

## Description de fluides en mouvement

---

### ✳ Exercice 1

*Pas de difficulté dans cet exercice dont l'utilité n'est pas tant pour les futurs problèmes que pour comprendre le lien entre vision lagrangienne et vision eulérienne et ce d'autant plus que le champ de vitesse présenté ne correspond pas à un écoulement réel.*

**1.** Remarquons tout d'abord que comme le champ des vitesses est stationnaire, les lignes de courant et les trajectoires sont confondues.

→ *Lignes de courant.* De la relation fondamentale  $d\vec{\ell} = \lambda \vec{v}$  avec  $\lambda$  inconnu, nous en déduisons :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dx}{-kx} = \frac{dy}{ky} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

Nous obtenons une équation différentielle à variables déjà séparées (cool ☺!) qui se résout en :

$$\ln \frac{x}{x_0} = -\ln \frac{y}{y_0} = \ln \frac{y_0}{y} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{xy = x_0 y_0 = C^{\text{te}}}$$

→ *Trajectoires.* Pour la trajectoire, le plus simple c'est d'adopter une vision lagrangienne de manière à se ramener à l'évolution d'un point matériel. Pour cela nous allons d'abord trouver la vitesse en lagrangien.

La vitesse en lagrangien, autrement la vitesse d'une particule de fluide, est la vitesse de la position de l'endroit où elle se trouve (phrase à relire plusieurs fois), ce qui s'écrit « tout simplement » :

$$\tilde{\vec{v}} = \vec{v}(\tilde{x}, \tilde{y}) = -k \tilde{x} \vec{u}_x + k \tilde{y} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \tilde{\vec{v}}(t) = \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \vec{u}_x + \frac{d\tilde{y}(t)}{dt} \vec{u}_y$$

Nous avons ainsi, en projection sur  $\vec{u}_x$  :

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -k \tilde{x} \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{-kt}$$

De même en projection sur  $\vec{u}_y$  :

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = k \tilde{y}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 e^{kt}$$

Nous obtenons ainsi, en éliminant  $t$  entre les deux relations :  $\boxed{\tilde{x}\tilde{y} = C^{\text{te}}}$ , ce qui est bien, comme prévu, la même courbe géométrique que celle obtenue pour les lignes de courant.

**2.** → *Point de vue eulérien.* L'accélération particulière s'écrit :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

Pour la composante sur  $\vec{u}_x$ , comme  $v_x$  ne dépend que de la coordonnée  $x$  :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_x = k^2 x$$

De même, pour la composante sur  $\vec{u}_y$ , comme  $v_y$  ne dépend que de  $y$  :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_y = v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} v_y = k^2 y$$

Enfinement :  $\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = k^2 x \vec{u}_x + k^2 y \vec{u}_y}$

→ *Point de vue lagrangien.* L'accélération s'écrit, avec les expressions de  $\tilde{x}(t)$  et  $\tilde{y}(t)$  :

$$\tilde{\vec{a}} = \frac{d\tilde{\vec{v}}(t)}{dt} = \frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2\tilde{y}(t)}{dt^2} \vec{u}_y = +k^2 x_0 e^{-kt} \vec{u}_x + k^2 x_0 e^{kt} \vec{u}_y$$

Et, en reprenant les expressions de  $\tilde{x}(t)$  et  $\tilde{y}(t)$ , nous voyons alors que :  $\boxed{\tilde{\vec{a}} = k^2 \tilde{x} \vec{u}_x + k^2 \tilde{y} \vec{u}_y}$ , ce qui est bien le résultat trouvé précédemment.

☛ *Remarque.* attention de ne pas se faire « avoir » par la notation  $\tilde{\vec{a}} = \vec{a}$ .

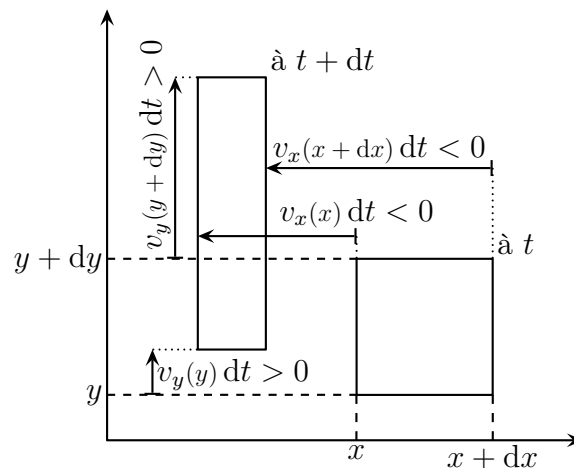
**3.** La particule de fluide ne tourne pas car

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z = \vec{0}$$

Et la particule de fluide ne se dilate pas car

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -k + k = 0$$

Ainsi, si à l'instant  $t$  la surface de la particule de fluide est  $dS = dx dy$ , sa surface en  $t + dt$  vaut :  $dS' = dx' dy'$  où  $dx'$  et  $dy'$  sont ses nouveaux côtés.



Or (cf. figure) la nouvelle largeur n'est autre que la précédente en tenant compte du fait que le côté initialement en  $x$  s'est déplacé de  $v_x(x) dt$  et le côté initialement en  $x + dx$  s'est déplacé de  $v_x(x + dx) dt$ .

Nous avons ainsi :

$$dx' = dx - v_x(x) dt + v_x(x + dx) dt = dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt = dx (1 - k t)$$

Nous trouvons de même  $dy' = dy + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dt = dy (1 + k t)$ .

Finalement, au premier ordre en  $dt$  la surface s'écrit :

$$dS' = dx' dy' = dx dy (1 - k dt) (1 + k dt) = dx dy (1 - k^2 (dt)^2) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{dS = dS'}$$

#### REMARQUE

Il faut faire **TRÈS** attention aux signes !

Dans le cas présent, le fait qu'il y ait  $-v_x(x) dt$  n'a aucun rapport avec le fait que  $v_x(x) dt < 0$ .

Pour mieux comprendre les signes, retrouvez ce résultat pour  $dy'$  et dites-vous que l'algèbrisation est telle que « si c'est vrai dans un cas particulier, c'est vrai dans le cas général ». ☺

## ✿ Exercice 2

Cet exercice pourrait constituer une des parties d'un problème dans lequel, après avoir résolu un problème, c'est-à-dire trouvé le champ de vitesse présenté, il faudrait analyser et interpréter la solution présentée.

1. Cet écoulement est **stationnaire** car il ne dépend pas explicitement du temps.

Comme le champ des vitesses s'écrit sous la forme  $\vec{v} = f(r)\vec{u}_\theta$ , cela ressemble à un champ de vecteurs qui tournent autour de l'axe  $\vec{u}_z$ . Il faut donc s'attendre à avoir une divergence nulle et un rotationnel non nul. Pour le savoir, prenons un bon formulaire et calculons.

Après l'expression de la divergence en cylindrique, nous obtenons :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha r^2 + \beta) + 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$$

La divergence est bien nulle.

Calculons de même le rotationnel.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^2 + \beta) \vec{u}_z = 2\alpha \vec{u}_z \end{aligned}$$

Le rotationnel n'est pas nul et  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} = 2\alpha \vec{u}_z$  : l'écoulement est **tourbillonnaire**.

2. Nous pouvons utiliser les deux expressions de la dérivée particulaire.

→ Expression « normale ».

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = \vec{0} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \vec{u}_\theta \right) \\ &= -\frac{1}{r} \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right)^2 \vec{u}_r \quad \text{car} \quad \frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial r} = -\vec{u}_r \end{aligned}$$

→ Expression « bis ».

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} v^2 + (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left[ \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right)^2 \right] + 2\alpha \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta \\ &= \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \left( \alpha - \frac{\beta}{r^2} \right) \vec{u}_r - 2\alpha \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right) \vec{u}_r \\ &= -\frac{1}{r} \left( \alpha r + \frac{\beta}{r} \right)^2 \vec{u}_r \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien le même résultat.

### ✿ Exercice 3

Cet exercice pourrait constituer une partie d'un problème dont les deux autres seraient d'une part l'obtention de l'équation vérifiée par le rayon de la bulle  $R(t)$  (voire sa résolution) suite à la modélisation de sa croissance (par diffusion notamment) et d'autre part par l'interaction entre les deux phénomènes à savoir croissance de la bulle et mouvement de fluide.

Par exemple si des bulles naissent et disparaissent très vite, cela peut engendrer des ondes de mouvement dans le fluide, c'est-à-dire une onde sonore. C'est exactement ce qui se passe lorsque de l'eau est mise à chauffer. Pas loin de l'ébullition, des micro-bulles apparaissent spontanément mais sans atteindre le rayon critique au-delà duquel la bulle croît sans cesse. La bulle disparaît alors aussitôt et engendre une onde. Et quand cela se produit un grand nombre de fois, il est possible d'entendre l'eau faire du bruit (assez fort) juste avant l'ébullition.

1. La conservation de la masse implique, dans le cas d'un fluide incompressible :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Cela implique que la vitesse est à flux conservatif ou, pour dire les choses de manière technique, que le vecteur densité de courant de volume est à flux conservatif.

Ainsi, pour une sphère quelconque de centre  $O$  et de rayon  $r$  quelconque, nous avons, en calculant le flux massique :

$$\Phi_m = \oiint_{P \in \mathcal{S}_r} \mu \vec{v}(P) \cdot d\vec{S}_P = C^{\text{te}}$$

Or, comme la vitesse  $\vec{v}$  est radiale, nous avons :

$$\Phi_m = \mu \oiint_{P \in \mathcal{S}_r} v(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \mu 4 \pi r^2 v(r,t)$$

Nous pouvons faire le même calcul pour la frontière de la bulle, c'est-à-dire pour  $r = R(t)$ , rayon pour lequel  $v(R,t) = \frac{dR(t)}{dt}$ .

Cela donne, avec la conservation du flux massique :

$$\Phi_m = \mu 4 \pi R(t)^2 v(R,t) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v(r,t) = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR(t)}{dt}}$$

2. En remarquant (avec l'expression du rotationnel en cylindro-polaire) que  $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f(r) \vec{u}_r) = \vec{0}$ , nous avons, compte-tenu de l'expression de la dérivée particulière :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} v^2 + \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \left( R^2 \frac{dR}{dt} \right) \vec{u}_r - \frac{2 R^4}{r^5} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 + \vec{0}$$

$$\text{Et ainsi : } \boxed{\vec{a} = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \left( R^2 \frac{dR}{dt} \right) - \frac{2 R^4}{r^5} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r}$$

### ✿ Exercice 4

Comme toujours dans ce genre d'exercice, une fois que le type de force est choisi, il est nécessaire de vérifier ses hypothèses, à savoir que le nombre de REYNOLDS est tel que l'écoulement soit laminaire (pour utiliser la loi de STOKES) ou turbulent (pour utiliser l'expression avec les coefficients de traînée).

Notons qu'ici, comme l'énoncé parle de coefficient de traînée, l'hypothèse à faire est évidente, ce qui ne dispense pas de la vérifier !

1. Supposons que l'écoulement autour du parachute soit turbulent, autrement que le nombre de REYNOLDS soit grand, pour que la traînée puisse s'écrire  $\vec{F} = -\frac{1}{2} C \mu S v \vec{v}$ .

À ces nombres de REYNOLDS, la poussée d'archimède n'a, alors, plus à être prise en compte.

Le parachutiste n'est donc soumis qu'à son poids et à la traînée et ainsi, quand il a atteint la vitesse limite, les deux forces se compensent, ce qui donne :

$$\vec{v}_\ell = \sqrt{\frac{2mg}{\mu C S}} = \underline{7,3 \text{ m.s}^{-1}} \quad \text{avec} \quad \mu = \mu_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$$

Calculons le nombre de REYNOLDS afin de vérifier l'hypothèse faite.

La viscosité dynamique de l'air vaut  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$ , nous avons donc :

$$\text{Re} = \frac{\mu D v_\ell}{\eta} = 3 \cdot 10^6 > 10^4$$

Le régime est bien turbulent, l'hypothèse est donc vérifiée.

#### REMARQUE

Une vitesse de  $7 \text{ m.s}^{-1}$  correspond à une chute libre d'une hauteur  $d$  telle que  $v_\ell = \sqrt{2gd}$ , soit  $d = 2,7 \text{ m}$  ce qui représente environ un étage.

Ce n'est pas, finalement, si tant un atterrissage en douceur que cela !

Pour les parachutes orientables, de sportifs, il est possible d'atterrir un peu comme un avion, *i.e.* à l'horizontale, ce qui simplifie un peu l'atterrissage.

2. En altitude, la masse volumique de l'air est plus faible : la traînée va donc être plus faible.

Il faut déterminer dans quelle proportion la vitesse augmente.

Pour une première approximation, même si nous savons que le modèle est faux pour la plus basses des couches de l'atmosphère, nous pouvons considérer cette dernière comme étant isotherme : cela permettra de donner un ordre d'idée de la variation de la vitesse limite.

Nous savons que, pour ce modèle, les variations de pression (et donc de masse volumique) sont en  $e^{-z/H}$  avec  $H \simeq 8,0 \text{ km}$ .

Ici, avec une altitude de  $h = 4 \text{ km}$  (notez l'importance donnée aux chiffres significatifs), cela fait une masse volumique de :

$$\mu(h) = \mu_0 e^{-h/H} = \mu_0 e^{-0,5} = 0,60 \mu_0 \quad \rightsquigarrow \quad v'_\ell = \frac{v_\ell}{\sqrt{0,6}} = 1,3 v_\ell$$

Pour une chute libre, verticale, avec un parachute de type militaire, cette vitesse limite commence à devenir dangereuse, même si pas forcément mortellement dangereuse.

Pour un parachute de loisir, la vitesse serait aussi plus élevée, mais avec un atterrissage plus horizontal, cela reste acceptable.

## ✿ Exercice 5

Rappelons qu'un écoulement est dit laminaire pour  $\text{Re} \lesssim 10$  et turbulent pour  $\text{Re} \gtrsim 10^4$ , ces valeurs limites étant fluctuantes (ah ah ah) suivant les situations (la transition laminaire – turbulent ne se faisant pas toujours pour les mêmes valeurs de  $\text{Re}$ .)

1. Pour qu'un écoulement soit laminaire il faut donc que le nombre de REYNOLDS  $\text{Re} = \frac{\mu V L}{\eta}$  soit petit : il est possible alors de jouer sur la viscosité cinématique ( $\eta/\mu$ ), la vitesse caractéristique de l'écoulement  $V$  et la longueur caractéristique de l'écoulement  $L$ .

→ *Compressible ou non.* Pour un écoulement compressible, nous pouvons envisager la propagation des ondes sonores dont la physique repose, justement, sur la compressibilité du fluide.

Pour un écoulement incompressible, un écoulement lent d'un peu d'huile à la sortie d'une bouteille convient très bien.

→ *Visqueux ou non.* Si le fluide est visqueux (huile, miel, ...), un écoulement lent suffit, comme par exemple lorsqu'il s'écoule naturellement d'une bouteille.

Si le fluide est non visqueux (eau liquide, gaz), alors il faut que les vitesses et les longueurs caractéristiques soient petites. Toutefois, il faut que les longueurs caractéristiques ne soient pas petites au point d'être comparable à l'épaisseur de la couche limite : ce n'est pas, alors, que l'écoulement deviendrait turbulent, mais c'est surtout qu'il serait difficile de qualifier cet écoulement de non visqueux. Finalement un écoulement d'eau dans une canalisation pour radiateur convient très bien comme exemple.

→ *Tourbillonnaire ou non.* La tornade est un exemple d'écoulement tourbillonnaire laminaire : les particules de fluides tournent sur elles-mêmes mais les différentes couches ne se mélangent pas les unes les autres.

Non tourbillonnaire : un écoulement simple dans une canalisation de section constante (qu'il y ait ou non des effets de viscosité).

→ *Permanent ou non permanent.* Pour un écoulement permanent, nous pouvons penser à l'écoulement dans un tuyau de section constante (encore ? Oui ! Décidément, quel bel exemple !)

Pour un écoulement non permanent, nous pouvons penser à la partie « régime transitoire » de la vidange d'un réservoir, *i.e.* pendant la très courte durée qui sépare l'ouverture du bouchon d'un état « stable » du jet qui en sort (durée typiquement de l'ordre du dixième de seconde). Mais on peut aussi penser à la houle (cf. exo de cette feuille) : ces « grosses » vagues sur la mer causées par la gravité : les différentes couches ne se mélangent pas, c'est bien laminaire.

**2.** Pour un écoulement soit turbulent, le plus « simple » est de prendre un écoulement et d'en augmenter la vitesse caractéristique.

→ *Compressible ou non.* Si la vitesse caractéristique devient de l'ordre de grandeur du son, l'écoulement est alors compressible, comme c'est le cas de la turbulence derrière les avions de chasse, par exemple.

La turbulence derrière un hors-bord est, quant à lui, bien incompressible (le hors-bord n'avance pas à une vitesse proche de  $1\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  !).

→ *Visqueux ou non.* À l'intérieur même de la turbulence, l'écoulement ne peut être **que** visqueux car c'est précisément cette viscosité qui va faire que chaque particule de fluide entraînera sa plus proche voisine ! Négliger le phénomène de viscosité reviendrait à négliger ce qui est à l'origine même de cette turbulence que nous pouvons voir comme un décollement de la couche limite.

Ceci dit, même dans le cas d'un écoulement turbulent, au loin de l'obstacle, l'écoulement peut être laminaire et les effets dus à la viscosité devenir négligeables.

C'est la raison pour laquelle il est parfois possible de voir certains auteurs calculer un nombre de REYNOLDS *local*. Dans la turbulence, la taille caractéristique de l'évolution devient très petite, ce qui diminue d'autant  $Re$  et, donc, montre que dans cet écoulement, les effets de viscosité commencent à ne plus devenir totalement négligeables.

→ *Tourbillonnaire ou non.* Même chose que précédemment : à l'intérieur de la zone de turbulence, l'écoulement ne peut être que tourbillonnaire. En dehors de cette zone, tout est possible.

→ *Stationnaire ou non.* Tout pareil encore : à l'**intérieur** de la zone de turbulence, l'écoulement ne peut pas être stationnaire. L'écoulement est si complexe qu'il est étudié de manière statistique, un peu comme le chaos est étudié.

## ❁ Exercice 6

*Cet exercice est bien plus intéressant que les autres au niveau de la physique étant donné qu'il concerne*

un champ de vitesse réel qu'est celui de la houle. En général, dans un tel problème, le but est d'abord de retrouver le champ de vitesse. Une fois réalisé vient cet exercice qui consiste à analyser le champ de vitesse et notamment à rechercher lignes de courant et trajectoires.

1. Pour déterminer si l'écoulement est compressible ou non, calculons « bêtement »  $\text{div } \vec{v}$  :

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = +a k \omega e^{kz} \sin(\omega t - kx) - a k \omega e^{kz} \sin(\omega t - kx) = 0$$

L'écoulement est bien **incompressible**.

☞ *Remarque.* la houle étant les vagues à la surface de la mer, il est plus que normal de trouver que l'écoulement associé est incompressible.

Calculons de même le rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \left( -\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \vec{u}_y = \left( a k \omega e^{kz} \cos(\omega t - kx) - a k \omega e^{kz} \cos(\omega t - kx) \right) \vec{u}_y = \vec{0}$$

L'écoulement est bien **irrotationnel**.

Le potentiel vérifie  $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ , d'où :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -a \omega e^{kz} \cos(\omega t - kx) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = +a \omega e^{kz} \sin(\omega t - kx)$$

Nous en déduisons, en primitivant :  $\Phi(x, z, t) = +\frac{a \omega}{k} e^{kz} \sin(\omega t - kx) + f(t)$  où  $f(t)$  est une fonction quelconque.

Comme  $f(t)$  est quelconque et ne change rien à la physique de la situation (puisque la vitesse ne dépend que de la dépendance spatiale de  $\Phi$ , autant la choisir de manière à simplifier les calculs. Ici, cela correspond à prendre  $f(t) = 0$ .

Finalement :  $\Phi(x, z, t) = +\frac{a \omega}{k} e^{kz} \sin(\omega t - kx)$

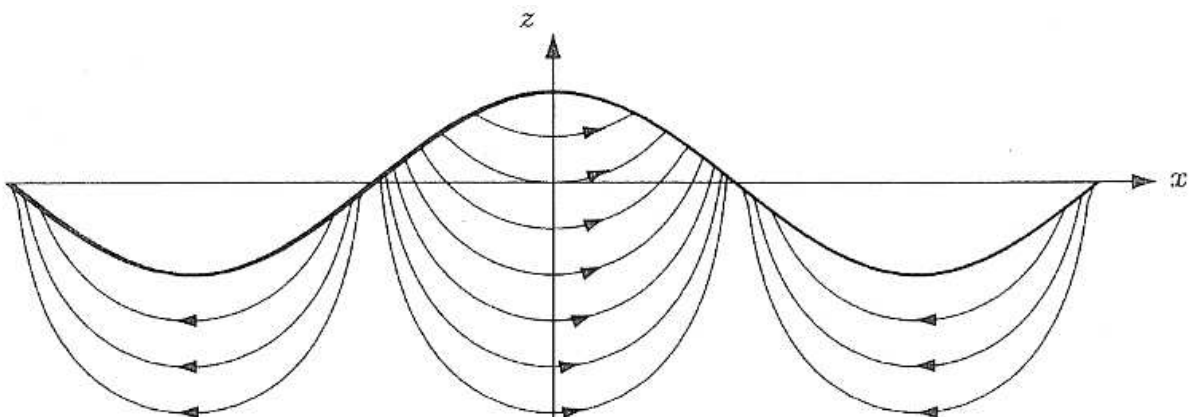
☞ *Remarque.* rappelons que la convention de signe  $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$  correspond à la convention historique et qu'il est fréquent de rencontrer l'autre convention pour le potentiel des vitesses, à savoir  $\vec{v} = +\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ .

2. Les lignes de courant définies par  $d\vec{\ell} = \lambda \vec{v}$  permettent d'arriver à l'équation :

$$\frac{dx}{a \omega e^{kz} \cos(\omega t - kx)} = \frac{dz}{a \omega e^{kz} \sin(\omega t - kx)} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\sin(\omega t - kx)}{\cos(\omega t - kx)}$$

Cette équation s'intègre en  $\left. z = z_0 - \frac{1}{k} \ln \left| \frac{\cos(\omega t - kx)}{\cos(\omega t - kx_0)} \right| \right\}$

Les lignes de courant à l'instant  $t = 0$  ont l'allure représentée ci-dessous.



☞ *Remarque.* la vitesse n'est pas nulle à la surface ce qui signifie que cette dernière se déforme. Eh oui, c'est ça les vagues!

3. Pour se conformer aux notations de l'énoncé, notons  $(X(t), Z(t))$  et non  $(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t))$  la position d'une particule de fluide.

Compte-tenu du champ de vitesse, nous pouvons dire que sa vitesse s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = a \omega e^{kZ(t)} \cos(\omega t - kX(t)) \\ \frac{dZ(t)}{dt} = -a \omega e^{kZ(t)} \sin(\omega t - kX(t)) \end{cases}$$

En supposant que l'amplitude du mouvement est faible, nous pouvons remplacer  $X(t)$  et  $Z(t)$  par la position moyenne  $X_0$  et  $Z_0$  dans l'expression du champ des vitesses.

REMARQUE

Faire l'approximation  $X(t) \simeq X_0$  et  $Z(t) \simeq Z_0$  revient à dire que l'accélération convective est négligeable devant l'accélération locale

Il s'agit en fait de la même approximation que celle utilisée lors de l'établissement de l'équation de propagation des ondes sonores.

Les équations se simplifient donc en :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = a \omega e^{kZ_0} \cos(\omega t - kX_0) \\ \frac{dZ(t)}{dt} = -a \omega e^{kZ_0} \sin(\omega t - kX_0) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} X(t) = X_0 + a e^{kZ_0} [\sin(\omega t - kX_0) + \sin(kZ_0)] \\ Z(t) = Z_0 + a e^{kZ_0} [\cos(\omega t - kX_0) - \cos(kZ_0)] \end{cases}$$

$X_0$  étant la valeur moyenne de  $X(t)$  nous avons

$$X_0 = X(0) + a e^{kZ_0} \sin(kZ_0) \quad \text{et} \quad Z_0 = Z(0) - a e^{kZ_0} \sin(kZ_0)$$

Nous pouvons alors en déduire l'équation paramétrique des trajectoires :

$$\begin{cases} X(t) = X_0 + a e^{kZ_0} \sin(\omega t - kX_0) \\ Z(t) = Z_0 + a e^{kZ_0} \cos(\omega t - kX_0) \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centré sur  $(X_0, Y_0)$  et de rayon  $a e^{kZ_0}$  autrement de rayon d'autant plus petit que la profondeur est grande ( $z < 0$ ).

☞ *Remarque.* l'écoulement n'étant pas permanent, il est normal que les lignes de courants ne soient pas identiques aux trajectoires particulières.

## ✿ Exercice 7

1. Comme l'écoulement est incompressible, nous pouvons écrire la conservation du débit entre une section de la zone ① et une section de la zone ③.

Or la section de l'écoulement près de la plaque est la surface latérale d'un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $e$ . Cela donne ainsi :

$$\pi a^2 v_0 = 2 \pi e r v_r \quad \rightsquigarrow \quad v_r = \frac{a^2}{2 e r} v_0$$



**2.** Déterminer  $A$  et  $B$  revient à chercher la vitesse eulérienne du fluide. Pour cela nous allons utiliser la loi d'incompressibilité du fluide en lui associant les conditions aux limites.

Tout d'abord  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  donne  $2A + B = 0$  et la vitesse en  $z = z_0$  donne  $-v_0 = B z_0$ .

Nous trouvons donc :

$$\boxed{B = -\frac{v_0}{z_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{A = \frac{v_0}{2z_0}}$$

La conservation du débit s'écrit, en  $b$  :

$$2\pi b e v_r(b) = \pi a^2 v_0 \quad \text{avec} \quad v_r(b) = Ab \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{b = a \sqrt{\frac{z_0}{e}}}$$

Le champ des vitesses dans la zone ② s'écrit donc  $\vec{v} = v_0 \frac{r}{2z_0} \vec{u}_r - v_0 \frac{z}{z_0} \vec{u}_z$ .

Les lignes de courant définies par  $d\vec{\ell} = \lambda \vec{v}$  sont solutions de l'équation :

$$\frac{2r_0}{v_0 r} dr = -\frac{z_0}{v_0 z} dz \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dr}{r} = -\frac{dz}{Z z} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{z = z_0 \frac{a^2}{r^2}}$$

Il s'agit de la ligne de courant particulière passant par  $z = z_0$  et  $r = a$ .

**3.** L'écoulement étant parfait, permanent et incompressible, nous pouvons utiliser la relation de BERNOULLI sur une ligne de courant.

Nous allons la choisir ici horizontale joignant un point à la distance  $r$  et un point à la distance  $R$  de l'axe.

La pression  $P_3(r)$  dans la zone ③ est alors donnée par :

$$P_3(r) = P_0 + \frac{\mu}{2} v^2(R) - \frac{\mu}{2} v^2(r) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{P_3(r) = P_0 + \frac{\mu v_0^2 a^4}{8 e^2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)}$$

☞ *Remarque.*  $P(R) = P_0$  est dû au fait qu'il s'agit de la pression à l'intérieur d'un jet libre.

**4.** Procédons de même sur une ligne de courant située en  $z = 0$  allant du point  $M_1(r,0)$  au point  $M_2(R,0)$ .

La pression  $P_2(r,0)$  au niveau du plan  $z = 0$  dans la zone ② est donnée par :

$$P_2(r,0) = P_0 + \frac{\mu}{2} v^2(R) - \frac{\mu}{2} v^2(r,0) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{P_2(r,0) = P_0 + \frac{\mu v_0^2}{8} \left( \left( \frac{a^2}{e R} \right)^2 - \left( \frac{r}{z_0} \right)^2 \right)}$$

☞ *Remarque.* il est nécessaire de s'assurer que la ligne  $z = 0$  est une ligne de courant. C'est bien le cas si on regarde le champ des vitesses et notamment le fait que la vitesse verticale est nulle en  $z = 0$ .

**5.** La résultante des forces de pression exercées par le fluide sur la disque est :

$$\vec{F} = \int_0^R -P(r,0) 2\pi r dr \vec{u}_z \stackrel{\text{not}}{=} F \vec{u}_z$$

Et ainsi, compte tenu de la relation  $b = a \sqrt{\frac{z_0}{e}}$  trouvée en **2.**

$$\begin{aligned}
F &= -P_0 \pi R^2 - \int_0^b \frac{\mu v_0^2}{8} \left( \left( \frac{a^2}{eR} \right)^2 - \left( \frac{r}{z_0} \right)^2 \right) 2\pi r \, dr + \int_b^R \frac{\mu v_0^2 a^4}{8e^2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) 2\pi r \, dr \\
&= -P_0 \pi R^2 - \frac{\mu v_0^2}{8} \pi \left( \frac{a^4}{e^2} - \frac{b^4}{2z_0^2} + \frac{2a^4}{e^2} \ln \left( \frac{R}{b} \right) \right) \\
&= -P_0 \pi R^2 + \frac{\mu v_0^2}{16} \pi \frac{a^4}{e^2} \left( 1 - 4 \ln \left( \frac{R}{b} \right) \right)
\end{aligned}$$

Sur l'autre face, la pression  $P_0$  s'exerce ce qui annule le premier terme. Il reste :

$$\vec{F}_d = + \frac{\mu v_0^2}{16} \pi \frac{a^4}{e^2} \left( 1 - 4 \ln \left( \frac{R}{b} \right) \right) \vec{u}_z$$

6. L'application numérique donne  $F = 0,128$  N, dirigée dans le sens des  $z$  positif. C'est dû au fait que la pression au dessus de la plaque est, à certains endroits inférieure à  $P_0$ . À l'équilibre  $mg = F$  soit  $\sigma = \frac{F}{\pi R^2 g} = 0,184$  kg.m<sup>-2</sup> : c'est léger, mais réalisable.

### \* Exercice 8

1. Voir cours, l'exemple sur l'écoulement tourbillonnaire, la tornade. Pour  $r > a$ , nous avons trouvé :

$$\vec{v}(r) = \gamma \frac{a^2}{2r} \vec{u}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Cet écoulement est analogue au champ magnétique créé par un fil cylindrique de rayon  $a$ .

2. (a) Pour une source  $S$ , le débit volumique par unité de longueur s'écrit  $D = 2\pi r_S v_S(r_S) = C^{\text{te}}$  car le fluide est incompressible.

Nous en déduisons  $\vec{v}_S(M) = \frac{B}{2\pi r_S} \vec{u}_{r,S}$ .

D'après la convention choisie pour le potentiel des vitesses, ce dernier vérifie l'équation :

$$\frac{d\varphi_S}{dr_S} = \frac{D}{2\pi r_S} \quad \rightsquigarrow \quad \varphi_S = \frac{D}{2\pi} \ln \left( \frac{r_S}{r_0} \right) \quad \text{où} \quad r_0 = C^{\text{te}}$$

2. (b) Pour le puit, tout se passe de la même manière à condition de remplacer  $D$  par  $-D$  ce qui donne :

$$\vec{v}_P(M) = -\frac{D}{2\pi r_P} \vec{u}_{r,P} \quad \text{et} \quad \varphi_P = -\frac{D}{2\pi} \ln \left( \frac{r_P}{r_1} \right) \quad \text{où} \quad r_1 = C^{\text{te}}$$

2. (c) En sommant les deux potentiels en prenant  $r_1 = r_0$ , on obtient :

$$\varphi(M) = \varphi_S(M) + \varphi_P(M) = \frac{D}{2\pi} \ln \frac{r_S}{r_P}$$

Avec  $r_S^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$  et  $r_P^2 = r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta$  on obtient :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{r_S}{r_P} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}{r^2 + d^2 + 2rd \cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln \left( 1 - \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

en développant au premier ordre en  $\frac{d}{r}$  :

$$= -\frac{1}{2} \left( \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{2d}{r} \cos \theta \right) = -\frac{2d}{r} \cos \theta$$

Finalement, au premier ordre en  $\frac{d}{r}$ , nous obtenons bien la forme voulue :

$$\boxed{\varphi(M) = -\frac{H}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H = 2dD}$$

Pour avoir le champ des vitesses, il suffit d'utiliser :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\vec{v}(M) = \frac{H}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \vec{u}_r + \frac{H}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{u}_\theta}$$

**2. (d)** Le champ des vitesses créé par une source ou un point tel que présenté dans cette question est analogue au champ électrostatique créé par un fil infini.

Ainsi, le champ des vitesses créé par l'association du doublet  $S$  et  $P$  est analogue au champ électrostatique créé par deux fil chargés linéairement de charge opposée  $\lambda$  et  $-\lambda$ .

☞ *Remarque.* en toute rigueur, étant donné la convention de signe choisie ici pour le potentiel des vitesses, le champ des vitesses est en fait analogue à l'opposé du champ électrostatique.

### ✿ Exercice 9

**1.** Le champ des vitesses est la superposition de trois champs : le champ uniforme, celui du doublet et celui du tourbillon.

Il s'écrit donc :

$$\vec{v} = U (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) + \frac{H}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \vec{u}_r + \frac{H}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{u}_\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

En  $r = R$ , les conditions naturelles aux limites imposent que la vitesse soit tangente au cylindre, *i.e.* que  $\vec{v}(R, \theta) \cdot \vec{u}_r = 0$ .

Nous obtenons alors la condition :

$$U \cos \theta + \frac{H}{2\pi R^2} \cos \theta = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{H = -2\pi R^2 U}$$

**2. (a)** L'écoulement est incompressible donc obéit à l'équation locale  $\text{div } \vec{v} = 0$ .

Dans ces conditions nous savons que, comme en électromagnétisme, en dehors des sources la norme du champ est d'autant plus grande que les lignes de champ sont resserrées.

Ici, nous voyons que  $v > U$  pour  $y > R$  et  $v < U$  pour  $y < R$ .

2. (b) Le fluide étant entraîné par la rotation du cylindre, la vitesse de rotation est dans le même sens que  $\vec{U}$  pour  $y > R$ , ce qui signifie que le cylindre tourne dans le sens horaire.

Avec la convention d'algébrisation, quand le fluide tourne (ou est entraîné) dans le sens horaire, cela correspond à  $(\Gamma < 0)$  (cf. exemple du tourbillon et la main droite donnant le sens de la vitesse).

2. (c) Sur la carte des lignes de champ, il existe deux zones bien distinctes délimitées par deux lignes de courant arrivant sur le cylindre pour lesquelles le fluide passe soit au-dessus soit en-dessous du cylindre.

Ces deux lignes de courant se terminent par un point d'arrêt. Graphiquement, nous lisons  $(\theta_a = 30^\circ)$ .

Comme aux points d'arrêt la vitesse est nulle, nous avons  $(|\Gamma| = 4\pi R U \sin \theta_a)$ .

3. Si l'air est considéré comme un fluide parfait, il n'y a pas de frottements entre le cylindre et l'air et la rotation du cylindre ne peut mettre l'air en mouvement.

En fait cela les frottements existent mais la zone dans laquelle leurs effets se font sentir (la couche limite) est de taille négligeable devant la taille caractéristique du cylindre.

4. Comme l'écoulement est parfait, incompressible et en régime stationnaire, nous pouvons appliquer le théorème de BERNOULLI sur une ligne de courant entre un point éloigné (pression  $P_0$ , vitesse  $U$ ) et un point à la surface du cylindre. Cela donne :

$$P(\theta) = P_0 + \frac{\rho}{2} U^2 - \frac{\rho}{2} v^2(R, \theta) \quad \rightsquigarrow \quad \left( P(\theta) = P_0 + \frac{\rho}{2} U^2 - \frac{\rho}{2} \left( -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right)$$

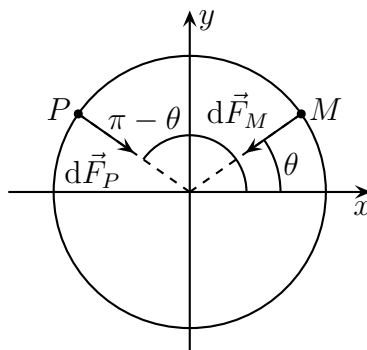
Soit  $M(\theta)$  un point de la surface du cylindre et  $P(\pi - \theta)$  son symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ .

Les pressions en  $M$  et  $P$  sont identiques, les forces élémentaire  $d\vec{F}_M$  et  $d\vec{F}_P$  sont donc symétriques par rapport à l'axe  $Oy$ .

La composante  $F_x$  de la résultat des forces de pression est donc nulle.

De même, les forces élémentaires étant colinéaires à  $\vec{u}_r$ , leurs moments élémentaires en  $O$  sont nuls.

Le moment des forces de pression par rapport à l'axe  $Oz$  est donc nul également.



5. Voir question précédente.

6. La projection sur  $Oy$  de la force élémentaire de pression est :

$$\begin{aligned} dF_y &= -P(\theta) R d\theta dz \sin \theta \\ &= - \left( P_0 + \frac{\rho}{2} U^2 - 2\rho U^2 \sin^2 \theta + \rho \frac{\Gamma U}{\pi R} \sin \theta - \rho \frac{\Gamma^2}{8\pi R^2} \right) \sin \theta R d\theta dz \end{aligned}$$

La résultante des forces pressantes est la sommation de  $dF_y$  sur  $z$  variant entre 0 et  $h$  et pour  $\theta$  variant entre 0 et  $2\pi$ .

Connaissant les résultats sur l'intégrale de fonctions trigonométriques, seul le terme en  $\sin^2 \theta$  va avoir une contribution non nulle et :

$$F_y = -\rho \frac{\Gamma U}{\pi R} R h \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\rho \Gamma h U$$

Avec l'expression de  $|\Gamma|$  établie précédemment, on obtient  $\vec{F} = 4 \rho h R U^2 \pi \sin \theta_a \vec{u}_y$ .

Cette force est bien dirigée dans le sens positif de l'axe  $Oy$ , c'est la portance.

L'application numérique donne  $F = 5,5 \cdot 10^3$  N.

7. Si on tient compte de la viscosité de l'air, le nombre de REYNOLDS de l'écoulement est  $10^6$ , ce qui en fait un écoulement turbulent : il apparaît « derrière » le cylindre un sillage qui va être à l'origine d'une traînée, ce qui n'était pas le cas jusque là.

Le paradoxe est que est que les forces de viscosités ont été négligées alors que ce sont elles qui sont pourtant directement à l'origine de la portance.

De plus comme nous pouvons le voir, cet écoulement se fait sans traînée : c'est le paradoxe connu sous le nom de paradoxe de d'ALEMBERT.