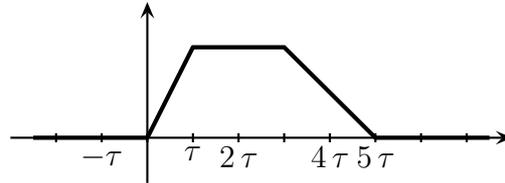


Premières ondes

❁ Exercice 1

Pas de difficulté pour cet exercice. Il faut seulement y aller lentement et surtout en réfléchissant pour ne pas se tromper. Toute tentative de donner la réponse de manière immédiate est en général vouée à l'échec.

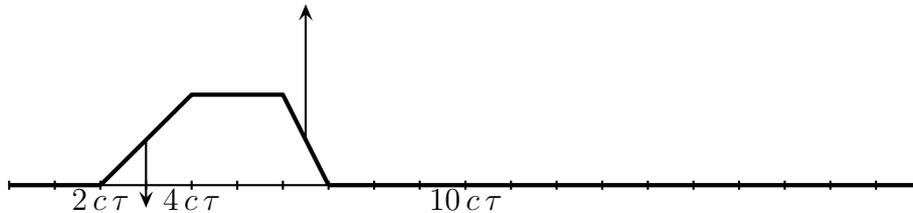
1. Dessinons d'abord la fonction $y(0,t)$.



L'onde va évidemment se propager vers les x croissants. Ainsi $y(0,t)$ correspond à $y_+(-ct)$. Pour tracer $y(x,7\tau)$, nous allons donc nous ramener à l'excitation en $x = 0$ en écrivant :

$$y(x,7\tau) = y_+(x - 7c\tau) = y_+ \left[0 - c \left(7\tau - \frac{x}{c} \right) \right] = y \left(0, 7\tau - \frac{x}{c} \right)$$

Cela donne la représentation suivante :



☞ *Remarque.* remarquons que la représentation temporelle est « inverse » de la représentation spatiale. C'est normal : ce qui arrive « avant » est représentée, en temporel, pour les petits t donc à gauche, alors que ce qui arrive « avant » a eu le temps de se propager vers les x croissants donc se retrouve à droite dans la représentation spatiale.

La vitesse $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_y$ du point d'abscisse $3c\tau$ est égal à :

$$v_1 = \frac{\partial y}{\partial t}(3c\tau, 7\tau) = \frac{\partial y}{\partial t} \left(0, 7\tau - \frac{3c\tau}{c} \right) = \frac{\partial y}{\partial t}(0, 4\tau) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v}_1 = -\frac{a}{2\tau} \vec{u}_y$$

Nous trouvons de même les vitesses $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_y$ en $x = 5\tau$ et $\vec{v}_3 = v_3 \vec{u}_y$ en $x = \frac{13}{2}\tau$:

$$v_2 = \frac{\partial y}{\partial t}(0, 2\tau) = 0 \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{\partial y}{\partial t} \left(0, \frac{\tau}{2} \right) = \frac{a}{\tau}$$

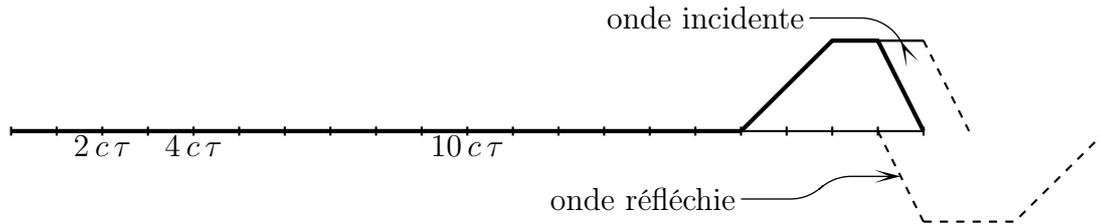
2. À l'instant $t = 20\tau$, le front d'onde arrive au bout de la corde.

À cet endroit, la condition limite s'écrit $y(L,t) = 0 = y_+(L,t) + y_-(L,t)$.

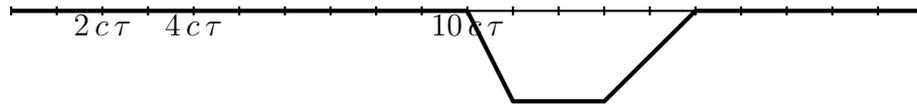
Nous connaissons parfaitement $y_+(x,t)$, nous pouvons donc en déduire $y_+(L,t)$ puis $y_-(L,t)$ et enfin $y_-(x,t)$.

L'exprimer en termes analytiques n'est donc pas très difficile mais serait lourd pour si peu. Il suffit de remarquer que $y_+(L,t) = -y_-(L,t)$, *i.e.* que l'onde change de signe au retour.

En superposant les deux ondes, cela donne la forme suivante. Nous avons représenté, sur la figure, $y_+(x,t)$ et $y_-(x,t)$ en traits pleins et les parties qui n'existent pas ou plus (parce que limités par la taille finie de la corde) en traits pointillés.



Pour l'instant $t = 30\tau$, l'onde retour est partie depuis 10τ , ce qui signifie que son front d'onde a avancé sur $10c\tau$, *i.e.* son front d'onde est en $x = 10c\tau$. La forme de l'onde est donc celle représentée ci-contre.



✳ Exercice 2

Pas de difficulté ici : il s'agit seulement de trouver l'équation de propagation sur une corde. La seule différence par rapport au cas usuel, c'est que la corde est parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique. Autrement dit, il faudra prendre en compte les forces de LAPLACE.

Nous ferons, comme pour le cas usuel, les hypothèses classiques : masse grave négligée, effet d'élasticité négligé, corde infiniment souple, petites oscillations, ...

1. Considérons le système \mathcal{S} { petit bout de corde entre x et $x + dx$ }. Ce dernier est soumis à :

- la force exercée par la portion de fil situé à sa droite (donc entre $x + dx$ et $+\infty$) : $\vec{T}_d(x + dx, t)$
- la force exercée par la portion de fil situé à sa gauche (donc entre $-\infty$ et x) : $\vec{T}_g(x, t)$. Et d'après la 3^e loi de NEWTON, $\vec{T}_g(x, t) = -\vec{T}_d(x, t)$
- la force de LAPLACE : $I(t) d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(x)$

Comme le mouvement de la corde est transverse par hypothèse, en projetant le TCI appliqué à \mathcal{S} sur l'axe x , nous obtenons avec $d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y$:

$$0 = T \cos \alpha(x + dx, t) - T \cos \alpha(x, t) - I(t) B(x) dz$$

En tenant compte de l'hypothèse des petits angles, nous avons $\cos \alpha \simeq 1$ et cela donne

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = -I(t) B(x) \frac{\partial z}{\partial x}$$

Concrètement, cela signifie que la variation de tension de la corde $\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$ est due à la déformation de cette dernière $\frac{\partial z}{\partial x}$. Or comme la déformation est faible, nous pouvons négliger ces variations et, donc, obtenir le même résultat que pour une corde classique : $T(x, t) = T_0 = C^{te}$.

Dès lors, nous pouvons projeter le TCI appliqué à \mathcal{S} sur \vec{u}_z et cela donne :

$$dm \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \sin \alpha(x + dx, t) - T_0 \sin \alpha(x, t) + I(t) B(x) dx$$

Comme $dm = \mu dx$ au premier ordre et avec $\sin \alpha(x, t) = \alpha(x, t) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, t)$, nous obtenons :

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + I(t) B(x)$$

Cela donne, avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{I_0 B_0}{\mu c^2} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

► **Recherche des solutions.** *Étant donné que la corde est fixée à ses deux extrémités, nous allons chercher une solution sous la forme d'une onde stationnaire.*

Cherchons une solution sous la forme : $z(x,t) = A(x) \cos(\omega t)$.

En écrivant que cette solution obéit à l'équation différentielle précédente, nous obtenons :

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} A(x) - \frac{I_0 B_0}{\mu c^2} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \rightsquigarrow \frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A(x) = -\frac{I_0 B_0}{\mu c^2} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du 2^e ordre à coefficients constants s'écrit sous la forme : $A(x) = A_{\text{hg}}(x) + A_{\text{part}}(x)$ où $A_{\text{hg}}(x)$ est la solution de l'équation différentielle homogène associée, à savoir :

$$\frac{d^2 A_{\text{hg}}(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A_{\text{hg}}(x) = 0 \quad \rightarrow \quad A_{\text{hg}} = a \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + b \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

Pour la solution particulière, étant donnée l'expression du second membre, nous allons chercher une solution sous la forme $A_{\text{part}}(x) = A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

En introduisant cette solution dans l'équation complète, nous trouvons :

$$-A_0 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{\omega^2}{c^2} A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -\frac{I_0 B_0}{\mu c^2} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \rightsquigarrow A_0 = \frac{\frac{I_0 B_0}{\mu c^2}}{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

La solution complète $A(x) = A_{\text{hg}}(x) + A_{\text{part}}(x)$ doit satisfaire aux conditions aux limites, à savoir $A(0) = 0$ et $A(L) = 0$, ce qui donne très rapidement $a = b = 0$. Il reste alors :

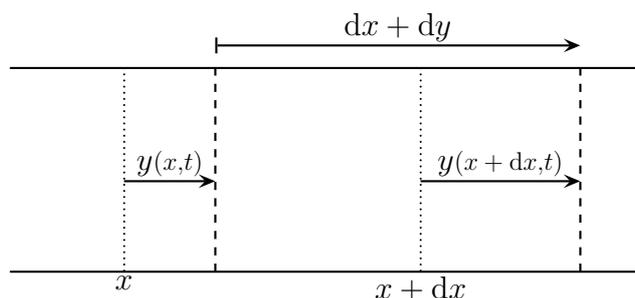
$$z(x,t) = \frac{I_0 B_0}{\mu c^2} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\frac{\pi^2}{L^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \times \cos(\omega t)$$

2. Il y a résonance lorsque l'amplitude peut devenir infinie, *i.e.* ici pour $\omega = \frac{\pi c}{L}$.

Notons qu'il n'y a, ici, qu'une seule valeur de résonance et non pas un nombre infini comme dans le cas d'une corde classique. Cela s'explique par le fait que la contrainte due au champ magnétique n'est adaptée à la résonance que d'un seul mode propre : le premier.

✿ Exercice 3

1. *Pas de difficulté particulière ici. La force est donnée dans le cas général, il « suffit » de l'adapter dans un cas particulier, celui d'une vision mésoscopique. Et pour ça, pas de secret, un beau dessin.*



La tranche de la lame qui se trouve entre x et $x + dx$ au repos s'est *allongée* de

$$dy = y(x + dx, t) - y(x, t)$$

L'allongement relatif $\frac{\Delta L}{L}$ qui intervient dans la loi de HOOKE vaut donc, pour cette mini-tranche de céramique : $\frac{\Delta L}{L} = \frac{y(x + dx, t) - y(x, t)}{dx} \simeq \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$ au premier ordre en dx .

La force est donc bien de la forme recherchée, reste seulement à vérifier la cohérence du signe.

Lorsque le matériaux est étiré, la force qui est exercée par un morceau situé à droite (l'axe Ox étant naturellement orienté de gauche à droite) est dirigée vers la droite.

Or un matériaux étiré correspond à $\frac{\partial y}{\partial x} > 0$ et une force vers la droite à $T(x, t) > 0$.

Tout regroupement fait, nous avons bien $T(x, t) = ES \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$.

2. *Pas de secret ici non plus. Pour trouver une équation de propagation, nous allons utiliser une vision mésoscopique et déterminer l'équation du mouvement pour une tranche de matériaux.*

La tranche qui se trouve, au repos, entre x et $x + dx$ est soumise, outre son poids, aux forces de tractions exercées par la partie située à sa droite : $T(x + dx, t)$ et la partie située à sa gauche $-T(x, t)$. Le signe $-$ se justifie par la 3e loi de NEWTON et le fait que la force que la gauche exerce sur la droite $T_g(x, t)$ est l'opposée de la force que la droite exerce sur la gauche $T(x, t)$.

Nous obtenons ainsi en projetant le TCI sur \vec{u}_x et en négligeant l'effet du poids :

$$dm \frac{d^2 y}{dt^2}(x, t) = T(x + dx, t) - T(x, t)$$

Cela donne, avec $dm = \mu_0 dV = \mu_0 S dx$ et au premier ordre en dx : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\mu_0}{E} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$.

C'est bien une équation de D'ALEMBERT avec $c = \sqrt{\frac{E}{\mu_0}} = \underline{4,85071} \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

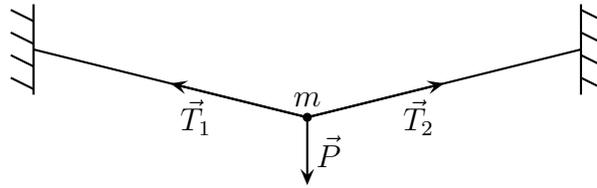
☞ *Remarques.*

- il s'agit de la même expression que celle vue en cours mais, cette fois, directement avec un modèle de milieu continu
- l'approximation selon laquelle les mouvements selon \vec{u}_x sont négligeables ne se justifie pas de manière immédiate comme pour le cas de la corde car ici l'onde est *longitudinale*, i.e. les mouvements à l'origine du phénomène de propagation sont dans la direction de propagation. Cette discussion sera reprise ultérieurement lors de l'étude des ondes sonores.
- ici ce sont bien des phénomènes d'élasticité qui interviennent, phénomènes négligés dans le cas d'une propagation le long d'une corde.

3. Les solutions sont de la forme OPP, i.e. : $y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ où $f(x - ct)$ représente une onde plane progressive se dirigeant vers les x croissants (OPP_⊕) et $g(x + ct)$ représente une onde plane progressive se dirigeant vers les x décroissants (OPP_⊖).

✿ Exercice 4

1. Si on néglige les masses graves des deux cordes, elles sont tendues au repos. Toutefois comme dans cette question la pesanteur n'est pas négligée pour la masse m , il faut que les tensions puissent compenser, au repos, le poids de celle-ci. Cela donne la représentation ci-dessous.



2. *Analyse physique.* Ici nous avons affaire à un phénomène ondulatoire dont le but est de déterminer l'état ondulatoire. Comme la corde est séparée en deux par la masse, il faut prendre en compte deux domaines ondulatoire : la corde située à gauche de m et la corde située à droite. Le milieu est bien linéaire, nous allons donc pouvoir nous intéresser aux seules solutions harmoniques. De plus comme la masse n'a pas de mouvement horizontal, cela implique, par PFD interposé que les tensions exercées par les cordes sont identiques, donc que les relations de dispersions dans les deux milieux propagatifs sont les mêmes. Les grandeurs pertinentes vont être c (caractéristique de la corde), m (inertie de la masse), L (géométrie du dispositif) et ω (contrainte du RSF).

Analyse technique. Étant donné que les cordes sont fixées à leurs extrémités, nous allons chercher plutôt des solutions sous la forme stationnaire, directement en notation complexe et s'annulant en $x = 0$ et $x = L$. Il va alors rester deux grandeurs inconnues : les amplitudes complexes des ondes dans les milieux ① et ②. Mais comme le milieu est linéaire, nous savons déjà qu'elles seront proportionnelles. Comme il y a deux lois de passage (en $x = L/2$), une des lois donnera le facteur de proportionnalité et l'autre donnera la condition d'existence des solutions, c'est-à-dire permettra de décrire le mode propre de la corde.

Étant donné que la corde est fixée en $x = 0$ et $x = L$, nous allons chercher les solutions sous forme d'ondes stationnaires.

Nous avons ainsi en tenant compte directement des conditions aux limites en $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$

$$\text{et avec } \omega = kc : \begin{cases} y(x,t) = \underline{y}_1(x,t) = \underline{A}_1 \sin(kx) e^{j\omega t} & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ y(x,t) = \underline{y}_2(x,t) = \underline{A}_2 \sin(k(x-L)) e^{j\omega t} & \text{pour } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Précisons les conditions en $L/2$.

► Continuité de la position.

Puisqu'à tout instant $\underline{y}_1(L/2^-,t) = \underline{y}_2(L/2^+,t)$, nous obtenons la condition :

$$\underline{A}_1 \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = -\underline{A}_2 \sin\left(\frac{kL}{2}\right)$$

Nous voyons alors apparaître deux cas : soit $\frac{kL}{2} = n\pi$ (avec n entier) soit $\frac{kL}{2} \neq n\pi$:

→ $\underline{A}_1 = -\underline{A}_2$ pour $\frac{kL}{2} \neq n\pi$ (☼)

→ \underline{A}_1 et \underline{A}_2 quelconques pour $\frac{kL}{2} = n\pi$

► **PFD sur m .** La 2^e condition va venir du principe fondamental de la dynamique appliqué à m qui s'écrit, en négligeant le poids :

$$m \frac{d^2 \underline{Y}(t)}{dt^2} \vec{u}_y = \vec{T} \left(\frac{L^+}{2}, t \right) - \vec{T} \left(\frac{L^-}{2}, t \right)$$

☞ *Remarque.* le signe $-$ est dû au fait que, par notation, \vec{T} est la force exercée par la partie droite sur la partie gauche et qu'ici on parle de la force exercée par la corde à gauche de m .

Nous savons que la force exercée par la partie droite d'une corde sur sa partie gauche vaut $\underline{T}(x,t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$. Le PFD se réécrit donc :

$$m \frac{d^2 \underline{y}_1}{dt^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial \underline{y}_2}{\partial x} \left(\frac{L^+}{2}, t \right) - T_0 \frac{\partial \underline{y}_1}{\partial x} \left(\frac{L^-}{2}, t \right)$$

En utilisant les expressions précédentes, cela donne :

$$-m A_1 \omega^2 \sin \left(\frac{kL}{2} \right) = -k T_0 (A_1 - A_2) \cos \left(\frac{kL}{2} \right)$$

Nous devons là aussi distinguer deux cas.

→ Si $\frac{kL}{2} = n\pi$ avec n entier. Alors nous arrivons à $\boxed{A_1 = A_2}$.

Autrement dit l'ensemble vibre sur un mode propre *pair* de telle sorte que la masse soit à un nœud de vibration.

→ Si $\frac{kL}{2} \neq n\pi$ avec n entier. Alors nous arrivons à, en utilisant la condition (☼) :

$$m \underline{A}_1 \omega^2 \sin \left(\frac{kL}{2} \right) = k T_0 (\underline{A}_1 - \underline{A}_2) \cos \left(\frac{kL}{2} \right) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{m \omega^2 \sin \left(\frac{kL}{2} \right) = 2 k T_0 \cos \left(\frac{kL}{2} \right)}$$

► **Retour sur les solutions.** Nous pouvons voir que les deux conditions aux limites ont apporté dans chacun des deux cas la relation de proportionnalité entre \underline{A}_1 et \underline{A}_2 ainsi que la condition d'existence des solution **mais** qu'il n'est pas possible d'associer *une* condition physique (la condition de continuité de la position ou le PFD sur m) à *une* relation technique (proportionnalité entre \underline{A}_1 et \underline{A}_2 ou bien modes propres).

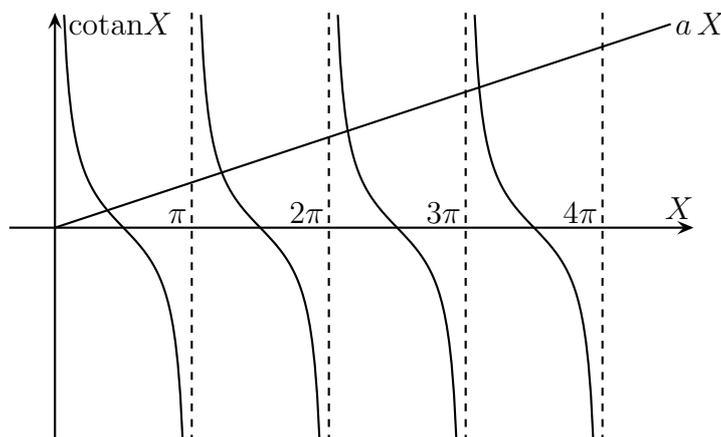
3. → Si $kL = 2n\pi$. Alors, comme nous l'avons déjà vu, la corde est déjà dans un mode propre *pair* i.e. tel que la masse soit sur un nœud de vibration. Alors les élongations $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ sont les restrictions aux deux demi-cordes des modes propres de la corde non plombée. Tout se passe comme si la masse n'existait pas !

→ Si $kL \neq 2n\pi$. Alors la 2^e condition se réécrit $\tan \left(\frac{kL}{2} \right) = \frac{2kT_0}{m\omega^2}$.

La pulsation ω vérifie donc l'équation $\boxed{\cotan \left(\frac{\omega L}{2c} \right) = \frac{m}{\mu L} \left(\frac{\omega L}{2c} \right)}$.

☞ *Remarque.* comme souvent, nous cherchons à réécrire les équations de contraintes sous une forme *réduite*, i.e. faisant apparaître des grandeurs sans dimension. C'est alors bien plus facile à interpréter.

Nous pouvons résoudre graphiquement l'équation précédente en posant $X \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega L}{2c}$ et en recherchant l'intersection des deux courbes $\cotan X$ et $\frac{m}{\mu L} X = a X$.



Il y a un mode propre pour chaque X dans l'intervalle $[(n-1)\pi, n\pi]$ donc pour chaque ω dans l'intervalle $\left[(n-1)\frac{2\pi c}{L}, n\frac{2\pi c}{L} \right]$.

4. \rightarrow Si $m \ll \mu L$. Alors la pente de la droite est très faible et les intersections entre la droite et $\cotan X$ sont très proches des zéros de la fonction \cotan , soit $X_n b = n\frac{\pi}{2}$, n impair et $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$.

Nous retrouvons les modes propres impairs de la corde non lestée, ce qui est normal puisque la masse rajoutée est négligeable.

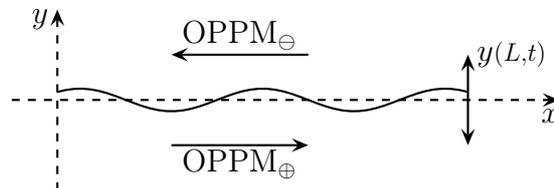
\rightarrow Si $m \gg \mu L$. La pente de la droite est très grande et les modes propres sont tels que $X_n = n\pi$ avec, ce qui correspond à des pulsations $\omega_n = \frac{2n\pi c}{L}$.

Nous retrouvons les modes propres d'une corde usuelle de longueur $\frac{L}{2}$. C'est normal puisque la masse a une inertie infinie et est donc immobile : chaque portion de corde oscille de son côté.

Dans le cas du mode propre fondamental, la pulsation est proche de 0 et un développement limité donne : $\omega_1 = \sqrt{\frac{T_0}{mL/2}}$. Chaque demi-corde oscille en bloc (la longueur d'onde est très grande devant la longueur de la corde) et se comporte pour la masse comme un ressort de raideur $k = \frac{T_0}{L/2}$.

✿ Exercice 5

1. *Analyse physique. Représentons la situation. Il y a un milieu propagatif de longueur finie. L'excitation est sinusoïdale donc l'ensemble est en régime sinusoïdal forcé. Les grandeurs pertinentes sont T_0 et μ (description de la corde), f (condition aux limites en $x=0$), y_0 (condition aux limites à droite) et ω (régime forcé).*



Analyse technique. Ici, bien que le milieu soit fini, nous n'allons pas utiliser d'OS car aucune des conditions aux limites n'impose une valeur nulle à l'une des deux grandeurs duales de propagation (tension ou vitesse). Nous allons plutôt utiliser des OPPM. Comme il y a a priori une OPPM_⊕ et une OPPM_⊖ il va y avoir deux grandeurs à déterminer (leurs amplitudes complexes) ce qui doit donner deux conditions aux limites. Celle en $x=L$ et celle en $x=0$...

L'onde incidente se propage dans le sens des x décroissants, l'onde réfléchiée dans le sens des x croissants. En un point quelconque d'abscisse x , elles s'écrivent :

$$\rightarrow \text{onde incidente : } y_i(x,t) = y_0 \sin\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\rightarrow \text{onde réfléchiée : } y_r(x,t) = r y_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$$

☞ *Remarque.* le raisonnement est rigoureusement identique au cas où l'onde incidente est une OPPM_⊕ et l'onde réfléchiée une OPPM_⊖. Remarquons que la condition au limite donnée n'est **pas** le déplacement transversal en $x=L$ (car il aurait alors fallu prendre en compte l'OPPM_⊕ et l'OPPM_⊖) mais uniquement l'onde incidente en $x=L$; cela simplifie notablement l'écriture des conditions aux limites. En fait tout cela est technique car, en pratique il est plus facile d'imposer un déplacement total qu'une création d'onde. Ceci étant, cela ne changerait rien aux résultats!

La continuité de l'élongation en $x = 0$ (là où il y a réflexion), permet d'écrire le déplacement $Y(t)$ de l'anneau sous la forme :

$$Y(t) = y_i(0,t) + y_r(0,t) = y_0 \sin(\omega t) + y_0 r \sin(\omega t + \varphi)$$

Les forces verticales qui s'exercent sur l'anneau sont :

- la tension exercée par le fil qui fait $T_y(0,t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(0,t)$
- la force de frottement $-f \frac{dY(t)}{dt}$
- pas le poids puisque sa masse (grave) est nulle

De plus, comme la masse (inertielle) de l'anneau est nulle, le PFD donne, en projection sur l'axe vertical :

$$0 = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) - f \frac{dY(t)}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad 0 = T_0 \frac{\partial y_i + y_r}{\partial x}(0,t) - f \frac{dY(t)}{dt}$$

Passons alors l'équation en complexe et ainsi :

- $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \times j \frac{\omega}{c}$ pour l'OPP $_{\ominus}$
- $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \times -j \frac{\omega}{c}$ pour l'OPP $_{\oplus}$
- $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \times j\omega$ pour l'OPP $_{\oplus}$ et l'OPP $_{\ominus}$

Cela donne, en notant $\underline{r} = r e^{j\varphi}$:

$$0 = j \frac{\omega}{c} T_0 - \underline{r} j \frac{\omega}{c} T_0 + j\omega f (1 + \underline{r}) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\underline{r} = \frac{T_0 - f c}{T_0 + f c} = r e^{j\varphi}}$$

2. Nous voyons tout de suite qu'il n'y a pas d'onde réfléchie pour $\boxed{f = \frac{T_0}{c}}$.

La corde est fermée sur son impédance caractéristique.

3. Réécrivons le PFD sur l'anneau en ne négligeant plus la masse (inertielle) de ce dernier (mais en continuant à négliger son poids). Cela donne :

$$M \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = T_y(0,t) - f \frac{dY(t)}{dt} - K Y(t) = T_0 \frac{\partial y_i + y_r}{\partial x}(0,t) - f \frac{dY(t)}{dt} - K Y(t)$$

En procédant comme ci-dessus, nous obtenons l'équation vérifiée par \underline{r} :

$$(K - M \omega^2 + j\omega f) (1 + \underline{r}) = \frac{j\omega}{c} T_0 (1 - \underline{r})$$

Ce qui donne $\underline{r} = - \frac{K - M \omega^2 + j\omega \left(f - \frac{T_0}{c} \right)}{K - M \omega^2 + j\omega \left(f + \frac{T_0}{c} \right)}$.

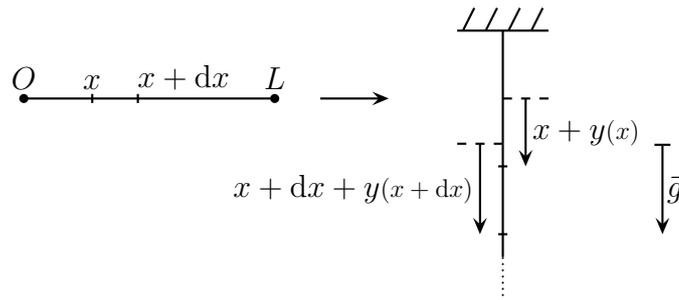
Pour que \underline{r} soit nul, il faut que ses parties imaginaire et réelle soient nulles simultanément.

Cela donne les deux conditions $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}}$ et $\boxed{f = \frac{T_0}{c}}$.

✿ Exercice 6

Analyse physique. Ici par rapport à la situation usuelle de la corde, il y a deux différences notables : la masse grave de la corde n'est pas négligée et les effets d'élasticité non plus. Hormis cela, nous avons affaire à un milieu propagatif en régime libre non dissipatif et a priori linéaire. Les grandeurs pertinentes seront μ et L (pour décrire la corde), M pour la masse et g pour l'effet de la pesanteur.

Analyse technique. La difficulté principale dans ce type de problème est le repérage. En effet comme la corde s'étend même en régime statique, il n'est pas possible de lui associer une masse linéique μ uniforme. Dès lors il va être judicieux de repérer les points de la corde non pas par leur position au repos vertical mais avec leur position x au repos horizontal quand la corde a sa longueur naturelle. Notons aussi que rien ne dit a priori que $y(x)$ est petit !



1. (a) Pas de questions à se poser, la méthode est « donnée » par l'énoncé. Il faut juste bien interpréter ce que cela implique, notamment au niveau des masses mises en jeu. Comme le point N est naturellement à la distance x du début de la corde, cela signifie qu'entre N et A il y a la longueur naturelle $L - x$ de corde.

Le système { portion de corde NA + masse M } est soumis :

- au poids de la corde $\vec{P} = \mu_0 (L - x) g \vec{u}_x$ avec $\mu_0 = \frac{m}{L}$ sa masse linéique naturelle
- au poids de la masse $\vec{P}_2 = M g \vec{u}_x$
- à la tension exercée par la portion ON

La 3^e loi de NEWTON nous dit que la force exercée par ON sur NA est égale (en norme) à la force que QN exerce sur ON .

Or QN exerce la force $k L \frac{dy}{dx} \vec{u}_x$ (c'est une force vers le bas puisque QN se comporte comme un petit ressort étiré vis-à-vis de ON) car, ici, le déplacement $s(x,t)$ se réduit à l'allongement statique $y(x)$ de la corde.

Le TCI (écrit pour l'équilibre) de NA donne donc :

$$0 = \frac{L-x}{L} m g + M g - k L \frac{dy}{dx} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{m g}{k L^2} x + \frac{(m+M) g}{k L}}$$

1. (b) Cette équation s'intègre en $y(x) = \frac{(m+M) g x}{k L} - \frac{m g x^2}{2 k L^2} + C^{\text{te}}$.

La condition initiale (ou plus précisément « aux limites ») est $y(0) = 0$ (la corde n'est évidemment pas allongée au point même où elle est attachée) ce qui donne : $\boxed{y(x) = \frac{(m+M) g x}{k L} - \frac{m g x^2}{2 k L^2}}$.

L'allongement total de la corde correspond tout simplement au déplacement de l'extrémité inférieure de la corde, i.e. :

$$\Delta L = y(L) = \frac{(m+M) g}{k} - \frac{M}{2 k} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\Delta L = \frac{M g}{k} + \frac{m g}{2 k}}$$

Tout se passe comme si, à l'extrémité inférieure de la corde, la masse $M + \frac{m}{2}$ était accrochée. En d'autres termes, la corde s'allonge naturellement de $\frac{mg}{2k}$ sous l'effet de son propre poids.

2. (a) Pour trouver l'équation de propagation, faisons comme d'habitude, c'est-à-dire écrivons l'équation du mouvement pour un élément mésoscopique. Il faut juste faire attention à cet élément : ne pas en choisir un en position au repos vertical mais en choisir un en position au repos horizontal.

Le déplacement $s(x,t)$ d'un point vaut maintenant $s(x,t) = y(x) + z(x,t)$.

Faisons un TCI projeté sur l'axe vertical (Ox) sur l'élément de corde compris, **au repos horizontal** entre x et $x + dx$. Ce dernier est soumis :

→ à son poids $\frac{mg dx}{L}$

→ à la tension de la portion de la corde située au-dessous : $kL \left(\frac{\partial(z+y)}{\partial x} \right) (x+dx, t)$

→ à la tension de la portion de la corde située au-dessus : $-kL \left(\frac{\partial(z+y)}{\partial x} \right) (x, t)$

Cela donne :

$$\frac{m}{L} dx \frac{d^2 y + z}{dt^2} = \frac{m}{L} dx g + kL \left(\frac{\partial(z+y)}{\partial x} \right) (x+dx, t) - kL \left(\frac{\partial(z+y)}{\partial x} \right) (x, t)$$

Soit, puisque $y(x)$ indépendant de t , et en simplifiant par dx :

$$\frac{m}{L} \frac{d^2 z(x,t)}{dt^2} = \frac{m}{L} g + kL \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} + kL \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2}$$

L'équation vérifiée par $y(x)$ donne $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{mg}{kL^2}$ et l'équation du mouvement se simplifie en

$$\boxed{\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = \frac{kL^2}{m} \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}}$$

C'est une équation de D'ALEMBERT à une dimension. La célérité des ondes vaut $\boxed{c = L \frac{k}{m}}$.

☞ *Remarque.* la célérité dont il est question ici est la célérité par rapport à la longueur naturelle de la corde. Cela signifie qu'une onde parcourant la totalité de la longueur de la corde mettrait la durée $\delta t = L/C$ que celle-ci soit horizontale ou verticale, *i.e.* ayant une longueur $L' \neq L$! Cela implique que les ondes de compression n'ont pas vraiment une célérité c mais que celle-ci dépend de l'état de la corde. Quelque part cela se comprend : plus la corde est localement étirée (à son point d'attache supérieur), plus la tension intrinsèque est grande et plus les ondes vont vite. En revanche tout se passe, pour les phénomènes propagatifs comme si la corde n'était pas étirée !

2. (b) Avec une masse totale $m = \rho \frac{\pi d^2 L}{4}$, nous trouvons $\boxed{c = 38,9408 \text{ m.s}^{-1}}$.

2. (c) Étant donné qu'une des conditions aux limites c'est un nœud de vibration, il est normal de chercher les solutions sous la forme d'onde stationnaire car cette solution fait apparaître naturellement des amplitudes nulles de vibration.

Notons ainsi $z(x,t) = z_0 \cos(Kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi)$.

Ici, en $x = 0$, la corde est fixée, donc $z(0,t) = 0$ et ainsi $0 = z_0 \cos \varphi \cos(\omega t + \psi)$.

Cela donne $\cos \varphi = 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

☞ *Remarque.* nous aurions pu prendre $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui n'aurait changé que le signe de z_0 .

Pour exprimer la condition en $x = L$, écrivons le PFD pour la masse M dont la cote $Z(t)$ est la même que celle de l'extrémité de la corde, *i.e.* $Z(t) = Y(L) + z(L,t)$.

Ainsi, comme la masse M n'est lié à la corde que au-dessus, cela donne :

$$M \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} = M g - k L \frac{\partial(z(x,t) + y(x))}{\partial x}(L,t)$$

En tenant compte de la condition d'équilibre statique, cette équation se simplifie en

$$M \frac{d^2 z}{dt^2}(L,t) = -k L \frac{\partial z}{\partial x}(L,t)$$

Et en injectant l'expression de $z(x,t)$ dans celle-ci, nous obtenons, une fois simplifié par $\cos(\omega t + \psi)$:

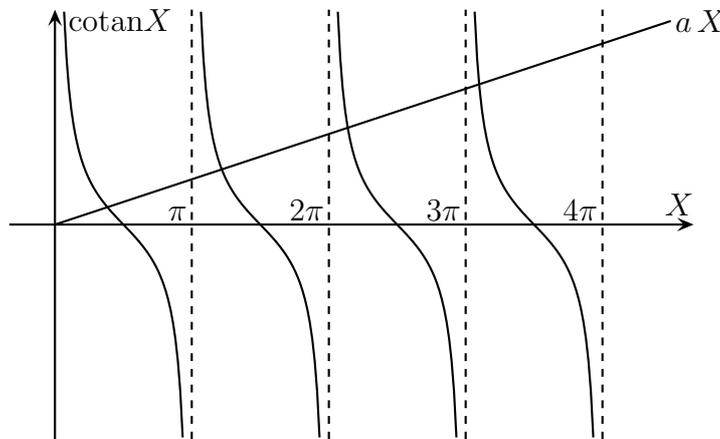
$$-M \omega^2 \sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) = -k L \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right)$$

☞ *Remarque.* on a écrit le vecteur d'onde $K = \frac{\omega}{c}$ afin de ne pas confondre avec la raideur k de la corde.

Nous obtenons ainsi :

$$\cotan\left(\frac{\omega L}{c}\right) = \frac{M c^2}{k L^2} \times \frac{\omega L}{c}$$

Nous pouvons résoudre graphiquement cette équation en posant $X \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega L}{c}$, et en recherchant les points d'intersections entre les courbes $\cotan X$ et $\frac{M c^2}{k L^2} \times \frac{\omega L}{c} = a X$.



Nous voyons alors qu'il y a un mode propre pour chaque X dans l'intervalle $[(n-1)\pi, n\pi]$ donc pour chaque ω dans l'intervalle $\left[(n-1)\frac{\pi c}{L}, n\frac{\pi c}{L}\right]$.

2. (d) Dans le cas où $m \ll M$, la pente $\frac{M c^2}{k L^2} = \frac{M}{m}$ de la droite est très grande et les modes propres sont tels que $X_n = n \pi$ avec, ce qui correspond à des pulsations $\omega_n = \frac{n \pi c}{L}$.

le cas du mode propre fondamental est le plus intéressant. En effet, la pulsation est alors très proche de 0 et un développement limité donne : $\frac{c}{L \omega} = \frac{M}{m} \frac{\omega L}{c}$ puis $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

Nous retrouvons la pulsation des oscillations de la masse M pour une corde élastique de masse négligeable (donc idéale).

✿ Exercice 7

Analyse physique. Quand la masse va bouger, cela va engendrer une onde le long de la corde. Cette onde va partir et comme la corde est infinie, elle ne va jamais revenir. Nous avons affaire ici à une évolution libre, conservative (aucun phénomène de dissipation globale) et en régime transitoire. Les grandeurs pertinentes vont être m , T_0 et μ (description de la masse et de la corde), k pour décrire les ressorts (ℓ_0 ne devrait pas intervenir ici puisque les ressort sont utilisés autour d'une position) et v_0 pour les conditions initiales.

Analyse technique. Nous allons admettre l'équation de propagation le long de la corde et tous les phénomènes associés. Ici puisque nous recherchons le mouvement vertical de la masse, nous allons utiliser un PFD projeté sur z car l'approche énergétique ne va pas être pertinente étant donné que la masse seule ne subit pas d'évolution conservative.

1. Notons $y(x,t)$ l'allongement de la corde et $Y(t) = y(0,t)$ la position du point P .

Comme la corde est illimitée du côté $x > 0$, elle sera parcourue par une OPP_\oplus pure, i.e. sans OPP_\ominus (aucune onde ne peut revenir puisqu'il n'y a pas d'obstacle).

Alors nous pouvons écrire :

$$y(x,t) = F(x - ct) = f\left(0 - c\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = Y\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Bien comprendre qu'écrire $y(x,t) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$ signifie ni plus ni moins que « ce qu'il y a ici et maintenant c'est ce qu'il y avait là-bas tout à l'heure ». Ca ne marche que pour une OPP_\oplus pure.

Remarquons que, comme pour $t < 0$, $Y(t) = 0$ (la masse est au repos avant d'avoir été mise en mouvement), les points de la corde tels que $x > ct$ n'ont pas été atteints par l'onde et sont au repos.

Pour déterminer $Y(t)$, écrivons le PFD sur le point P . Les forces qui s'exercent sur l'axe transversal Oy sont :

- la force exercée par le ressort du haut : $-k Y(t)$
- la force exercée par le ressort du bas : $-k Y(t)$
- la tension exercée par la corde : $T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)(0,t)$

☞ *Remarque.* le poids s'exerce sur Oz .

$$\text{Cela donne : } m \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = -2k Y(t) + T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)(0,t).$$

$$\text{Or, d'après l'expression précédente, } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)(0,t) = -\frac{1}{c} \frac{dY(t)}{dt}.$$

En regroupant les termes, nous aboutissons, finalement à l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{dY(t)}{dt} + \omega_0^2 Y(t) = 0}$$

► Résolution de l'équation différentielle.

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur faiblement amorti.

Les solutions dépendent des solutions de l'équation caractéristique associée $r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant $\Delta = 4\omega_0^2(\lambda^2 - 1)$.

Avec l'hypothèse $\lambda < 1$, nous avons $\Delta < 0$ donc les oscillations seront pseudo-périodiques.

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc :

$$r = \frac{-2\lambda\omega_0 \pm j 2\omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}}{2} = -\lambda\omega_0 \pm j\omega'_0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc sous la forme :

$$Y(t) = e^{-\lambda\omega_0 t} \left(A \cos(\omega'_0 t) + B \sin(\omega'_0 t) \right)$$

Pour déterminer A et B il faut utiliser les conditions initiales.

$Y(0) = 0$ donne tout de suite $0 = A$. Il reste $Y(t) = B e^{-\lambda\omega_0 t} \times \sin(\omega'_0 t)$.

L'autre condition porte sur la vitesse initiale.

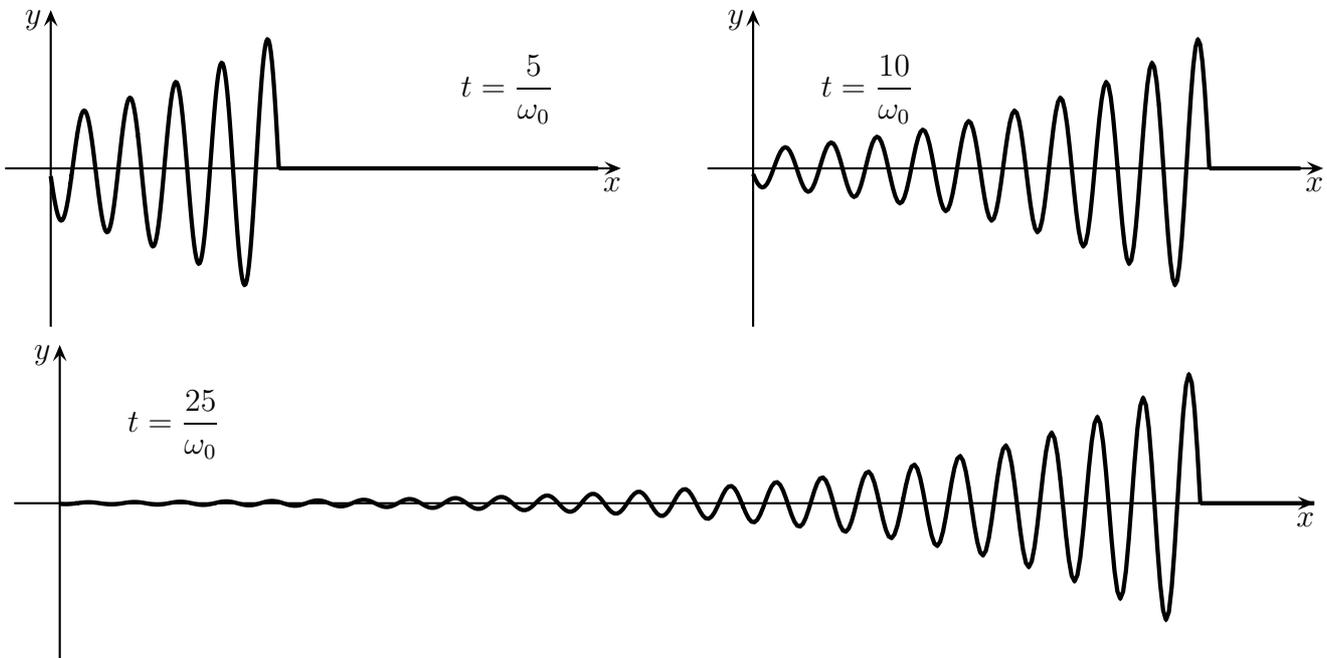
Or $\frac{dY(t)}{dt} = B e^{-\lambda\omega_0 t} \left(-\lambda\omega_0 \sin(\omega'_0 t) + \omega'_0 \cos(\omega'_0 t) \right)$.

Comme $\dot{Y}(0) = v_0$ on obtient ainsi $v_0 = B \omega'_0$.

Finalement : $y(t) = \frac{v_0}{\omega'_0} e^{-\lambda\omega_0 t} \sin(\omega'_0 t)$.

2. Étant donné que $y(x,t) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right) = Y\left(t - \frac{x}{c}\right)$, nous avons tout de suite :

$$y(x,t) = \frac{v_0}{\omega'_0} e^{-\lambda\omega_0(t-x/c)} \sin\left(\omega'_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$



3. Bien que la masse m ait un mouvement amorti, il n'y a pas, ici, de pertes énergétiques.

En effet, le fait que la masse voit son énergie diminuer tient au fait que celle-ci transfère de l'énergie à la corde qui, elle-même la propage sans perte.

Pour faire le bilan énergétique, il faut donc prendre en compte les termes d'énergie cinétique et potentielle de la masse et de la corde.

Pour la masse, cela donne : $E_{c,m} = \frac{1}{2} m \dot{Y}^2(t) + 2 \times \frac{1}{2} k Y^2(t)$.

Pour la corde, l'énergie cinétique linéique vaut $e_c(x,t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$ et l'énergie potentielle vaut

$$e_p(x,t) = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

Comme la corde n'est en mouvement que pour $x < ct$, il ne faut sommer ces contributions que pour $0 < x < ct$, ce qui donne : $\mathcal{E}_{\text{corde}} = \int_0^{ct} e_c(x,t) + e_p(x,t) dx$.

Finalement, comme initialement toute l'énergie est sous forme cinétique de la masse et vaut $\frac{1}{2} m v_0^2$, nous obtenons

$$\frac{1}{2} m \dot{Y}^2(t) + k Y^2(t) + \int_0^{ct} \left[\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} m v_0^2$$

☞ *Remarque.* connaissant les expressions de $Y(t)$, $y(x,t)$, il est possible de vérifier l'expression précédente. C'est long, fastidieux et sans intérêt intrinsèque, mais constitue un **excellent** entraînement au calcul.

✿ Exercice 8

1. Voir cours pour la mise en équation du câble coaxial.

Les lois de KIRCHHOFF (loi des mailles et loi des nœuds) donnent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}$$

Pour découpler ces équations, il suffit de dériver la première par rapport à x et la seconde par rapport à t et d'utiliser la relation $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$.

Nous obtenons alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

Pour trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $i(x,t)$, nous pouvons procéder de la même manière en dérivant la première équation de couplage par rapport à t et la seconde par rapport à x .

Nous trouvons $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t)$ avec la même expression de c .

2. La forme générale des solutions de l'équation de D'ALEMBERT est la somme de deux ondes planes progressives (OPP) l'une se dirigeant vers les x croissant à la célérité c et l'autre se dirigeant vers les x décroissant à la même célérité.

Nous avons donc naturellement $i(x,t) = i_+(x - ct) + i_-(x + ct)$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$.

Pour déterminer l'expression de l'onde de tension, nous allons utiliser une équation de couplage, par exemple $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{du}{dt}$.

Cela donne : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-1}{\Gamma} (i'_+(x - ct) + i'_-(x + ct))$ puis, en intégrant par rapport à t :

$$u(x,t) = \frac{1}{c\Gamma} (i_+(x - ct) + i_-(x + ct)) + u_0(x)$$

Comme $u_0(x)$ est un terme non propagatif et que le milieu est à loi d'évolution linéaire, nous prendrons :

$$u(x,t) = Z_c (i_+(x - ct) - i_-(x + ct)) \quad \text{avec} \quad Z_c = \frac{1}{c\Gamma} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

3. (a) *Analyse physique.* Ici nous avons un milieu propagatif avec deux extrémités pour lesquelles nous connaissons les conditions aux limites : l'une est ouverte (i.e. impose un courant nul) et l'autre est reliée à un générateur. Dans le milieu lui-même il y a donc a priori une OPPM₊ et une OPPM₋. Les grandeurs

pertinentes, outre celles liées au câble (Λ , Γ et leurs dérivées c et Z_c) sont E_0 en tant que contrainte et ω en tant que régime forcé.

Analyse technique. Deux façons de voir la solution ici. Comme à une extrémité il y a une contrainte de nullité pour une des grandeurs, nous pouvons utiliser une OS. Sinon la solution en OPPM $_{\oplus}$ et OPPM $_{\ominus}$ fonctionne toujours mais est un peu plus pédestre. L'inconvénient avec la forme en OS c'est qu'une fois écrite la solution en $i(x,t)$ l'écriture de $u(x,t)$ n'est pas immédiate.

► Approche en OS.

Écrivons la forme de $i(x,t)$ directement en complexe **et** respectant la contrainte $i(L,t) = 0$:

$$\underline{i}(x,t) = \underline{A} \sin(k(L-x)) e^{j\omega t}$$

Pour déterminer \underline{A} , il faut écrire l'autre condition aux limites, celle portant sur $u(0,t)$ donc d'abord trouver $u(x,t)$. Et pour ça, pas de secret, nous allons partir d'une équation de couplage :

$$\frac{\partial \underline{i}}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = +\frac{k \underline{A}}{\Gamma} \cos(k(L-x)) e^{j\omega t}$$

En intégrant tout en mettant de côté les termes non propagatifs et en faisant intervenir l'impédance Z_c :

$$\underline{u}(x,t) = -j \frac{k \underline{A}}{\omega \Gamma} \cos(k(L-x)) e^{j\omega t} = -j Z_c \underline{A} \cos(k(L-x)) e^{j\omega t}$$

Et ainsi la condition $\underline{u}(0,t) = E_0 e^{j\omega t}$ donne $\underline{A} = j \frac{E_0}{Z_c \cos(kL)}$ puis

$$\underline{i}(x,t) = j \frac{E_0}{Z_c \cos(kL)} \sin(k(L-x)) e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(x,t) = \frac{E_0}{\cos(kL)} \cos(k(L-x)) e^{j\omega t}$$

► Approche en OPPM.

Comme régime est forcé à la pulsation ω nous allons chercher $i(x,t)$ et $u(x,t)$ sous la forme d'OPPM complexes. Cela donne :

$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_- e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{et} \quad \underline{u}(x,t) = Z_c \left(\underline{I}_+ e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_- e^{j(\omega t + kx)} \right)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{en } x = 0 : \underline{u}(0,t) = E_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \text{en } x = L : i(L,t) = 0$$

Elles qui se traduisent par (n'oublions pas que $e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$) :

$$\begin{cases} E_0 = Z_c (\underline{I}_+ - \underline{I}_-) \\ 0 = \underline{I}_+ e^{-jkL} + \underline{I}_- e^{jkL} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \underline{I}_+ = \frac{E_0}{2 Z_c \cos(kL)} e^{jkL} \\ \underline{I}_- = -\frac{E_0}{2 Z_c \cos(kL)} e^{-jkL} \end{cases}$$

Finalement (avec $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$) :

$$\underline{i}(x,t) = j \frac{E_0}{Z_c \cos(kL)} \sin(k(L-x)) e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{u}(x,t) = \frac{E_0}{\cos(kL)} \cos(k(L-x)) e^{j\omega t}$$

Ce qui est bien le résultat obtenu avec l'approche OS.

► Version réelle

Nous avons en notation réelle (attention au déphasage introduit par j sur $i(x,t)$) :

$$\boxed{i(x,t) = -\frac{E_0}{Z_c \cos(kL)} \sin(k(L-x)) \sin(\omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{u(x,t) = \frac{E_0}{\cos(kL)} \cos(k(L-x)) \cos(\omega t)}$$

Il y a résonance pour $\cos(kL) = 0$, *i.e.* pour $kL = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$, *i.e.* pour $\omega = \frac{(2n+1)\pi c}{2L}$.

Lorsque cette condition est vérifiée, l'amplitude tend à diverger. En fait l'amplitude ne divergera pas car, dans ces conditions, le modèle non résistif n'est plus pertinent.

L'impédance d'entrée du câble est naturellement définie par :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{u}(0,t)}{\underline{i}(0,t)} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{Z_e} = -j \cotan(kL)}$$

3. (b) *Analyse technique. Ici les conditions aux limites n'imposent pas de nullité pour l'une ou l'autre des grandeurs duales, nous allons donc utiliser une vision en OPPM.*

Comme régime est forcé à la pulsation ω , nous allons rechercher $i(x,t)$ et $u(x,t)$ sous la forme d'OPPM complexes. Cela donne :

$$\underline{i}(x,t) = \underline{I_+} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I_-} e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{et} \quad \underline{u}(x,t) = Z_c \left(\underline{I_+} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I_-} e^{j(\omega t + kx)} \right)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{en } x = 0 : \underline{u}(0,t) = E_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \text{en } x = L : u(L,t) = R i(L,t) = 0$$

Ces conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} E_0 = Z_c (\underline{I_+} - \underline{I_-}) \\ Z_c (\underline{I_+} e^{-jkL} - \underline{I_-} e^{jkL}) = R (\underline{I_+} e^{-jkL} + \underline{I_-} e^{jkL}) \end{cases}$$

Réécrivons-les avant de résoudre :

$$\begin{cases} Z_c \underline{I_+} - Z_c \underline{I_-} = E_0 \\ (Z_c - R) e^{-jkL} \underline{I_+} - (Z_c + R) e^{jkL} \underline{I_-} = 0 \end{cases}$$

La solution est donc :

$$\underline{I_+} = \frac{(R + Z_c) e^{-jkL}}{(R - Z_c) e^{-jkL} + (Z_c + R) e^{jkL}} \times \frac{E_0}{Z_c} \quad \text{et} \quad \underline{I_-} = \frac{(Z_c - R) e^{-jkL}}{(R - Z_c) e^{-jkL} + (Z_c + R) e^{jkL}} \times \frac{E_0}{Z_c}$$

Ainsi en remplaçant dans $\underline{i}(x,t)$: $\boxed{\underline{i}(x,t) = \frac{E_0}{Z_c} \times \frac{(R + Z_c) e^{jk(L-x)} + (Z_c - R) e^{-jk(L-x)}}{(R - Z_c) e^{-jkL} + (Z_c + R) e^{jkL}} \times e^{j\omega t}}$

Et dans $\underline{u}(x,t)$: $\boxed{\underline{u}(x,t) = E_0 \times \frac{(R + Z_c) e^{jk(L-x)} + (R - Z_c) e^{-jk(L-x)}}{(R - Z_c) e^{-jkL} + (Z_c + R) e^{jkL}} \times e^{j\omega t}}$ (remarquons au passage le changement de signe devant l'OPPM_⊖ dans l'expression de $\underline{u}(x,t)$).

L'onde retour s'annule pour $\underline{I_-} = 0$, *i.e.* ici pour $R = Z_c$.

Nous retrouvons bien le fait qu'un milieu propagatif fermé sur son impédance caractéristique n'envoie pas d'onde retour.

Dans le cas où $R = Z_c$, l'onde réfléchie n'existe pas et nous avons :

$$\underline{i}(x,t) = \frac{E_0}{Z_c} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{u}(x,t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

La puissance instantanée transportée par l'onde vaut alors $\mathcal{P}(x,t) = u(x,t) \times i(x,t)$ (attention pour les valeurs instantanées, il **faut** utiliser la notation réelle), soit $\mathcal{P}(x,t) = \frac{E_0^2}{Z_c} \cos^2(\omega t - kx)$.

En L cette puissance transportée par l'onde vaut $\mathcal{P}(L,t) = \frac{E_0^2}{Z_c} \cos^2(\omega t - kL)$ de valeur moyenne

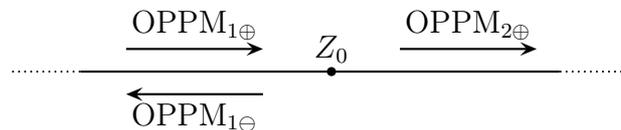
$$\langle \mathcal{P} \rangle(L) = \frac{E_0^2}{2Z_c}$$

Nous constatons alors que cette puissance correspond exactement à la puissance dissipée par effet Joule : $\langle \mathcal{P}_J \rangle(L) = \frac{E_0^2(L)}{R} = \frac{E_0^2}{R} = \frac{E_0^2}{Z_c}$. Cela traduit le fait que si toute l'énergie incidente est dissipée par effet Joule, aucune énergie ne peut repartir : il n'y a pas d'onde retour.

✳ Exercice 9

Analyse physique. Représentons l'aspect ondulatoire. Comme les deux milieux propagatifs sont joints en $x = 0$, nous pouvons dire que dans la partie $x < 0$, il y a deux OPP : une OPP_{\oplus} se dirigeant vers les x croissant (l'onde incidente) et une OPP_{\ominus} se dirigeant vers les x décroissant (l'onde retour ou réfléchie). Dans les $x > 0$, il n'y a qu'une onde OPP_{\oplus} transmise ; il ne peut y avoir d'onde réfléchie étant donné que le milieu $x > 0$ est infini.

Analyse technique. Étant donné que le milieu est linéaire et que rien n'est imposé, nous allons plutôt utiliser des OPPM qui sont plus faciles à manipuler.



Analyse technique. Étant donné qu'il y a un aspect propagatif, nous allons plutôt écrire ces ondes sous la forme d'OPP et comme la notion d'impédance est importante, nous allons utiliser l'onde en intensité comme onde de référence.

[1.] Nous pouvons écrire pour la partie $x > 0$ (notée 2) : $u_2(x,t) = u_{2+}(x,t) = +Z_c i_{2+}(x,t) = Z_c i_2(x,t)$.

Au point de jonction, le câble 2 se comporte donc comme une impédance $Z_2 = \frac{u_2(0,t)}{i_2(0,t)} = Z_c$.

Ainsi à l'extrémité $x = 0$ du câble 1 se situent deux impédances $Z_0 = Z_c$ (par hypothèse) et $Z_2 = Z_c$ en parallèle, ce qui donne une impédance équivalente $Z_1 = \frac{Z_c}{2}$.

[2.] Étant donné l'analyse précédente sur la présence d'OPP sur les deux portions de câbles, nous pouvons écrire :

→ pour $x < 0$:

$$\rightarrow \underline{i}_1(x,t) = \underline{I}_{1+} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_{1-} e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\rightarrow \underline{u}_1(x,t) = Z_c \underline{I}_{1+} e^{j(\omega t - kx)} - Z_c \underline{I}_{1-} e^{j(\omega t + kx)}$$

→ pour $x > 0$:

$$\rightarrow \underline{i}_2(x,t) = \underline{I}_2 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\rightarrow \underline{u}_2(x,t) = Z_c \underline{I}_2 e^{j(\omega t - kx)}$$

Le coefficient de réflexion en intensité se définit par : $r_I \triangleq \frac{I_{1-}}{I_{1+}}$.

Les deux conditions aux limites sont en $x = L$:

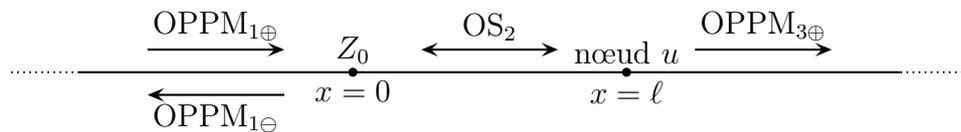
→ il y a continuité de la tension, soit $Z_c (I_{1+} - i_{1-}) = Z_c I_2$

→ la loi des nœuds s'écrit : $i_{1-}(0,t) = i_{2}(0,t) + \frac{u(0,t)}{Z_0}$ et comme $Z_0 = Z_c$ cela donne (en prenant l'expression de $u_2(0,t)$ pour $u(0,t)$) : $I_{1+} + I_{1-} = 2 I_2$.

Nous trouvons alors, à partir de ces deux équations : $r_I = \frac{I_{1-}}{I_{1+}} = \frac{1}{3}$.

☞ *Remarque.* le lecteur pourra vérifier que le résultat est indépendant de la forme de l'onde et qu'avec une onde en intensité de la forme $i(x,t) = F_1(t - x/c) + G - 1(t + x/c)$, une onde de tension $u(x,t) = Z_c F_1(t - x/c) - Z_c G_1(t + x/c)$ et un coefficient de réflexion défini par $r_I = \frac{G_1(t)}{F_1(t)}$, le résultat est identique.

3. (a) *Analyse physique.* Ici nous avons affaire à trois milieux propagatifs limités en $x = 0$ et $x = \ell$. Comme la contrainte imposée en $x = \ell$ est un nœud de tension, nous pouvons dire qu'il y a une onde stationnaire dans le milieu ②. De plus comme l'énoncé fait référence à une longueur d'onde, nous sommes désormais obligé de considérer des ondes monochromatiques.



Analyse technique. Étant donné que nous avons une OS dans le milieu ②, nous allons écrire directement la tension sous la forme OSM qui s'annule en $x = \ell$. Pour trouver l'onde de courant associé, soit nous repassons par la forme OPPM en décomposant le cosinus obtenu (ce qui serait maladroit puisque le but de l'OS est justement de ne pas passer par les OPPM) soit nous reprenons les relations de couplage. De plus, nous allons utiliser la notation complexe.

Avec le nœud de tension en $x = \ell$, nous pouvons écrire l'onde stationnaire associée sous la forme :

$$\underline{u}_2(x,t) = \underline{U}_2 \sin(k(\ell - x)) e^{j\omega t}$$

REMARQUE

Rappelons que cette écriture, qui correspond en réel à

$$u_2(t) = U_2 \cos(kx + \Phi) \cos(\omega t + \varphi)$$

n'est valable que pour les équations de D'ALEMBERT. Nous aurions pu aussi écrire

$$\underline{u}_2(x,t) = \underline{U}'_2 \sin(k(x - \ell)) e^{j\omega t}$$

ce qui n'aurait fait que changer l'amplitude complexe en $\underline{U}'_2 = -\underline{U}_2$.

La relation de couplage (voir cours, exo ou la retrouver rapidement par l'homogénéité ou n'importe quoi d'autre $u = L \frac{di(t)}{dt}$) donne :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial i_2}{\partial t}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial i_2}{\partial t}(x,t) = +\frac{k}{\Lambda} \underline{U}_2 \cos(k(\ell - x)) e^{j\omega t}$$

Et ainsi, en primitivant et en introduisant (par homogénéité) l'impédance caractéristique :

$$\underline{i}_2(x,t) = \frac{k}{j\omega\Lambda} \underline{U}_2 \cos(k(\ell-x)) e^{j\omega t} \rightsquigarrow \boxed{\underline{i}_2(x,t) = -j \frac{U_2}{Z_c} \cos(k(\ell-x)) e^{j\omega t}}$$

3. (b) Nous cherchons un nœud de courant en $x = 0$, donc il faut $\cos(k\ell) = 0$.

Cela donne, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\ell = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} \rightsquigarrow \ell = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2}$$

La plus petite longueur recherchée est donc $\boxed{\ell_0 = \frac{\lambda}{4}}$.

3. (c) Étant donné que le courant $i_2(0,t)$ est nulle, nous pouvons en déduire que l'impédance d'entrée de ce câble vaut alors $Z_e = \frac{u_2(0^+,t)}{i_2(0^+,t)} = \infty$, *i.e.* le câble 2 se comporte comme un circuit ouvert pour le reste du dispositif.

Le dispositif équivalent est donc simplement le câble en $x < 0$ fermé sur Z_0 .

Or Z_0 est l'impédance caractéristique du câble et nous savons que dans ces conditions il n'y a pas d'onde retour.

Finalement, dans ces conditions (un nœud de courant en 0^+), $\boxed{\text{coefficient de réflexion est nul}}$ et dans la partie $x < 0$, l'onde se réduit à une OPP $_{\oplus}$.

☞ *Remarque.* le dispositif étudié est analogue aux couches anti-reflets que l'on place parfois sur les verres de lunette de vue. « Anti-reflet », veut dire « sans reflet », « sans réflexion » ce qui est bien ce qu'il se passe ici pour $x < 0$.

✿ Exercice 10

Cet exercice, à la limite d'un DM, est typique d'une épreuve écrite consacrée aux instruments à corde. Comme toute épreuve écrite, il y a assez peu d'analyse préliminaire à faire étant donné que tout est déjà plus ou moins réalisé par l'énoncé.

1. → $n = 4$. La note est un do, deux octaves au-dessus du fondamental.

→ $n = 5$. On peut écrire $n = \frac{5}{4} \times 4$. Il s'agit d'un mi décalé de deux octave au-dessus du do de référence, *i.e.* dans la 3^e octave au dessus du fondamental.

→ $n = 6$. On peut écrire $n = \frac{3}{2} \times 4$. Il s'agit d'un sol décalé de deux octave au-dessus du do de référence, *i.e.* dans la 3^e octave au dessus du fondamental.

→ $n = 7$. $n = 7$ n'est pas multiple ni de 2, ni de $\frac{3}{2}$ ni de $\frac{5}{4}$, il n'est donc pas consonant en terme d'intervalle naturel.

→ $n = 8$. La note est un do, trois octaves au-dessus du fondamental.

2. (a) Entre le la_3 et le mi_1 , il y a 2 octaves et 5 demi-ton, soit 29 demi-tons. La fréquence du mi_1 est donc égale à $\boxed{N_{mi_1} = 2^{-29/12} N_{la_3} = \underline{82,40689 \text{ Hz}}}$.

Nous trouvons de même : $\boxed{N_{la_1} = \frac{N_{la_3}}{4} = \underline{110 \text{ Hz}}}$.

Entre le la_3 et le $ré_2$, il y a une octave et 7 demi-tons d'où $\boxed{N_{ré_2} = 2^{-19/12} N_{la_3} = \underline{146,8324 \text{ Hz}}}$.

Entre le la_3 et le sol_2 , il y a une octave et 2 demi-tons d'où $\boxed{N_{sol_2} = 2^{-14/12} N_{la_3} = \underline{195,9977 \text{ Hz}}}$.

Entre le la_3 et le si_2 , il y a 10 demi-tons d'où $\boxed{N_{si_2} = 2^{-10/12} N_{la_3} = \underline{246,9417 \text{ Hz}}}$.

Entre la la_3 et le mi_3 , il y a 5 demi-tons d'où $N_{mi_3} = 2^{-5/12} N_{la_3} = \underline{329,6276 \text{ Hz}}$.

☞ *Remarque.* nous pouvons vérifier la cohérence entre la gamme naturelle et la gamme tempérée. Entre do et sol il y a 7 demi-tons soit un rapport de fréquences de $2^{7/12} = 1,4983$ très proche du $3/2$ de la gamme naturelle. De même entre le do et le mi, il y a 4 demi-tons soit un rapport de fréquences de $2^{4/12} = 1,2599$, là aussi proche du $5/4$ de la gamme naturelle.

2. (b) La tension de la corde est liée à la célérité de l'onde par $T = \mu c^2 = \frac{\rho \pi D^2}{4} c^2$. Or la longueur de la corde est égale à la moitié de la longueur d'onde du fondamental, soit $L = \frac{c}{2 N_1}$.

Finalement : $\boxed{T = \rho \pi (L D N_1)^2}$ et nous trouvons :

Corde n°	1	2	3	4	5	6
Tension	<u>82,84927 N</u>	<u>93,21611 N</u>	<u>102,7461 N</u>	<u>113,0194 N</u>	<u>72,65247 N</u>	<u>66,04693 N</u>

Quand la masse volume du matériaux augmente, la tension augmente. Pour la corde n°4 cela donne, à diamètre constant :

Matériau	acier	nylon	boyau
Tension	<u>82,84927 N</u>	<u>17,09781 N</u>	<u>14,12742 N</u>

2. (c) La relation $T = \rho \pi (L D N_1)^2$ se différencie en $\frac{\Delta T}{T} = 2 \frac{\Delta N_1}{N_1}$.

Comme nous voulons une variation inférieure à 5 savarts, il faut, en utilisant $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$:

$$1000 \log \frac{N_1 + \frac{\Delta N_1}{2}}{N_1 - \frac{\Delta N_1}{2}} \rightsquigarrow \frac{\Delta N_1}{N_1} = \frac{5 \ln 10}{1000} \rightsquigarrow \boxed{\frac{\Delta T}{T} = \underline{2,302585 \%}}$$

Cette variation relative est identique, quelle que soit la corde.

2. (d) Entre le sol_2 et le la_2 , il y a 2 demi-tons d'où $N_{sol_2} = 2^{-2/12} N_{la_2}$.

$$\text{Or } N = \frac{1}{L D} \sqrt{\frac{T}{\rho \pi}} \text{ donc } \frac{N_{sol_2}}{n_{la_2}} = \frac{L + \Delta L}{L}.$$

Finalement $\boxed{\Delta L = L(2^{-2/12} - 1) = \underline{-6,873380 \text{ cm}}}$.

Le résultat est négatif. Rien de plus normal étant donné que la corde est raccourcie pour jouer des notes plus hautes (*i.e.* des fréquences plus élevées).

2. (e) Quand la température augmente, les matériaux ont tendance à se dilater. Ici comme les cordes ne sont pas en toute rigueur rigides, elles ne vont pas se dilater, mais les tensions à laquelle elles sont soumises diminuent. Dès lors, la fréquence du fondamental diminue aussi et les notes deviennent de plus en plus basses.

3. (a) À l'instant initial, nous avons $y(x,0) = 0$ pour tout x , donc :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\text{tous les coefficients } a_n \text{ sont nuls}}$$

Et ceci par unicité de la décomposition de la fonction nulle en série de FOURIER.

3. (b) En dérivant par rapport au temps l'expression de $y(x,t)$ (et compte tenu du fait que $a_n = 0$), nous trouvons :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{(x,0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi\nu}{L} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = h(x)$$

Les coefficients $\frac{n\pi\nu}{L} b_n$ sont donc les coefficients de Fourier de la fonction impaire $2L$ -périodique qui coïncide avec $h(x)$ sur $[0, L]$.

D'après l'énoncé :

$$\frac{n\pi\nu}{L} b_n = \frac{2eu}{L} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \rightsquigarrow \boxed{b_n = \frac{2eu}{n\pi\nu} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}$$

3. (c) L'endroit où la corde est frappée permet de déterminer l'amplitude de chaque harmonique.

En particulier, pour supprimer l'harmonique 7, il faut que $b_7 = 0$ ce qui donne $\sin\left(\frac{7\pi a}{L}\right) = 0$, puis $a = \frac{pL}{7}$ où p est un entier entre 1 et 6.

En fait à l'endroit précis où la corde est frappée, il y a un maximum de mouvement, *i.e.* la corde est « contrainte » de bouger à cette endroit là.

Pour supprimer l'harmonique 7, il suffit de frapper la corde à un endroit où il devrait y avoir un nœud de vibration de l'harmonique 7.

Dans ces conditions la corde ne peut pas avoir de nœud de vibration à cet endroit ce qui supprime, de fait, l'harmonique dissonnante 7.

3. (d) Si $a = \frac{L}{2}$, $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{2eu}{\pi\nu} \times \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Il ne reste que les harmoniques impaires car ce sont les seules qui possèdent un ventre de vibration au milieu de la corde.

Les harmoniques paires qui présentent un nœud de vibration en $x = \frac{L}{2}$ qui ne sont pas excités (cas analogue à l'harmonique 7 supprimée à la question précédente.) L'amplitude s'écrit alors :

$$y(x,t) = \frac{2eu}{\pi\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi\nu t}{L}\right) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{L}\right)$$

Nous constatons que le rapport des amplitudes entre l'harmonique n et le fondamental est $\frac{1}{n}$, *i.e.* que le spectre est très riche.

4. (a) Nous avons, avec la forme générale proposée pour la solution :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = a(x)$$

Les coefficients a_n sont les coefficients de Fourier de la fonction impaire $2L$ -périodique qui coïncide avec $a(x)$ sur $[0, L]$.

D'après l'énoncé $\boxed{a_{2n+1} = \frac{8h}{\pi^2} \times \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}}$ et $\boxed{a_{2n} = 0}$.

Puisque $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{(x,0)} = 0$, $\boxed{\text{les coefficients } b_n \text{ sont tous nuls}}$, toujours par unicité de la décomposition en série de FOURIER de la fonction nulle.

4. (b) Seuls les harmoniques impaires sont présentes et leurs amplitudes décroissent en $\frac{1}{n^2}$ ce qui en fait un spectre moins riche que le spectre de la corde frappée.

4. (c) Pour un instrument à corde pincée, l'amplitude des harmoniques décroît plus vite que pour un instrument à cordes frappées : le son émis par un instrument à cordes pincées est donc plus proche du son pur alors que celui d'un instrument à cordes frappées possède un timbre plus riche.

5. (a) L'énergie cinétique de la corde est la somme sur toute sa longueur de son énergie cinétique

linéique $e_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dy}{dt} \right)^2_{(x,t)}$, ce qui donne $E_c = \int_0^L \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dy}{dt} \right)^2_{(x,t)} dx$

5. (b) C'est une question de cours.

Considérons l'élément de corde entre x et $x + dx$. Le théorème de la puissance cinétique à cet élément de corde s'écrit : $\frac{d\delta E_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$ où :

→ $\delta E_c = \frac{1}{2} \mu dx v_y^2(x,t)$ est l'énergie cinétique infinitésimale de ce petit bout de corde

→ $\mathcal{P}_{\text{ext}} = T_y(x+dx,t) \times v_y(x+dx,t) + (-T_y(x,t)) \times v_y(x,t)$ est la puissance fournie par les forces exercées par la gauche ($-T_y(x,t)$) et par la droite ($T_y(x+dx,t)$)

→ $\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{d\delta E_p}{dt}$ est ce que nous cherchons à exprimer.

La puissance des forces extérieures se réécrit :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = T_y(x+dx,t) \times v_y(x+dx,t) + (-T_y(x,t)) \times v_y(x,t) = \frac{\partial T_y \times v_y}{\partial x}(x,t) dx$$

Nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}} &= \frac{\partial \delta E_c}{\partial t} - \mathcal{P}_{\text{ext}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu v_y^2 \right) dx - \frac{\partial T_y \times v_y}{\partial x}(x,t) dx \\ &= \left(\cancel{\mu v_y \frac{\partial v_y}{\partial t}} - \cancel{v_y \frac{\partial T_y}{\partial x}} - T_y \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx \end{aligned}$$

L'annulation des deux premiers termes provient de l'équation de couplage venant du PFD $\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$.

De plus avec la 2^e équation de couplage (celle venant de la géométrie du problème) s'écrit $\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$, nous arrivons à :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{T_0} T_y \frac{\partial T_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2 T_0} T_y^2 \right)$$

Et comme $T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$, nous aboutissons à $\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{d\delta E_p}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)$, ce qui est bien

le résultat attendu.

5. (c) L'énergie totale de la corde est :

$$E(t) = E_c(t) + E_p(t) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx$$

Dans le mode propre n , $y_n(x,t) = c_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x)$, l'énergie E_n s'écrit donc :

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} \mu c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \sin^2(k_n x) + \frac{1}{2} T c_n^2 k_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \sin^2(k_n x) \right) dx \\ &= \frac{L}{4} \mu c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) + \frac{L}{4} T c_n^2 k_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \end{aligned}$$

$$\text{Car } \int_0^L \cos^2(k_n x) dx = \int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \frac{L}{2}.$$

De plus, comme $\mu \omega_n^2 = T k_n^2$, nous obtenons $E_n = \frac{1}{2} c_n^2 T k_n^2$ soit $E_n = c_n^2 \frac{n^2 \pi^2 T}{4L}$.

5. (d) Raisonnons sur le terme cinétique (le raisonnement sera le même avec l'énergie potentielle).
On a successivement :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \\ \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \right)^2 \end{aligned}$$

Séparons les carrés des produits croisés :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \sin^2(k_n x) + \dots \\ &\quad \dots + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=1, \\ p \neq m}}^{\infty} c_m c_p \sin(\omega_m t + \varphi_m) \sin(\omega_p t + \varphi_p) \sin(k_m x) \sin(k_p x) \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} E_c(t) &= \int_0^L \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \\ &= \int_0^L \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \sin^2(k_n x) \right) dx + \dots \\ &\quad \dots + \int_0^L \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=1, \\ p \neq m}}^{\infty} c_m c_p \sin(\omega_m t + \varphi_m) \sin(\omega_p t + \varphi_p) \sin(k_m x) \sin(k_p x) \right) dx \end{aligned}$$

Et en permutant allégrement les signes \int et \sum :

$$E_c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L c_n^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \sin^2(k_n x) dx \right) + \dots$$

$$\dots + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=1, \\ p \neq m}}^{\infty} \left(\int_0^L c_m c_p \sin(\omega_m t + \varphi_m) \sin(\omega_p t + \varphi_p) \sin(k_m x) \sin(k_p x) dx \right)$$

Or $\int_0^L \sin^2(k_n x) dx = \frac{L}{2}$ et $\int_0^L \sin(k_m x) \sin(k_p x) dx = 0$ pour $m \neq p$ (orthogonalité des fonctions $\sin(k_n x)$).

Nous obtenons donc le résultat tout simple : $E_c(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{c,n}(t)$.

Le même raisonnement pour l'énergie cinétique conduit à : $E_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{p,n}(t)$.

Finalement : $E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t)$.

L'énergie de la corde est donc la somme des énergies de chaque mode : il n'y a pas d'interférence entre les termes énergétiques des différents modes propres.

5. (e) En reprenant l'expression des coefficients b_n pour la corde frappée, nous trouvons ($b_n = c_n$ ici vu la forme particulière des solutions) et avec $a = \frac{L}{2}$:

$$E_{2p+1} = \left(\frac{2ue}{\nu} \right)^2 \frac{T}{4L} \quad \text{et} \quad E_{2p} = 0$$

Pour la corde pincée (pour laquelle nous avons aussi, vu les conditions initiales $a_n = c_n$) :

$$E_{2p+1} = \left(\frac{8h}{(2p+1)\pi} \right)^2 \frac{T}{4L} \quad \text{et} \quad E_{2p} = 0$$

Nous constatons donc que pour un instrument à cordes frappées, l'énergie du mode n ne dépend pas de n : toutes les harmoniques participent à l'énergie de la même façon ce qui explique d'autant plus la richesse sonore d'un piano. Alors que pour un clavecin l'énergie diminue en $\frac{1}{n^2}$ ce qui le rapproche d'autant plus d'un son pur.

✿ Exercice 11

1. La constante γ a la même dimension que $\frac{g\mu}{k^2}$.

Sachant que g est une accélération, μ une masse volumique et k un vecteur d'onde (homogène à l'inverse d'une longueur), nous trouvons $[\gamma] = (\text{kg}) \cdot (\text{s})^{-2}$.

2. Les effets de la pesanteur et ceux de la tension superficielle sont identiques lorsque $gk = \frac{\gamma k^3}{\mu}$ soit lorsque $k^2 = \frac{\mu g}{\gamma}$.

Cela permet de définir une longueur caractéristique $\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$.

Ainsi si $\lambda = \frac{2\pi}{k} \gg \ell_c$, alors $gk \gg \frac{\gamma k^3}{\mu}$, *i.e.* les effets de la pesanteur sont prédominants.

Inversement, pour $\lambda \ll \ell_c$, l'effet de la tension superficielle l'emporte.

3. Si $\lambda \ll \ell_c$, la relation de dispersion se simplifie en $\omega^2 = \frac{\gamma}{\mu} k^3 \tanh(kh)$ et si $\lambda \gg \ell_c$, elle s'écrit $\omega^2 = gk \tanh(kh)$.

De plus pour $h \ll \lambda$, $kh \ll 1$ et $\tan(kh) \simeq kh$. Et pour $h \gg \lambda$, $kh \gg 1$ et $\tan(kh) \simeq 1$.

Pour déterminer la vitesse de groupe, différencions la relation de dispersion.

Par exemple pour le cas $\lambda \ll \ell_c$ et $h \ll \lambda$ cela donne la relation de dispersion $\omega^2 = \frac{h\gamma}{\mu} k^4$.

Nous avons donc :

$$2\omega d\omega = 4 \frac{h\gamma}{\mu} k^3 dk \quad \rightsquigarrow \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2 \frac{h\gamma}{\mu} k^2 \times \frac{k}{\omega} = 2 \frac{h\gamma}{\mu} k^2 \times \frac{1}{v_\varphi}$$

Et nous simplifions avec l'expression de v_φ .

	$\lambda \ll \ell_c$		$\lambda \gg \ell_c$	
	$h \ll \ell_c$	$h \gg \ell_c$	$h \ll \ell_c$	$h \gg \ell_c$
relation de dispersion	$\omega^2 = \frac{h\gamma}{\mu} k^4$	$\omega^2 = \frac{\gamma}{\mu} k^3$	$\omega^2 = ghk^2$	$\omega^2 = gh$
v_φ	$\sqrt{\frac{h\gamma}{\mu}} k$	$\sqrt{\frac{k\gamma}{\mu}}$	\sqrt{gh}	$\sqrt{\frac{g}{k}}$
v_g	$2v_\varphi$	$\frac{3}{2}v_\varphi$	$2v_\varphi$	$\frac{1}{2}v_\varphi$

Nous constatons qu'il y a dispersion (*i.e.* que v_φ dépend de k) dans tous les cas sauf pour des ondes de gravité de faible profondeur ($\lambda \gg \ell_c$ et $\lambda \gg h$).

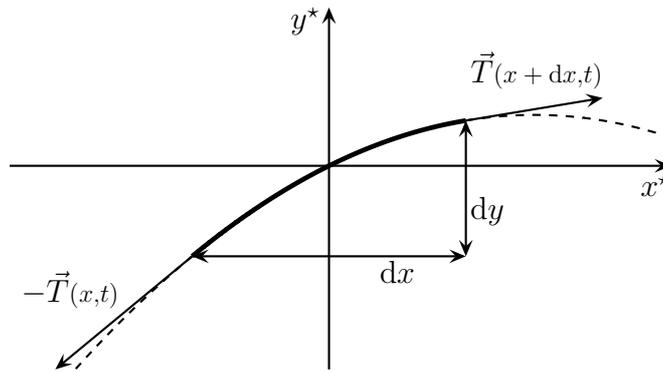
4. Nous trouvons $\ell_c = \underline{2,72789 \text{ mm}}$ (avec $\mu_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$).

type d'onde	λ	h	v_φ	v_g
onde de marée	$1000 \text{ km} \gg \ell_c$	$3 \text{ km} \ll \lambda$	$v_\varphi = \sqrt{gh} = \underline{171,552 \text{ m.s}^{-1}}$	$v_g = v_\varphi$
houle	$5 \text{ m} \gg \ell_c$	$3 \text{ km} \gg \lambda$	$v_\varphi = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} = \underline{3,51107 \text{ m.s}^{-1}}$	$v_g = \frac{v_\varphi}{2}$
cuve à onde	$3 \text{ cm} \gg \ell_c$	$1 \text{ mm} \ll \lambda$	$v_\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{h\gamma}{\mu}} = \underline{5,65874 \text{ cm.s}^{-1}}$	$v_g = v_\varphi$

✿ Exercice 12

1. *Analyse technique.* Pour montrer qu'une force est nécessaire, nous allons supposer qu'elle n'existe pas et en déduire toutes les conséquences possibles. Ici comme cette force est censée accompagner le couple, donc quelque chose qui a un effet rotatoire, nous allons nous intéresser à l'évolution en rotation d'un élément mésoscopique de corde.

Appliquons le théorème du moment cinétique barycentrique à l'élément de corde compris entre x et $x + dx$ en supposant qu'il n'y a pas d'autre force que la force tangentielle $T(x,t)$ et les couples $C(x,t)$ qui s'exercent à chaque extrémité.



Le TMCB donne, en projection sur l'axe (Oz) :

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = C(x + dx, t) - C(x, t) + T_y(x + dx, t) \frac{dx}{2} + T_y(x, t) \frac{dx}{2} - T_x(x + dx, t) \frac{dy}{2} - T_x(x, t) \frac{dy}{2}$$

Et en utilisant le fait que $T_x(x + dx, t) = T_x(x, t) = T_0$ et que $T_y = T_0 \frac{dy}{dx}(x, t)$, nous obtenons :

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = \frac{\partial C}{\partial x} dx + \cancel{T_0 \frac{dy}{dx}(x, t) dx} - \cancel{T_0 dy} = \frac{\partial C}{\partial x} dx$$

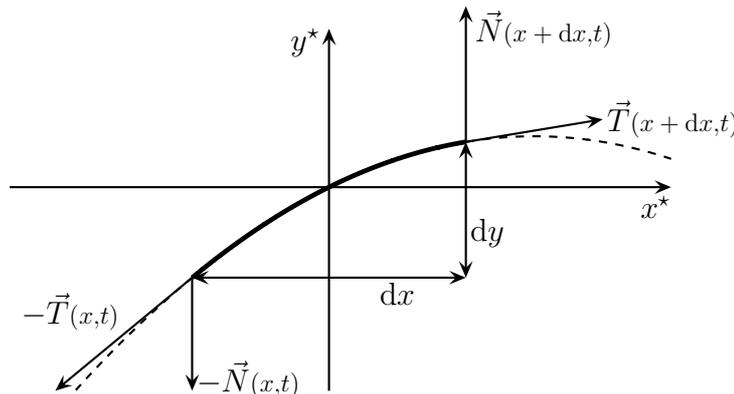
Le deux derniers termes se simplifient car, comme nous sommes à t fixé : $dy = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_t dx$.

Or σ^* est proportionnel à la masse $dm = \mu dx$, à la longueur dx et à la vitesse $\frac{\partial y}{\partial t}$. Il est donc du troisième ordre en dx , il faut donc le négliger.

Nous obtenons alors : $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$ ce qui est visiblement faux.

☛ *Remarque.* le lecteur vérifiera aisément que même si les bras de levier ne sont pas pris en $dy/2$ mais en κdy et $(1 - \kappa) dy$, comme les moments à chaque extrémités se somment, le résultat est identique. Même chose pour les moments associés aux bras de levier en $dx/2$.

Il existe donc une force normale à la corde (donc suivant Oy) exercée par la partie droite sur la partie gauche dont le moment résultant au centre de l'élément de corde doit annuler $\frac{\partial C}{\partial x}$.



Le TMCB s'écrit donc, compte tenu du fait que les bras de levier pour les forces $N(x, t)$ sont $\frac{dx}{2}$ (attention à l'expression des moments) :

$$0 = \frac{\partial C}{\partial x} dx + N(x + dx, t) \frac{dx}{2} + N(x, t) \frac{dx}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{N(x, t) + N(x + dx, t)}{2} = -\frac{\partial C}{\partial x}$$

Comme, au premier ordre en dx , $N(x + dx, t) = N(x, t)$, nous obtenons :

$$N(x, t) = -\frac{\partial C}{\partial x} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{N(x, t) = -J E \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t)}$$

2.] Le PFD appliqué au même petit bout de corde et projeté sur Oy donne :

$$\mu dx \frac{d^2 y}{dt^2} = T_y(x+dx,t) - T_y(x,t) + N(x+dx,t) - N(x,t) \rightsquigarrow \mu \frac{d^2 y}{dt^2}(x,t) = \frac{\partial T_y}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial N}{\partial x}(x,t)$$

Avec l'expression de $N(x,t)$ et avec $T_y(x,t) = T_0 \frac{dy}{dx}$, nous obtenons

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \frac{JE}{\mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) \right) \quad \text{avec} \quad \left(c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \right)$$

c est la célérité des ondes pour une corde sans raideur.

3.] Pour établir la relation de dispersion, recherchons une solution sous la forme d'OPPM avec un vecteur d'onde éventuellement complexe : $\underline{y}(x,t) = \underline{y}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$.

En introduisant cette solution dans l'équation de propagation, nous obtenons :

$$-\omega^2 = -\underline{k}^2 c^2 - \frac{JE}{\mu} \underline{k}^4 \rightsquigarrow \left(a \underline{k}^4 + \underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \right) \quad \text{avec} \quad \left(a = \frac{JE}{T_0} \right)$$

La résolution en \underline{k} de l'équation de dispersion (équation bicarrée en \underline{k}) donne :

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{2a} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4a\omega^2}{c^2}} \right)$$

Quand $a \rightarrow 0$ nous devons retrouver le cas usuel car cela correspond au cas où $E = 0$.

Nous avons, pour $a \rightarrow 0$: $\underline{k}^2 = +\frac{\omega^2}{c^2}$, il faut donc garder le signe + devant la racine et donc finalement :

$$\left(\underline{k}^2 = \frac{1}{2a} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4a\omega^2}{c^2}} \right) \right)$$

Dans le cas où a est faible, nous pouvons faire un développement limité à l'ordre 2 de \underline{k}^2 :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{a\omega^2}{c^2} \right) \rightsquigarrow \underline{k} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{a\omega^2}{2c^2} \right)$$

Nous pouvons remarquer alors que le vecteur d'onde est réel ce qui signifie qu'il n'y a pas d'atténuation.

☞ *Remarque.* si nous avons fait un développement limité à l'ordre 1, nous aurions retrouvé le cas de la corde sans raideur ce qui n'aurait pas eu d'autre intérêt que de vérifier la cohérence des résultats.

La vitesse de phase vaut $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ soit, au second ordre :

$$\left(v_\varphi = c \left(1 + \frac{a\omega^2}{2c^2} \right) \right)$$

Cette dernière dépendant de ω , nous pouvons dire qu'il y aura dispersion.

Pour la vitesse de groupe, différencions la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{a\omega^4}{c^4} \rightsquigarrow 2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} - \frac{4a\omega^3 d\omega}{c^4}$$

Et ainsi :

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega}{k c^2} \left(1 - \frac{2 a \omega^2}{c^2} \right) \rightsquigarrow \frac{1}{v_g} = \frac{v_\varphi}{c^2} \left(1 - \frac{2 a \omega^2}{c^2} \right)$$

Cela donne :

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} \left(1 + \frac{2 a \omega^2}{c^2} \right) = \frac{c}{1 + \frac{a \omega^2}{2 c^2}} \left(1 + \frac{2 a \omega^2}{c^2} \right) \stackrel{\text{DL}}{=} c \left(1 + \frac{2 a \omega^2}{c^2} - \frac{a \omega^2}{2 c^2} \right)$$

Et finalement : $\boxed{v_g = c \left(1 + \frac{3 a \omega^2}{2 c^2} \right)}$.

4. Cherchons une solution sous forme d'onde stationnaire : $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$.
La condition d'immobilité en $x = 0$ donne :

$$y(0,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos \psi = 0 \rightsquigarrow \cos \psi = 0 \rightsquigarrow \psi = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$.

La condition d'immobilité en $x = L$ donne :

$$y(L,t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL) \rightsquigarrow kL = n\pi \rightsquigarrow \boxed{k = \frac{n\pi}{L}}$$

Les vecteurs d'onde propres sont les mêmes que pour la corde usuelles.

Pour déterminer les pulsations propres, il nous faut reprendre l'équation de dispersion (écrite directement avec un vecteur d'onde réel) : $a k^4 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$.

Nous en déduisons : $\boxed{\omega = \frac{n\pi c}{L} \sqrt{1 + \frac{a n^2 \pi^2}{L^2}}}$.

Ces pulsations sont supérieures aux pulsations propres d'une corde sans raideur et ne sont plus multiples d'une pulsation fondamentale, ce qui rend le son « anharmonique ».

✱ Exercice 13

Cette exercice n'est ni plus ni moins que l'analogie en électrocinétique des deux oscillateurs mécaniques couplés étudiés en cours. 1. Analyse physique. Dans cette question nous cherchons des modes propres, ce qui signifie que le circuit évolue de façon libre : le générateur est donc éteint et doit être remplacé par un fil. Il s'agit de deux oscillateurs identiques couplés, nous savons donc qu'il y aura deux pulsations propres différentes et que celles ci seront d'autant plus éloignées que le couplage sera fort. Or ici le couplage est assuré par un condensateur. Pour qu'il n'y ait pas de couplage, il faudrait un circuit ouvert, c'est-à-dire un condensateur de capacité nulle.

Analyse technique. Nous devons chercher des équations différentielles dans un circuit d'ordre « beaucoup » (≥ 2), la notation complexe s'impose. Ce n'est qu'à la fin que nous ferons la correspondance $\times j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}$. Comme nous cherchons des tensions mieux vaut une approche nodale. Avec un circuit à 3 nœuds, cela fait deux lois à écrire ...

Écrivons la loi des nœuds en terme de potentiels au nœud au dessus du condensateur dont la tension est $x(t)$.

En notation complexe, cela donne : $\frac{0 - \underline{X}}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{0 - \underline{X}}{jL\omega} + \frac{\underline{Y} - \underline{X}}{\frac{1}{jk\omega}} = 0$. Ainsi :

$$\underline{X} \left(j(k+1)C\omega + \frac{1}{jL\omega} \right) = \underline{Y} \times jkC\omega \quad \rightsquigarrow \quad \underline{X}(1 - (k+1)LC\omega^2) = +kLC\omega^2 \underline{Y}$$

Et en notation réelle : $\boxed{LC(k+1)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = kLC\frac{d^2y(t)}{dt^2}}$.

Avec une loi des nœuds en terme de potentiel au nœud au dessus du condensateur dont la tension est $y(t)$, nous arrivons, en procédant comme ci-dessus à : $\boxed{LC(k+1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = kLC\frac{d^2x(t)}{dt^2}}$.

2. Étant donné la forme des équations de couplage, nous allons chercher les équations différentielles vérifiées par les grandeurs $\sigma(t) \triangleq x(t) + y(t)$ et par $\alpha(t) \triangleq x(t) - y(t)$.

En sommant les deux équations de couplages, nous trouvons :

$$LC(k+1)\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} + \sigma(t) = kLC\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}\sigma(t) = 0}$$

Il s'agit d'un mode propre de pulsation associée $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

De plus en soustrayant les deux équations de couplage nous trouvons :

$$LC(k+1)\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \alpha(t) = -kLC\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{1}{(1+2k)LC}\alpha(t) = 0}$$

Le 2^e mode propre est associé à la pulsation $\omega_a = \frac{1}{\sqrt{(1+2k)LC}}$

3. Pour exciter, par exemple, uniquement $\alpha(t)$ il faut avoir $\sigma(t) = 0$.

Étant donné l'équation différentielle vérifiée par $\sigma(t)$, pour que tel soit le cas, il faut $\sigma(0) = 0$ et $\dot{\sigma}(0) = 0$.

Cela implique, pour les conditions initiales : $\boxed{x(0) + y(0) = 0 \text{ et } \dot{x}(0) + (\omega t)y(0) = 0}$.

Dans ces conditions, nous avons :

$$\sigma(t) = 0 = x(t) + y(t) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{x(t) = -y(t)}$$

Il s'agit du **mode antisymétrique** (les condensateurs ont des tensions opposées à tout instant).

De même, pour exciter uniquement le mode $\sigma(t)$, il faut $\alpha(t) = 0$ ce qui donne les conditions initiales $\boxed{x(0) = y(0) \text{ et } \dot{x}(0) = (\omega t)y(0)}$.

Nous avons alors $\alpha(t) = x(t) - y(t) = 0$ soit $\boxed{x(t) = y(t)}$: il s'agit du **mode symétrique** (les condensateurs ont des tensions égales à tout instant).

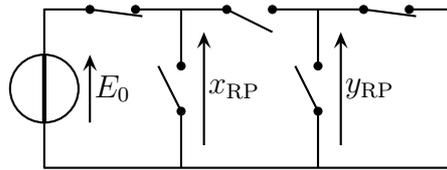
4. Lorsqu'il y a le générateur, les équations différentielles sont les mêmes à un terme près : l'effet du condensateur.

Nous pouvons alors, soit reprendre les équation du début (boarf) soit traiter le problème par superposition : la solution complète, c'est la solution due au régime libre ajoutée à la solution en régime forcé. Il ne reste plus qu'à déterminer les deux.

→ *Solution en régime forcé.* Étant donné que le générateur est un générateur de tension constante, nous allons chercher les solutions $x_{RP}(t)$ et $y_{RP}(t)$ sous la forme d'une constante.

Comme, dans ces conditions, nous pouvons considérer que le régime permanent est atteint, les bobines se comportent comme des interrupteurs fermés et les condensateurs comme des interrupteurs ouverts.

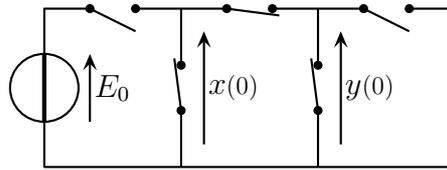
Le circuit est alors équivalent, en régime permanent, au circuit ci-dessous.



Nous trouvons alors très vite : $x_{RP} = E_0$ et $y_{RP} = 0$.

Cela implique, pour les modes propres : $\sigma_{RP} = E_0$ et $\alpha_{RP} = E_0$.

→ *Conditions initiales.* Comme, juste avant l'échelon de tension, les condensateurs sont déchargés et qu'aucun courant ne passe, par continuité mathématique de la tension aux bornes des condensateurs et de l'intensité traversant les bobines, nous avons $i_{\text{bobine}}(0) = 0$ et $u_{\text{condensateur}}(0) = 0$, ce qui signifie qu'à l'instant initial, un condensateur se comporte comme un fil et une bobine comme un interrupteur ouvert. Ainsi, à l'instant initial, le circuit est équivalent au schéma ci-dessous.



Nous trouvons alors très vite : $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

De plus nous voyons qu'aucun courant ne circule dans les condensateurs (grâce à la présence des bobines), cela donne : $i_{\text{condensateur}} = 0$ puis, avec les lois constitutives des condensateurs : $\dot{x}(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$.

Pour les modes propres, cela conduit à : $\sigma(0) = \alpha(0) = 0$ et $\dot{\sigma}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$

→ *Solutions pour les modes propres.* Comme la solution pour les modes propres est de la forme $\alpha(t) = \alpha_{\text{libre}}(t) + \alpha_{\text{forcé}}(t)$, cela donne : $\alpha(t) = A \cos(\omega_a t) + B \sin(\omega_a t) + E_0$.

Avec les conditions initiales trouvées précédemment, nous trouvons finalement :

$$\alpha(t) = E_0 (1 - \cos(\omega_a t))$$

De même, avec $\sigma(t)$, cela donne : $\sigma(t) = \sigma_{\text{libre}}(t) + \sigma_{\text{forcé}}(t)$.

Puis, de $\sigma(t) = A' \cos(\omega_s t) + B' \sin(\omega_s t) + E_0$ nous trouvons, avec les conditions initiales : $\sigma(t) = E_0(1 - \cos(\omega_s t))$.

→ *Solutions pour $x(t)$ et $y(t)$.* Avec $x(t) = \frac{\sigma(t) + \alpha(t)}{2}$, cela donne d'abord

$$x(t) = E_0 \left(1 - \frac{\cos(\omega_a t) + \cos(\omega_s t)}{2} \right) \rightsquigarrow \boxed{x(t) = E_0 \left[1 - \cos\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_a + \omega_s}{2} t\right) \right]}$$

De même : $y(t) = \frac{\sigma(t) - \alpha(t)}{2}$. Ainsi :

$$y(t) = E_0 \left(1 - \frac{\cos(\omega_a t) - \cos(\omega_s t)}{2} \right) \rightsquigarrow \boxed{x(t) = E_0 \left[1 + \sin\left(\frac{\omega_a - \omega_s}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_a + \omega_s}{2} t\right) \right]}$$

✿ Exercice 14

1. Voir le cours pour le détail de la mise en équation. Le PFD sur un élément de corde donne une équation de couplage $\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et l'aspect géométrique donne : $\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$.

Les solutions sont du type $y(x,t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct)$.

2. (a) L'énergie cinétique linéique vaut $e_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$.

2. (b) L'énergie potentielle linéique vaut $e_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$.

2. (c) Partons de $E(x,t) = e_c(x,t) + e_p(x,t)$ et dérivons :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \mu \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial t} + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial x}$$

Et en utilisant l'équation de couplage $\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$= T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} v_y + T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial y}{\partial x} v_y \right)$$

Ce que nous pouvons écrire $\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$ en posant $P = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} v_y = -T_y \times v_y$.

☞ *Remarque.* il s'agit, ici, du raisonnement inverse à celui fait en cours.

3. (a) Étant donné que les deux cordes sont attachées ensemble, il y a continuité de la position (donc de la vitesse), ce qui donne $v_{y1}(0^-,t) = v_{y2}(0^+,t)$

3. (b) Comme il n'y a pas de masse entre les deux cordes, la 3^e loi de Newton dit qu'il y a continuité de la tension et ainsi $T_{y1}(0^-,t) = T_{y2}(0^+,t)$.

3. (c) Pour tous ces coefficients en transmission et réflexion, le mieux reste d'écrire la solution en OPP. Ainsi :

$$v_1(x,t) = v_{1+}(x,t) + v_{1-}(x,t) = f \left(t - \frac{x}{v_1} \right) + g \left(t + \frac{x}{v_1} \right)$$

où $f \left(t - \frac{x}{v_1} \right)$ est l'amplitude de l'OPP_⊕ et $g \left(t + \frac{x}{v_1} \right)$ est l'amplitude de l'OPP_⊖.

Comme le milieu 2 est infini, nous avons seulement une OPP_⊕ ce qui donne $v_2(x,t) = h \left(t - \frac{x}{v_2} \right)$.

Le coefficient de réflexion en vitesse (au point $x = 0$) est donc défini par $r_v = \frac{g(t)}{f(t)}$ et le coefficient en transmission est, lui, défini par $t_v = \frac{h(t)}{f(t)}$.

Pour déterminer ces coefficients, il est nécessaire de traduire la condition sur la tension et pour cela nous allons utiliser la notion d'impédance définie par : $-T_y = Z_c v_y$.

Nous pouvons ainsi écrire les ondes de tension sous la forme

$$\begin{cases} -T_{y1}(x,t) = Z_{c1} f\left(t - \frac{x}{v_1}\right) - Z_{c1} g\left(t + \frac{x}{v_1}\right) \\ -T_{y2}(x,t) = Z_{c2} h\left(t - \frac{x}{v_2}\right) \end{cases}$$

Les conditions au limites donnent, puisqu'elles sont en $x = 0$:

$$\begin{cases} f(t) + g(t) = h(t) \\ Z_{c1} f(t) - Z_{c1} g(t) = Z_{c2} h(t) \end{cases}$$

En éliminant $h(t)$ entre les deux équations, nous trouvons

$$(Z_{c2} - Z_{c1}) f(t) = (Z_{c2} + Z_{c1}) g(t) \quad \rightsquigarrow \quad r_v = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$$

Nous retrouvons bien le fait que le coefficient de réflexion est nul, *i.e.* qu'il n'y a pas d'onde réfléchie, lorsque $Z_{c2} = Z_{c1}$.

En éliminant $g(t)$ entre les deux équations, nous trouvons $2Z_{c1} f(t) = (Z_{c2} + Z_{c1}) h(t)$ puis le coefficient de transmission $t_v = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$.

✿ Exercice 15

Pas de difficulté particulière sur cet exercice. Il s'agit d'un exercice de mise en équation à partir d'un modèle discret puis d'un passage au continu.

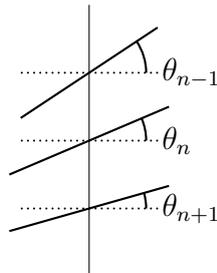
1. *Analyse physique. Ici tout va se jouer en rotation, le poids des différents éléments (fil, barreaux) ne va pas intervenir. Les grandeurs pertinentes vont être ici J (inertie des barreaux), a (description géométrique) et C (action du fil).*

Analyse technique. Pour trouver ce qui deviendra une équation de propagation ou presque, le mieux est de faire l'analogie de l'étude mésoscopique pour un milieu continu, à savoir étudier un et un seul barreau. Et pour ce barreau qui tourne, rien de tel qu'un bon TMC.

Écrivons le théorème du moment cinétique scalaire pour la tige n .

Évidemment l'axe de rotation choisi est celui de la corde de suspension. Les forces qui s'exercent sur la tige sont :

- le poids vertical
- l'action du fil de torsion entre $(n - 1)$ et n
- l'action du fil de torsion entre $(n + 1)$ et n



Cela donne : $\frac{d\sigma_n}{dt} = \mathcal{M}(\vec{P}) + \Gamma_{n-1 \leftrightarrow n} + \Gamma_{n \leftrightarrow n+1}$.

Le poids est de moment nul car parallèle à l'axe de rotation.

Le fil de torsion entre $n - 1$ et n est tourné de l'angle $\theta_{n-1} - \theta_n$.

En faisant attention au signe du moment (quand θ_n augmente, le moment doit devenir « très » négatif pour ramener la tige à la position initiale) nous obtenons : $\Gamma_{n-1 \leftrightarrow n} = +C (\theta_{n-1} - \theta_n)$.

De même le fil de torsion entre n et $n + 1$ est tourné de l'angle $\theta_n - \theta_{n+1}$.

Toujours avec le même raisonnement pour le signe du moment (quand θ_n augmente, le moment doit devenir « très » négatif pour ramener la tige à la position initiale) nous obtenons : $\Gamma_{n \leftrightarrow n+1} = -C (\theta_n - \theta_{n+1})$.

Enfin, le moment cinétique s'écrit $\sigma_n = J \dot{\theta}_n(t)$.

En rassemblant le tout, nous trouvons ainsi $J \ddot{\theta}_n(t) = -C (2\theta_n(t) - \theta_{n-1}(t) - \theta_{n+1}(t))$.

2. Introduisons la fonction $\Theta(x, t)$ telle que $\Theta(x = na, t) = \theta_n(t)$.

Cette fonction va nous permettre d'exploiter l'hypothèse des milieux continus, *i.e.* des milieux tels que $a \ll \lambda$.

Nous avons ainsi, avec des développements de Taylor et en n'oubliant pas que $x = na$:

$$\begin{aligned} 2\theta_n(t) &= 2\Theta(x, t) \\ \theta_{n+1}(t) &= \Theta(x+a, t) = \Theta(x, t) + a \times \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x, t) + \frac{a^2}{2} \times \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}(x, t) \\ \theta_{n-1}(t) &= \Theta(x-a, t) = \Theta(x, t) - a \times \frac{\partial \Theta}{\partial x}(x, t) + \frac{a^2}{2} \times \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}(x, t) \end{aligned}$$

Et ainsi l'équation de propagation se simplifie en $J \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}(x, t) = +C a^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}(x, t)$ ce qui est bien une équation de d'Alembert $\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \Theta}{dt^2}(x, t) \right)$ où la célérité vaut $\left(c^2 = \frac{C a^2}{J} \right)$, célérité d'autant plus grande que la raideur des fils est grande et d'autant plus faible que l'inertie (la « résistance » au mouvement) est grande.

✿ Exercice 16

Il s'agit d'un exercice de mise en équation puis d'un passage au modèle continu. Aucune difficulté sur la méthode, il suffit de faire comme en cours.

1. *Analyse physique. Ici les pendules vont osciller et transmettre leurs oscillations à leurs voisins par l'intermédiaire des ressorts. Si l'évolution globale est conservative (aucune énergie de dissipée) en revanche pour un pendule simple donné, l'évolution n'est pas du tout conservative à cause du couplage et de la transmission d'énergie associée. Les grandeurs pertinentes sont ici m (inertie), ℓ (description du pendule), g et k pour les forces qui s'exercent. ℓ_0 n'interviendra que pour la position au repos donc pas du tout ici puisque nous nous intéressons à l'écart au repos.*

Analyse technique. Comme l'évolution d'un pendule n'est pas conservative, adieu veau, vache, cochon, couvée et approche énergétique. Ceci étant, nous pouvons remarquer que le TMC fera tout à fait l'affaire étant donné qu'il s'agit d'un pendule, c'est-à-dire d'un mouvement circulaire.

Utilisons le théorème du moment cinétique scalaire appliqué à la masse n . Les forces extérieures qui s'appliquent sont :

- la tension exercée par le fil, de moment nul
- le poids de moment $\mathcal{M} = -m g \ell \sin \theta_n = -m g \ell \theta_n = -m g \xi_n$
- la tension exercée par le ressort de gauche de moment

$$\mathcal{M}_{n, n-1} = \pm k \Delta \ell_{n, n-1} \times \ell \cos \theta_n = \pm k (\xi_n - \xi_{n-1}) \ell$$

Le signe de $\mathcal{M}_{n,n-1}$ est déterminé par un critère de pertinence : si ξ_n augmente, le moment doit devenir « très » négatif, ce qui implique $\mathcal{M}_{n,n-1} = -k \ell (\xi_n - \xi_{n-1})$

→ la tension exercée par le ressort de gauche de moment $\mathcal{M}_{n,n+1} = \pm k (\xi_{n+1} - \xi_n) \ell$, le signe de $\mathcal{M}_{n,n+1}$ est déterminé par le même critère de pertinence : si ξ_n augmente, le moment doit devenir « très » négatif, ce qui implique $\mathcal{M}_{n,n+1} = +k \ell (\xi_{n+1} - \xi_n)$

Comme le moment cinétique vaut $\sigma_n(t) = m \ell^2 \dot{\theta}_n = m \ell \dot{\xi}_n(t)$, nous trouvons, après utilisation de $\frac{d\sigma_n(t)}{dt} = \mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{n,n-1} + \mathcal{M}_{n,n+1}$:

$$m \ell \ddot{\xi}_n(t) = -m g \xi_n(t) - k \ell (\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)) + k \ell (\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t))$$

puis
$$\ddot{\xi}_n(t) = -\frac{g}{\ell} \xi_n(t) - \frac{k}{m} (2 \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t) - \xi_{n+1}(t))$$

et ainsi avec les notations de l'énoncé : $\boxed{\ddot{\xi}_n(t) = -\Omega_0^2 \xi_n(t) - \omega_0^2 (2 \xi_n(t) - \xi_{n-1}(t) - \xi_{n+1}(t))}$

☛ *Remarque.* nous aurions pu aussi utiliser un PFD projeté sur \vec{u}_θ , ce qui serait revenu exactement au même parce qu'il s'agit d'un et un seul point matériel. Ceci étant, dès que ça tourne, mieux vaut penser TMC.

2. Introduisons une fonction $\Xi(x,t)$ telle que $\Xi(x = na,t) = \xi_n(t)$. L'approximation des milieux continus est telle que $\lambda \ll a$ et nous permet de faire des développements limités :

$$2 \xi_n(t) = 2 \Xi(x,t)$$

$$\xi_{n+1}(t) = \Xi(x+a,t) = \Xi(x,t) + a \times \frac{\partial \Xi}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2} \times \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\xi_{n-1}(t) = \Xi(x-a,t) = \Xi(x,t) - a \times \frac{\partial \Xi}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2} \times \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x^2}(x,t)$$

Et ainsi en remplaçant dans l'équation de propagation nous trouvons :

$$\frac{\partial^2 \Xi}{\partial t^2}(x,t) = -\omega_0^2 (-a^2) \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x^2}(x,t) - \Omega_0^2 \Xi(x,t)$$

Cette équation se réécrit, afin de la faire ressembler à une équation de D'ALEMBERT :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Xi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \Xi}{dt^2} + \frac{\Omega_0^2}{c^2} \Xi(x,t)}$$

☛ *Remarque.* pour ceux qui ne connaîtraient toujours pas leur alphabet grec, Ξ est la majuscule de ξ .

3. *Analyse technique. Pas de secret, pour trouver la relation de dispersion, il faut partir d'une OPPM.*

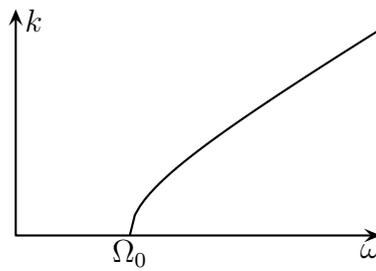
Étudions un OPPM du type $\Xi(x,t) = \underline{\Xi}_0 e^{j(\omega t - kx)}$. Nous avons alors :

→ $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \times -jk$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \times -k^2$

→ $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \times j\omega$ et $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow \times -\omega^2$

La relation de dispersion est donc $\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\Omega_0^2}{c^2} = k^2}$

la courbe $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \Omega_0^2}}{c}$ est représentée ci-dessous.



Nous constatons qu'il ne peut y avoir propagation que pour une pulsation ω suffisamment grande. Autrement dit, s'il y a excitation à une extrémité à une pulsation trop faible, il n'y aura pas de propagation : les premiers pendules vont tous osciller mais avec des amplitudes de plus en plus faibles **sans que cela soit du ni à de la dissipation, ni à de l'absorption** car aucune énergie n'est perdue ou dissipée. C'est simplement que l'énergie « envoyée » dans la chaîne d'oscillateurs ne se propage pas : elle « revient » à la source.

4. La vitesse de phase s'écrit :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v_{\varphi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}}} > c}$$

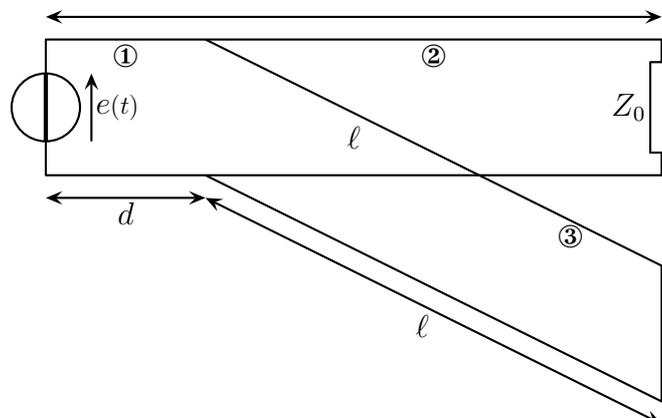
Pour calculer la vitesse de groupe, nous pouvons soit exprimer ω en fonction de k puis dériver : $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 + k^2 c^2}$, soit (en général plus facile) différencier la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \Omega_0^2 + k^2 c^2 \quad \rightsquigarrow \quad 2\omega d\omega = 2k c^2 dk \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 \quad \rightsquigarrow \quad v_g = \frac{c^2}{v_{\varphi}}$$

Ce qui donne $\boxed{v_g = c \times \sqrt{1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}}}$.

* Exercice 17

Faisons tout d'abord un beau schéma permettant de présenter la situation et les différents milieux de propagation. Le câble de départ est noté ① avant la dérivation et ② après tandis que le câble rajouté est noté ③.



Analyse physique. Nous avons alors trois milieux propagatifs chacun avec une $OPPM_{\oplus}$ et une $OPPM_{\ominus}$ soit 6 ondes à déterminer. Ce sont bien des $OPPM$ et pas seulement des OPP car le générateur qui force le tout est sinusoïdal.

Pour déterminer entièrement ces 6 ondes, il nous faut 6 conditions aux limites. Aux trois extrémités, nous écrivons les lois électrocinétiques qui vont bien, ce qui donne déjà 3 lois. Il en faut encore 3. Pour cela nous allons regarder la jonction des câbles : la loi des nœuds donne une nouvelle condition et l'égalité des trois tensions en donne deux ! Finalement nous avons bien nos 6 lois. Le problème est donc entièrement soluble.

1. Il y a continuité de la tension au point de jonction, ainsi :

$$\begin{cases} \underline{v}_1(d^-, t) = \underline{v}_2(d^+, t) \\ \underline{v}_1(d^-, t) = \underline{v}_3(d^+, t) \end{cases}$$

Il y a, en plus, la loi des nœuds :

$$\underline{i}_1(d^-, t) = \underline{i}_2(d^+, t) + \underline{i}_3(d^+, t)$$

2. *Analyse technique.* Pour écrire les solutions, étant donné qu'il s'agit d'OPPM, nous allons utiliser la notation complexe et pour pouvoir utiliser l'impédance complexe, nous allons prendre comme onde de référence l'onde en intensité.

Écrivons tout d'abord la forme des solutions.

Pour cela il faut remarquer que dans chaque milieu de propagation, il a une OPPM_⊕ et une OPPM_⊖ car aucune des ligne n'est fermée sur son impédance caractéristique.

Dès lors, cela donne (n'oublions pas que les trois milieux ont la même impédance caractéristique – ouf –) :

$$\begin{cases} \underline{i}_1(x, t) = \underline{I}_{1+} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_{1-} e^{j(\omega t + kx)} \\ \underline{v}_1(x, t) = \underline{Z}_c \underline{I}_{1+} e^{j(\omega t - kx)} - \underline{Z}_c \underline{I}_{1-} e^{j(\omega t + kx)} \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{i}_2(x, t) = \underline{I}_{2+} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_{2-} e^{j(\omega t + kx)} \\ \underline{v}_2(x, t) = \underline{Z}_c \underline{I}_{2+} e^{j(\omega t - kx)} - \underline{Z}_c \underline{I}_{2-} e^{j(\omega t + kx)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{i}_3(x, t) = \underline{I}_{3+} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_{3-} e^{j(\omega t + kx)} \\ \underline{v}_3(x, t) = \underline{Z}_c \underline{I}_{3+} e^{j(\omega t - kx)} - \underline{Z}_c \underline{I}_{3-} e^{j(\omega t + kx)} \end{cases}$$

La question est, d'une certaine manière : « déterminer \underline{I}_{1-} ». Étant donné qu'il y a 6 inconnues (les 6 amplitudes des 6 OPPM en intensité), il faut 6 équations pour les trouver entièrement. Nous en avons déjà 3 avec les conditions de continuité précédentes, il manque les trois conditions aux limites trouvées lors de l'analyse précédente :

→ la présence du générateur en $x = 0$: $\underline{u}_1(0, t) = E_0 e^{j\omega t}$

→ la présence du dipôle en $x = \ell$: $\underline{u}_2(\ell, t) = Z_0 \underline{i}_2(\ell, t)$

→ le court-circuit en bout de ligne de ③, i.e. en $x = \ell + d$: $\underline{u}_3(\ell + d, t) = 0$

6 équations, 6 inconnues, ça se résout. Tentez le pour voir : c'est un excellent exercice de calcul.

Mais il y a un autre moyen, bien plus pratique (et bien plus sûr) basé sur la condition nécessaire pour supprimer une onde réfléchie.

Nous savons qu'il n'y a pas d'onde réfléchie lorsqu'un milieu est fermé sur son impédance caractéristique.

Nous allons donc rechercher à quelles impédances \underline{Z}_2 et \underline{Z}_3 sont équivalents les milieux ② et ③ pour pouvoir les associer en parallèle afin d'écrire la condition $Z_c = \underline{Z}_2 // \underline{Z}_3$. Toute l'idée est là ! ☺ Reste à trouver les impédances des milieux ② et ③.

Pour définir l'impédance d'un câble en un point, il suffit d'écrire la définition même d'une impédance : $\underline{Z}(x) = \frac{\underline{u}(x, t)}{\underline{i}(x, t)}$.

Comme ici nous cherchons les impédances au point de jonction des câbles, il faudra donc déterminer :

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{u}_2(d^+, t)}{\underline{i}_2(d^+, t)} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{u}_3(d^+, t)}{\underline{i}_3(d^+, t)}$$

→ Calcul de \underline{Z}_3 .

La condition en bout de câble ($x = \ell + d$) du milieu trois donne :

$$Z_c \underline{I}_{3+} e^{-jk(\ell+d)} - Z_c \underline{I}_{3-} e^{jk(\ell+d)} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{I}_{3-} = \underline{I}_{3+} e^{-2j\varphi_3} \quad \text{avec} \quad \varphi_3 \stackrel{\text{not}}{=} k(\ell + d)$$

Nous trouvons ainsi successivement en notant $\varphi_1 = kd$ et $\varphi_2 = k\ell$:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_3 &= Z_c \times \frac{\underline{I}_{3+} e^{-j\varphi_1} - \underline{I}_{3-} e^{j\varphi_1}}{\underline{I}_{3+} e^{-j\varphi_1} + \underline{I}_{3-} e^{j\varphi_1}} = Z_c \times \frac{\underline{I}_{3+} e^{-j\varphi_1} - \underline{I}_{3-} e^{j(\varphi_1-2\varphi_3)}}{\underline{I}_{3+} e^{-j\varphi_1} + \underline{I}_{3-} e^{j(\varphi_1-2\varphi_3)}} \\ &= Z_c \times \frac{\underline{I}_{3+} e^{j(\varphi_3-\varphi_1)} - \underline{I}_{3-} e^{-j(\varphi_3-\varphi_1)}}{\underline{I}_{3+} e^{j(\varphi_3-\varphi_1)} + \underline{I}_{3-} e^{-j(\varphi_3-\varphi_1)}} = Z_c \times \frac{\underline{I}_{3+} e^{-j\varphi_2} - \underline{I}_{3-} e^{j\varphi_2}}{\underline{I}_{3+} e^{-j\varphi_2} + \underline{I}_{3-} e^{j\varphi_2}} = Z_c \times \frac{2j \sin \varphi_2}{2 \cos \varphi_2} \end{aligned}$$

Et ainsi $\underline{Z}_2 = j Z_c \tan \varphi_2$.

→ *Calcul de \underline{Z}_2 .*

Utilisons le même raisonnement.

La condition en bout de câble ($x = \ell$) du milieu deux donne, toujours en notant $\varphi_2 = k\ell$:

$$Z_c \underline{I}_{2+} e^{-jk\ell} - Z_c \underline{I}_{2-} e^{jk\ell} = Z_0 \underline{I}_{2+} e^{-jk\ell} + Z_0 \underline{I}_{2-} e^{jk\ell}$$

Puis $\underline{I}_{2-} = \underline{I}_{2+} \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} e^{-2j\varphi_2}$.

Nous trouvons ainsi successivement en notant $\varphi_1 = kd$ et $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_2 &= Z_c \times \frac{\underline{I}_{2+} e^{-j\varphi_1} - \underline{I}_{2-} e^{j\varphi_1}}{\underline{I}_{2+} e^{-j\varphi_1} + \underline{I}_{2-} e^{j\varphi_1}} = Z_c \times \frac{e^{-j\varphi_1} - \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} e^{j(\varphi_1-2\varphi_2)}}{e^{-j\varphi_1} + \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0} e^{j(\varphi_1-2\varphi_2)}} \\ &= Z_c \times \frac{(Z_c + Z_0) e^{j(\varphi_2-\varphi_1)} - (Z_c - Z_0) e^{-j(\varphi_2-\varphi_1)}}{(Z_c + Z_0) e^{j(\varphi_2-\varphi_1)} + (Z_c - Z_0) e^{-j(\varphi_2-\varphi_1)}} = Z_c \times \frac{Z_c(e^{j\varphi_0} - e^{-j\varphi_0}) + Z_0(e^{j\varphi_0} + e^{-j\varphi_0})}{Z_c(e^{j\varphi_0} + e^{-j\varphi_0}) + Z_0(e^{j\varphi_0} - e^{-j\varphi_0})} \\ &= Z_c \times \frac{Z_c j \sin \varphi_0 + Z_0 \cos \varphi_0}{Z_c \cos \varphi_0 + Z_0 j \sin \varphi_0} \end{aligned}$$

→ *Association*

Nous voulons $\underline{Z}_2 // \underline{Z}_3 = Z_c$, ce qui s'écrit sous la forme : $\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{Z_c}$.

Cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_c j \tan \varphi_2} + \frac{1}{Z_c} \times \frac{Z_c \cos \varphi_0 + Z_0 j \sin \varphi_0}{Z_c j \sin \varphi_0 + Z_0 \cos \varphi_0} &= \frac{1}{Z_c} \\ \frac{Z_c \cos \varphi_0 + Z_0 j \sin \varphi_0}{Z_c j \sin \varphi_0 + Z_0 \cos \varphi_0} &= 1 - \frac{1}{j \tan \varphi_2} = \frac{j \tan \varphi_2 - 1}{j \tan \varphi_2} = \frac{j \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2}{j \sin \varphi_2} \end{aligned}$$

En faisant le produit en croix :

$$\begin{aligned} j Z_c \cos \varphi_0 \sin \varphi_2 - Z_0 \sin \varphi_0 \sin \varphi_2 &= -Z_c \sin \varphi_0 \sin \varphi_2 - Z_c j \sin \varphi_0 \cos \varphi_2 + \dots \\ \dots + Z_0 j \cos \varphi_0 \sin \varphi_2 - Z_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi_2 & \end{aligned}$$

En identifiant parties réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} Z_c \cos \varphi_0 \sin \varphi_2 = Z_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_2 - Z_c \sin \varphi_0 \cos \varphi_2 \\ Z_0 \sin \varphi_0 \sin \varphi_2 = Z_c \sin \varphi_0 \sin \varphi_2 + Z_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi_2 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} Z_c \sin \varphi_0 \cos \varphi_2 = (Z_0 - Z_c) \cos \varphi_0 \sin \varphi_2 \\ Z_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi_2 = (Z_0 - Z_c) \sin \varphi_0 \sin \varphi_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} Z_c \tan \varphi_0 = (Z_0 - Z_c) \tan \varphi_2 \\ Z_0 \frac{1}{\tan \varphi_0} = (Z_0 - Z_c) \tan \varphi_2 \end{cases}$$

En rappelant que $\varphi_2 = k \ell$ et $\varphi_0 = k(\ell - d)$ nous trouvons ainsi les conditions :

$$\boxed{\tan^2(k \ell) = \frac{Z_0 Z_c}{(Z_0 - Z_c)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan^2(k(\ell - d)) = \frac{Z_0}{Z_c}}$$

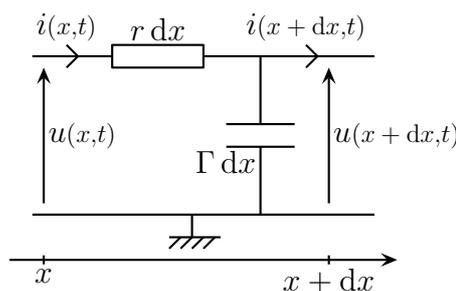
3. Pour les valeurs minimales, nous trouvons :

$$\boxed{\ell = \lambda - \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{\frac{Z_0 Z_c}{(Z_0 - Z_c)^2}} = \underline{8,97754} \text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{d = \ell - \frac{\lambda}{2\pi} \arctan \sqrt{\frac{Z_0}{Z_c}} = \underline{7,28801} \text{ cm}}$$

✿ Exercice 18

Analyse physique. Ici, étant donné que dans chaque élément mésoscopique il n'y a qu'un aspect capacitif et pas d'effet inductif, nous pouvons d'ores et déjà dire qu'il ne pourra pas y avoir de phénomènes propagatifs car il n'y a qu'un seul type de réserve énergétique. De plus comme il y a un aspect résistif, il y aura dissipation de l'énergie. Les grandeurs pertinentes sont, en ce qui concerne l'évolution du milieu, r et Γ .

1. Dessinons l'élément de câble entre x et $x + dx$.



L'additivité des tensions s'écrit : $u(x+dx,t) + r dx i(x,t) = u(x,t)$ ce qui conduit à la première équation de couplage $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -r i(x,t)}$.

La loi des nœuds donne : $i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t)$ ce qui conduit (en faisant apparaître un taux d'accroissement en en faisant tendre dx vers 0) : $\boxed{\frac{\partial i}{\partial x}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)}$.

En dérivant la première équation de couplage par rapport à x et en utilisant la 2^e pour remplacer le $\frac{\partial i}{\partial x}$ apparu, nous arrivons à l'équation $\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2}(x,t) = +r \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)}$.

Il ne s'agit **pas** d'une équation de D'ALEMBERT, mais d'une équation de diffusion (cf. le chapitre 2 de thermodynamique sur la diffusion)

2. Introduisons l'expression $u(x,t) = g(x) f(t)$ dans l'équation de propagation :

$$g''(x) f(t) = r \Gamma f'(t) g(x) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{g''(x)}{g(x)} = r \Gamma \frac{f'(t)}{f(t)}$$

L'égalité de deux fonctions dépendant de deux variables *indépendantes* implique que des deux fonctions sont constantes.

Nous avons ainsi :

$$r \Gamma \frac{f'(t)}{f(t)} = \kappa \quad \rightsquigarrow \quad \frac{df(t)}{dt} = \kappa r \Gamma f(t)$$

Pour que la solution ne soit pas divergente et, donc, ait un sens physique, il faut $\kappa < 0$.

Notons alors $\kappa r \Gamma = -\frac{1}{\tau}$, ce qui donne $f(t) = A e^{-t/\tau}$.

L'autre équation différentielle s'écrit, puisque $\kappa \stackrel{\text{not}}{=} k^2 < 0$:

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} + k^2 g(x) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g(x) = \beta \cos(kx + \varphi)$$

La relation de dispersion, qui relie ici τ à k s'obtient en utilisant la forme de la solution précédemment trouvée $u(x,t) = U_0 e^{-t/\tau} \cos(kx + \varphi)$ dans l'équation de propagation et nous trouvons :

$$\boxed{k^2 = \frac{r \Gamma}{\tau}}$$

► **Câble court-circuité à ses extrémités.** La condition $u(0,t) = 0$ conduit à $\cos \varphi = 0$ d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Cela permet de réécrire la solution sous la forme $u(x,t) = U_0 e^{-t/\tau} \sin(kx)$.

La condition $u(L,t) = 0$ conduit à $\sin(kL) = 0$ d'où $kL = n\pi \stackrel{\text{not}}{=} nk_1$.

La relation de dispersion donne alors $\tau = \frac{r \Gamma L^2}{n^2 \pi^2} = \frac{\tau_1}{n^2}$.

3. La linéarisation du $\sin^3 \xi$ permet de réécrire la condition initiale sous la forme :

$$v(x,0) = 3A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - A \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

omme l'équation différentielle est linéaire, chaque mode propre va évoluer indépendamment et ainsi en notant τ la constante de temps du fondamental :

$$\boxed{v(x,t) = 3A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-t/\tau} - A \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) e^{-9t/\tau}}$$

Nous constatons que le mode fondamental est le plus lent à évoluer et, donc, sera le plus lent à disparaître.