régime forcé. De plus il y a frottement et toujours glissement par hypothèse. Les grandeurs pertinentes ici seront  $m$  (inertie de la planche),  $L$  et  $r\omega_0$  pour la description du dispositif,  $f$  pour les frottements et  $g$  à cause du couplage horizontal / vertical créé par les frottements solides. Ici nous avons bien mis la vitesse  $r\omega_0$  du cylindre tournant et non  $\omega_0$ . En effet, du point de vue de la planche, tout ce qu'elle « voit », c'est un point matériel lui frotter dessus avec une certaine vitesse.

*Analyse technique.* Ici le régime est forcé, donc nous pouvons oublier l'approche énergétique. Il va falloir passer par une approche en termes de force. Comme il y a glissement, il y a deux forces inconnues. Deux forces et un degré de description, ça fait trois lois ! Le TCI dans sur les axes horizontaux et verticaux et le TMC.

### ► Expression des forces normales exercées sur la planche.

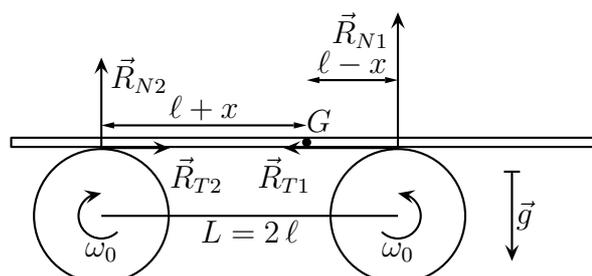
Notons  $x(t)$  l'abscisse de  $G$  par rapport au centre des deux rouleaux et  $L = 2\ell$ .

La situation dans le référentiel d'étude est la suivante :



Le TCI en projection sur  $\vec{u}_z$  vertical ascendant donne, puisque la planche n'a qu'un mouvement horizontal :  $-mg + R_{N1} + R_{N2} = 0$  (✿).

De plus dans le référentiel barycentrique, la situation est la suivante :



Le TMCB s'écrit donc  $\frac{d\sigma^*}{dt} = \mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R}_2) + \mathcal{M}(\vec{R}_1)$ .

Comme la planche ne tourne pas nous savons que  $\sigma^* = 0$  et en négligeant l'épaisseur de la planche, les moments des forces tangentielles  $R_{T1}$  et  $R_{T2}$  sont nuls et il reste :  $\mathcal{M}(\vec{R}_2) + \mathcal{M}(\vec{R}_1) = 0$ .

En exprimant ces deux moments à l'aide des bras de levier représentés nous obtenons :  $R_{N1}(\ell - x) = R_{N2}(\ell + x)$  (☼).

Les deux équations (☼) et (☼) ont pour solution :

$$R_{N1} = mg \frac{\ell + x}{2\ell} \quad \text{et} \quad R_{N2} = mg \frac{\ell - x}{2\ell}$$

### ► Équation du mouvement pour la planche.

Comme il y a toujours glissement,  $R_{T1} = f R_{N1}$  et  $R_{T2} = f R_{N2}$ .

Ainsi la projection du TCI sur  $\vec{u}_x$  donne (attention aux signes de  $R_{T1}$  et  $R_{T2}$  :

$$\ddot{x}(t) = -mg \frac{\ell + x}{2\ell} + mg \frac{\ell - x}{2\ell} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\ddot{x}(t) + \frac{2gf}{L}x(t) = 0}$$

Cela correspond à des oscillations de pulsation  $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2gf}{L}}}$ .

### ► Mouvement

Le mouvement sera oscillatoire d'amplitude  $A$  si  $A$  est l'écart initial entre le centre de masse de la planche et le centre du dispositif.

Pour que l'équation du mouvement soit toujours valable, il faut qu'il y ait toujours glissement c'est-à-dire que la vitesse de la planche n'atteigne jamais  $r\omega_0$ . Autrement dit il faut  $A \sqrt{\frac{2gf}{L}} \leq r\omega_0$ .

## ☼ Exercice 13

*Analyse physique.* Ici le dispositif est à deux degrés de description : les deux solides peuvent tourner sur eux même. L'évolution est libre mais non conservative à cause de la présence de frottement. Les grandeurs pertinentes sont  $J_1$  et  $J_2$  pour l'inertie,  $\omega_1$  pour les conditions initiales et  $\Gamma$  pour l'interaction entre les deux solides.

*Analyse technique.* Étant donné qu'il y a deux degrés de description, l'approche énergétique ne suffira pas et ce d'autant plus qu'il n'y a pas conservation de l'énergie. Nous allons donc utiliser une approche en terme de forces c'est-à-dire ici évidemment avec le TMC.

1. Étudions le système  $\{ \Sigma_1 = \Sigma_2 \}$ .

Les seules forces extérieures qui s'exercent sont les poids des deux solides et les réactions d'axes des liaisons du bâti avec  $\Sigma_2$ .

Le TMC (par rapport à l'axe commun de rotation, évidemment) s'écrit alors :

$$\frac{d\sigma(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\text{axe}}$$

Or  $\mathcal{M}(\vec{P}) = 0$  car la force est parallèle à l'axe de rotation et  $\mathcal{M}_{\text{axe}} = 0$  car les liaisons sont supposées parfaites.

Nous trouvons ainsi  $\frac{d\sigma(\mathcal{S})}{dt} = 0$ , i.e.  $\sigma(\mathcal{S}) = C^{\text{te}}$ .

☼ *Remarque.* le moment cinétique de l'ensemble est constant et ce malgré la présence de frottement.

Le moment cinétique étant une grandeur extensive, nous pouvons écrire  $\sigma(\mathcal{S}) = \sigma_1 + \sigma_2$  et comme il s'agit de solide en rotation, nous avons tout simplement :  $\sigma(\mathcal{S}) = J_1 \omega_1(t) + J_2 \omega_2(t)$ .

À l'aide de la condition initiale nous trouvons d'abord  $J_1 \omega_1(t) + J_2 \omega_2(t) = J_2 \omega_0$  puis, étant donné qu'à la fin les deux solides ont la même vitesse angulaire :

$$J_1 \omega_f + J_2 \omega_f = J_2 \omega_0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\omega_f = \frac{J_2}{J_1 + J_2} \omega_0}$$

L'énergie cinétique de  $\mathcal{S}$  s'écrit, toujours parce qu'il s'agit d'une grandeur extensive et parce que les deux solides tournent autour d'un axe fixe :  $E_c(t) = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2(t) + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2(t)$ .

Ainsi l'énergie cinétique initiale vaut  $E_c(0) = \frac{1}{2} J_2 \omega_0^2$  et l'énergie cinétique finale vaut

$$E_{c,f} = \frac{1}{2} J_1 \omega_f^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_f^2$$

La variation d'énergie cinétique allant par définition  $\Delta E_c = E_{c,f} - E_c(0)$ , nous trouvons, en utilisant les expressions précédentes et en simplifiant :  $\boxed{\Delta E_c = -\frac{1}{2} \times \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \omega_0^2}$ .

☞ *Remarque.* le théorème de l'énergie cinétique s'écrit  $\Delta E_c = W_{\text{int}}$  puisque les forces *extérieures* ne travaillent pas. Nous avons alors  $\Delta E_c < 0$  conformément au fait que  $W_{\text{int}} < 0$  car il s'agit d'interaction de frottements.

**2.** Écrivons le TMCS pour  $\Sigma_1$  et uniquement  $\Sigma_1$ .

Cela donne  $\frac{d\sigma_1(t)}{dt} = +\Gamma$  car le poids est de moment nul et que les réactions d'axe ont un moment  $\Gamma \neq 0$  (frottement).

Avec  $\sigma_1(t) = J_1 \omega_1(t)$ , nous trouvons, compte tenu de la condition initiale  $\omega_1(0) = 0$  :  $\boxed{\omega_1(t) = \frac{\Gamma}{J_1} t}$ .

De même le TMCS pour  $\Sigma_2$  s'écrit  $\frac{d\sigma_2(t)}{dt} = -\Gamma$  où il faut faire attention au signe du moment des frottements.

Cela donne là aussi en tenant compte de la condition initiale  $\omega_2(0) = \omega_0$  :  $\boxed{\omega_2(t) = \omega_0 - \frac{\Gamma}{J_2} t}$ .

L'instant  $t_f$  est tel que  $\omega_1(t_f) = \omega_f$ , ce qui donne  $\boxed{t_f = \frac{J_1 \omega_f}{\Gamma}}$ .

☞ *Remarques.*

- nous voyons que la durée nécessaire pour atteindre la vitesse initiale est d'autant plus courte que les frottements ( $\Gamma$ ) sont importants, ce qui est, somme toute, naturel.
- nous pouvons vérifier que nous avons aussi  $\omega_2(t_f) = \omega_f$ , en effet :

$$\omega_2(t_f) = \omega_0 - \frac{\cancel{t_f}}{J_2} \times \frac{\omega_f J_1}{\cancel{t_f}} = \omega_0 - \frac{J_1 \omega_0}{J_1 + J_2} = \frac{J_2 \omega_0}{J_1 + J_2} = \omega_f$$

- malgré les expressions de  $\omega_1(t)$  et  $\omega_2(t)$ , il ne faudrait pas croire que  $\omega_1(t) \rightarrow +\infty$  et  $\omega_2(t) \rightarrow -\infty$  car ces expressions sont valables uniquement *tant que* les équations différentielles associées (TMCS) sont valables, *i.e. tant qu'il y a frottements*. Or, à partir du moment où les vitesses angulaires sont identiques, il n'y a plus de glissement d'un objet par rapport à l'autre, il n'y a donc plus de frottement et les TMCS s'écrivent  $\frac{d\sigma_i(t)}{dt} = 0$ .

**3.** La puissance fournie par les forces de frottement à  $\Sigma_1$  vaut  $\mathcal{P}_1(t) = +\Gamma \omega_1(t)$  car le couple exercé sur  $\Sigma_1$  est positif.

De même la puissance fournie par les forces de frottement à  $\Sigma_2$  vaut  $\mathcal{P}_2(t) = -\Gamma \omega_2(t)$  car le couple exercé par les forces de frottement est, cette fois, négatif.

Au final, l'interaction de frottements fournissent au système  $\mathcal{S}$  une puissance

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{tot}}(t) = \Gamma (\omega_1(t) - \omega_2(t))}$$

☞ *Remarque.* il ne faut pas être choqué par le fait que l'interaction de frottement *fournisse* de l'énergie à  $\mathcal{S}$ . Ce n'est que conventionnel tout ça. Nous savons que  $\mathcal{S}$  perdra de l'énergie à cause des frottements. C'est donc que l'énergie *fournie* par les frottements à  $\mathcal{S}$  seront négatifs. Il faudra le vérifier... Ceci étant la *force* de frottement que  $\Sigma_2$  exerce sur  $\Sigma_1$  va vraiment fournir de l'énergie car elle met  $\Sigma_1$  en mouvement. Et la force de frottement de  $\Sigma_1$  sur  $\Sigma_2$  va faire perdre de l'énergie à  $\Sigma_2$  pour un bilan global de l'interaction négatif.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} 2E_{\text{fournie}} &= \int_0^{t_f} \mathcal{P}_{\text{tot}} dt = \int_0^{t_f} \left( \Gamma^2 t \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) - \Gamma \omega_0 \right) dt \\ &= \frac{\Gamma^2 (J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \frac{t_f^2}{2} - \Gamma \omega_0 t_f = \frac{V^2 J_1 + J_2}{J_1 J_2} \times \frac{\omega_f^2}{2} \times \frac{J_1^2}{V^2} - \frac{\omega_0 \omega_f J_1 V}{V} \\ &= \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \times \frac{1}{2} \times \frac{J_2^2}{(J_1 + J_2)^2} \times J_1^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 \times \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} = \frac{J_1 J_2 \omega_0^2}{2(J_1 + J_2)} - \frac{J_1 J_2 \omega_0^2}{J_1 + J_2} \end{aligned}$$

Enfinement nous trouvons  $E_{\text{fournie}} = -\frac{J_1 J_2 \omega_0^2}{2(J_1 + J_2)}$  ce qui correspond exactement à l'énergie cinétique perdue (ce qui est normal) et qui est bien négatif, comme prévu.

## ☞ Exercice 14

*Analyse physique.* Il apparaît tout de suite deux référentiels naturels : le référentiel galiléen dans lequel la tige tourne et le référentiel tournant dans lequel la tige ne fait que glisser le long des deux tiges. Comme le suggère l'énoncé, nous nous placerons dans le référentiel tournant. Ainsi le mouvement est libre et conservatif. Les grandeurs pertinentes seront  $m$  et  $J$  pour l'inertie,  $\ell$  pour la géométrie,  $g$  et  $\Omega$  pour les forces.

Notons que si l'étude avait été faite dans le référentiel du laboratoire, le mouvement n'aurait pas été libre mais forcé ! Donc adieu approche énergétique.

*Analyse technique.* Pas très utile ici car l'énoncé guide beaucoup.

1. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  le dispositif est à un degré de description, une méthode énergétique semble donc être idéale pour traiter ce problème. Comme la tige est solide, nous n'avons besoin que de la liste des forces extérieures :

- le poids  $\vec{P}$  est conservatif d'énergie potentielle  $E_{\text{p,pes}} = m g h_G$
- la réaction du support en  $A$ ,  $\vec{R}_A$  ne travaille pas car il s'agit d'un contact sans frottement sur un support immobile
- la réaction du support en  $B$ ,  $\vec{R}_B$  ne travaille pas car il s'agit d'un contact sans frottement sur un support immobile
- la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_{\text{ie}} = +m \Omega^2 \overrightarrow{HM}$  est conservative d'énergie potentielle  $E_{\text{p,ie}} = -\frac{1}{2} m \Omega^2 x_G^2$
- la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas

Comme  $x_G = \ell \sin \alpha$  et  $h_G = z_G = -\ell \cos \alpha$ , nous obtenons :

$$E_p = -\frac{1}{2} m \Omega^2 \ell^2 \sin^2 \alpha - m g \ell \cos \alpha$$

2. L'équilibre est tel que  $\frac{dE_p}{d\alpha}(\alpha_{\text{eq}}) = 0$ .

$$\text{Or } \frac{dE_p(\alpha)}{d\alpha} = -m \Omega^2 \ell^2 \sin \alpha \cos \alpha + m g \ell \sin \alpha.$$

Les positions d'équilibres sont donc telles que  $\sin \alpha_{\text{éq}}(g - \ell \Omega^2 \cos \alpha_{\text{éq}}) = 0$  ce qui donne deux solutions possibles :

$$\boxed{\alpha_{\text{éq}} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\cos \alpha_{\text{éq}} = \frac{g}{\ell \Omega^2}}$$

Cette deuxième solution n'ayant un sens que pour  $\Omega^2 > \frac{g}{\ell}$ .

Pour étudier la stabilité dérivons l'énergie une seconde fois (par rapport à la variable de position) car une position d'équilibre est stable si  $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}}) > 0$ .

$$\text{Or : } \frac{d^2 E_p(\alpha)}{d\alpha^2} = -m \Omega^2 \ell^2 (\cos^2 \alpha_{\text{éq}} - \sin^2 \alpha_{\text{éq}}) + m g \ell \cos \alpha_{\text{éq}}.$$

→ *Position d'équilibre*  $\alpha_{\text{éq}} = 0$ .

Nous avons alors  $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}(0) = -m \Omega^2 \ell^2 + m g \ell$  qui est positif lorsque  $\Omega^2 < \frac{g}{\ell}$ .

Enfinement :  $\boxed{\alpha_{\text{éq}} = 0 \text{ est stable lorsque l'autre position d'équilibre n'existe pas}}$ .

→ *Position d'équilibre*  $\cos \alpha_{\text{éq}} = \frac{g}{\ell \Omega^2}$ .

Nous trouvons, en utilisant la condition d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}}) &= -m \Omega^2 \ell^2 (2 \cos^2 \alpha_{\text{éq}} - 1) + m g \ell \cos \alpha_{\text{éq}} = -m \Omega^2 \ell^2 \left( 2 \frac{g^2}{\Omega^4 \ell^2} - 1 \right) + m g \ell \frac{g}{\ell \Omega^2} \\ &= m \ell \left( -\frac{2 g^2}{\Omega^2 \ell} + \Omega^2 \ell + \frac{g^2}{\ell \Omega^2} \right) = m \ell \left( \ell \Omega^2 - \frac{g^2}{\Omega^2 \ell} \right) \end{aligned}$$

Nous constatons alors que  $\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}}) > 0$  car, d'après l'existence même de cette position d'équilibre,  $\Omega^2 \ell > g$ , i.e.  $\boxed{\text{cette position d'équilibre est stable dès lors qu'elle existe}}$ .

**3.** Pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\varepsilon(t) = \alpha(t) - \alpha_{\text{éq}}$ , nous allons utiliser une méthode énergétique.

→ *Réécrire l'énergie cinétique*

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , l'énergie cinétique de la barre vaut (d'après Koenig) :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2(t) + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2(t)$$

Avec  $x(t) = \ell \sin \alpha(t)$  et  $z(t) = -\ell \cos \alpha$ , nous trouvons :

$$\dot{x}(t) = \ell \dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) \quad \text{et} \quad \dot{z}(t) = \ell \dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \quad \rightsquigarrow \quad v^2(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = \ell^2 \dot{\alpha}^2$$

$$\text{Ainsi } E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\alpha}^2(t) + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2(t) = \frac{1}{2} (J + m \ell^2) \dot{\alpha}^2.$$

Et comme  $\alpha(t) = \alpha_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$ , nous arrivons à  $E_c = \frac{1}{2} (J + m \ell^2) \dot{\varepsilon}^2$

→ *Réécrire l'énergie potentielle*

Comme  $\alpha(t) = \alpha_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$  très proche de  $\alpha_{\text{éq}}$ , nous pouvons faire un développement limité de l'énergie potentielle autour de  $\alpha_{\text{éq}}$ . Et pour ça, rien de tel qu'une bonne vieille formule de Taylor (à l'ordre 2 parce qu'il ne faut pas abuser des bonnes choses non plus) :

$$E_p(\alpha) = \underbrace{E_p(\alpha_{\text{éq}})}_{=C^{\text{te}}} + \varepsilon(t) \times \underbrace{\frac{dE_p}{d\alpha}(\alpha_{\text{éq}})}_{=0 \text{ car équilibre}} + \frac{\varepsilon^2(t)}{2} \times \frac{d^2E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}}) = E_p(\alpha_{\text{éq}}) + \frac{\varepsilon^2(t)}{2} \times \frac{d^2E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}})$$

→ Équation différentielle vérifiée par  $\varepsilon(t)$ .

Dérivons l'énergie mécanique par rapport au temps et, comme l'évolution est conservative, cela donne :

$$\frac{dE_m}{dt} = (m\ell^2 + J)\dot{\varepsilon}(t)\ddot{\varepsilon}(t) + \varepsilon(t)\dot{\varepsilon}(t) \times \frac{d^2E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}}) = 0$$

Et en simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{\varepsilon} = 0$ , nous arrivons à

$$\boxed{\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{\varepsilon(t)}{m\ell^2 + J} \times \frac{d^2E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}}) = 0}$$

Cela correspond à des oscillations de pulsation  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m\ell^2 + J} \times \frac{d^2E_p}{d\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}})}}$ , C.Q.F.D.

### ✿ Exercice 15

Cet exercice traite de ce qui est appelé la résonance paramétrique. Il s'agit en fait de modifier l'état de mouvement d'un dispositif en changeant périodiquement un paramètre du dispositif, ici ce sera le moment d'inertie  $J$ .

L'exercice est très guidé, il n'y aura donc pas tellement à réfléchir sur l'approche à étudier.

**1.** Étudions le système  $\mathcal{S} = \{ \text{enfant} + \text{balançoire} \}$ . Les forces extérieures qui s'exercent sont :

→ le poids  $\vec{P}$

→ les réactions d'axe de moment nul car on suppose qu'elles sont sans frottement.

Or lorsque  $\theta = 0$ , *i.e.* lorsque l'enfant passe à la verticale, le moment exercé par le poids est nul, ce qui signifie qu'entre les positions  $\theta = 0^-$  et  $\theta = 0^+$ , le moment cinétique ne varie pas, *i.e.* que  $\sigma(0^-) = \sigma(0^+)$  ce qui donne  $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ .

Comme l'énergie cinétique vaut respectivement juste avant et juste après le passage par la verticale :  $E_{c1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2$  et  $E_{c2} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$ , nous avons :

$$\frac{E_{c2} - E_{c1}}{E_{c1}} = \frac{J_2\omega_2^2 - J_1\omega_1^2}{J_1\omega_1^2} = \frac{J_1^2\omega_1^2 - J_1\omega_1^2}{J_1\omega_1^2} \rightsquigarrow \boxed{\frac{\Delta E_c}{E_{c1}} = \frac{J_1}{J_2} - 1}$$

**2.** Le moment cinétique est une fonction mathématiquement continue tout simplement parce qu'elle admet une dérivée non infinie qu'est le moment du poids. En effet d'après le TMCS :  $\frac{d\sigma}{dt} = \mathcal{M}(\vec{P}) \neq \infty$ .

Comme le moment cinétique est nul lorsque l'enfant atteint le sommet de sa trajectoire, l'énergie cinétique l'est aussi. Ainsi, l'enfant peut augmenter son moment d'inertie sans perdre d'énergie.

Finalement, en choisissant bien les instants où modifier son moment d'inertie, un enfant peut, seul, se balancer. En effet, en diminuant son moment cinétique lors du passage par la verticale, l'enfant accélère et gagne de l'énergie cinétique (énergie fournie par les forces intérieures). Lorsqu'il a converti toute son énergie cinétique en énergie potentielle, l'enfant va réaugmenter son moment cinétique afin de pouvoir réaccélérer au passage par la verticale. Et ainsi de suite.

☞ *Remarque.* évidemment qu'un enfant ne pense pas à tout cela lorsqu'il se balance. Il n'en demeure pas moins que l'explication physique complète de ce phénomène est moins simple qu'il n'y paraît.

3. Le moment cinétique du système  $\mathcal{S}$  s'écrit  $\sigma(t) = J(t) \dot{\theta}(t)$ .

Le TMCS pour ce système s'écrit (avec les notations usuelle du pendule simple) et en tenant compte du fait que  $\theta(t)$  petit :

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = -m g a \sin \theta \quad \rightsquigarrow \quad \dot{J}(t) \dot{\theta}(t) + J(t) \ddot{\theta}(t) = -m g a \theta(t)$$

Et ainsi, en remplaçant  $J(t)$  par son expression :

$$-\Delta J \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}(t) + J_0 \left( 1 + \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega t) \right) \ddot{\theta}(t) + m g a \theta(t) = 0$$

En négligeant  $\Delta J \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}(t)$  devant  $\Delta J \cos(\omega t) \ddot{\theta}(t)$ , il reste :

$$J_0 \left( 1 + \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega t) \right) \ddot{\theta}(t) + m g a \theta(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta}(t) + \frac{m g a}{J_0} \times \frac{1}{1 + \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega t)} \times \theta(t) = 0$$

Cela permet d'obtenir la forme demandée en faisant un développement limité du 2<sup>e</sup> terme étant donné que  $\frac{\Delta J}{J_0} \ll 1$ .

☛ *Remarque.* il n'y a aucune bonne raison de négliger  $\Delta J \omega \sin(\omega t) \dot{\theta}(t)$  devant  $\frac{\Delta J}{\cos}(\omega t) \ddot{\theta}(t)$  ☹. La seule raison de le faire est en fait une mauvaise raison : « parce que cela permet d'obtenir la forme demandée ». ☹ Ceci étant, il existe d'autres oscillateurs paramétriques dont le principe de résolution est identique.

À l'instar d'une intégrale première du mouvement, nous pouvons transformer l'équation précédente en la multipliant par  $\dot{\theta}(t)$  sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\theta}^2(t) + \omega_0^2 \theta^2(t) \right) = \omega_0 \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega t) \theta(t) \dot{\theta}(t)$$

Ce qui n'est ni plus ni moins que la forme demandée par l'énoncé.

Supposons  $\theta(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $A(t)$  lentement variable.

Nous avons donc  $\dot{\theta}(t) = \dot{A}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0 A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi)$  car  $|\dot{A}(t)| \ll |\omega_0 A(t)|$ . Il reste :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\omega_0 \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega t) A^2(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0 \frac{\Delta J}{J_0} \cos(\omega t) A^2(t) \sin(2\omega_0 t + 2\varphi)$$

Nous pouvons réécrire, à l'aide de formules trigonométriques, la dernière expression sous la forme :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\frac{1}{2} \omega_0 \frac{\Delta J}{J_0} \left( \sin((2\omega_0 - \omega)t + 2\varphi) + \sin((2\omega_0 + \omega)t + 2\varphi) \right)$$

Pour espérer une amplification des oscillations, il faut  $\langle \frac{dE_m}{dt} \rangle > 0$  ce qui implique qu'il faut  $2\omega_0 - \omega = 0$ , i.e.  $\boxed{\omega = 2\omega_0}$ . Mais ce n'est pas tout, il faut aussi que  $\boxed{\sin(2\varphi) < 0}$ , ce qui montre l'importance des conditions initiales.

Concrètement la condition sur  $\omega$  signifie qu'il faut être dans le bon tempo pour espérer amplifier ses oscillations tout seul et la condition sur  $\varphi$  signifie qu'il faut que les mouvements soient faits au bon endroits (diminution de  $J$  lors du passage par la verticale et augmentation sinon).

## ✿ Exercice 16

*Analyse physique.* Le dispositif est à un degré de description puisque tout oscille dans un plan. De plus comme il n'y a pas de force ni d'interaction dissipative, il sera conservatif. Enfin, il est en régime libre. Les paramètres pertinents seront au niveau de l'inertie  $m$  et  $J$  car certaines barres tournent et d'autres se tradent,  $L$  pour la géométrie et  $g$  pour le poids.

*Analyse technique.* Approche énergétique, sans hésiter. Après, il va nous falloir étudier l'ensemble du dispositif, à savoir les trois tiges qui bougent toutes ensemble (dans un même système) mais de façon particulière, c'est-à-dire en utilisant l'extensivité des énergies.

Étudions le système  $\mathcal{S} = \{ O_1 O_2 O_3 O_4 \}$ . L'évolution est conservative car :

- en ce qui concerne les forces extérieures :
  - le poids est une force conservative
  - la réaction de  $O_1 x$  qui permet au losange de rester attaché ne travaille pas car la tige  $O_1 O_4$  est immobile dans le référentiel en d'étude
- en ce qui concerne les interactions intérieures :
  - les 4 morceaux sont des solides
  - les liaisons entre les morceaux se font avec glissement sans frottement

Il reste à déterminer les énergies cinétique et potentielle de  $\mathcal{S}$  et dériver par rapport au temps.

### ► Énergie cinétique.

Seules trois des 4 barres sont mobiles dans le référentiel d'étude. Deux  $O_1 O_2$  et  $O_3 O_4$  ont un mouvement de rotation autour d'un axe fixe de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et de moment d'inertie  $J$  et une  $O_2 O_3$  a un mouvement de translation de vitesse  $v_{G, O_2 O_3} = v_{O_2} = L \dot{\theta}(t)$ .

Nous obtenons alors :

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2(t) + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2(t) = \frac{1}{2} (2J + mL^2) \dot{\theta}^2(t)$$

☞ *Remarque.* notons qu'ici nous n'avons pas eu besoin de KœNIG car le moment d'inertie est donné par rapport à un axe de rotation passant par une des extrémités des tiges.

### ► Énergie potentielle.

Prenons en compte uniquement les énergies potentielles des trois tiges qui se déplacent.

Cela donne :  $E_p = m g z_{G, O_1 O_2} + m g z_{G, O_2 O_3} + m g z_{G, O_3 O_4}$ .

Étant donné que les barres sont homogènes, le centre de masse est à chaque fois au milieu de la barre, ce qui donne :

$$E_p = -m \frac{L}{2} g \cos \theta - m L g \cos \theta - m \frac{L}{2} g \cos \theta = -2 m L g \cos \theta$$

### ► Équation différentielle.

En dérivant l'énergie mécanique, nous trouvons :

$$\frac{dE_m}{dt} = (2J + mL^2) \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) + 2mgL \dot{\theta} \sin \theta(t) = 0$$

Soit, en simplifiant par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre  $\dot{\theta} = 0$  :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{2mgL}{2J + mL^2} \sin \theta(t) = 0$$

### ► Petites oscillations.

Faisons l'approximation  $\sin \theta(t) \simeq \theta(t)$ . Nous obtenons alors l'équation différentielle

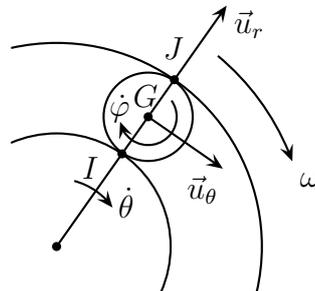
$$\ddot{\theta}(t) + \frac{2mgL}{2J + mL^2} \theta(t) = 0$$

Cette équation correspondant à des oscillations de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2mgL}{2J + mL^2}}$ .

### ✱ Exercice 17

Dans cet exercice, tout tient dans un bon schéma, bien clair et dans la non précipitation (et dans la connaissance des formules de cinématique !)

En effet, il n'y a aucune notion, ici, de force ou d'évolution. Toutes les questions reposent sur la cinématique du dispositif. Et la cinématique, c'est la description du mouvement. Et pour décrire un mouvement il est fondamental de se l'imaginer, donc de savoir le dessiner.



1. Là, il s'agit d'un cas d'école, à savoir la condition de roulement sans glissement sur une route rectiligne et immobile. Il est possible de donner le résultat directement, la seule difficulté concerne le signe de la relation.

Étant donné que la roue roule sans glissement sur la route (immobile et rectiligne !) nous avons

$$v = r\omega.$$

2. Le fait qu'il existe une relation entre  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\varphi}$  est dû au fait que les rouleaux roulent sans glisser sur la bague intérieure.

Écrivons donc que la vitesse de glissement du rouleau sur la bague intérieure est nulle :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{gliss},1} &= \vec{v}(I \in \text{rouleau}/\text{bague int}) = \vec{v}(I \in \text{rouleau}/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \text{bague int}/\mathcal{R}) \\ &= \vec{v}(I \in \text{rouleau}/\mathcal{R}) - \vec{0} \quad \text{car la bague est immobile} \\ &= \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \vec{u}_z \wedge \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) (-\vec{u}_r) \\ &= \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \dot{\theta} \vec{u}_\theta - \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) \dot{\varphi} \vec{u}_\theta = \vec{0} \quad \text{condition de non glissement} \end{aligned}$$

$$\text{Et ainsi : } \boxed{(r_1 + r_2) \dot{\theta} = (r_2 - r_1) \dot{\varphi}}$$

☞ Remarque. cette relation n'est pas intuitive et peut même sembler étrange à cause de la présence du signe  $-$ . Ceci étant ce signe  $-$  signifie que, à  $\dot{\theta}$  fixé, plus  $r_1$  et  $r_2$  sont proches, plus  $\dot{\varphi}$  sera grand. Autrement dit, plus les rouleaux sont petits, plus ils tournent vite sur eux-même lorsqu'ils roulent sur la bague intérieure.

3. Procédons au même raisonnement pour trouver la relation entre  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  et  $\omega$ .

Écrivons la vitesse de glissement du rouleau par rapport à la bague extérieure :

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\text{gliss},2} &= \vec{v}(J \in \text{rouleau/bague ext}) = \vec{v}(J \in \text{rouleau}/\mathcal{R}) - \vec{v}(J \in \text{bague ext}/\mathcal{R}) \\
&= \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GJ} - r_2 \omega \vec{u}_\theta = \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right) \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \vec{u}_z \wedge \left( \frac{r_2 - r_1}{2} \right) \vec{u}_r - r_2 \omega \vec{u}_\theta \\
&= \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right) \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \left( \frac{r_2 - r_1}{2} \right) \dot{\varphi} \vec{u}_\theta - r_2 \omega \vec{u}_\theta = \vec{0} \quad \text{condition de non glissement}
\end{aligned}$$

Et ainsi :  $\boxed{(r_1 + r_2) \dot{\theta} + (r_2 - r_1) \dot{\varphi} = 2 r_2 \omega}$ .

4. En éliminant  $\dot{\varphi}$ , nous obtenons avec l'expression de  $\omega$  :  $\boxed{\dot{\theta} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \times \frac{v}{r}}$ .

Nous avons alors aussitôt avec le résultat de la question 2. :  $\boxed{\dot{\varphi} = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \times \frac{v}{r}}$ .

☞ *Remarque.* de même qu'à la question 2., nous pouvons voir que  $\dot{\varphi}$  peut devenir très grand si  $r_2$  et  $r_1$  deviennent proches, *i.e.* si les rouleaux deviennent petits.