Écoulements de fluides

Exercice 1

Analyse physique. Ici nous avons affaire à un écoulement visqueux de fluide car le but même du dispositif est de mesurer expérimentalement la viscosité du fluide. Étant donné que la viscosité se fait surtout sentir dans la couche limite, c'est-à-dire près des parois, nous pouvons négliger cet aspect dans le réservoir mais pas dans le tube.

Nous voyons ici facilement que le dispositif est constitué de deux parties en « série » : le réservoir et le tube. Nous connaissons les conditions limites en pression et nous cherchons l'évolution en vitesse du fluide. Comme nous connaissons la loi de comportement du tube, il ne nous reste plus qu'à trouver celle pour le réservoir est tout sera connu.

En fait, dans tout ce qui est écoulement confiné, nous pouvons analyser les situations à la manière dont nous analysons les circuits électrocinétique où la pression serait le potentiel électrocinétique et le débit le courant. Chaque élément possède une loi de fonctionnement et ils sont mis bout à bout. Dans ces conditions, nous voyons assez facilement que le but de l'exercice est de déterminer « l'intensité » connaissant uniquement la loi de fonctionnement du tube. Notre travail principal va donc consister à trouver la loi de fonctionnement du réservoir.

Pour ce dernier, étant donné que l'évolution est très très lente (près d'une heure !), nous pouvons sans vergogne faire l'hypothèse de quasi-staticité.

Comme le réservoir est à évolution très lente, nous pouvons dire que la pression régnant dans le fluide obéit à la loi de l'hydrostatique, à savoir, en utilisant la continuité de la pression au niveau de la surface supérieure du fluide :

$$P(h) = P_0 + \mu\, g\, h$$

Nous pouvons alors en déduire l'expression du débit volumique dans le tuyau. En effet, à la sortie, nous pouvons dire que pression est égale à la pression atmosphérique P_0 par continuité de la pression aux interfaces (ici il n'y a pas de jet, il n'y a qu'une goutte au contact direct avec l'atmosphères). Cela donne :

$$\Delta P = \mu\, g\, h \qquad \rightsquigarrow \qquad D_v = \frac{\mu\, g\, \pi\, d^4}{128\, \eta\, L}\, h(t)$$

Puis, en notant S la section du récipient, la conservation du débit volumique (liquide incompressible) impose $D_v = -S\,\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ (attention au signe : $h(t)$ diminue au cours du temps.)

Finalement, la hauteur $h(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$-S\,\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu\, g\, \pi\, d^4}{128\, \eta\, L}\, h(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{h(t)}{\tau} = 0} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\tau = \frac{32\, \eta\, L\, D^2}{\mu\, g\, d^4}}$$

Notons t_1 tel que $h(h_1) = h_1 = 5$ cm et t_2 tel que $h(t_2) = 2{,}5$ cm.

En intégrant nous obtenons :

$$\frac{h_2}{h_1} = \exp\left(-\frac{t_2 - t_1}{\tau}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\nu = \frac{\eta}{\mu} = \frac{g\, d^4\,(t_2 - t_1)}{32\, L\, D^2\, \ln(h_1/h_2)} = \underline{1{,}98}821 \text{ mm}^2.\text{s}^{-1}}$$

❄ Exercice 2

Il s'agit ici d'un exercice où il faut surtout interpréter des relations connues ou données plutôt que les retrouver.

$\boxed{1.}$ La diffusion de quantité de mouvement est régie par une équation de la forme $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \, \vec{\Delta}\, \vec{v}$: c'est l'équation de Navier – Stokes pour un écoulement laminaire, parallèle, où les effets de pesanteur sont négligeables, bref, comme pour l'écoulement de Couette ou Poiseuille.

Nous avons donc, en notant δ la distance caractéristique de diffusion pendant une durée T :

$$\frac{\vec{v}}{T} = \nu \, \frac{\vec{v}}{\delta^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\delta \simeq \sqrt{\nu\, T}}$$

Comme ici T est la période des battements cardiaques soit $T = 1$ s, nous trouvons numériquement $\boxed{\delta = 1{,}73205 \text{ mm}}$.

$\boxed{2.}$ Pour que les effets de viscosités se fassent sentir, il faut que le rayon du tube soit inférieur à la distance δ, qui correspond en fait à l'épaisseur de la couche limite.

Or, ce n'est le cas que pour les branches artérielles et les vaisseaux plus petits.

Si pour l'aorte nous pouvons effectivement considérer que l'écoulement est parfait (épaisseur très faible de la couche limite devant la taille des vaisseaux), pour les grosses artère, l'effet de viscosité se fera sentir sans que cela soit pour autant un écoulement de Poiseuille.

$\boxed{3.}$ Notons $d_{v,i}$ le débit volumique dans un vaisseau de l'étage i qui comporte N_i vaisseaux.

Le débit $d_{v,i}$ vaut naturellement $d_{v,i} = \dfrac{D}{N_i}$ où D_v est le débit total.

Comme à chaque ramification il y a continuité de la pression, nous pouvons écrire :

$$\Delta P_{\text{tot}} = \sum_i \Delta p_i \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\Delta P_{\text{tot}} = \sum_i \left(\frac{8\,\eta\, L_i\, D_v}{N_i\, \pi\, R_i^4} \right) = 2{,}65746 \text{ Pa}}$$

L'application numérique a été faite en prenant $\mu = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3} pour le sang.

Comme le montre le tableau suivant, nous pouvons constater que les deux termes dominants de l'application numérique viennent des branches artérielles et des artérioles.

niveau	aorte	grosses artères	branches artérielles	artérioles	capillaires
ΔP	7,60514 Pa	7,85398 Pa	$1{,}39408 \times 10^3$ Pa	$1{,}00531 \times 10^3$ Pa	$2{,}42608 \times 10^2$ Pa

$\boxed{4.}$ Pour calculer le nombre de Reynolds, commençons par déterminer la vitesse moyenne v_{m} dans chaque étage à l'aide de la relation $d_{v,i} = \dfrac{\pi\, d^2}{4}\, v_{\text{m}}$.

Nous pouvons après calculer numériquement le nombre de Reynolds $\boxed{\text{Re} = \dfrac{v_{\text{m}}\, d}{\nu}}$.

	aorte	grosses artères	branches artérielles	artérioles	capillaires
v_{m} (cm.s^{-1})	15,7233	4,16667	4,16667	0,166667	0,0238095
Re	$1{,}36149 \times 10^3$	110,817	8,31780	$1{,}10817 \times 10^{-2}$	$7{,}14393 \times 10^{-4}$

Conformément à la première question, nous pouvons voir que l'écoulement est laminaire pour les trois ramifications les plus petites et à la limite de la turbulence pour l'aorte.

Exercice 3

$\boxed{\text{1. (a)}}$ La condition d'incompressibilité est bien connue : $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

$\boxed{\text{1. (b)}}$ Étant donné que le fluide étudié est newtonien, celui-ci doit adhérer aux parois de l'obstacle ce qui signifie ici, puisque l'obstacle est immobile, que la vitesse du fluide doit être nulle à la surface de la sphère.

$\boxed{\text{1. (c)}}$ Puisque nous sommes dans l'approximation linéaire (à savoir que l'accélération convective est négligée, hypothèse de l'énoncé) et que l'écoulement est stationnaire, l'équation de NAVIER – STOKES s'écrit :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta\, \vec{\Delta}\, \vec{v}$$

$\boxed{\text{2.}}$ Pour vérifier que la divergence est nulle, il suffit de la calculer avec la formule donnée. Nous obtenons bien le résultat.

Calculons les vitesses du fluide sur la sphère :

$$\left\{\begin{array}{l} v_r(R\,\theta\,\varphi) = V_0\, \cos\theta\, \left(1 - \dfrac{3\,R}{2\,R} + \dfrac{R^3}{2\,R^3}\right) = 0 \\ v_\theta(R\,\theta\,\varphi) = -V_0\, \cos\sin\, \left(1 - \dfrac{3\,R}{4\,R} - \dfrac{R^3}{4\,R^3}\right) = 0 \\ v_\varphi(R\,\theta\,\varphi) = 0 \end{array}\right.$$

La vitesse du fluide est bien nulle sur la sphère.

L'écoulement est $\boxed{\text{rotationnel}}$. En effet le rotationnel du rotationnel de la vitesse n'est pas nul, donc le rotationnel « tout court » non plus.

L'écoulement est $\boxed{\text{laminaire}}$ (approximation linéaire) et $\boxed{\text{stationnaire}}$.

L'écoulement n'est pas potentiel puisqu'il est rotationnel.

$\boxed{\text{3. (a)}}$ À partir de l'expression trouvée grâce à l'approximation linéaire, nous avons :

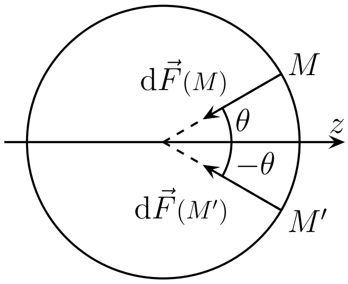
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \eta\, \vec{\Delta}\, \vec{v} = \eta\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, \operatorname{div} \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v})\right) = -\eta\, \overrightarrow{\text{rot}}\, (\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}) \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \eta\, \dfrac{3\, V_0\, R\, \cos\theta}{r^3} \\ \dfrac{1}{r}\, \dfrac{\partial P}{\partial \theta} = \eta\, \dfrac{3\, V_0\, R\, \sin\theta}{2\, r^3} \end{array}\right.$$

Grâce à la condition à la limite $P(r,\theta) \xrightarrow{r\to\infty} P_0$, ces équations s'intègrent en :

$$\boxed{P(r,\theta) = P_0 - \frac{3\,\eta\, V_0\, R\, \cos\theta}{2\, r^2}}$$

$\boxed{\text{3. (b)}}$ Comme il s'agit de forces pressante, nous pouvons dire que chaque petit élément de surface $\mathrm{d}S$ de la sphère est soumis à la force $\mathrm{d}\vec{F}_P = -P(r,\theta)\, \mathrm{d}S\, \vec{u}_r$.

D'après le schéma ci-dessous, nous voyons bien que les forces élémentaires subies par les élements de surfaces situés en θ et $-\theta$ sont symétriques par rapport à l'axe Oz.



La résultante des forces de pression est donc dirigées selon cet axe d'où $\vec{F}_P = F_P\,\vec{u}_z$ avec :

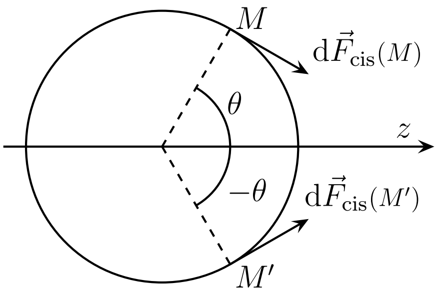
$$\begin{aligned} F_P &= \oiint -P(R\,\theta)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_r\cdot\vec{u}_z = \oiint -P(R,\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}S \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\,\pi}\left(P_0 - \frac{3\,\eta\,R\,V_0\,\cos\theta}{2\,R^2}\right)\cos\theta\,R^2\,\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Après calculs nous obtenons $\boxed{\vec{F}_P = 2\,\pi\,\eta\,V_0\,R\,\vec{u}_z}$

$\boxed{4.}$ La force de cisaillement sur la portion $\mathrm{d}S = R^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ de la sphère s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{cis}} = \eta\,\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)(R\,\theta)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_\theta = -\frac{3\,\eta\,V_0\,R\,\sin^2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\theta$$

Les forces élémentaires subies par les éléments de surface situés en θ et $-\theta$ sont symétriques par rapport à l'axe Oz.



La résultante des forces de pression est donc dirigée selon cet axe, d'où $\vec{F}_{\text{cis}} = F_{\text{cis}}\,\vec{u}_z$ avec :

$$\begin{aligned} F_{\text{cis}} &= \iint -\frac{3\,\eta\,V_0\,R\,\sin^2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_z = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\frac{3\,\eta\,V_0\,R\,\sin^2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\sin\theta \\ &= \int_0^\pi 2\,\pi\,\frac{3\,\eta\,V_0\,R\,\sin^3\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 6\,\pi\,\eta\,R\,V_0\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\vec{F}_{\text{cis}} = 4\,\pi\,\eta\,V_0\,R\,\vec{u}_z} \end{aligned}$$

$\boxed{5.}$ La force de traînée sur la sphère est donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_P + \vec{F}_{\text{cis}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\vec{F} = 6\,\pi\,\eta\,R\,V_0\,\vec{u}_z}$$

C'est bien la formule de Stokes car $V_0\,\vec{u}_z$ est la vitesse du fluide par rapport à la sphère.

Exercice 4

Voici un des nombreux petits exercices faisant appel à de la phénoménologie usuelle des fluides.

Comme ce sera toujours le cas, il faut tout de suite penser que l'écoulement est incompressible, que la plupart du temps il est possible de négliger les termes de viscosité, . . .

L'écoulement est permanent, parfait, incompressible, nous pouvons donc appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point de départ et un point d plus bas.

En admettant que les lignes de courant sont presques parallèles, nous avons affaire à un jet libre dans lequel la pression est uniforme et vaut P_0.

Nous obtenons alors $v(d) = \sqrt{{v_0}^2 + 2\,g\,d}$.

Comme le débit volumique se conserve, l'augmentation de vitesse se traduit par une diminution de la section.

Plus précisément, si en notant $\Phi(d)$ le diamètre au bout d'une chute de d, nous avons :

$$\boxed{\Phi(d) = D\sqrt{\frac{v_0}{v}} = D\left(\frac{{v_0}^2}{{v_0}^2 + 2\,g\,d}\right)^{1/4}}$$

Avec $D = 1$ cm, un débit volumique $D_v = 1$ L.min^{-1} soit $v_0 \simeq 20$ cm.s^{-1} et $d = 5$ cm, nous arrivons à $\Phi = 0{,}5\,D = 0{,}5$ cm.

L'expérience (que tout le monde peut faire chez soi) montre qu'effectivement, pour un régime laminaire (ne pas ouvrir « trop fort » le robinet), le diamètre diminue de moitié au bout de quelques centimètres.

Lorsque le jet devient très fin, il n'est plus possible de négliger les effets de surface et l'élasticité propre de la surface de l'eau brise le jet en goutellettes.

Remarque. en mettant son doigt à un ou deux centimètre au début du jet, si celui-ci est laminaire, on voit l'eau « rebondir » sur la surface par la présence d'ondes remontant le jet.

Exercice 5

Dans le référentiel lié aux bateaux, l'écoulement de l'eau peut être considéré comme permanent parfait et incompressible.

Entre les deux bateaux, les lignes de courant se resserrent, la vitesse de l'eau augmente et la pression est plus faible que loin des bateaux.

À l'extérieur de ceux-ci, la pression est peu différente de loin d'eux.

La résultante des forces de pression est donc dirigée vers l'intérieur et tend à rapprocher les bateaux ce qui peut les faire entrer en collision.

Exercice 6

Cet exercice n'est pas très difficile une fois bien compris la modélisation. Ici il y a deux zones : dans la cheminée et à l'extérieur de la cheminée. Dans ces deux zones, la température est considérée comme constante, ce qui va engendrer des mouvements d'air.

1. À l'extérieur de la maison, l'air est statique.

Nous avons donc une répartition de pression de la forme $P(z) = P_0 \mathrm{e}^{-M\,g\,z/(R\,T)}$.

En remarquant que $\dfrac{R\,T}{M\,g} \simeq 8{,}2.10^3$ m $\gg h = 6$ m nous pouvons faire un développement limité ce qui donne $P(z) = P_0\left(1 - \dfrac{M\,g}{R\,T_0}\,z\right)$.

La différence de pression vaut alors $\boxed{\Delta P = P_A - P_B = \dfrac{M\,g\,h\,P_0}{R\,T_0} = \mu_0\,g\,h = \underline{73}{,}4905 \text{ Pa}}$

REMARQUE

L'approximation $z \ll H$ revient à faire l'approximation $\mu = \mu_0 \simeq \text{C}^{\text{te}}$.

Dans ces conditions, la relation de la statique des fluides $\dfrac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}t} = -\mu_0\, g$ **pour un fluide incompressible** donne bien $P(z) = P_0 - \mu_0\, g\, z$.

Et comme $\mu_0 = \dfrac{M\,P_0}{R\,T_0}$ nous retrouvons bien l'expression précédente.

$\boxed{2.}$ En faisant la même approximation qu'à la question précédente, *i.e.* en disant que l'air conserve une masse volumique $\mu_1 = \dfrac{M\,P}{R\,T_1}$ constante dans le conduit de cheminée, nous pouvons dire alors que l'écoulement est incompressible.

Comme il est permanent et parfait, BERNOULLI est fait pour lui !

Cela donne (attention à la masse volumique qui vaut μ_1 dans le conduit de cheminée) avec $v_C = 0$ et $z_D - z_C = h$:

$$\frac{P_D}{\mu_1} + \frac{{v_D}^2}{2} + g\,z_D = \frac{P_C}{\mu_1} + \frac{{v_C}^2}{2} + g\,z_C \qquad \rightsquigarrow \qquad v_D = \sqrt{\frac{2}{\mu_1}\,(P_C - P_D) - 2\,g\,h}$$

De plus, par continuité de la pression, nous avons $P_C = P_A$ et $P_D = P_B$.

Finalement, avec l'expression précédente $\boxed{v_D = \sqrt{2\,g\,h\,\left(\dfrac{\mu_0}{\mu_1} - 1\right)} = \underline{7{,}6}3125\ \text{m.s}^{-1}}$.

REMARQUE

➜ *Autre méthode.*

Toute l'idée de cette deuxième méthode consiste à bien voir que ce qui est à l'origine de la montée de l'air chaud dans le conduit de cheminée n'est ni plus ni moins que la bonne vieille poussée d'ARCHIMÈDE.

En effet nous savons que l'air chaud monte et il monte parce qu'il est moins dense et donc la poussée d'ARCHIMÈDE qu'il subit est plus importante que son propre poids d'où une résultante vers le haut.

Dans ces conditions, même si elles sont très faibles, cela justifie la première question, à savoir qu'il n'est pas possible de négliger totalement les différences de pression sur la hauteur de la cheminée étant donnée que ce sont ces différences de pression qui permettent à la résultante des forces de pression d'être non nulle.

Le fait d'avoir vu que le « moteur » de la montée est la poussée d'ARCHIMÈDE, nous pouvons raisonner directement sur une particule de fluide.

Ainsi, dans le conduit, le gradient de pression est identique à ce qu'il est à l'extérieur (conditions aux limites obligent).

Donc le PFD pour une particule de fluide s'écrit :

$$\mu_1\,\mathrm{d}\tau\,\widetilde{\vec{a}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P_{\text{dehors}}\,\mathrm{d}\tau + \mu_1\,\mathrm{d}\tau\,\vec{g}$$

Mais comme, d'après la première question $\overrightarrow{\text{grad}}\,P_{\text{dehors}} = \mu_0\,\vec{g}$, nous obtenons $\mu_1\,\widetilde{\vec{a}} = (\mu_1 - \mu_0)\,\vec{g}$ soit, en projection sur $\vec{u}_z$: $\widetilde{\ddot{z}}(t) = \left(\dfrac{\mu_0}{\mu_1} - 1\right)\,g \overset{\text{not}}{=} g_{\text{eff}}$.

Par analogie avec une chute libre sans vitesse initiale dont la vitesse au bout d'une chute de hauteur h est $\sqrt{2\,g\,h}$ cette accélération constante vers le haut permettra à la particule de fluide d'acquérir la vitesse $\sqrt{2\,g_{\text{eff}}\,h}$.

Et nous retrouvons bien le même résultat que précédemment.

3. Lors de la montée dans la cheminée, il n'est pas déraisonnable de penser que l'air se refroidit.

En se refroidissant, il devient plus dense et la poussée d'Archimède que subit chaque particule de fluide diminue car chaque particule de fluide se contracte.

L'accélération étant plus faible, la vitesse finale est plus faible aussi.

Remarque

Pour déterminer « exactement » la vitesse atteinte, la relation de Bernoulli est inaplicable car l'écoulement devient compressible, mais l'approche particulaire reste, quant à elle, valable.

Malgré tout il faudra commencer par modéliser les échanges thermiques de manière à pouvoir déterminer la masse volumique du fluide en fonction de la hauteur parcourue.

Exercice 7

Cet exercice ressemble à la vidange d'un réservoir comme vu en cours. La différence c'est que cette fois la pression au niveau de la surface libre du réservoir n'est pas constante. Il va donc falloir ajouter cela à la description du dispositif.

Il s'agit dont nous savons qu'il se décrit entièrement par la connaissance de deux grandeurs parmi P,V,T. Or, d'après les hypothèse, nous connaissons la température : elle est constante égale à T_0. Cela implique de fait que nous allons avoir une relation univoque entre pression du gaz et volume, ou encore entre pression à la surface libre et hauteur du réservoir.

Cette condition au limite est tout ce qui nous manquait par rapport à la situation de la vidange vue en cours, donc tout va bien, nous avons tout ce qu'il faut pour tout trouver.

Comme dans le cas classique de la vidange d'un réservoir, nous pouvons dire ici que l'écoulement est quasi-stationnaire (section d'écoulement très inférieure à la section du réservoir), parfait (approximation à discuter éventuellement avec le nombre de Reynolds) et incompressible (franchement, là, ça va toujours).

En utilisant la relation de Bernoulli entre un point A de la surface et un point B du jet de sortie, nous obtenons, comme dans la situation classique : $v_{\mathrm{e}} = \sqrt{2\,g\,h + \dfrac{2\,(P_A - P_0)}{\mu}}$ car la pression en B vaut P_0 et la vitesse en A est nulle.

Pour exprimer P_A, écrivons l'équation d'état de l'air surmontant le liquide dans l'état initial (gaz parfait) : $P_0\,\pi\,R^2\,(H - h_0) = n\,R\,T_0$.

Comme l'évolution est supposée isotherme : $P_A = P_0\,\dfrac{H - h_0}{H - h}$ nous pouvons en déduire :

$$v_{\mathrm{e}} = \sqrt{2\,g\,h + \frac{2\,P_0}{\mu}\,\left(\frac{h - h_0}{H - h}\right)}$$

À la fin de la vidange, $v_{\mathrm{e}} = 0$ donc :

$$\sqrt{2\,g\,h_{\mathrm{f}} + \frac{2\,P_0}{\mu}\,\left(\frac{h_{\mathrm{f}} - h_0}{H - h_{\mathrm{f}}}\right)} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad {h_{\mathrm{f}}}^2 - \frac{P_0}{\mu\,g}\,h_{\mathrm{f}} + \frac{P_0}{mu\,g}\,h_0 - H\,h_{\mathrm{f}} = 0$$

Pour que h_{f} existe, il faut que le déterminant de l'équation du second degré soit positif, ce qui conduit à :

$$\left(\frac{P_0}{\mu\,g}+H\right)^2-\frac{4\,P_0\,h_0}{\mu\,g}>0 \quad\rightsquigarrow\quad \boxed{\left(\frac{P_0}{\mu\,g}+H\right)^2>\frac{4\,P_0\,h_0}{\mu\,g}}$$

Cette dernière relation est toujours vérifiée.

En effet, par « construction », nous avons $H > h_0$ et pour vérifier la relation précédente, il suffit que :

$$\left(\frac{P_0}{\mu\,g}+H\right)^2>\frac{4\,P_0\,H}{\mu\,g} \quad\rightsquigarrow\quad \left(\frac{P_0}{\mu\,g}+H\right)^2-\frac{4\,P_0\,H}{\mu\,g}>0 \quad\rightsquigarrow\quad \left(\frac{P_0}{\mu\,g}-H\right)^2>0$$

Relation toujours vraie aussi !

Remarque

Retour sur les hypothèses.

Nous avons considéré que le gaz subissait une évolution isotherme, il s'agit là d'une hypothèse très forte !

En effet, pour que la température soit réellement constante, il faut que l'équilibre thermique ait le temps de se réaliser et ça, justement, ça prend du temps !

En considérant que l'hypothèse est justifiée, cela **oblige** donc à supposer que l'écoulement est mécaniquement stationnaire car il serait inconcevable, voire physiquement contradictoire, de dire qu'une évolution soit mécaniquement en régime transitoire alors qu'elle est thermiquement en régime permanent.

Ceci étant, dans le cas où nous voudrions faire l'hypothèse inverse, à savoir que l'évolution mécanique est rapide, très rapide, nous pourrions considérer que l'évolution est adiabatique, ce qui donnerait, pour un gaz parfait une loi de type Laplace $P\,V^\gamma = \mathrm{C^{te}}$.

L'inconvénient d'une telle situation est que la hauteur finale serait plus haute parce que le gaz se serait refroidit.

Mais en se réchauffant jusqu'à la température initiale T_0, comme la vie (et surtout la physique) est bien faite, nous retrouverions que la hauteur finalement finale est bien celle déterminée dans l'exercice avec l'hypothèse (fausse) d'isothermicité.

❃ Exercice 8

Ce problème est analogue à l'exemple traité en cours des oscillations dans un tube en U. La différence c'est qu'ici il y a des pressions aux limites qui ne sont pas « instantannément » connues.

Analyse physique. Pour décrire l'état d'un gaz, nous avons besoin de deux paramètres parmi (P,V,T). *Mais à l'aide d'une loi d'évoultion (ici l'adiabaticité), nous allons pouvoir établir des liens entre les deux grandeurs choisies (ici* P *et* V*).*

Pour le reste, nous allons faire comme d'habitude, à savoir faire l'hypothèse d'un régime laminaire, d'un écoulement parfait, …

Rappelons que comme il va y avoir des oscillation, il n'est en aucun cas possible de faire l'hypothèse de stationnarité ou de quasistationnarité car, justement, des oscillations, c'est tout sauf stationnaire !

Analyse technique. Pour tout ce qui est de l'utilisation de bernoulli, *c'est bien sûr impossible puisque l'écoulement n'est pas stationnaire. Toutefois rien n'interdit de s'en inspirer et, d'ailleurs, c'est même la méthode usuelle : copier (sans vergogne) la démonstration de la relation de* Bernoulli *dans le cas d'écoulement parfait laminaires non stationnaires.*

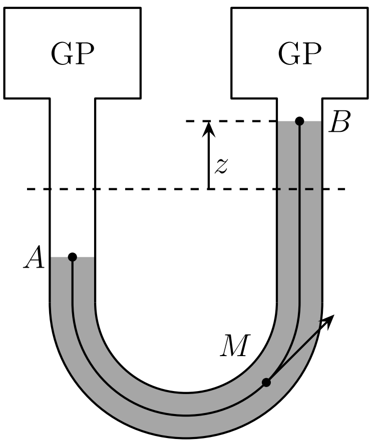
Nous pouvons tout d'abord faire l'approximation selon laquelle la vitesse ne dépend pas de la distance à l'axe du tube car l'épaisseur de la couche limite est négligeable (écoulement parfait).

De plus comme le tube est de section constante et le fluide incompressible, la conservation du débit volumiuque montre que le module du champ des vitesses ne dépend que du temps et non du point.

Nous pouvons donc écrire avec $\vec{\tau}(M)$ est le vecteur unitaire tangent à la ligne de courant passant par M :

$$\vec{v}(M,t) = v(t)\,\vec{\tau}(M) = \dot{z}(t)\,\tau(M)$$

Intégrons l'équation d'Euler le long de la ligne de courant AB :



$$\int_A^B \mu\,\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_A^B -\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mu\,g\,z)\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Or :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}\ell\,\vec{\tau} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot\vec{\tau} = \frac{\partial \dot{z}(t)\,\vec{\tau}}{\partial t}\cdot\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 z(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = \ddot{z}(t)$$

Cela donne :

$$\int_A^B \mu\,\ddot{z}(t)\,\mathrm{d}\ell + \left[\frac{\mu\,v^2}{2} + P + \mu\,g\,z\right]_A^B = 0$$

Sachant que $v_A = v_B$ et que $z_B(t) - z_A(t) = 2\,z(t)$, il vient :

$$L\,\ddot{z}(t) + \frac{P_B - P_A}{\mu} + 2\,g\,z = 0$$

Pour exprimer P_A et P_B, écrivons l'équation de Laplace pour le gaz de chaque compartiment, qui subit une transformation adiabatique réversible :

$$P_A\,(V_\mathrm{e} + S\,z(t))^\gamma = P_\mathrm{e}\,V_\mathrm{e}^\gamma \qquad \text{et} \qquad p_B\,\big(V_\mathrm{e} - S\,z(t)\big)^\gamma = P_\mathrm{e}\,V_\mathrm{e}^\gamma$$

Comme il s'agit de petites oscillations, nous pouvons linéariser les équations précédentes (ce qui revient techniquement à faire un développement limité) avec $S\,z(t) \ll V_\mathrm{e}$ d'où :

$$P_A = P_\mathrm{e}\,\left(1 - \frac{\gamma\,S}{V_\mathrm{e}}\,z(t)\right) \qquad \text{et} \qquad P_B = P_\mathrm{e}\,\left(1 + \frac{\gamma\,S}{V_\mathrm{e}}\,z(t)\right)$$

Remarque. nous pouvons vérifier que si $z > 0$, $P_B > P_\mathrm{e}$ et $P_A < P_\mathrm{e}$.

Finalement nous arrivons à : $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{2}{L}\left(\dfrac{\gamma\,P_\mathrm{e}\,S}{V_\mathrm{e}} + g\right) z(t) = 0$.

Les petites oscillations sont harmoniques, de pulsation $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{2}{L}\left(\dfrac{\gamma\,P_\mathrm{e}\,S}{V_\mathrm{e}} + g\right)}}$.

Remarque

L'équation finale est rassurante car les oscillations ont une pulsation plus grande que lorsqu'elles se font à l'air libre.

Cela est dû à l'effet « ressort » des gaz confinés dans les volumes aux extrémités du tube.

D'ailleurs, l'hypothèse d'adiabaticité est toute naturelle car les oscillations sont mécaniquement trop rapides pour que l'équilibre thermique ait le temps de se faire.

Si les oscillations s'arrêtent (rapidement), c'est essentiellement à cause des frottements entre les parois du tube et l'eau.

Exercice 9

Au point de vue de la phénoménologie, nous avons affaire ici à un écoulement de type Poiseuille *pour lequel le gradient de pression est dû à la pesant. L'écoulement est laminaire ici, visqueux, pas de difficulté particulière pour déterminer les équations. En revanche, comme l'une des faces du fluide est libre, il sera un peu (mais pas trop) délicat d'écrire la condition aux limites à cet endroit.*

$\boxed{1.}$ Le champ des vitesses ne dépend que de y et il est porté par Ox donc l'accélération convective $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\vec{v} = v_x\,\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}$ est nulle.

Le régime est permanent donc l'accélération locale est nulle aussi.

Finalemen l'équation de Navier – Stokes (qu'il faut savoir redémontrer) se simplifie en :

$$\vec{0} = \mu\,\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2}\,\vec{u}_x$$

Remarque. ici on ne peut pas négliger le poids puisqu'il s'agit là de la forme même qui fait s'écouler le fluide le long de la pente.

En projetant cette équation sur Oy nous obtenons d'abord le champ de pression (qui est un champ de pression hydrostatique comme tout champ de pression perpendiculairement à des lignes de courant) :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\mu\,g\,\cos\alpha \qquad \rightsquigarrow \qquad P(y) = P_0 + \mu\,g\,\cos\alpha\,(h-y)$$

Les conditions aux limites en h étant invariante par translation suivant x nous constatons alors que la pression ne dépend pas de x non plus.

L'équation de Navier – Stokes projetée sur Ox donne alors :

$$\eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = -\mu\,g\,\sin\alpha \qquad \rightsquigarrow \qquad v(y) = -\frac{1}{2}\,\frac{\mu\,g}{\eta}\,\sin\alpha\,y^2 + A\,y + B$$

Sur le plan, la vitesse est nulle car le fluide adhère à la paroi donc $v(0) = 0$ ce qui donne $B = 0$.

Sur le plan $z = h$, le fluide adhère à l'air ce qui impose non pas $v(h) = 0$ mais $v_\mathrm{air}(h) = v_\mathrm{air}(h)$, ce qui ne nous apprends rien sur le fluide.

En fait, pour écrire la condition limite au niveau de la surface libre, nous allons montrer que la contrainte tangentielle est nulle.

Pour cela, appliquons le PFD sur une particule de fluide à cheval sur l'interface et faisons tendre son épaisseur vers 0.

Comme son accélération reste finie, il vient, en projection sur Ox :

$$0 = -\eta_{\text{fluide}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(h^-) + \eta_{\text{air}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(h^+)$$

Sachant que $\eta_{\text{air}} \ll \eta_{\text{fluide}}$ nous en déduisons $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(h^-) = 0$.

Avec l'écriture précédente du champ de vitesse nous pouvons ainsi obtenir successivement :

$$A = \mu\, g \sin\alpha \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{v(y) = \frac{\mu\, g}{2\,\eta} \sin\alpha\, y\,(2\,h - y)}$$

REMARQUE

Une fois de plus, quand il manque une condition limite en mécanique, il faut revenir au bon vieux PFD.

De plus le fait que la force tangentielle soit nulle pour une surface libre est analogue (avec les notations du cours) au fait que, pour une corde tendue suivant Ox, la tension sur y soit nulle à l'extrémité où celle ci est libre de se déplacer sur une tige verticale sans frottement.

2. Le débit volumique à travers une section de largeur ℓ vaut, d'après la définition :

$$D_v = \int_0^h v(y)\,\ell\,\mathrm{d}y \quad \rightsquigarrow \quad (\cdots) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{D_v = \frac{\mu\, g}{3\,\eta} \sin\alpha\,\ell\, h^3}$$

Et la vitesse moyenne $v_{\text{m}} = \dfrac{D_v}{\ell\, h}$ soit $\boxed{v_{\text{m}} = \dfrac{\mu\, g}{3\,\eta} \sin\alpha\, h^2}$.

3. $\text{Re} = \dfrac{\mu\, h\, v_{\text{m}}}{\eta}$.

Le calcul est valable pour un écoulement laminaire donc un nombre de REYNOLDS faible : c'est le cas de l'huile mais pas de l'eau.

Exercice 10

1. *Pas de difficulté ici, nous sommes dans un cas connu, à savoir celui d'un écoulement stationnaire.*

La vitesse de sortie est donnée par la formule de TORRICELLI (à savoir redémontrer rapidement) $v = \sqrt{2\,g\,h}$.

La conservation du débit volumique donne $s\,v = -S\,\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ (attention au signe).

L'équation vérifiée par $h(t)$ est donc :

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2\,g\,h(t)}$$

➨ **Première méthode de résolution.** Pour résoudre cette équation différentielle, nous peut songer à la méthode de la séparation des variables. Cela donne :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,\mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad 2\,(\sqrt{h} - \sqrt{h_0}) = -\frac{s}{S}\sqrt{2\,g}\,t \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{h(t) = h_0 \left(1 - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{2\,g}{h_0}}\,t\right)^2}$$

➜ *Deuxième méthode de résolution.* Au cas la méthode de séparation des variables ne ferait pas envie (alors qu'elle est si facile), il est possible de la manipuler « habilement » de manière à faire apparaître une nouvelle équation.

Ainsi, enélevant l'équation différentielle au carré et la dérivant, nous obtenons :

$$\left(\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{s^2}{S^2}\,2\,g\,h(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad 2\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{s^2}{S^2}\,2\,g\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{s^2}{S^2}\,g$$

Cette équation s'intègre en $h(t) = \dfrac{s^2}{2\,S^2}\,g\,t^2 + A\,t + B$.

Les conditions aux limites (en fait initiales) sont $h(0) = h_0$ et, puisqu'il en faut une deuxième (équation du second ordre oblige) : $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(0) = -\dfrac{s}{S}\sqrt{2\,g\,h_0}$.

Tous calculs faits, nous retrouvons $\boxed{h(t) = h_0\left(1 - \dfrac{s}{S}\sqrt{\dfrac{2\,g}{h_0}}\,t\right)^2}$.

REMARQUE

La première méthode fonctionne très bien, mais, par rapport à la deuxième méthode, elle est un tout petit peu plus difficile à intégrer (quoique).

La deuxième méthode, quant à elle, permet d'avoir une équation différentielle plus facile à résoudre, mais à la condition de bien penser à toutes les conditions initiales d'une part mais surtout à condition d'avoir eu la bonne idée de manipuler exactement comme il fallait l'équation pour obtenir une nouvelle équation soluble.

$\boxed{\text{2. (a)}}$ *Analyse physique. Dans cette question nous devons nous concentrer uniquement le régime transitoire : il ne faut donc pas oublier que $h = \mathrm{C^{te}} = h_0$!*

Analyse technique. Comme tout ce qui est régime transitoire avec des fluides parfaits, nous allons nous inspirer de BERNOULLI *en intgrant l'équation d'*EULER.

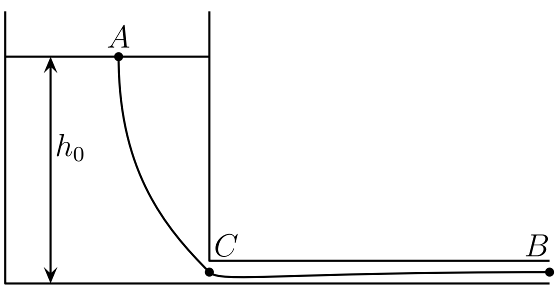
Dans le récipient, la vitesse du fluide est négligeable et dans le tuyau elle s'écrit $\vec{v}(M,t) = v(M,t)\,\vec{u}_x$.

Le fluide est incompressible donc le débit volumique se conserve dans tout le tuyau : $D_v(t) = v(M,t)\,s$ et comme la section ne dépend pas du point, $v(M,t)$ non plus mais ne dépend que du temps $v(M,t) = v(t)$.

L'équation d'EULER s'écrit :

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

Intégrons-la le long d'une ligne de courant ACB reliant un point A de la surface libre à un point B du jet de sortie.



$$\int_A^B \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}\, v^2 + \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \wedge \vec{v} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = - \int_A^B \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}}\, P + \overrightarrow{\text{grad}}\,(g\,z) \right) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

Cela donne d'abord $\displaystyle\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g\,z \right]_A^B = 0.$

De A à C la vitesse est négligeable donc $\displaystyle\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \simeq \int_C^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}.$

De C à B la vitesse s'écrit $\vec{v} = v(t)\,\vec{u}_x$ donc $\displaystyle\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x.$

Finalement $\displaystyle\int_C^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,L.$

Comme la pression est la même en A et B (pression atmosphérique), il reste :

$$L\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v^2}{2} = g\,h = g\,h_0 = \frac{{v_\infty}^2}{2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{{v_\infty}^2 - v^2} = \frac{1}{v_\infty}\,\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2\,L}{v_\infty}$$

En intégrant cette dernière de 0 à t nous trouvons $\boxed{v(t) = v_\infty\,\tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)}$.

Remarque

Comme nous pouvons le voir dans l'expression de τ, le régime transitoire est d'autant plus important que la longueur du tuyau est grande.

En effet, ce qui se passe, c'est qu'une fois la vanne ouverte, il y a une chute brutale de la pression dans tout le tuyau et l'eau qui y est contenue se met en mouvement.

Sauf que s'il y a beaucoup d'eau qui doit se mettre en mouvement (si L est grand), cela représente une bonne grande dose d'inertie ce qui explique que la vitesse limite n'est pas atteinte instantannément.

Dans le cas de la vidange du réservoir « classique », il n'y a pas de tuyau donc pas de régime transitoire.

2. (b) La durée du régime transitoire est de l'ordre de τ.

Ici $v_\infty = \sqrt{\dfrac{2\,P_1}{\mu}}$ avec $P_1 = 6$ bar.

L'application numérique donne $\tau = 0{,}6$ s, beaucoup plus rapide que la durée de remplissage du lavabo.

Dans les cas pratiques, le régime transitoire peut la plupart du temps être oublié et la formule de Torricelli adoptée.

3. La démarche est exactement la même qu'à la question précédente, la seule différence étant qu'ici la hauteur h varie.

Cela donne directement l'équation différentielle :

$$L\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v^2}{2} = g\,h(t)$$

La conservation du débit permet de remplacer $v(t)$ par $-\dfrac{S}{s}\,\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$.

L'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ est donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2h(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{S}{2\,L\,s}\left(\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{s\,g}{S\,L}\,h(t) = 0$$

Dans un premier temps (très court), c'est le régime transitoire étudié à la question précédente : la vitesse augmente beaucoup, la hauteur varie peu.

Dans un deuxième temps, la vitesse décroît linéairement : c'est le régime quasi-permanent étudié à la première question.

Avec les valeurs numériques proposées $v_\infty = 2{,}0$ m.s^{-1}, ce qui correspond bien à la valeur maximale de $v(t)$.

L'application numérique de la deuxième question donne $\tau = 0{,}2$ s ce qui est tout à fait conforme à ce que nous pouvons lire sur la courbe.

Enfin la durée de vidange est de l'ordre de 80 s alors que l'application numérique de la première question donne 81 s. Tout va bien ! Les hypothèses simplificatrices faites sont parfaitement valides : nous n'avons pas fait n'importe quoi (normal : nous avons fait de la physique).

Exercice 11

C'est un exercice pas extrêmement difficile en soi mais qui peut poser quelques problèmes de modélisation et de discussion.

1. Notons H' la hauteur du bateau qui se trouve dans l'eau.

La résultante des forces de pression sur le bateau rempli (enfin un peu rempli) d'eau est, en notant Oz l'axe vertical ascendant :

$$\vec{F}_{\mathrm{p}} = \Big((P_0 + \rho\,g\,H')\,S - P_0\,S\Big)\,\vec{u}_z = \rho\,g\,H'\,S\,\vec{u}_z$$

Remarque. cette force, à savoir la résultante de **toutes** les forces pressante n'est autre que … la poussée d'Archimède !

À l'équilibre, cette force compense exactement le poids du bateau (carcasse + eau contenue) et ainsi :

$$\rho\,g\,H'\,S = M\,g + \rho\,h\,S\,g \qquad \rightsquigarrow \qquad H'_{\text{éq}} = h + \frac{M}{\rho\,S}$$

Le bateau coule si la hauteur immergée est plus grande que H ou (ce qui revient au même) si la hauteur emmergée est négative.

À la limite, nous avons $H'_{\mathrm{lim}} = H$ et $\boxed{h_{\mathrm{m}} = H - \dfrac{M}{\rho\,S} = 14{,}1\text{ m}}$.

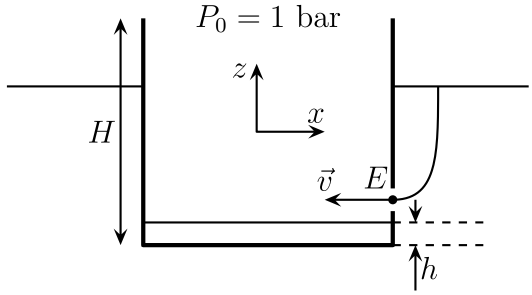
2. (a) Le remplissage se déroule en deux étapes :

- ➜ tout d'abord le niveau d'eau dans le bateau monte jusqu'au niveau du trou
- ➜ le niveau de l'eau monte de la hauteur du trou à la hauteur h_{m}.

Ensuite Léonardo est sur un radeau et c'est la fin du film.

2. (b) Pendant la première phase.

Petit problème *a priori* : pour déterminer le débit entrant dans le bateau, il faut déterminer la vitesse du fluide par rapport au bateau, sauf que la mer étant globalement immobile, Bernoulli nous apportera des réponses plus facilement dans le référentiel lié à la mer. Ceci dit, point d'inquiétude car, le régime étant quasi-stationnaire (près de 3 heures pour couler un bateau sur lequel navigue Leonardo) tout se passera bien.



Le théorème de Bernoulli dans le référentiel lié à la mer, le long d'une ligne de courant entre la surface de la mer et le trou du bateau donne : $v^2(E/\text{mer}) = 2\,g\,(H'(t) - \ell)$. Or le débit entrant dans le bateau vaut en utilisant la loi de composition des vitesses :

$$D_v = (-s\,\vec{u}_x)\cdot\vec{v}(E/\text{bateau}) = -s\,\vec{u}_x\cdot\Big(\vec{v}(E/\text{mer}) + \vec{v}(\text{mer}/\text{bateau})\Big)$$
$$= -s\,\vec{u}_x\cdot\left(\vec{v}(E/\text{mer}) + \frac{\mathrm{d}H'(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z\right) = -s\,\vec{u}_x\cdot\vec{v}(E/\text{mer})$$

Nous obtenons ainsi :

$$D_v = s\,\sqrt{2\,g\,(H'(t) - \ell)} = S\,\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$$

De plus comme le trou est petit, la situation est quasistatique : nous pouvons dire que le bateau est toujours en équilibre ; tant qu'il n'a pas coulé, il flotte grâce à la poussée d'Archimède et la relation de la première question est toujours valable, ce qui donne :

$$H'(t) = h(t) + \frac{M}{\rho\,S} \stackrel{\text{not}}{=} h(t) + H_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}H'(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$$

Remarque. même lorsque le bateau coule il est soumis à la poussée d'Archimède !

Nous obtenons alors l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{s}{S}\,\sqrt{2\,g\,(H_0 - \ell + h(t))}$$

Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables, que nous allons séparer immédiatement :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2\,g\,(H_0 - \ell + h)}} = \frac{s}{S}\,\mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{g}\,\left(\sqrt{2\,g\,(H_0 - \ell + h(t))} - \sqrt{2\,g\,(H_0 - \ell)}\right) = \frac{s}{S}\,t$$

Avec la condition initiale $h(0) = 0$, cela se réécrit :

$$h(t) = \frac{1}{2\,g}\left(\frac{g\,s}{S}\,t + \sqrt{2\,g\,(H_0 - \ell)}\right)^2 + \ell - H_0$$

Remarque

Nous pouvions aussi résoudre cette équation différentielle en l'élevant au carré puis en la dérivant, comme dans l'exercice 16.

Mais nous pouvions aussi ne pas séparer les variables mais l'écrire sous la forme d'une dérivée connue et primitiver par rapport au temps (ce qui revient au même :

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{2\,g\,(H_0-\ell+h)}}=\frac{s}{S} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{1}{g}\left(\sqrt{2\,g\,(H_0-\ell+h(t))}-\sqrt{2\,g\,(H_0-\ell)}\right)=\frac{s}{S}\,t$$

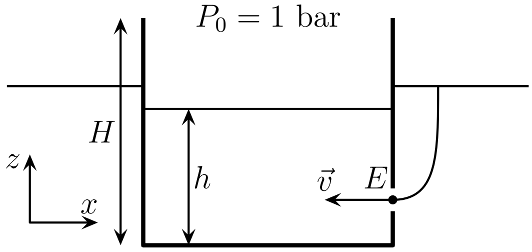
La première phase se termine à l'instant t_1 tel que $h(t_1)=\ell$.
Cela donne, en prenant $s=1{,}0\ \mathrm{m}^2$:

$$\boxed{t_1=\frac{S}{g\,s}\left(\sqrt{2\,g\,H_0}-\sqrt{2\,g\,(H_0-\ell)}\right)=\underline{40}45{,}46\ \mathrm{s}}$$

$\boxed{\text{2. (c)}}$ Pendant la deuxième phase :
La relation de Bernoulli le long de la ligne de courant AE dans le référentiel lié à la mer donne :

$$P_E+\frac{\rho}{2}\,v^2(E/\mathrm{mer})=P_0+\rho\,g\,(H'(t)-\ell)$$

Comme la situation est quasi-statique, nous pouvons dire que la répartition de pression dans le bateau est hydrostatique donc $P_E=P_0+\rho\,g\,(h(t)-\ell)$, ce qui donne $v(E/\mathrm{mer})=\sqrt{2\,g\,H_0}$.



Remarque. en fait la surface libre dans le bateau reste immobile par rapport au niveau de la mer : le bateau s'enfonce en « avalant de l'eau ».

La conservation du débit volumique permet d'écrire la relation $D_v=S\,\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=s\,\sqrt{2\,g\,H_0}$.
L'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ durant cette phase est :

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{s}{S}\,\sqrt{2\,g\,H_0}$$

Cette équation s'intègre en $h(t)=\dfrac{s}{S}\,\sqrt{2\,g\,H_0}\,(t-t_1)+\ell$.
Cette phase se termine quand $h(t_2)=h_\mathrm{m}$.

$\boxed{\text{2. (d)}}$ Nous trouvons $\boxed{t_2=t_1+\dfrac{h_\mathrm{m}-\ell}{\dfrac{s}{S}\,\sqrt{2\,g\,H_0}}=\underline{12}050{,}7\ \mathrm{s}}$.

Exercice 12

$\boxed{1.}$ Entre les points A et C, l'écoulement est parfait, permanent et incompressible. Nous pouvons donc appliquer la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant AC :

$$P_0+\mu\,g\,z_\ell+\mu\,\frac{{v_A}^2}{2}=P_C+\mu\,\frac{{v_C}^2}{2}$$

La surface du lac est immobile donc $v_A=0$, le débit volumique dans la galerie est $D=s\,v_C$. Nous en déduisons :

$$P_0 + \mu\, g\, z_\ell = P_C + \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{D}{s}\right)^2$$

Dans la cheminée, l'eau est immobile donc $P_C = P_0 + \mu\, g\, z_\mathrm{c}$. Finalement :

$$\boxed{h_0 = z_\mathrm{c} - z_\ell = -\frac{1}{2\,g}\left(\frac{D}{s}\right)^2 = -45\text{ cm}}$$

Remarque. en fait c'est ni plus ni moins que de l'effet VENTURI à grande échelle.

2. (a) Comme dans les cas non stationnaire avec un fluide parfait, la méthode de BERNOULLI peut nous venir en aide. D'ailleurs c'est ce que nous allons faire.

Commençons par écrire l'équation d'EULER en tenant compte du fait que le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v^2 + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{P}{\mu}\right) - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(g\,z)$$

Intégrons-la le long de la ligne de courant AD :

$$\int_A^D \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g\,z\right]_A^D = 0$$

Pour les vitesses :

- dans le lac, de A et B, l'eau est immobile donc $\vec{v} = \vec{0}$
- dans la galerie, de B à C, $\vec{v} = v(t)\,\vec{u}_x = \dfrac{S}{s}\,\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x$
- dans la cheminée de C à D, $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z$

Donc :

$$\int_B^C \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{S}{s}\,\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2}\,L \qquad \text{et} \qquad \int_C^D \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}\,z_\mathrm{c}(t)$$

Mais $S = 10\,s$ et $L \gg z_\mathrm{c}$ donc $\left|\displaystyle\int_C^D \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\right| \ll \left|\displaystyle\int_B^C \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}\right|$ et ainsi

$$\int_A^D \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{S}{s}\,\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2}\,L$$

Finalement l'intégration de l'équation d'EULER sur une ligne de courant se réécrit :

$$\frac{S}{s}\,L\,\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + g\,h(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{s\,g}{S\,L}\,h(t) = 0}$$

car $S \gg s$ et $L \gg h$ ce qui implique que le terme $\left(\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2$ est négligeable **devant les deux autres.**

En posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{s\,g}{S\,L}}$, la solution en $h(t)$ est $h(t) = A\,\cos(\omega_0\,t) + B\,\sin(\omega_0\,t)$.

Les conditions initiales étant $h(0) = h_0$ et $\dot{h}(0) = \dfrac{D}{S}$ par continuité du débit, nous arrivons à :

$$\boxed{h(t) = h_0\,\cos(\omega_0\,t) + \frac{D}{S\,\omega_0}\,\sin(\omega_0\,t)}$$

2. (b) La hauteur maximale est $\boxed{h_M = \sqrt{{h_0}^2 + \left(\dfrac{D}{S\,\omega_0}\right)^2} = 30\text{ m}}$.

3. (a) Une résolution numérique donne $\boxed{t_1 = 74{,}5\text{ s}}$.

3. (b) Quand l'eau déborde, $z_c - z_\ell = h_1 = \text{C}^{\text{te}}$ donc l'équation d'Euler intégrée le long de la ligne de courant AD donne, avec les mêmes approximations :

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} + g\,h_1 = 0$$

Cette équation s'intègre en :

$$\boxed{V(t) = V_1 - \frac{g\,h_1}{L}\,(t - t_1)} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{V_1 = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}t_1^- = 0{,}22\text{ m.s}^{-1}}$$

3. (c) Le déversement s'arrête à t_2 tel que $V(t_2) = 0$.
La durée de déversement $t_2 - t_1$ est donc égale à :

$$\boxed{t_2 - t_1 = \frac{L\,V_1}{g\,h_1} = 11{,}2\text{ s}}$$

3. (d) Le débit volumique de déversement est égal à $S\,V(t)$ donc le volume d'eau déversé est :

$$\mathscr{V} = \int_{t_1}^{t_2} s\,V(t)\,\mathrm{d}t \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{\mathscr{V} = \frac{s\,L\,{v_1}^2}{2\,g\,h_1} = 12{,}1\text{ m}^3}$$

4. Une fois le déversement terminé, nous retrouvons l'équation différentielle de la deuxième question mais avec des conditions initiales différentes : à $t = t_2$, $h(t_2) = h_1$ et $\dot{h}(t_2) = 0$.

La solution est donc $\boxed{h(t) = h_1 \cos\Big(\omega_0\,(t - t_2)\Big)}$. Ce sont des oscillations harmoniques d'amplitude h_1. En réalité, ces oscillations sont amorties à cause des frottements de l'eau contre les parois de la cheminée et des interactions interne à l'eau (viscosité). Le niveau de l'eau se stabilisera à $h = 0$, *i.e.* au niveau du lac.

5. Sans cheminée, la fermeture de la vanne aurait pour rôle de stopper net toute l'eau contenu dans la canalisation. 10 km d'une canalisation de 10 m^2 avec de l'eau en mouvement, cela fait une bonne dose d'énergie cinétique à absorber pour la vanne. Sûrement trop … Ce phénomène s'appelle un « coup de bélier ».

❀ Exercice 13

1. Le fluide est incompressible donc div $\vec{v} = 0$ ce qui impose $\boxed{\triangle\,\varphi = 0}$.
En remplaçant $\varphi(x,y,z,t)$ par son expression, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad X''\,Y\,Z + X\,Y''\,Z + X\,Y\,Z'' = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$

Comme les variables sont indépendantes, les trois termes sont constants. En effet en fixant par exemple $y = y_0$ et $z = z_0$, nous voyons bien que $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y_0)}{Y(y_0)} - \dfrac{Z''(z_0)}{Z(z_0)} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$.

Commençons par l'équation en $X(t)$. Elle s'écrit :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \overset{\text{not}}{=} \alpha \qquad \rightsquigarrow \qquad X''(x) = \alpha\, X(x)$$

Comme le fluide est parfait, la vitesse du fluide doit être tangente aux parois ce qui signifie que sa composante normale doit être nulle. Pour la vitesse en x cela donne :

$$v_x(0,y,z,t) = 0 = X'(0)\, Y(y)\, Z(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\, t} \qquad \rightsquigarrow \qquad X'(0) = 0$$

De même $X'(a) = 0$. La fonction $X'(x)$ devant s'annuler deux fois, la constante α ne peut être que négative de sorte que la fonction $X(x)$ soit sinusoïdale. Avec $\alpha > 0$ nous aurions obtenu une fonction sinusoïdale hyperbolique et cela n'aurait pas marché. Nous pouvons donc poser $\alpha = -k_x^2$.

Alors $X(x) = A \cos(k_x\, x) + B \sin(k_x\, x)$ et $X'(0) = 0$ impose $B = 0$ puis $X'(a) = 0$ impose $k_x\, a = n_x\, \pi$ avec n_x entier. Il reste $\boxed{X(x) = X_0 \cos\left(\dfrac{n_x\, \pi\, x}{a}\right)}$.

Nous pouvons procéder de même pour $Y(y)$ et obtenir $\boxed{Y(y) = Y_0 \cos\left(\dfrac{n_y\, \pi\, y}{b}\right)}$

En reportant ces deux solutions dans l'équation initiale, nous trouvons :

$$Z''(z) = \left[\left(\frac{n_x\, \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\, \pi}{b}\right)^2\right] Z(z)$$

La solution de cette équation est donc :

$$\boxed{Z(z) = Z_1 \mathrm{e}^{K\, z} + Z_2\, \mathrm{e}^{-K\, z}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{K = \sqrt{\left(\frac{n_x\, \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\, \pi}{b}\right)^2}}$$

Remarque. nous traduirons la nullité de la vitesse au fond de la cuve plus tard.

2. L'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \wedge \vec{v} = -\frac{1}{\mu}\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \vec{g}$$

Nous pouvons linéariser cette équation en remarquant :

$$\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v^2\| \sim \frac{v^2}{a} \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\| = \omega\, v \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v^2\|}{\left\|\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|} \sim \frac{v}{a\, \omega} \sim \frac{\xi_0}{h} \ll 1$$

où a est la longueur caractéristique de la largeur du bassin et ξ_0 l'amplitude des vibrations. Pour comprendre d'où vient le a dans l'estimation de l'ordre de grandeur, calculez $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$.

Finalement, nous pouvons réécrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + g\, z\right) = \vec{0}$$

ou encore, à la surface : $\boxed{\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{P_{\text{atm}}}{\mu} + g\,\xi(x,z,t) = C(t)}$.

Étant donné que la seule grandeur physique est $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$, nous pouvons constater que le potentiel des vitesses étant défini à une fonction du temps près. Nous pouvons donc choisir la fonction $C(t)$ de façon totalement arbitraire. Soyons simple et prenons $\boxed{C(t) = 0}$.

$\boxed{3.}$ Dérivons l'équation obtenue : $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x,y,\xi(x,y,t),t) = g\,\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$.

Or $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z(x,y,\xi(x,y,t),t) = \dfrac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}t} \simeq \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ car nous avons montré à la question précédente que l'accélération convective était négligeable devant l'accélération locale.

Nous pouvons en déduire la relation $-\omega^2\,Z(\xi) + g\,Z'(\xi) = 0$ que nous **devons** prendre en $z = h$ et non en $z = \xi$ car nous sommes en pleine approximation au premier ordre. Et quand on a commencé, on est obligé de continuer !

Il vient ainsi :

$$\omega^2\left(Z_1\,\mathrm{e}^{K\,h} + Z_2\,\mathrm{e}^{-K\,h}\right) = g\,K\left(Z_1\,\mathrm{e}^{K\,h} - Z_2\,\mathrm{e}^{-K\,h}\right)$$

D'autre part la vitesse du fluide est tangente au fond de la cuve en $z = 0$ donc $v_z(x,y,0,t) = 0$ d'où $Z'(0) = 0$ ce qui donne $Z_1 = Z_2$. Nous en déduisons la relation recherchée :

$$\boxed{\omega^2 = K\,g\,\tanh(K\,h)} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{K = \sqrt{\left(\frac{n_x\,\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\,\pi}{b}\right)^2}}$$

La plus petite pulsation est obtenue pour $\boxed{n_x = 1 \text{ et } n_y = 0}$.

❀ Exercice 14

$\boxed{1.\ (a)}$ Le fluide étant incompressible, le débit volumique se conserve. Donc, en tout point M du tube, $D(t) = s\,v(M,t)$ est indépendant de M. La section du tube étant constante, la vitesse est uniforme dans le tube.

Écrivons le TCI pour le système { eau dans le tube à l'instant t }. Comme chaque point de ce système a la même vitesse, nous pouvons dire qu'il se comporte comme un solide. Les seules forces qui agissent horizontalement sont la pression en A de résultante $+P_A\,s\,\vec{u}_x$ (avec $\vec{u}_x$ vers la droite) et les forces pressantes en B de résultante $-P_B\,s\,\vec{u}_x$. Les forces tangentielles le long de la paroi sont nulles puisque la viscosité est négligée.

La masse (constante) de ce système vaut $M = \mu\,L\,s$ et le TCI s'écrit donc en projection sur $\vec{u}_x$:

$$\mu\,L\,s\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = +P_A\,s - P_B\,s \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{P_B - P_A = -\mu\,L\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\ (☼)}$$

$\boxed{1.\ (b)}$ ➜ *Première méthode : avec la relation de* Bernoulli.

La conservation du débit impose $v_{\text{surf}}\,S_1 = v(t)\,s$ où v_{surf} est la vitesse du fluide en un point de la surface du récipient 1. Ainsi $v_{\text{surf}} = v(t)\,\dfrac{s}{S} \ll v(t)$ et on peut négliger la vitesse du fluide à la surface. Cela implique que le régime **dans** le récipient 1 est quasi-permanent.

Nous sommes en présence d'un fluide parfait, incompressible, en régime permanent … Bernoulli est notre ami ! Mais attention : nous ne pouvons utiliser ses théorèmes **tant que la ligne de courant ne traverse pas le tube dans lequel le régime est non quasi-permanent**.

Ainsi entre un point de la surface du récipient 1 et A nous obtenons, en négligeant la vitesse du fluide sur la surface :

$$\frac{P_0}{\mu} + \cancel{\frac{1}{2}\,v_{\text{surf}}^2} + g\,h_1 = \frac{P_A}{\mu} + \frac{1}{2}\,v^2(t) + 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P_A = P_0 + \mu\,g\,h_1(t) - \frac{1}{2}\,\mu\,v^2(t)$$

De même pour le récipient 2 : $P_B = P_0 + \mu\,g\,h_1(t) - \dfrac{1}{2}\,\mu\,v^2(t)$ et ainsi $P_B - P_A = \mu\,g\,(H_2(t) - h_1(t))$ (▦).

En regroupant les relations (☼) et (▦) nous obtenons $L\,\dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + g\,(h_2(t) - h_1(t)) = 0$ (❄).

La conservation du débit dans les deux récipients impose (attention aux signes) :

$$-S_1\,\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t} = s\,v(t) = S_2\,\frac{\mathrm{d}h_2(t)}{\mathrm{d}t}$$

et en dérivant l'équation précédente, nous obtenons : $\boxed{L\,\dfrac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + g\,s\,\left(\dfrac{1}{S_1} + = \dfrac{1}{S_2}\right)\,v(t) = 0}$.

La dénivellation n'est autre que $z(t) = h_1(t) - h_2(t)$. En remarquant que $\dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -\left(\dfrac{s}{S_1} + \dfrac{s}{S_2}\right)\,v(t)$ on trouve tout de suite que :

$$L\,\frac{\mathrm{d}^3z(t)}{\mathrm{d}t^3} + g\,s\,\left(\frac{1}{S_1} + = \frac{1}{S_2}\right)\,\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad L\,\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} + g\,s\,\left(\frac{1}{S_1} + = \frac{1}{S_2}\right)\,z(t) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

À l'équilibre, la dénivellation est nulle donc $z(t) = 0$ **doit** être solution de l'équation, ce qui impose $\mathrm{C}^{\mathrm{te}} = 0$ et donc :

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2} + g\,s\,\left(\frac{1}{S_1} + = \frac{1}{S_2}\right)\,z(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad z(t) = A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t)$$

où $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}\,\left(\dfrac{s}{S_1} + \dfrac{s}{S_2}\right)}$ est la pulsation propre des oscillations.

Compte tenu des conditions initiales : $z(0) = h_0$ et $\dot{z}(0) = 0$ nous arrivons à $\boxed{z(t) = h_0\,\cos(\omega\,t)}$.

➜ *Deuxième méthode : méthode énergétique.* Montrons que l'énergie du système { toute l'eau } est constante.

Liste des forces extérieures qui s'exercent :

- ➜ forces à distance :
  - ➜ le poids : conservatif
  - ➜ il n'y en a pas d'autre
- ➜ forces de contact :
  - ➜ les forces normales exercées par les parois (forces pressantes) : comme le fluide glisse sur les parois les forces sont orthogonales aux déplacements des points qui subissent les forces, ce qui implique un travail échangé nul
  - ➜ on néglige les forces de viscosité donc il n'y a pas de forces de contact tangentielles exercées par les parois
  - ➜ les forces pressantes exercées par l'atmosphère sur les surface S_1 et S_2. Le travail élémentaire fourni par ces deux forces vaut $P_0\,S_1\,\mathrm{d}h_1 + P_0\,S_2\,\mathrm{d}h_2$. Or la conservation du débit impose $S_1\,\mathrm{d}h_1 = -S_2\,\mathrm{d}h_2$ donc le travail total fourni par les forces pressantes exercées par l'atmosphère est nul.

Étant donné que la viscosité est négligée, on peut dire que la puissance des interactions intérieure est nulle.

Finalement, nous voyons bien que l'énergie mécanique totale du système { toute l'eau } se conserve.

L'énergie potentielle. En prenant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en $z = 0$ et en appelant z_1 et z_2 les cotes des deux surfaces libres, on a $E_\text{p} = \mu\, g\, z_1\, S_1\, \frac{z_1}{2} + \mu\, g\, z_2\, S_2\, \frac{z_2}{2}$.

L'énergie cinétique. L'énergie cinétique de l'eau contenue dans les récipients est négligeable devant celle de l'eau contenue dans le tube. En effet, en utilisant la conservation du débit on trouve :

$$\frac{E_\text{c1}}{E_\text{c,tube}} \simeq \frac{S_1\, h_1\, \dot{h}_1}{s\, L\, v^2} = \frac{s\, h_1}{S_1\, L} \ll 1 \qquad \rightsquigarrow \qquad E_\text{c,total} = \frac{1}{2}\, \mu\, L\, s\, v^2$$

Rassemblement. Nous avons ainsi :

$$E_\text{c} + E_\text{p} = \frac{1}{2}\, \mu\, L\, s\, v^2 + \frac{1}{2}\, \mu\, g\, z_1^2\, S_1 + \frac{1}{2}\, \mu\, g\, z_2^2\, S_2$$

ce qui donne, en dérivant et en utilisant la conservation du débit, l'équation (❋).

$\boxed{2.}$ Le théorème de la puissance cinétique appliqué à l'ensemble du fluide s'écrit :

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}(E_\text{c} + E_\text{p}) = -8\, \pi\, \eta\, L\, v_\text{m}^2$$

Pour les mêmes raison qu'à la question précédente, l'énergie cinétique du fluide dans les récipients est négligeable devant celle du fluide dans le tuve. Cette dernière se calcule en sommant les énergies cinétiques des petites couronnes élémentaires :

$$E_\text{c,tube} = \int_0^a \frac{1}{2}\, \mu\, v^2(r)\, \text{d}\tau = \int_0^a \frac{1}{2}\, \mu\, v^2(r)\, L\, 2\, \pi\, r\text{d}r = (\cdots) = \frac{\mu\, \pi\, a^6}{6\, L} \left(\frac{P_B(t) - P_A(t)}{4\, \eta} \right)^2$$

Dans les deux grands récipients, nous ne tenons pas comtpe de la viscosité car leurs rayons sont très grands devant l'épaisseur de la couche limite, ce qui n'est pas le cas dans le tube. La relation $p_B(t) - p_A(t) = \mu\, g\, (h_2(t) - h_1(t))$ issue de deux relations de Bernoulli appliquée à des fluides où les phénomènes de viscosité sont négligeables (à l'intérieur des récipients) reste donc valable.

La conservation du débit s'écrit maintenant :

$$D(t) = -S_1\, \frac{\text{d}h_1(t)}{\text{d}t} = \pi\, a^2\, v_\text{m}(t) = S_2\, \frac{\text{d}h_2(t)}{\text{d}t} \quad \text{avec} \quad D(t) = \int_0^a v(r)\, 2\, \pi\, r\, \text{d}r = \frac{P_A(t) - P_B(t)}{8\, \eta\, L}\, a^2 \times \pi\, a^2$$

L'expression de l'énergie potentielle reste la mee que dans la question précédente.

Tous calculs faits, nous obtenons l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$:

$$\frac{\text{d}^2 z(t)}{\text{d}t^2} + \frac{6\, \pi\, \eta}{\mu\, s}\, \frac{\text{d}z(t)}{\text{d}t} + \frac{3\, g\, s}{4\, L} \left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} \right) z(t) = 0$$

Il s'agit maintenant d'une équation d'un oscillateur amorti dont nous pouvons remarquer que le terme d'amortissement est d'autant plus important que :

➜ la viscosité η est grande
➜ la section s est petite (normal, pensez à l'écoulement de Poiseuille)
➜ l'inertie μ du fluide est faible (ce qui le rend d'autant plus sensible aux forces de viscosité).

$\boxed{3.}$ Nous pouvons remarquer que cette équation dans le cas d'un fluide qui tend à être parfait $\eta \to 0$ n'est pas identique à l'équation vérifiée par un fluide parfait trouvée dans la question précédente.

Cela provient de l'utilisation de l'expression du champ des vitesses dans le cas d'un écoulement de POISEUILLE $v(r) = \dfrac{P_B - P_A}{4\,\eta\,L}\,(r^2 - a^2)$ qui n'est plus vraie pour un fluide parfait.

En effet ce champ des vitesses a été trouvé dans le cas d'un régime **permanent stationnaire** pour un fluide soumis à un gradient de pression.

Or il n'y a **pas** de régime permanent possible pour un fluide parfait soumis à un gradient de pression car il est uniformément accéléré et sa vitesse tend vers $+\infty$ ce que confirme l'expression de l'écoulement de POISEUILLE.

Ainsi tant que la durée caractéristique d'établissement de la couche limite dans le tube $\tau_{\text{cl}} = \dfrac{\mu}{\eta}\,s^2$ reste très grande devant la période des oscillation $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega}$, la première équation trouvée est juste.

Nous nous apercevons alors que, toute choses étant égales par ailleurs, il faut, pour pouvoir négliger les effets de viscosité que $L \ll \text{C}^{\text{te}}$, *i.e.* que la longueur L ne soit pas trop grande.

Or elle a été choisie « suffisamment grande » ...