Mouvements de fluides

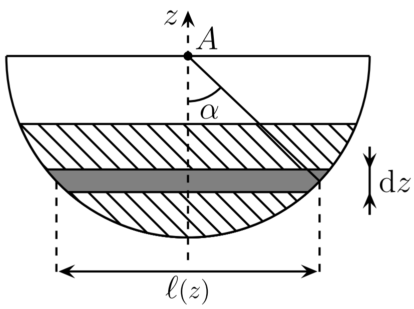
Exercice 1

1. *Analyse physique. Il s'agit ici d'un équilibre. Le cylindre va subir, en plus de son poids les forces exercées par le liquide. Comme tout est immobile, nous pouvons utiliser les résultats de la statique des fluides. Les grandeurs pertinentes sont R, ρ*

*Analyse technique. Pour déterminer la résulante des forces de pression exercées par le liquide, nous pouvons soit faire le calcul « brut » soit utiliser le théorème d'*ARCHIMÈDE. *Ici bien que le corps ne soit pas totalement immergé, il est flottant ce qui nous autorise à utiliser* ARCHIMÈDE, *ce qui est d'autant plus agréable qu'il est toujours plus facile de calculer une somme de nombres (pour trouver un volume) qu'une somme de vecteurs (pour trouver une force).*

À l'équilibre, le poids est compensé par la poussée d'Archimède dont la norme vaut $\rho\, V_{\text{immergé}}\, g$.

Pour déterminer le volume immergé, hachuré sur la figure ci-dessous, nous allons le découper en tranches horizontales de volume dV où $\mathrm{d}V = h\,\ell(z)\,\mathrm{d}z$ est le volume grisé, h étant la longueur du demi-cylindre.



Géométriquement, nous avons $\ell(z) = 2\,R\,\sin\alpha$.

Le volume s'écrit donc : $V = \displaystyle\int h\,2\,R\,\sin\alpha\,\mathrm{d}z$.

Le problème pour calculer c'est que α dépend de z et réciproquement. Nous allons procéder à un changement de variable : nous allons tout écrire en fonction de α.

Nous avons ainsi :

$$z = -R\,\cos\alpha \quad \leadsto \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\alpha} = R\,\sin\alpha \quad \leadsto \quad \mathrm{d}z = R\,\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

En remplaçant dans l'intégrale **et en mettant « enfin » les bornes**, nous arrivons, en notant α_0 l'angle correspondant à une cote de $\dfrac{R}{2}$ à :

$$V_{\text{imm}} = \int_0^{\alpha_0} 2\,h\,R^2\,\sin^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha = h\,R^2\left(\alpha_0 - \frac{\sin(2\,\alpha_0)}{2}\right)$$

Nous en déduisons, puisque $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{3}$, que $\boxed{m = \rho\,h\,R^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)}$.

2. *Analyse physique. Il s'agit ici d'un problème mécanique. Le mouvement sera uniquement vertical ou, du moins, nous nous contenterons d'étudier uniquement les oscillations verticales. Le problème pour calculer la poussée d'*ARCHIMÈDE *c'est que le volume immergé dépend du mouvement, autrement dit la force n'est pas constante.*

Lors de petits mouvements, nous savons que nous pouvons toujours considérer le théorème d'ARCHIMÈDE est valide.

La deuxième loi de NEWTON s'écrit alors, en projection sur (Oz) vertical vers le haut, en notant $z(t)$ la cote du point A (cf. figure)

$$m\,\ddot{z}(t) = -m\,g + \rho\,g\,V_{\text{imm}}(t)$$

Pour pouvoir trouver l'équation différentielle complète, il faut exprimer le volume V_{imm} en fonction de la grandeur de description, à savoir ici z.

Notons $\theta(t)$ l'angle défini comme α repérant la position de la surface de l'eau sur la demi-sphère, nous avons $z(t) = R\,\cos(\theta(t))$ (l'origine des cotes est choisie à la surface de l'eau).

Cela donne :

$$\dot{z}(t) = -R\,\dot{\theta}(t)\,\sin(\theta(t)) \quad \text{et} \quad \ddot{z}(t) = R\left[-\ddot{\theta}\,(t)\sin(\theta(t)) - \dot{\theta}^2(t)\,\cos(\theta(t))\right]$$

En écrivant que $\theta(t) = \dfrac{\pi}{3} + \varepsilon(t)$, nous avons, au premier ordre en $\varepsilon(t)$: $\ddot{z}(t) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,R\,\ddot{\varepsilon}(t)$.

Nous avons aussi (cf. question précédente) :

$$V_{\text{imm}}(t) = h\,R^2\,\left(\theta(t) - \frac{\sin(2\,\theta(t))}{2}\right)$$

Cette expression se réécrit au premier ordre en $\varepsilon(t)$:

$$\rho V_{\text{imm}}(t) = \rho\,h\,R^3\,\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin(2\,\pi/3)}{2}\right) + \rho\,h\,R^2\,\left(\varepsilon(t) - \varepsilon(t)\,\cos\frac{2\pi}{3}\right) = m\,g + \frac{3\,\rho\,h\,R^2}{2}\,\varepsilon(t)$$

En rassemblant les résultats, nous obtenons :

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \left(\frac{\sqrt{3}\,\rho\,h\,R\,g}{m}\right)\,\varepsilon(t) = 0$$

Il s'agit bien là de l'équation d'un oscillateur harmonique $\boxed{\ddot{\varepsilon}(t) + \Omega^2\,\varepsilon(t) = 0}$ de pulsation propre $\Omega = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}\,\rho\,h\,R\,g}{m}}$ et de période $\boxed{T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{m}{\sqrt{3}\,\rho\,h\,R\,g}}}$.

❀ Exercice 2

*Analyse physique. Il s'agit ici de l'étude d'un ballon sonde. Ce ballon monte grâce à la poussée d'*ARCHIMÈDE *: occupant un grand volume grâce à une « faible » masse d'Hélium, le poids du ballon et de tout ce qui doit monter sera inférieure à la poussée d'*ARCHIMÈDE*, c'est-à-dire au poids de l'air remplacé. Dans ces conditions, nous utiliserons directement le théorème d'*ARCHIMÈDE *pour déterminer la résulante des forces pressantes.*

Les grandeurs pertinentes vont être ici toutes les grandeurs de description de l'atmosphère P_0, T_0, A, α *et* M *(masse molaire) ainsi que toutes les grandeurs de description du ballon sonde* m, D, m_{H}, ...

$\boxed{1.}$ L'air est considéré comme un gaz parfait, il obéit donc à l'équation d'état « $P\,V = n\,R\,T$ ».

En considérant une particule de fluide, nous pouvons écrire la masse volumique sous la forme $\rho = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \dfrac{M\,\mathrm{d}n}{\mathrm{d}V}$ avec M masse molaire de l'air et $\mathrm{d}V$ le volume de la particule. Cela donne :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{R\,T}\frac{R\,T_0}{P_0} = (1 - A\,z)^{\alpha-1} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\rho(z) = \rho_0\,(1 - A\,z)^{\alpha-1}}$$

$\boxed{2.}$ Le ballon sonde subit deux forces : son poids et la poussée d'ARCHIMÈDE.

Son poids se décompose en deux termes : le poids des accessoires m et le poids de l'hydrogène $\rho' V = \dfrac{\pi\,D^3}{6}$.

Comme le volume V et la quantité de matière d'hydrogène sont constants, la masse volumique de l'hydrogène est constant : ρ'_0.

La poussée d'ARCHIMÈDE vaut $\vec{\Pi} = -\rho\,V\,\vec{g}$.

En projection de ces trois forces sur l'axe vertical ascendant, nous arrivons à :

$$\boxed{F_z = \left\{\frac{\pi\,D^3}{6}\,\left[\rho_0\,(1 - A\,z)^{\alpha-1} - \rho'_0\right] - m\right\}\,g}$$

$\boxed{2.\ (a)}$ Tant que $F_z \geqslant 0$, le ballon sonde peut faire son office : élever une charge dans les air.

La masse limite est donc obtenue pour $F_z = 0$ pour $z = 0$. Cela donne :

$$\boxed{M_0 = \frac{\pi D^3(\rho_0 - \rho'_0)}{6} = \underline{37},9000 \text{ kg}}$$

$\boxed{2.\ (b)}$ Nous avons de même :

$$\boxed{M_1 = \frac{\pi\,D^3}{6}\,\left[\rho_0\,(1 - A\,z_1)^{\alpha-1} - \rho'_0\right] = \underline{9{,}0}3339 \text{ kg}}$$

REMARQUE

Rappelons que la poussée d'ARCHIMÈDE n'est autre que la résultante des forces pressantes qui s'exercent sur la ballon.

Or pour que cette résultante soit non nulle, il est **impératif** de considérer que la pression atmosphérique varie sur la distance D. mais pour calculer le poids de l'air remplacé, nous avons dit que la masse volumique (et donc la pression) était constante …

Cet étrange paradoxe n'en est pas un car si pour la résultante des forces il faut tenir compte des variations de pression, c'est parce que des forces sont parfois vers le haut et parfois vers le bas ce qui fait intervenir des **différences** de pression.

En revanche, pour calculer le poids total de l'air remplacé, nous n'avons fait « que » additionner des poids élémentaires.

$\boxed{3.\ (a)}$ Comme l'hydrogène (en fait le dihydrogène) est considéré comme un gaz parfait, il obéit à l'équation d'état : « $P\,V = n\,R\,T$ ».

Comme $V = \text{C}^{\text{te}}$ parce que le ballon est indéformable et que $n = \text{C}^{\text{te}}$ parce que la quantité de matière d'hydrogène dans le ballon n'est pas modifiée, nous avons $\dfrac{P_{\text{hyd}}}{P'_0} = \dfrac{T}{T_0}$.

Enfin comme l'hydrogène est constamment en équilibre thermique avec l'extérieur, cela donne $\boxed{\Delta P = P_{\text{hyd}} - P = P'_0\,(1 - A\,z) - P_0\,(1 - A\,z)^{\alpha}}$.

$\boxed{3.\ (b)}$ Le principe de fonctionnement de ce ballon, nous permet d'écrire $P' - P = \Delta P_0 = \text{C}^{\text{te}}$.

Comme $P' = \rho'\dfrac{R\,T}{M}$, nous avons :

$$\frac{P'}{P_0} = \frac{\rho'\,T}{\rho'_0\,T_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad P' = P'_0\,\frac{\rho'}{\rho'_0}\,(1 - A\,z)$$

Ainsi : $\Delta P_0 = P'_0\,\dfrac{\rho'}{\rho'_0}\,(1 - A\,z) - P_0\,(1 - A\,z)^\alpha$ ce qui donne (sans oublier que $\Delta P_0 = P'_0 - P_0$) :

$$\boxed{\rho' = \rho'_0\,\frac{P_0\,(1 - A\,z)^\alpha + \Delta P_0}{P_0 + \Delta P_0} \times \frac{1}{1 - A\,z}}$$

$\boxed{\text{3. (c)}}$ Pour le décollage, la masse est la même.

À 11 km, nous avons $\boxed{M_2 = \dfrac{\pi D^3}{6}\,\left[\rho_0\,(1 - A\,z_1)^{\alpha-1} - \rho'(z_1)\right] = \underline{1}0{,}9190\text{ kg}}$.

$\boxed{\text{3. (d)}}$ Comme les deux ballons sonde étudiés ont le même volume, ils subissent la même poussée d'Archimède.

Si, toutes choses étant égales par ailleurs, l'un est capable de transporter une masse δm supplémentaire, c'est qu'il a évacué, précisément, une masse $\delta m = M_2 - M_1 = \underline{1}{,}8856$ kg d'hydrogène sur les 3,1 kg embarqués au départ.

Remarque. même en larguant tout le « lest » que constitue l'hydrogène (ce qui n'est pas possible vu que, pour que l'hydrogène s'échappe du ballon, il faut que la pression soit à l'intérieur soit supérieure à la pression atmosphérique locale), le ballon sonde pourra élever, au grand maximum, 12 kg jusqu'à l'altitude z_1.

Exercice 3

Il s'agit d'un exercice permettant de vérifier si le cours est bien connu et maitrisé.

$\boxed{\text{1. (a)}}$ L'onde est dite plane car les points tels que $p(M,t) = \text{C}^{\text{te}}$ à $t = t_0$ fixé forment des plans.

$\boxed{\text{1. (b)}}$ L'équation est valable dans le cadre de l'approximation acoustique, à savoir que l'onde représente une perturbation au premier ordre de l'état de repos :

- ➜ la surpression est faible devant la pression au repos
- ➜ l'xcès de masse volumique est très faible devant la masse volumique
- ➜ la vitesse des particulaires de fluide est faible devant la célérité des ondes

$\boxed{\text{2. (a)}}$ c n'est autre que la célérité des ondes sonores.

Elle intervient dans l'écriture des solution en OPP$_\oplus$ $f(x - c\,t)$ et en OPP$\ominus$ $f(x + c\,t)$.

$\boxed{\text{2. (b)}}$ Ici le coefficient γ intervient car l'évolution adiabatique est pour les particules de fluide.

Comme le fluide est parfait, la propagation des ondes sonores est aussi réversible ce qui fait, finalement, une évolution isentropique.

Il n'est donc pas surprenant que γ intervienne puisqu'il est lié à la loi dite de Laplace concernant l'évolution isentropique d'un GP : $P\,V^\gamma = \text{C}^{\text{te}}$.

$\boxed{\text{2. (c)}}$ Avec l'équation d'état des GP : $\boxed{c = \sqrt{\gamma\,\dfrac{R\,T}{M}}}$

$\boxed{\text{2. (d)}}$ À 18 °C, nous trouvons $\boxed{c = 342\text{ m.s}^{-1}}$.

$\boxed{\text{3.}}$ Cette équation provient du PFD appliqué à une particule de fluide, qui s'appelle l'équation d'Euler quand elle est écrite directement en mécanique des fluides parfaits.

$\boxed{\text{4. (a)}}$ Le premier terme est une OPP dans le sens des x décroissants, le second est une OPP dans le sens des x croissants.

$\boxed{\text{4. (b)}}$ En dérivant l'expression de $\underline{p}(x,t)$ par rapport à x et en primitivant par rapport à t nous trouvons, en ne prenant en compte que les termes propagatifs :

$$\boxed{\underline{u}(x,t) = \frac{1}{\rho_0\, c}\Big(-\underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\, t+k\,x)} + \underline{p_2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\, t-k\,x)}\Big)}$$

Exercice 4

$\boxed{1.}$ La surpression et l'amplitude de déplacement sont reliées par $p_{\text{eff}} = \mu_0\, c\, \omega\, \xi_{\text{eff}}$ donc l'onde de pulsation double correspond à une surpression deux fois plus grande.

Son intensité sonore est quatre fois plus importante et, en décibels, cela correspond à 6 dB supplémentaires.

$\boxed{2.}$ L'intensité sonore est augmentée de $10\,\log(3^2) = 9{,}5$ dB quand on triple l'amplitude de l'onde.

$\boxed{3.}$ Nous avons vu que $p_{\text{eff}} = \mu_0\, c\, \omega\, \xi_{\text{eff}}$ donc ici $p_{\text{eff}} = 8$ Pa (en prenant $\mu_0 = 1{,}3$ kg.m^{-3} et $c = 340$ m.s^{-1}).

L'intensité sonore correspondante est de 112 dB, légèrement inférieure au seuil de douleur de 120 dB.

$\boxed{4.}$ Un seul pétard émet une intensité sonore inférieure de $10\,\log 2 = 3$ dB à celle qu'émettent deux pétards, donc une intensité de 87 dB.

REMARQUE

Il s'agit ici d'une variante de « l'énigme » bien connue : « *Un nénuphar double de taille chaque jour, il met 30 jours à recouvrir la surface d'un étang, combien de jours met-il à en recouvrir la moitié ?* ». La réponse est bien sûr de 29 jours et non de 15 jours comme il n'est pas rare de l'entendre.

Il faut néanmoins remarquer qu'une hypothèse fondamentale a été faite : celle de la sommation des intensités sonores.

Comme pour les intensité lumineuse, cette sommation brutale provient de l'incohérence des sources, ce qui implique qu'il n'y a pas d'interférences.

Avec des sources cohérentes (par exemple des diapasons), il est possible de mettre en évidence des quadruplements d'intensités sonores.

De même certains casques anti-bruits dits « actifs » créeent, grâce à un système électronique embarqué, un son qui en se superposant (*i.e.* en interférant) avec le son ambiant le détruit en grande partie (interférence destructive) de sorte que l'utilisateur n'entendent que peu le bruit ambiant.

Exercice 5

Comme pour l'exercice précédent, nul besoin ici de tout redémontrer en détail : nous allons surtout utiliser le fait qu'un milieu non dissipatif résone quand la fréquence s'excitation égale l'une de ses fréquence propres.

Nous devons tout d'abord trouver les fréquences propres du milieu et, pour cela, bien étudier les conditions aux limites.

$\boxed{1.}$ Il s'agit d'un tuyau sonore avec un nœud de pression à l'extrémité ouverte (la pression est continue et le tuyau donne sur l'atmosphère) et un nœud de vitesse à l'autre (extrémité fixe) ce qui correspond, pour une onde stationnaire à un ventre de pression.

La longueur d'onde du fondamental est donc la longueur minimale permettant d'assurer un ventre et un nœud aux deux extrémités, soit $L = \dfrac{\lambda}{4}$.

Le fondamental correspond donc à une fréquence $N_0 = \dfrac{c}{4\,L}$ avec $c = \sqrt{\gamma\,\dfrac{P_0}{\mu_0}} = 341$ m.s^{-1}.

L'application numérique donne $\boxed{N_0 = 85 \text{ Hz}}$.

La première harmonique correspond à :

$$L = \frac{3\,\lambda'}{4} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{N_1 = 3\,N_0 = 255\text{ Hz}}$$

2. Avec une méthode analogue à celle de l'exercice 5, nous trouvons que les amplitudes maximales demandées sont :

- ➜ pour la vitesse : $\boxed{u_0 = 2\,\pi\,N_1\,a_0 = 0{,}54\text{ m.s}^{-1}}$
- ➜ pour la surpression : $\boxed{p_0 = \mu_0\,c\,u_0 = 220\text{ Pa}}$
- ➜ pour les écarts de température : $\boxed{\Delta T = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\,\dfrac{T_0}{P_0}\,p_0 = 0{,}18\text{ K}}$

Exercice 6

Ici, toutes les questions sont basées sur l'expression de l'onde en pression régnant dans le tube. En effet, une fois cette expression connue, il est possible via *la loi de fonctionnement du microphone de retrouver l'expression de la tension délivrée V puis, dans la dernière question, de trouver l'expression de l'onde en vitesse.*

Pour trouver l'onde en pression, pas de difficulté méthodologique : il faut d'abord écrire la forme générale puis ajuster les coefficients inconnus à l'aide des conditions aux limites.

1. *Ici comme aucune des deux extrémités ne possède un véritable nœud d'onde de vitesse ou d'onde de tension, nous ne sommes pas certains qu'il y ait une onde stationnaire donc nous devons prendre une expression plus générale pour l'onde en pression à savoir la forme en OPPM.*

Écrivons la surpression sous la forme :

$$\underline{p}(x,t) = \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t+k\,x)} + \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t-k\,x)}$$

Or nous savons que la réflexion en $x=0$ est telle que $\underline{r} = \dfrac{\underline{p_2}}{\underline{p_1}}$, ce qui implique $\underline{p_2} = \underline{r}\,\underline{p_1}$ et donc :

$$\underline{p}(x,t) = \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t+k\,x)}\left(1+\underline{r}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,k\,x}\right)$$

Nous savons que la tension délivrée par le microphone est proportionnelle à la valeur moyenne de $p(x,t)$, or :

$$\left\langle p^2(x,t)\right\rangle = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(\underline{p}(x,t)\,\underline{p}^\star(x,t)\right) = \frac{1}{2}\,|\underline{p}(x,t)|^2$$

La tension délivrée par le microphone est donc de la forme :

$$V = \kappa\,\sqrt{\frac{1}{2}\,|p_1|^2\,\left(1+r^2+2\,r\,\cos(2\,k\,x-\varphi)\right)} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{V = K\,\sqrt{1+r^2+2\,r\,\cos(2\,k\,x-\varphi)}}$$

Ce qui est bien l'expression attendue avec $\boxed{K = \dfrac{\kappa\,|\underline{p_1}|}{\sqrt{2}}}$.

2. (a) À partir de l'expression de la tension, nous avons immédiatement :

$$V_{\text{max}} = K\,(1+r) \qquad \text{et} \qquad V_{\text{min}} = K\,(1-r) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{r = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

2. (b) Le premier minimum correspond ainsi à $2\,k\,x-\varphi = \pi$ soit $\boxed{\varphi = \pi\,\left(\dfrac{4\,x_1}{\lambda}-1\right)}$.

2. (c) Les applications numériques donnent :

f en Hz	460	750	845	1016	1042	1185	1400
r	0,639	0,662	0,669	0,670	0,678	0,663	0,669
φ	$0{,}43\,\pi$	$0{,}16\,\pi$	$0{,}05\,\pi$	$-0{,}05\,\pi$	$-0{,}11\,\pi$	$-0{,}24\,\pi$	$-0{,}39\,\pi$

Nous nous apercevons que le module du coefficient de réflexion dépend peu de la fréquence alors que le déphasage diminue lorsque la fréquence augmente.

3. (a) Comme dans l'exercice précédent, la vitesse s'écrit :

$$\underline{u}(x,t) = \frac{1}{\rho_0\,c}\left(\underline{p_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k x)} - \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + k x)}\right) \quad \overset{x=0}{\rightsquigarrow} \quad \underline{u}(0,t) = \frac{1}{\rho_0\,c}\,(\underline{p_2} - \underline{p1})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \frac{1}{\rho_0\,c}\,(r-1)\,\underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

Or la pression en $x=0$ s'écrit $\underline{p}(0,t) = (\underline{r}+1)\,\underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, donc l'impédance en $x=0$ s'écrit :

$$\boxed{\underline{Z}(0) = \rho_0\,c\,\frac{\underline{r}+1}{\underline{r}-1}}$$

3. (b) L'impédance d'une OPPH étant égale à $\rho_0\,c$, l'impédance réduite est sans dimension.

$$\underline{Z}'(0) = -\frac{\underline{r}+1}{\underline{r}-1} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\underline{Z}'(0) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2\,r\,\cos\varphi} + \mathrm{i}\,\frac{2\,r\,\sin\varphi}{1+r^2-2\,r\,\cos\varphi}}$$

3. (c) Nous trouvons, numériquement :

f en Hz	460	750	845	1016	1042	1185	1400
$\mathfrak{Re}(\underline{Z}'(0))$	0,22	2,02	4,38	4,39	2,94	1,18	0,56
$\mathfrak{Im}(\underline{Z}'(0))$	0,46	2,30	1,66	$-1{,}25$	$-2{,}50$	$-1{,}92$	$-1{,}27$

Si la partie imaginaire de $\underline{Z}'(0)$ a un signe quelconque, la partie réelle, elle, est obligatoirement positive. En effet, la puissance moyenne *reçue* par la plaque de mousse s'écrit :

$$\langle\mathscr{P}\rangle = \langle -p(0,t)\,u(0,t)\,S\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\Big(\underline{p}(0,t)\,\underline{u}^\star(0,t)\,S\Big) = \frac{1}{2}\,|u|^2\,S\,\mathfrak{Re}(\underline{Z}'(0))$$

Et cette puissance **reçue** par la mousse doit toujours être positive car ce n'est évidemment pas elle qui va injecter de l'énergie dans le dispositif.

❁ Exercice 7

Pas de grande difficulté méthodologique dans cette question. Il y a un milieu propagatif, une condition limite imposée et le but est de retrouver l'onde et le coefficient de réflexion.

1. Voir le cours pour le calcul de l'impédance acoustique.

Nous trouvons $\boxed{Z_{\mathrm{a}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\chi_0}}}$ pour l'onde incidente et $-Z_{\mathrm{a}}$ pour l'onde réfléchie.

Pour le piston $\underline{Z_{\mathrm{m}}} = \dfrac{\underline{p}(0,t)}{\underline{V}(t)}$ où $V(t)$ est la vitesse du piston.

Comme nous sommes dans l'approximation acoustique, nous pouvons dire que la vitesse du piston n'est autre que la vitesse de l'onde en $x=0$.

Le PFD appliqué au piston et projeté sur l'axe Ox donne :

$$m\,\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = p(0,t)\,S - \lambda\,V(t) - k\,Z(t) \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{i}\,m\,\omega\,\underline{V} = \underline{p}(0)\,S - \lambda\,\underline{V} - \frac{k}{\mathrm{i}\,\omega}\,\underline{V}$$

Et ainsi : $\boxed{\underline{Z_{\mathrm{m}}} = \dfrac{1}{S}\left(\lambda + \mathrm{i}\,m\,\omega + \dfrac{k}{\mathrm{i}\,\omega}\right)}$

Nous disons qu'il y a adaptation d'impédance quand $\underline{Z_{\mathrm{m}}} = Z_{\mathrm{a}}$ ce qui impose les conditions :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lambda = \mu_0\,c\,S = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_0}}\,S}$$

2. La surpression en $x = 0$ est la somme de la surpression incidente et de la surpression réfléchie. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\underline{p}(0) = \underline{p_{\mathrm{i}}}(0) + \underline{p_{\mathrm{r}}}(0) = (1 + \underline{r_p})\,\underline{p_{\mathrm{i}}}(0)$$

De même la vitesse en $x = 0$ s'écrit :

$$\underline{u}(0) = \underline{u_{\mathrm{i}}}(0) + \underline{u_{\mathrm{r}}}(0) = \frac{1}{Z_{\mathrm{a}}}(1 - \underline{r_p})\,\underline{p_{\mathrm{i}}}(0)$$

L'impédance $\underline{Z_{\mathrm{m}}}$ du piston est donc égale à $\underline{Z_{\mathrm{m}}} = Z_{\mathrm{a}}\,\dfrac{1 + \underline{r_p}}{1 - \underline{r_p}}$.

Tous calculs faits, cela donne $\boxed{\underline{r} = \dfrac{\underline{Z_{\mathrm{m}}} - Z_{\mathrm{a}}}{\underline{Z_{\mathrm{m}}} + Z_{\mathrm{a}}}}$.

Une fois de plus nous constatons qu'il n'y a pas d'onde réfléchie lorsque $\underline{Z_{\mathrm{m}}} = Z_{\mathrm{a}}$.

3. En $x = 0$:

- ➜ la puissance moyenne transportée par l'onde incidente est $\langle P_{\mathrm{i}}\rangle = \langle p_{\mathrm{i}}(0,t)\,u_{\mathrm{i}}(0,t)\,S\rangle$;
- ➜ la puissance moyenne transportée par l'onde réfléchie est $\langle P_{\mathrm{r}}\rangle = \langle p_{\mathrm{r}}(0,t)\,u_{\mathrm{r}}(0,t)\,S\rangle$;
- ➜ la puissance moyenne transmise au piston est $\langle P_{\mathrm{piston}}\rangle = \langle p(0,t)\,V(t)\,S\rangle$
- ➜ la puissance moyenne accumulée par l'amortisseur est $\langle P_{\mathrm{amort}}\rangle = \lambda\,\langle V^2(t)\rangle$
- ➜ la puissance accumulée en moyenne par le ressort est $\langle P_{\mathrm{ressort}}\rangle = \langle k\,Z(t)\,V(t)\rangle$
- ➜ la puissance engrengée en moyenne en énergie cinétique est $\langle P_{\mathrm{cin}} = \langle m\,V(t)\,A(t)\rangle$ où $A(t)$ est l'accélération.

Or nous avons :

$$\langle P_{\mathrm{ressort}}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(k\,\underline{Z}\,\underline{V}\right) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(k\,\frac{\underline{V}}{\mathrm{i}\,\omega}\,\underline{V}\right) = 0$$

Et aussi :

$$\langle P_{\mathrm{cin}}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(m\,\underline{A}\,\underline{V}\right) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{Re}\left(m\,\mathrm{i}\,\omega\,\underline{V}\,\underline{V}\right) = 0$$

Enfin avec $p(0) = p_{\mathrm{i}}(0) + p_{\mathrm{r}}(0)$, nous vérifions bien $\boxed{\langle P_{\mathrm{i}}\rangle = \langle P_{\mathrm{r}}\rangle + \langle P_{\mathrm{piston}}\rangle}$.

En particulier, lorsqu'il y a adaptation d'impédance $\langle P_{\mathrm{i}}\rangle = \langle P_{\mathrm{piston}}\rangle$: toute l'énergie envoyée est « utile », comme en électrocinétique.

❃ Exercice 8

1. Voir cours. À l'ordre 1, ces équations s'écrivent :

$$\boxed{\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}\mu_1}{\mathrm{d}t}}$$

En éliminant la vitesse v_1 entre les deux équations nous trouvons :

$$\triangle\, p_1 = \frac{\mathrm{d}^2 \mu_1}{\mathrm{d}t^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\frac{\underline{p_{10}}}{\underline{\mu_{10}}} = \frac{\omega^2}{k^2}}$$

$\boxed{2.}$ Le premier principe de la thermodynamique, appliqué à une particule de fluide s'écrit :

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$$

Or la particule de fluide est en équilibre thermodynamique interne, ce qui implique que $\delta W = -P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}(\delta\tau) = -p\,\mathrm{d}(\delta\tau)$ où $\delta\tau$ est le volume de la particule de fluide et où seuls les effets dus à la surpression sont pris en compte (par linéarité des équations, nous peut mettre de côté les termes et les effets non propagatifs).

Nous avons ainsi :

$$\delta Q = \mathrm{d}U + p\,\mathrm{d}(\delta\tau) = \mathrm{d}m\, c_V\, \mathrm{d}T - p\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu^2}\,\mathrm{d}\mu \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\delta Q_{\text{mas}} = c_V\, \mathrm{d}T - \frac{p}{\mu^2}\,\mathrm{d}\mu}$$

Avec $\mathrm{d}U = \mathrm{d}H - p\,\mathrm{d}(\delta\tau) - \delta\tau\,\mathrm{d}p$ nous trouvons :

$$\delta Q = \mathrm{d}H - \delta\tau\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}m\, c_P\, \mathrm{d}T - \frac{\mathrm{d}m}{\mu}\,\mathrm{d}p \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\delta Q_{\text{mas}} = c_P\, \mathrm{d}T - \frac{1}{\mu}\,\mathrm{d}p}$$

$\boxed{3.}$ Le transfert thermique reçue par la tranche située entre x et $x + \mathrm{d}x$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ n'est autre que le flux du vecteur densité de courant thermique $\vec{\jmath}_{\text{th}}$, ce qui s'écrit :

$$\delta Q = j_{\text{th}}(x,t)\, S\, \mathrm{d}t - j_{\text{th}}(x + \mathrm{d}x,t)\, S\, \mathrm{d}t = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}\,\mathrm{d}x\, S\, \mathrm{d}t$$

Avec la loi de Fourier[1], nous obtenons $\delta Q = \lambda\,\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}\, S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Le transfert thermique reçu par unité de volume pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit donc :

$$\boxed{\delta Q_{\text{vol}} = K\,\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}t} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{K = \lambda}$$

$\boxed{4.}$ Avec $\delta Q_{\text{mas}} = \dfrac{1}{\mu}\,\delta Q_{\text{vol}}$ et $\mathrm{d}T = \dfrac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$, les équations précédentes s'écrivent, en notation complexe :

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{i}\,\omega\, c_V\, \underline{T_{10}} - \frac{p_0}{{\mu_0}^2}\,\mathrm{i}\,\omega\, \underline{\mu_{10}} = -\frac{\lambda}{\mu_0}\,k^2\, \underline{T_{10}} \\ &\mathrm{i}\,\omega\, c_P\, \underline{T_{10}} - \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{i}\,\omega\, \underline{p_{10}} = -\frac{\lambda}{\mu_0}\,k^2\, \underline{T_{10}} \end{aligned}\right.$$

En éliminant $\underline{T_{10}}$ entre ces deux équations, nous arrivons bien au résultat demandé :

$$\boxed{\frac{\underline{p_{10}}}{\underline{\mu_{10}}} = \frac{p_0}{\mu_0}\,\frac{c_P - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}{c_V - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}}$$

$\boxed{5.}$ Les deux expressions de $\dfrac{\underline{p_{10}}}{\underline{\mu_{10}}}$ permettent d'établir la relation de dispersion :

1. Franchement, ce Fourier, il aurait pu utiliser une autre notation que λ, on risque de confondre avec la longueur. ☹ C'est malin, il va falloir faire attention.

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{p_0}{\mu_0} \, \frac{c_P - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}{c_V - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}$$

En utilisant la relation ${c_0}^2 = \gamma\,\dfrac{p_0}{\mu_0}$, nous arrivons à :

$$\boxed{\omega^2\left(1 - \mathrm{i}\,k^2\,\frac{\lambda}{\mu_0\,c_V\,\omega}\right) = c_0\,k^2\left(1 - \mathrm{i}\,k^2\,\frac{\lambda}{\mu_0\,c_P\,\omega}\right)}$$

Quand $\lambda \to 0$, cette équation devient $\omega^2 = {c_0}^2\,k^2$. Nous retrouvons alors l'équation de idspersion dans le cas où les transferts thermiques sont négligés, ce qui est cohérent avec le fait que $\lambda \to 0$ implique des échanges thermiques nuls (voir FOURIER et sa loi).

Quand $\lambda \to \infty$, alors la relation de dispersion devient $\gamma\,\omega^2 = {c_0}^2\,k^2$ soit $\omega = k\,\sqrt{\dfrac{p_0}{\mu_0}}$. C'est la relation de dispersion que nous obtiendrions en supposant l'évolution isotherme (ce qu'avait fait NEWTON, qui, si grand génie soit-il, s'était trompé, n'hésitons pas à le rappeler) ce qui est cohérent.

6. En reprenant la relation de dispersion et en l'exprimant au premier ordre en $\dfrac{\lambda\,k^2}{c_V\,\mu_0\,\omega}$, nous trouvons :

$$\frac{\omega^2}{k^2} = {c_0}^2\left(1 - \mathrm{i}\,k^2\,\frac{\lambda}{c_P\,\mu_0\,\omega} + \mathrm{i}\,k^2\,\frac{\lambda}{c_V\,\mu_0\,\omega}\right) \quad\rightsquigarrow\quad k = \frac{\omega}{c_0}\left(1 + \mathrm{i}\,k^2\,\frac{\lambda}{2\,\mu_0\,\omega}\left(\frac{1}{c_P} - \frac{1}{c_V}\right)\right)$$

À l'ordre 0, cette équation donne $k = \dfrac{\omega}{c_0}$. Dans le terme correctif, nous pouvons donc remplacer k par $\dfrac{\omega}{c_0}$. Cela donne :

$$k = \frac{\omega}{c_0}\left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\lambda\,\omega}{2\,\mu_0\,\omega\,{c_0}^2}\left(\frac{1}{c_P} - \frac{1}{c_V}\right)\right) \quad\rightsquigarrow\quad \boxed{k_1 = \frac{\omega}{c_0}} \quad\text{et}\quad \boxed{\alpha = \frac{\lambda\,\omega^2}{2\,\mu_0\,{c_0}^3}\left(\frac{\gamma - 1}{c_P}\right)}$$

Quand la fréquence augmente, le coefficient α augmente donc la distance caractéristique d'atténuation $\delta = \dfrac{1}{\alpha}$ diminue. L'absorbtion se plus ressentir en hautes fréquences.

7. Numériquement :

➜ pour $f = 1$ kHz, $\alpha = 10^{-6}$ m $-\,1$ et $\delta = 243$ km

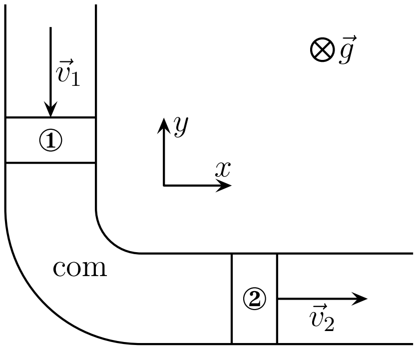
➜ pour $f = 40$ kHz, $\alpha = 6{,}6.10^{-3}$ m $-\,1$ et $\delta = 152$ m

Dans le cas des ultrasons à 40 kHz l'absorption par conduction thermique n'est pas négligeable sur des distances de quelques centaines de mètres. Il ne faut toutefois pas oublier que les ondes sonores sont rarement guidées et que l'atténuation est principalement due à l'étalement de l'énergie car les ondes sont essentiellement sphériques.

❆ Exercice 9

Aucun problème méthodologique dans cette question : il s'agit ni plus ni moins que d'effectuer un beau bilan de quantité de mouvement. Il faut juste ne pas se louper sur le dispositif : le coude est à l'horizontal donc le poids ne va jouer aucun rôle ici.

Considérons le système fermé formé du fluide contenu dans les parties ① et com à l'instant t. À l'instant $t + \mathrm{d}t$, il est formé des parties com et ②.



La quantité de mouvement de la partie commune est la même aux deux instants (régime stationnaire).

Il reste en notant S la section du tuyau :

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \mu\, D_v\, \mathrm{d}t\, (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad \text{avec} \qquad \vec{v}_1 = -\frac{D_v}{S}\,\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{v}_2 = +\frac{D_v}{S}\,\vec{u}_x$$

Les seules actions mécaniques horizontales qui s'exercent sont :

➜ les forces de pression de l'eau extérieure au système et de résultante $\vec{F}_{\mathrm{p}} = P_1\, S\, (-\vec{u}_y - \vec{u}_x)$

➜ l'action du tuyau sur l'eau $\vec{F}_{\mathrm{t}}$

Le TCI donne :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{p}} + \vec{F}_{\mathrm{t}} \qquad \leadsto \qquad \vec{F}_{\mathrm{t}} = \left(\mu\,\frac{{D_v}^2}{S} + P_1\, S\right)\,(\vec{u}_y + \vec{u}_x)$$

Le coude qui délimite le système précédent subit :

➜ la force exercée par l'eau dont NEWTON a dit avec sa 3e loi qu'elle valait $-\vec{F}_{\mathrm{t}}$

➜ la résultante des forces pressantes exercées par l'air, calculable en disant que cette dernière ajoutée à des forces pressante de pression P_0 à l'intérieur de la tuyauterie donnerait une poussée d'Archimède nulle, et ainsi $\vec{F}_{\mathrm{atmo}} = -(-P_0\, S\, \vec{u}_x - P_0\, S\, \vec{u}_y) = P_0\, S\, (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$

➜ les actions de contact exercées par le reste du coude qui permet la cohésion de l'ensemble du tuyau et l'immobilité du coude $\vec{F}_{\mathrm{c}}$.

Ainsi :

$$\vec{F}_{\mathrm{c}} = -(-\vec{F}_{\mathrm{t}}) - \vec{F}_{\mathrm{atmo}} \qquad \leadsto \qquad \boxed{\vec{F}_{\mathrm{c}} = \left(\mu\,\frac{{D_v}^2}{S} + (P_1 - P_0)\right)\,(\vec{u}_y + \vec{u}_x)}$$

Numériquement : $\boxed{F = \left(\mu\,\frac{{D_v}^2}{2} + (P_1 - P_0)\, S\right)\,\sqrt{2} = 22{,}4\ \mathrm{kN}}$.

REMARQUE

la force exercée par l'eau est très intense puisqu'elle correspond au poids d'une masse de 2 t !

Ceci étant, cela s'explique par le fait que le débit est grand (160 L.s^{-1}) ce qui impose au tuyau d'exercer une force vraiment très intense de façon à pouvoir permettre de redresser les lignes de courant, *i.e.* d'accélérer chaque particules de fluide « violemment » dans le virage de leurs trajectoires.

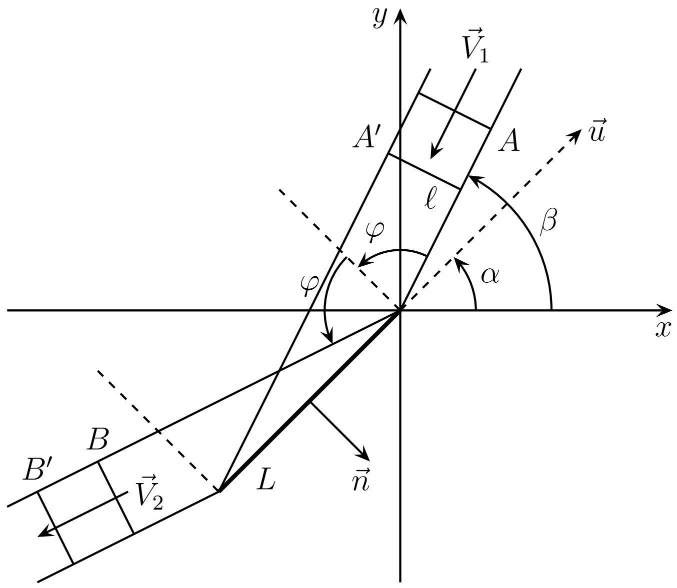
Après, c'est à cause de la 3e loi de NEWTON que nous pouvons dire que la force exercée par l'eau est intense.

Si le tuyau n'était pas fixé au bâti, nul doute qu'il serait projeté dans le sens opposé à $\vec{F}_{\mathrm{c}}$ c'est-à-dire vers le bas à gauche de la figure.

❆ Exercice 10

Pas de grosses difficultés physiques dans cet exercice. Les seules véritables difficultés sont d'ordre géométrique. À part cela, un bilan de quantité de mouvement fait parfaitement l'affaire.

Le tube de courant incident est réfléchi par la voile en un tube symétrique par rapport à la normale à celle-ci. Considérons le système fermé situé à l'instant t entre les plans A et B. À $t + \mathrm{d}t$, il est situé entre les plans A' et B' (cf. figure).



En régime stationnaire, la quantité de mouvement de la partie $A'B$ est la même aux deux instants, donc

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \mathrm{d}m\,\vec{V}_2 - \mathrm{d}m\,\vec{V}_1$$

où $\mathrm{d}m = \mu\,H\,\ell\,V_1\,\mathrm{d}t$ avec H la hauteur de la voile (perpendiculairement au plan de la figure) et ℓ la largeur du tube de courant.

En notant L la largeur de la voile, nous avons $\ell = L\,\cos(\widehat{\vec{\ell},\vec{L}})$ où $\vec{\ell}$ et $\vec{L}$ sont des vecteurs unitaires portés par les longueurs ℓ et L.

Nous avons aussi, en considérant les vecteurs normaux à ces derniers : $\ell = L\,\cos(\widehat{\vec{V}_1,\vec{n}})$ et en regroupant le tout et en notant $S = \ell\,L$ la surface totale de la voile :

$$\mathrm{d}m = \mu\,H\,L\,V_1\,\cos(\widehat{\vec{V}_1,\vec{n}})\,\mathrm{d}t = \mu\,S\,\vec{V}_1\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}t$$

Nous voyons alors que l'angle entre les vecteur $\vec{V}_1$ et $\vec{n}$ vaut $\dfrac{\pi}{2} + \alpha - \beta$ ce qui conduit à $\mathrm{d}m = \mu\,V_1\,S\,\sin(\beta - \alpha)\,\mathrm{d}t$ et à :

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \mu\,S\,V_1\,\sin(\beta - \alpha)\,\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right)\,\mathrm{d}t$$

Les actions mécaniques qui s'exercent sur ce système sont :

- ➜ le poids qui est négligé
- ➜ les efforts de pression exercés par le reste de l'air : $\vec{f}_{\text{air}\to\text{vent}}$
- ➜ l'action de la voile sur le vent : $\vec{f}_{\text{voile}\to\text{vent}}$

Le TCI appliqué au système précédent s'écrit :

$$\mu\,S\,V_1\,\sin(\beta - \alpha)\,\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right) = \vec{f}_{\text{air}\to\text{vent}} + \vec{f}_{\text{voile}\to\text{vent}}$$

La voile subit, elle, l'action du vent et celle de l'air de l'autre côté. La force recherchée est donc :

$$\vec{F} = -\vec{f}_{\text{voile}\to\text{vent}} + \vec{f}_{\text{air}\to\text{voile}}$$

Or l'ensemble du tube de courant étudié et de la voile est délimité par une surface fermée soumise à la pression uniforme P_0 d'où $\vec{f}_{\text{air}\to\text{vent}} + \vec{f}_{\text{air}\to\text{voile}} = \vec{0}$. Il reste :

$$\vec{F} = \mu\, S\, V_1\, \sin(\beta-\alpha)\, \left(\vec{V_2} - \vec{V_1}\right) = \mu\, V_1\, S\, \sin(\beta-\alpha)\,(2\,\vec{V_1}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$

puisque $\vec{V_2}$ et $\vec{V_1}$ sont symétriques par rapport à $\vec{n}$.

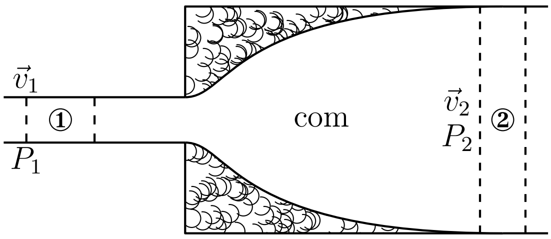
La composante selon Ox de cette force est finalement :

$$\boxed{F = 2\,\mu\,{V_1}^2\,S\,\sin^2(\beta-\alpha)\,\sin\alpha}$$

Exercice 11

1. *D'un point de vue méthodologique, cette question est très classique. La seule difficulté est de bien prendre en compte toutes les forces qui s'exercent, notamment celle dans la partie « morte » du fluide.*

Considérons le système constitué à l'instant t du cluide situé dans les parties ① et com du fluide « mort » et de la canalisation. À $t + \mathrm{d}t$, il est constitué du fluide situé dans les parties com et 2, du fluide mort et de la canalisation.



En régime permanent nous avons :

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \mathrm{d}m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad \text{où} \qquad \mathrm{d}m = \mu\,v_1\,S_1\,\mathrm{d}t = \mu\,v_2\,S_2\,\mathrm{d}t$$

Les seules actions mécaniques extérieures horizontales qui s'exercent sur ce système sont les efforts de pression.

Sur les section d'entrée et de sortie du fluide, la résultante des actions de pression est :

- ➜ sur la portion d'entrée : $\vec{F_1} = +S_1\,P_1\,\vec{u}_x$
- ➜ sur la portion de sortie : $\vec{F_2} = -S_2\,P_2\,\vec{u}_x$
- ➜ sur le fluide mort : $\vec{F}_{\text{m}} = +(S_2 - S_1)\,P_1\,\vec{u}_x$ (Newton a dit que la pression exercée par la canalisation sur le fluide était identique à la pression exercée par le fluide sur la canalisation. Si, si, il l'a dit, c'était un 17 avril !)

La résultante de toutes ces forces donne $\vec{F} = (P_1 - P_2)\,S_2\,\vec{u}_x$.

Dès lors le TCI appliqué au système précédent donne :

$$\mu\,S_2\,v_2\,(v_2 - v_1) = (P_2 - P_1)\,S_2 \qquad \leadsto \qquad \boxed{\Delta P = P_2 - P_1 = \mu\,v_2\,(v_1 - v_2)}$$

2. *Nous ne pouvons pas utiliser la relation de* Bernoulli *ici car nous avons affaire à un écoulement avec turbulence. Or la turbulence est intrinsèquement associée à la viscosité. Et qui dit « Bonjour, viscosité ! » dit « au revoir* Bernouilli *». Nous devons donc nous plonger dans une approche énergétique plus classique et sans oublier les interactions intérieures qui vont traduire, justement, les effets de viscosité.*

Un bilan énergétique sur le même système donne (attention de ne pas oublier les interactions intérieures) :

$$E_c(t+dt) - E_c(t) = \delta W_{\text{pression}} + \mathscr{P}_{\text{int}}\,dt$$

Or nous avons :

$$E_c(t+dt) - E_c(t) = \frac{1}{2}\,dm\,({v_2}^2 - {v_1}^2) \qquad \text{et} \qquad \delta W_{\text{pression}} = P_1\,S_1\,v_1\,dt - P_2\,S_2\,v_2\,dt = \frac{dm}{\mu}\,(P_1 - P_2)$$

Nous en déduisons la puissance des actions intérieures :

$$\mathscr{P}_{\text{int}} = \frac{dm}{dt}\left(\frac{1}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2) + \frac{P_2 - P_1}{\mu}\right) = -\frac{1}{2}\,\mu\,S_1\,{v_1}^3\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

La perte de charge $\left(P_2 + \dfrac{1}{2}\,\mu\,{v_2}^2\right) - \left(P_1 + \dfrac{1}{2}\,\mu\,{v_1}^2\right)$ représente la perte d'énergie par frottement par une unité de fluide passant par la canalisation et vaut :

$$\boxed{\mathcal{P} = \left(P_2 - P_1 + \frac{\mu}{2}\,({v_2}^2 - {v_1}^2)\right) = -\frac{\mu\,{v_1}^2}{2}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2}$$

Remarque. la perte de charge serait nulle dans le cas où les interactions intérieures auraient une puissance nulle, *i.e.* dans la cas d'un écoulement parfait … pour lequel nous aurions pu appliquer la relation de Bernoulli.

$\boxed{3.}$ Les résultats précédents ne sont pas applicables si le sens de l'écoulement du fluide est changé car le phénomène n'est pas réversible.

Exercice 12

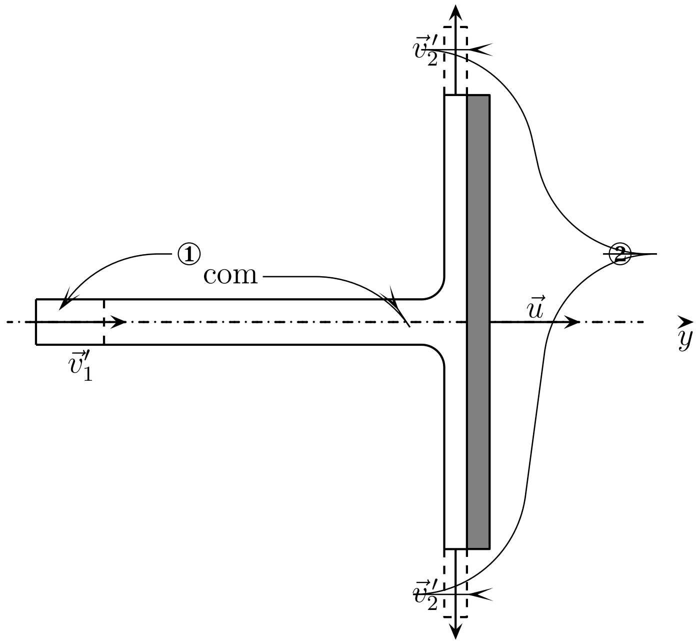
$\boxed{1.}$ Dans le référentiel lié à la plaque (qui est galiléen puisque la plaque conserve une vitesse constante) l'écoulement est permanent.

De plus le fluide est parfait et incompressible donc nous pouvons utiliser les relations de Bernoulli le long d'une ligne de courant à la périphérie du jet, entre un point de section S_1 et un point de section S_2, tous deux à la pression P_0.

Nous obtenons après simplifications : $(v_1 - u)^2 = {v_2'}^2$ d'où $v_1 - u = v_2'$ car $v_1 > u$ sinon l'eau ne rattraperait jamais la plaque.

Finalement $\boxed{\vec{v}_2 = u\,\vec{u}_y + (v_1 - u)\,\vec{u}_r}$.

$\boxed{2.}$ Considèrons le système constitué à l'instant t de la plaque et de l'eau dans les parties ① et com. À $t + dt$, il est constitué de la plaque et de l'eau située dans les parties com et ②.



En régime permanent, $\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$.

La quantité de mouvement de la partie ② est nulle par symétrie cylindrique.

Il reste $\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = -\mu\,S_1\,(v_1-u)^2\,\vec{u}_x$.

Les forces qui s'exercent sur le système sont :

- ➜ le poids vertical
- ➜ les forces de pression extérieure sur la surface latérale, sur la surface S_1 et sur la surface S_p, l'ensemble constituant une surface fermée soumise à une pression uniforme donc $\vec{F}_\text{pressante} = \vec{0}$
- ➜ la force exercée par l'opérateur qui assure une vitesse uniforme à la plaque.

Le TCI appliqué au système s'écrit donc : $-\mu\,S_1\,(v_1-u)^2\,\vec{u}_y = \vec{F}_\text{op}$.

La plaque se deplace à vitesse constante, donc l'action de l'opérateur compense exactement les forces exercées par l'eau et l'air sur la plaque.

Ainsi la force recherchée n'est autre que $-\vec{F}_\text{op}$ soit $\boxed{\vec{F} = \mu\,S_1\,(v_1-u)^2\,\vec{u}_y}$.

3. (a) Par définition de la puissance fournie par une force, nous avons

$$\boxed{\mathscr{P}_\mathrm{m} = \vec{F}\cdot\vec{u} = \mu\,S_1\,u\,(v_1-u)^2}$$

3. (b) Nous avons directement $\boxed{\mathscr{P}_\mathrm{c1} = D_m \times \dfrac{1}{2}\,{v_1}^2 = \dfrac{1}{2}\,\mu\,S_1\,{v_1}^3}$

3. (c) De même la définition du débit d'énergie cinétique sortant à travers S_2 vaut :

$$\mathscr{P}_\mathrm{c2} = \iint_{S_2} \frac{1}{2}\,\mu\,{v_2}^2\,\vec{v}_2\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_2} \frac{1}{2}\,\mu\,{v_2}^2\,{v_2'}^2\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\,\mu\,{v_2}^2\,(v_1-u)\,S_2 \qquad \text{avec} \qquad {v_2}^2 = u^2 + (v_1-u)^2$$

La conservation du débit volumique dans le référentiel lié à la plaque où le régime est permanent donne $(v_1-u)\,S_1 = v_2'\,S_2$ soit $S_1 = S_2$. Finalement :

$$\boxed{\mathscr{P}_\mathrm{c2} = \frac{1}{2}\,\mu\,(v_1-u)\,\left[u^2 + (v_1-u)^2\right]\,S_1}$$

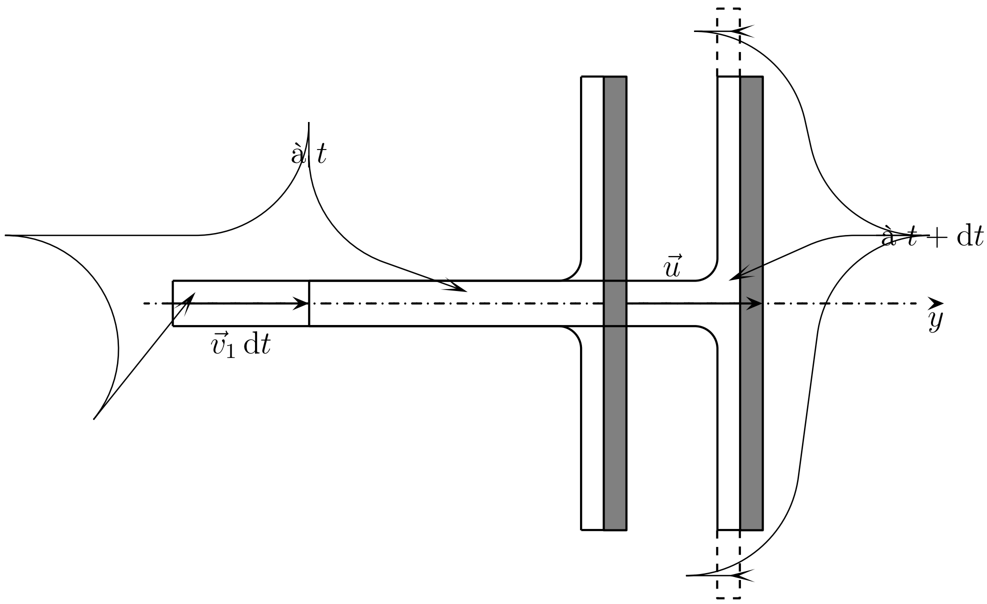
4. $\mathscr{P}_\mathrm{c1} \neq \mathscr{P}_\mathrm{c2} + \mathscr{P}_\mathrm{m}$ car dans le bilan énergétique une force a été oubliée : celle de l'opérateur (le poids a aussi été oublié, mais il ne travaille pas).

Dans le référentiel lié à la plaque, ce bilan fonctionnerait car la force de l'opérateur ne travaillerait pas (la force de l'eau sur la plaque non plus d'ailleurs).

Le rendement vaut $\boxed{\eta = \dfrac{\mathscr{P}_{\rm m}}{\mathscr{P}_{\rm c1}} = 2\,x\,(1-x)^2}$ avec $\boxed{x = \dfrac{u}{v_1}}$

Numériquement $\boxed{\mathscr{P}_{\rm m} = 80{,}4\text{ kW}}$, $\boxed{\mathscr{P}_{\rm c1} = 271{,}4\text{ kW}}$, $\boxed{\mathscr{P}_{\rm c1} = 100{,}5\text{ kW}}$ et $\boxed{\eta = 0{,}296}$ (valeur obtenue pour $x = 1/3$ correspondant au rendement maximal).

5. Dans le référentiel $\mathscr{R}_0$ le système étudié plus haut devient :



Le jet d'eau s'est allongé de $u\,\mathrm{d}t$.

La variation d'énergie cinétique de l'ensemble { jet + plaque } entre t et $t + \mathrm{d}t$ est égale à :

$$E_{\rm s}(t+\mathrm{d}t) - E_{\rm c}(t) = \mathscr{P}_{\rm c2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\,\mu\,u\,S_1\,\mathrm{d}t\,v_1^2 - \mathscr{P}_{\rm c1}\,\mathrm{d}t$$

Pour le système, les forces extérieures qui agissent sont :

➜ le poids, qui fournit une puissance nulle (force verticale, mouvement horizontal)

➜ les forces pressantes dont la résultante est nulle

➜ l'opérateur qui fournit la puissance $\mathscr{P}_{\rm op}$

En ce qui concerne les interactions intérieures, la puissance qu'elles fournissent est nulle car les effets de viscosité sont négligeables (écoulement parfait).

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$E_{\rm c}(t+\mathrm{d}t) - E_{\rm c}(t) = P_{\rm op}\,\mathrm{d}t\ddot{P}_{\rm op} = \mathscr{P}_{\rm c2} + \frac{1}{2}\,\mu\,u\,S_1\,v_1^2 - \mathscr{P}_{\rm c1}$$

Avec les expressions de $\mathscr{P}_{\rm c1}$, $\mathscr{P}_{\rm c2}$ et $\mathscr{P}_{\rm m}$ nous trouvons $\boxed{\mathscr{P}_{\rm op} = -\mathscr{P}_{\rm m} < 0}$: l'opérateur « freine » la plaque.

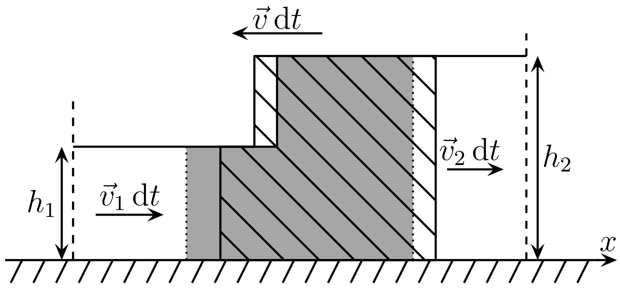
❁ Exercice 13

1. Dans le référentiel $\mathscr{R}_{\rm m}$, l'écoulement est permanent.

La conservation de la masse d'un système à cheval sur le front du mascaret s'écrit :

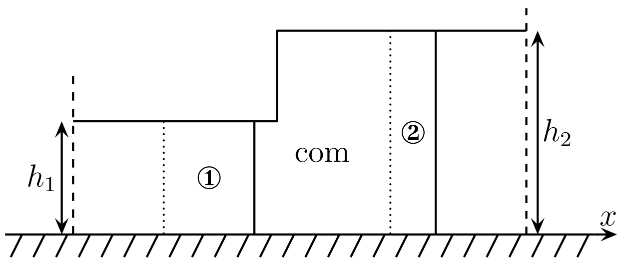
$$\mu\,(v_1+v)\,L\,v_1 = \mu\,(v_2+v)\,L\,h_2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{(v_1+v)\,h_1 = (v_2+v)\,h_2}$$

Dans le référentiel fixe, le système étudié est représenté ci-dessous. À l'instant t il est grisé et à l'instant $t + \mathrm{d}t$ il est hachuré.



La conservation de la masse s'écrit $\mu\,v_1\,L\,h_1 = \mu\,v_2\,L\,h_2 + \mu\,v\,L\,(h_2 - h_1)$ ce qui redonne bien la relation précédente.

$\boxed{2.}$ Dans le référentiel du mascaret, la vague est immobile. Le système considéré est constitué à l'instant t de l'eau située dans les parties ① et com (eau + air) et à $t + \mathrm{d}t$ il est constitué de l'eau dans les parties com et ②.



En régime permanent :

$$\vec{p}(t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \mathrm{d}m\,(\vec{v_2} - \vec{v}) - \mathrm{d}m\,(\vec{v_1} - \vec{v}) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}m = D_m\,\mathrm{d}t = \mu\,L\,h_1\,(v_1 + v)\,dt = \mu\,L\,h_2\,(v_2 + v)\,\mathrm{d}t$$

Les actions mécaniques horizontales qui s'exercent sur ce système sont uniquement les forces pressantes exercées par l'eau et l'air car les effets de viscosité entre le sol et l'eau au niveau du sol sont négligés.

Étant donné que les lignes de courant sont horizontales, la pression a une répartition hydrostatique verticalement ce qui donne :

$$P_1(z) = P_0 + \mu\,g\,(h_1 - z) \qquad \text{et} \qquad P_2(z) = P_0 + \mu\,g\,(h_2 - z) \quad \text{en prenant } z = 0 \text{ au sol}$$

La résultante s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_0^{h_1} P_1(z)\,L\,\mathrm{d}z\,(+\vec{u}_x) + \int_{h_1}^{h_1} P_0(z)\,L\,\mathrm{d}z\,(+\vec{u}_x) + \int_0^{h_2} P_2(z)\,L\,\mathrm{d}z\,(-\vec{u}_x) \\ &= (\cdots) = \mu\,g\,L\,\frac{{h_1}^2 - {h_2}^2}{2}\,\vec{u}_x\end{aligned}$$

Le TCI appliqué à ce système dans $\mathscr{R}_\mathrm{m}$ et projeté sur Ox donne, après simplifications :

$$\boxed{h_1\,(v_1 + v)\,(v_2 - v) = \frac{1}{2}\,g\,({h_1}^2 - {h_2}^2)}$$

$\boxed{3. (a)}$ Le TCI et la conservation de la masse donne une équation du second degré en v dont on ne garde que la solution positive $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{g\,h_2}{2\,h_1}\,(h_1+h_2)} - v_1}$.

La vitesse du mascaret augmente quand h_1 diminue donc le mascaret est plus rapide au moment des basses eaux.

$\boxed{3. (b)}$ Les relations précédentes donnent $\boxed{v_2 = v_1 + (h_2 - h_1)\,\sqrt{\dfrac{g}{2}\,\dfrac{h_1+h_2}{h_1\,h_2}}}$.

La vitesse v_2 peut être aussi bien positive que négative. Dans le premier cas, le fleuve s'écoule vers la mer, dans le deuxième cas, la mer remonte le fleuve.