Mécanique

Chapitre 1

Mécanique du point

Mécanique du point

Dans ce chapitre, nous allons revoir très très rapidement la totalité du cours de mécanique du point de première année.

Les quatre parties correspondent plus ou moins à quatre chapitres de première année :
- ➜ la cinématique
- ➜ la dynamique en terme de force
- ➜ l'approche énergétique
- ➜ le cas particulier du mouvement à force centrale

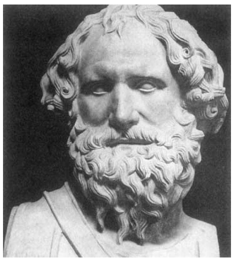
Toute la mécanique des systèmes de points sera revue dans le chapitre suivant.

Table des matières

Biographies succintes

ARCHIMÈDE

(287 av. J.-C. Syracuse – 212 av J.-C. Syracuse)



Peu d'éléments biographiques sur la vie de d'Archimède sont parvenus jusqu'à nous. Son père, Phidias, était un astronome, peut-être de la famille du roi de Syracuse Hiéron. Les travaux d'ARCHIMÈDE ont fait qu'il était sans aucun doute connu de ses comtemporains : vis sans fin, moufles, leviers… Les deux anecdotes les plus célèbres concernant ARCHIMÈDE sont celle où il dit « Donnez-moi un point d'appui et je vous souleverai la Terre » et l'autre lorsqu'il court (nu ?) dans les rues en s'écriant « Eurêka ». En revanche, qu'il ait mis feu à des voiles à l'aide de miroirs semble être un mythe.

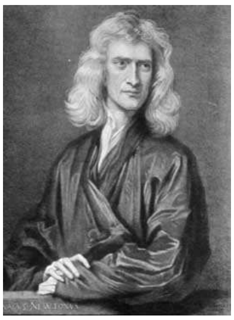
Nicolas COPERNIC

(1473 Torun, Pologne – 1543 Frauenburg, Pologne)

Fils de bourgeois aisé, Nicolas est orphelin de père à 10 mais peut, grâce à l'aide d'un oncle maternel, étudier à l'université de Cracovie. Nicolas étudie alors mathématiques, astronomie, droit et médecine et probablement aussi rhétorique et dialectique. Il quitte l'université 3 ou 4 ans après, non diplômé, et retourne auprès de son oncle qui le fait élire chanoine en 1497 alors qu'il est en Italie depuis 1496 pour étudier la médecine et le droit canon. En 1503, docteur en droit canon (mais pas en médecine), il rentre en Pologne. Il devient alors le médecin personnel de l'évêque tout en poursuivant des recherches en astronomie commencée en Italie. Il publiera l'hypothèse d'un système héliocentrique de manière anonyme dans un livre intitulé *De Revolutionibus Orbium Coelestium*.

Isaac NEWTON

(1642 Woolsthorpe – 1727 Kensington)



Son père meurt quelque temps avant sa naissance et c'est uniquement parce qu'il a montré des aptitudes exceptionnelles que sa mère accepte qu'Isaac aille suivre des études au Trinity College de Cambridge au lieu de reprendre la ferme familiale en 1661. Il interrompt ses études en 1665 à cause d'une épidémie de peste et revient pendant 18 mois à la ferme familiale. C'est là qu'il effectue le plus gros de ses travaux (cf. légende de la pomme). De retour à Cambridge pour finir ses études, il est nommé professeur en 1669 et commence à publier ses travaux seulement en 1670. Il devient aussitôt célèbre. Il publie *Opticks* en 1675 et son œuvre majeure *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* en 1687. Très religieux mais à sa manière, il meurt en refusant les derniers sacrements.

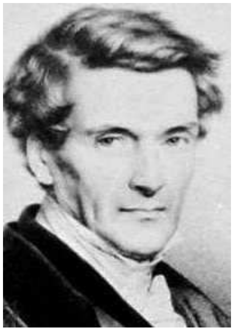
Charles Augustin Coulomb

(1736 Angoulême – 1806 Paris)

Parce qu'il a choisit de suivre des cours de mathématiques plutôt que ceux de médecine auxquels ses parents le destinent, Charles est déshérité et doit aller vivre à Montpellier de 1757 à 1759 dans la famille de son père. Il rentre à Paris en 1759 pour suivre des cours préparatoires au concours d'entrée de l'école de génie de Mézière, concours qu'il réussit. Sorti en 1761, Charles est envoyé en mission en Martinique en 1764 et est rapatrié en 1772 pour raison médicale avec le grade de capitaine. Il effectue des recherches scientifiques tout en assurant son travail d'ingénieur militaire. Promu lieutenant-colonel en 1786, la révolution le force à abandonner tous ses biens en 1791. De retour à Paris sous Bonaparte en 1802, il sera Inspecteur général de l'instruction publique durant les 4 dernières années de sa vie.

Gaspard Gustave de Coriolis

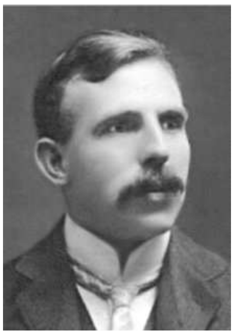
(1792 Paris – 1843 Paris)



Fils d'industriel nancéen, Gaspard entre second à l'école Polytechnique en 1808 et sort ingénieur des Ponts et Chaussées, ce qu'il sera dans les Vosges jusqu'au décès de son père, en 1816, où il prend un poste d'enseignement à l'école Polytechnique sous la direction de Cauchy. À partir de 1829, Gaspard devient professeur à l'école Centrale des Arts et Manufacture. En 1830, le poste de Cauchy à Polytechnique, destitué pour raisons politiques, lui est proposé, mais il refuse. En 1838, de santé fragile, il présente sa démission mais elle est refusée. Il meurt en 1843. Gaspard est connu pour l'accélération qui porte son nom mais il a aussi écrit un célèbre ouvrage sur le billard.

Ernest Rutherford

(1871 Brightwater, Nouvelle-Zélande – 1937 Cambridge)



Quatrième d'une fatrie de 12 enfants, Ernest révèle très vite de grandes aptitudes en mathématiques et en rugby à XV. Obtenant la seule bourse de Nouvelle-Zélande, il part en 1895 étudier à Cambridge, non sans se fiancer avant. En 1898, à la fin de ses études, il accepte un poste de professeur à Montréal et peut faire venir sa fiancée, avec laquelle il se mariera en 1900. Il sera professeur à Manchester à partir de 1907 et à Cambridge à partir de 1919. Expérimenteur hors pair, il effectue beaucoup de recherches et obtient en 1908 le prix Nobel de chimie pour ses travaux sur les désintégrations des éléments. C'est en reprenant, en 1911, les résultats d'une expérience effectuée de nombreuses années plus tôt qu'il émet l'hypothèse d'un noyau atomique très petit par rapport à la taille de l'atome.

I – Cinématique

I·1 – Différentes coordonnées

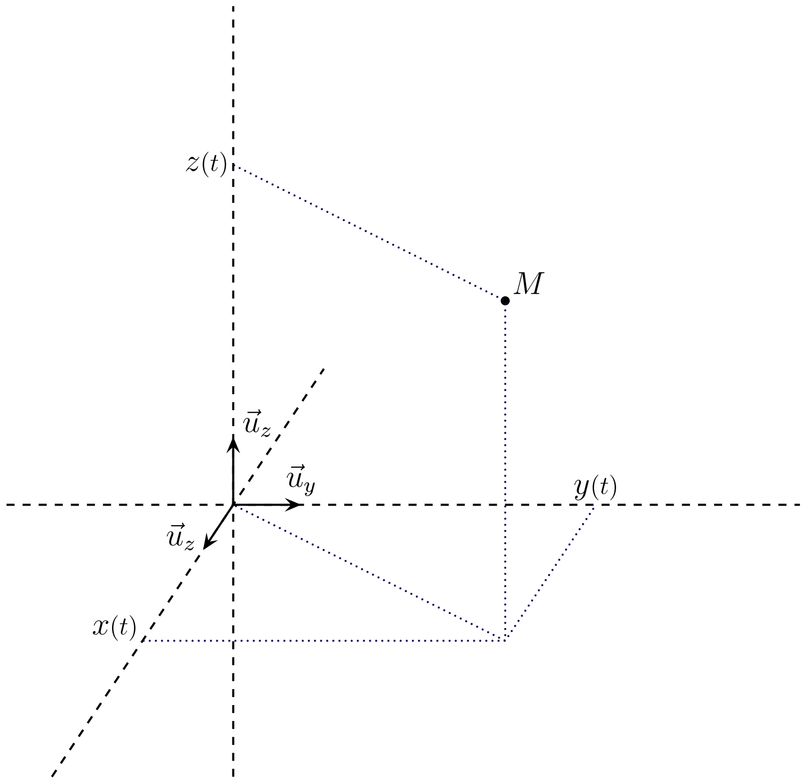
I·1·i – cartésiennes

✯ présentation

✧ Aucune surprise.

En coordonnées cartésiennes, un point M est repéré par les trois coordonnées

$$x(t) \qquad y(t) \qquad \text{et} \qquad z(t)$$



✯ interprétation

✧ Les coordonnées cartésiennes (nom donné en hommage à Descartes) sont utiles dans deux grands cas :

➜ lorsque le mouvement se fait sur un axe rectiligne ;
➜ lorsque le mouvement est plan ou en 3D sans géométrie particulière (pas de rotation, pas de centre de force. . .) ;
➜ pour traiter du cas général.

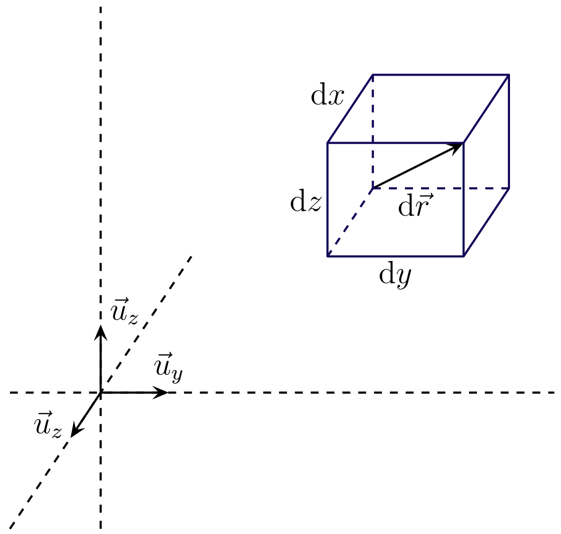
✧ L'énorme avantage, par rapport aux autres composantes, c'est l'indépendance des trois axes.

✧ Cette indépendance implique notamment que la basse $(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ ne dépend pas du mouvement de M.

✯ déplacement élémentaire

Le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$



✧ Il est important de connaître le déplacement élémentaire car c'est lui qui permet de retrouver rapidement :

➜ la vitesse dans le système de coordonnée choisi ;
➜ le volume et les surfaces élémentaires.

✧ C'est ainsi que le volume élémentaire n'est autre que le produit des trois composantes du déplacement élémentaire.

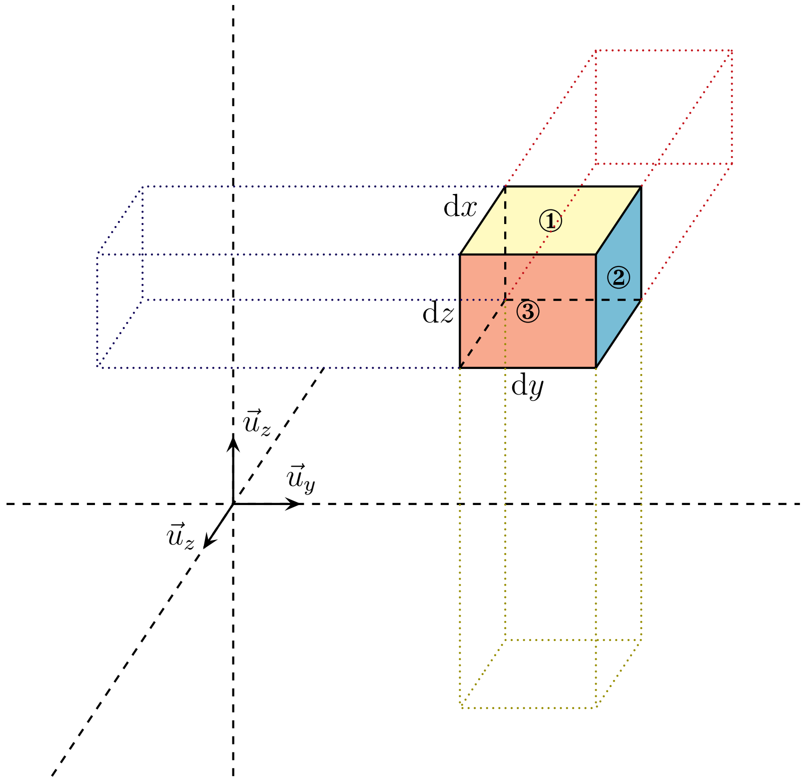
En coordonnées cartésiennes le volume élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

✧ Pour les surfaces, il suffit de multiplier deux composantes du déplacement élémentaire

Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression

$$\mathrm{d}S_1 = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;; \qquad \mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}S_3 = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$



✧ Pour avoir la vitesse, il suffit de diviser le déplacement élémentaire par dt

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_z$$

La vitesse en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_z$$

✧ Pour l'accélération, en revanche, il faut connaître.

L'accélération en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t)\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)\,\vec{u}_z$$

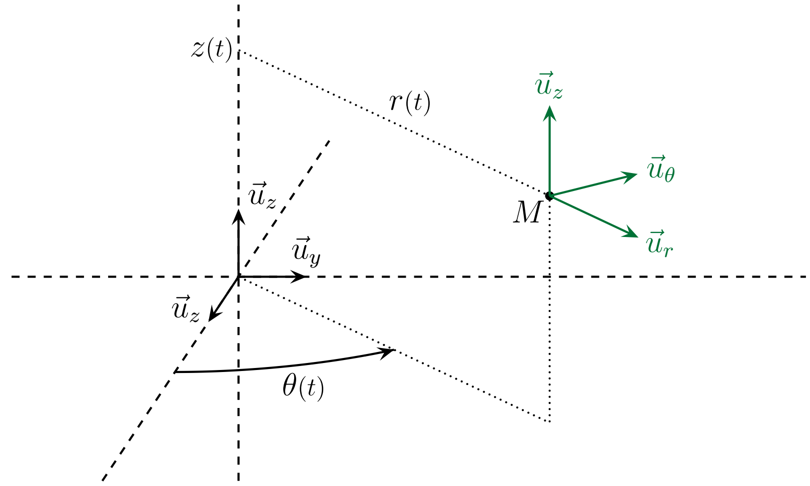
I·1·*ii* – cylindro-polaires

✫ présentation

✧ Pas de surprise là non plus.

En coordonnées cylindro-polaires, un point M est repéré par les trois coordonnées

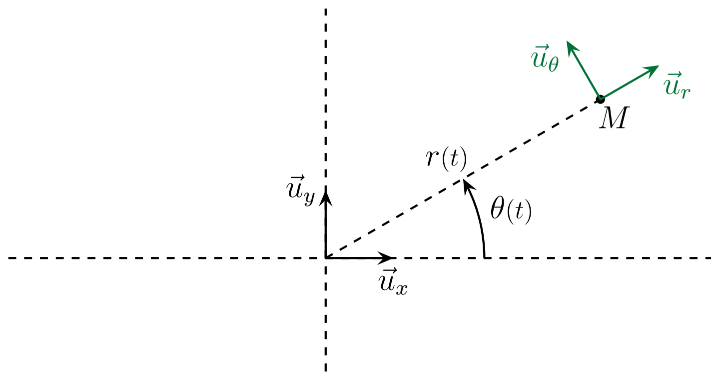
$r(t)$ $\theta(t)$ et $z(t)$



✧ Lorsque le mouvement est plan, nous choisirons le plan du mouvement comme le plan $(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y)$ et alors les coordonnées sont simplement appelées « polaires ».

En coordonnées polaires, un point M est repéré par les deux coordonnées

$r(t)$ et $\theta(t)$



✫ interprétation

✧ Ces coordonnées sont à privilégier lorsqu'il y a un mouvement de rotation autour d'un axe (ou autour d'un point dans le cas d'un mouvement plan).

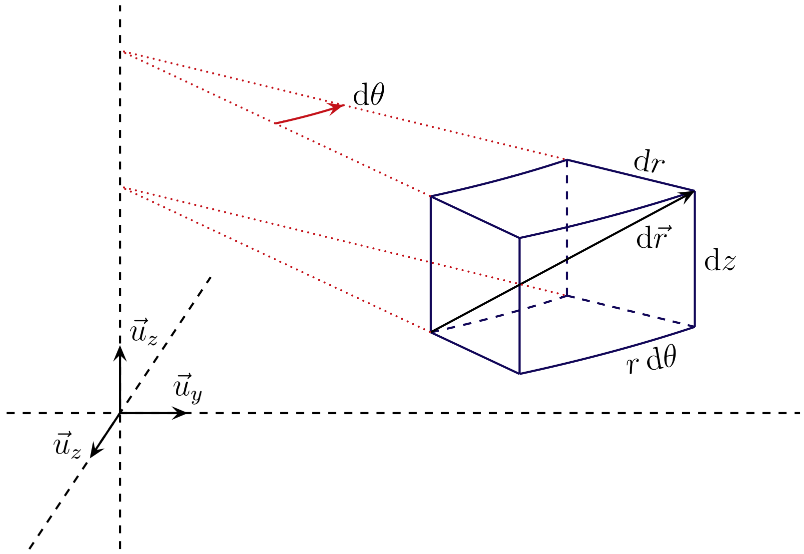
✧ L'inconvénient, par rapport aux coordonnées cartésiennes, c'est que la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ dépend de la position du point M.

✧ C'est cet inconvénient qui est un avantage quand la géométrie est suffisamment particulière.

✯ déplacement élémentaire

Le déplacement élémentaire en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$



✧ Nous avons ainsi

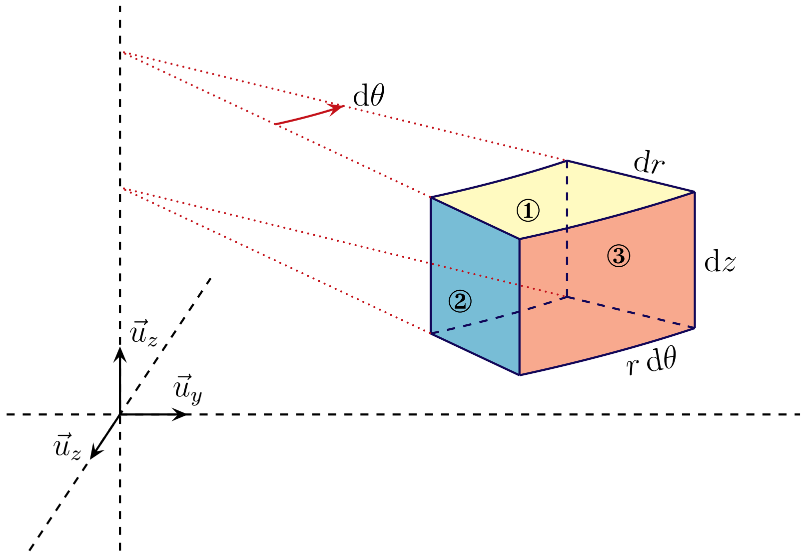
En coordonnées cylindro-polaires le volume élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

✧ Pour les surfaces, même chose que précédemment

Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression

$$\mathrm{d}S_1 = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\;; \qquad \mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}S_3 = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



✧ Pour avoir la vitesse, cela donne

La vitesse en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_x + r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_z$$

✧ Pour l'accélération, en revanche, il faut connaître ou savoir retrouver très rapidement.

L'accélération en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\,\dot{\theta}^2(t)\right)\,\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}(t)\,\dot{\theta}(t) + r\,\ddot{\theta}(t)\right)\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

✧ Nous utiliserons souvent les coordonnées cylindro-polaires dans le cas d'un mouvement de rotation et, alors, nous utiliserons aussi le moment cinétique.

Le moment cinétique d'un point M par rapport à O s'écrit, pour un mouvement plan

$$\vec{\sigma}_O(M,t) = m\,r^2(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z$$

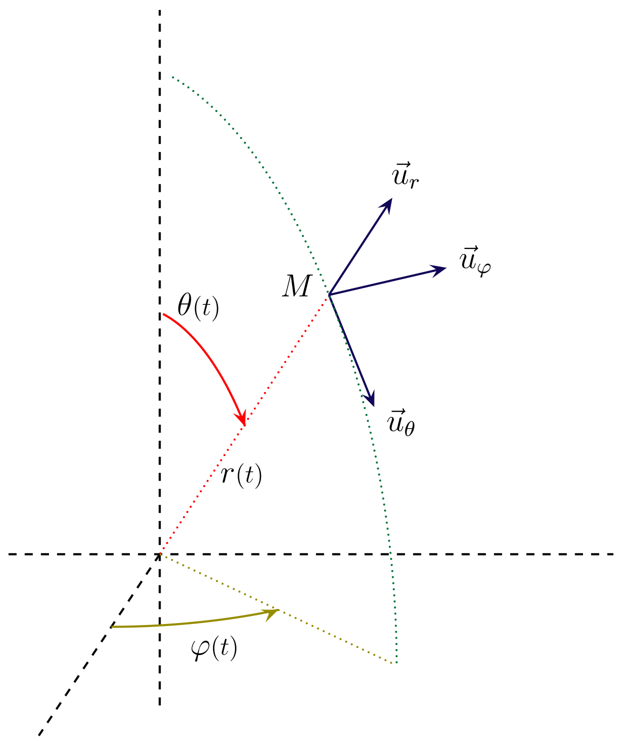
I·1·*iii* – sphériques

✯ présentation

✧ Elles sont moins utilisées.

En coordonnées sphériques, un point M est repéré par les trois coordonnées

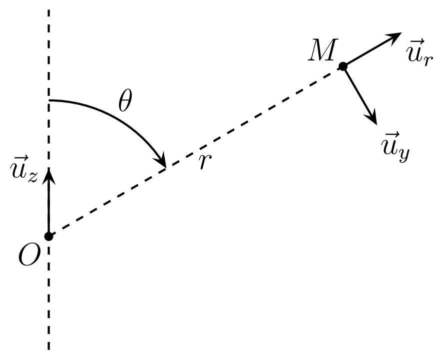
$$r(t) \qquad \theta(t) \qquad \text{et} \qquad \varphi(t)$$



✧ Les notations peuvent sembler maladroites puisque φ en coordonnées cylindriques correspond au θ des coordonnes cylindro-polaires et que les r n'ont pas les mêmes significations dans les deux systèmes de coordonnées.

✧ Il n'en est rien !

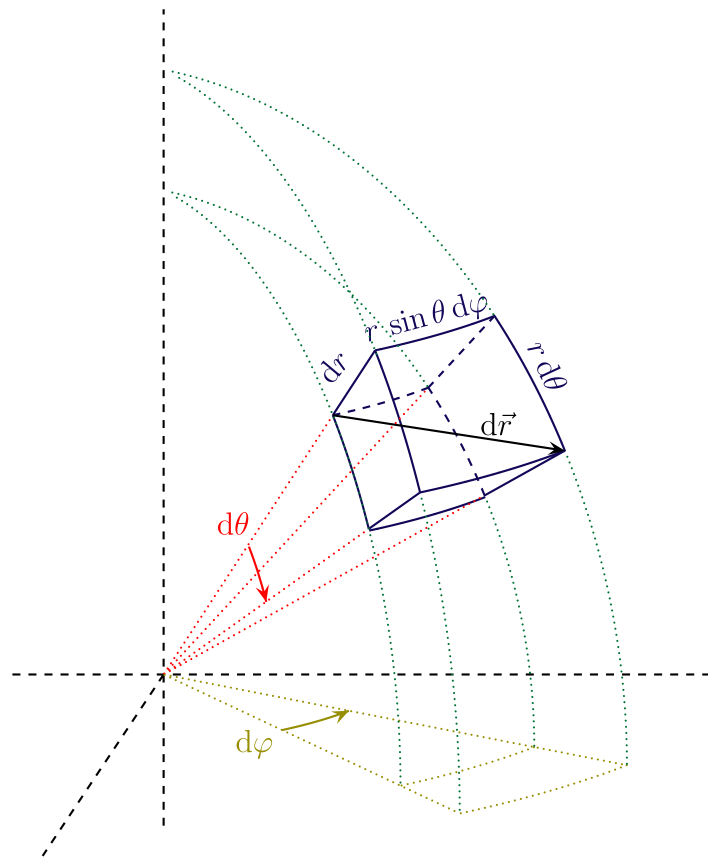
✧ Le fait est que, très souvent, lorsque nous aurons affaire aux coordonnées sphériques, nous nous placerons dans un plan méridien et nous retrouverons les coordonnées polaires.



⋆ déplacement élémentaire

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$$



✧ Nous avons donc

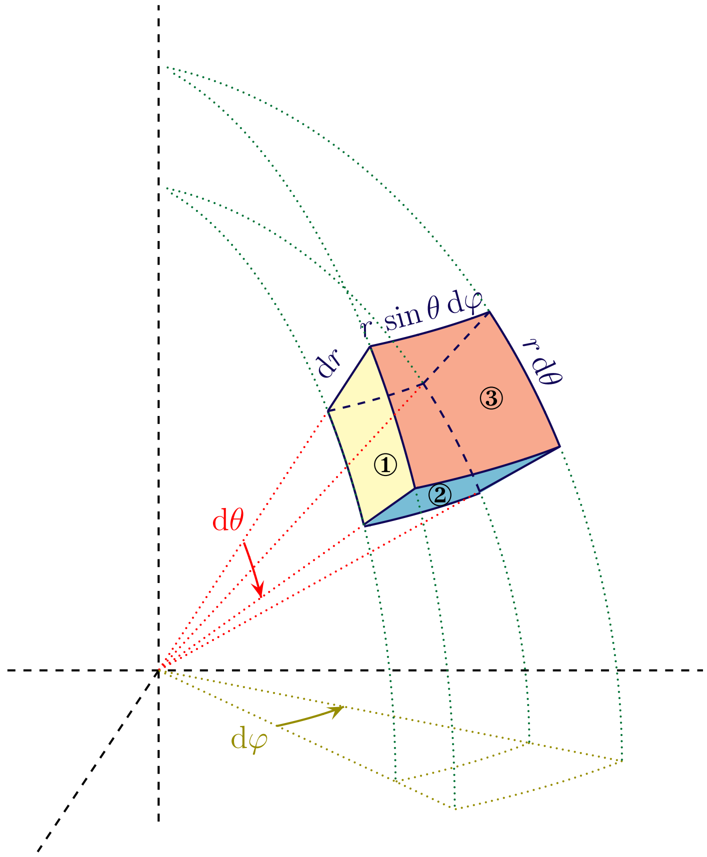
En coordonnées sphériques le volume élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\tau = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

✧ Pour les surfaces

Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression

$$\mathrm{d}S_1 = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\ ; \qquad \mathrm{d}S_2 = r\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}S_3 = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$



✧ Tant pour la vitesse que pour l'accélération, les coordonnées sphériques ne pas très pratiques.

✭ interprétation

✧ Nous utiliserons essentiellement les coordonnées sphériques lorsqu'un point jouera un rôle particulier en tant que « source » comme le furent, par exemple, les dipôles.

✧ En revanche, en mécanique, étant données les lourdeurs des expressions de la vitesse et de l'accélération, nous ne l'utiliserons *a priori* pas.

I·2 – Mouvements particuliers

I·2·*i* – oscillations sinusoïdales

Un mouvement de coordonnée $x(t)$ est sinusoïdal s'il obéit à l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + {\omega_0}^2\,x(t) = 0$$

Un mouvement sinusoïdal s'écrit

$$x(t) = X_{\mathrm{m}} = X_{\mathrm{m}} \cos(\omega\, t + \varphi) \qquad \text{où :}$$

- ➜ X_{m} est l'amplitude ;
- ➜ ω_0 est la pulsation ;
- ➜ φ est la phase à l'origine.

✧ Dans le cas d'un régime libre, nous avons naturellement $\omega = \omega_0$

I·2·*ii* – mouvement uniformément accéléré

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* lorsque l'accélération est vectoriellement constante.

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}$$

La trajectoire d'un mouvement uniformément accéléré est parabolique ou rectiligne suivant les conditions initiales.

✧ Trouver l'expression du vecteur position se fait directement en vectoriel en intégrant deux fois l'accélération

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0$$
$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 \times t + \vec{v}(0)$$
$$\vec{r}(t) = \vec{a}_0 \times \frac{t^2}{2} + \vec{v}(0) \times t + \vec{r}(0)$$

✧ Un cas particulier à connaître (très utile pour les interprétations qualitatives)

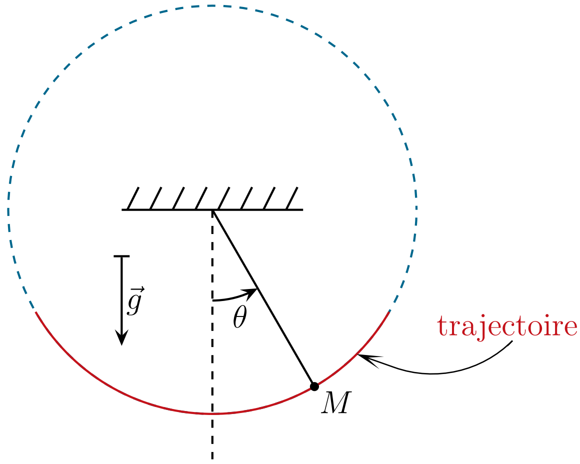
Un objet en chute libre lâché sans vitesse initiale acquiert la vitesse $v = \sqrt{2\, g\, h}$ après une chute de hauteur h.

I·2·*iii* – mouvement circulaire

Un mouvement est dit *circulaire* lorsque la trajectoire est circulaire.

Comme cette définition est basée sur la trajectoire, cela dépend du référentiel !

Ne pas confondre « circulaire » et « circulaire uniforme ». Le plus célèbre des contre-exemple est le pendule simple qui **a bel et bien** un mouvement circulaire.



✧ Pour la vitesse, pas de difficulté.

La vitesse en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω, s'écrit

$$\vec{v}(t) = R\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta \quad \text{ou} \quad \vec{v}(t) = R\,\omega(t)\,\vec{u}_\theta$$

✧ En revanche, pour l'accélération, il faut soit la connaître parfaitement sans hésiter, soit savoir la retrouver sans erreur en moins de 10 secondes montre en main.

L'accélération en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω, s'écrit

$$\vec{a}(t) = -R\,\dot{\theta}^2(t)\,\vec{u}_r + R\,\ddot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta \quad \text{ou} \quad \vec{a}(t) = -R\,\omega^2(t)\,\vec{u}_r + R\,\dot{\omega}(t)\,\vec{u}_\theta \quad \text{ou} \quad \vec{a}(t) = -\frac{v^2(t)}{R}\,\vec{u}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t),\vec{u}_\theta$$

I·3 – Changement de référentiels

I·3·i – différents référentiels usuels

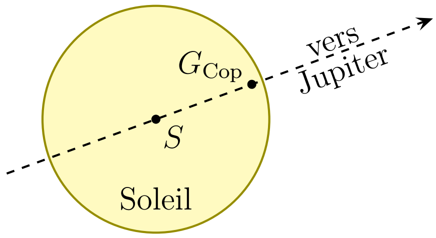
✯ le référentiel de Copernic

Le *référentiel de* Copernic est le référentiel :
➜ centré sur le centre de masse du système solaire ;
➜ dont les axes pointent vers 3 étoiles éloignées.

Remarque. L'auteur est toujours à la recherche des étoiles officiellement choisies pour assurer le repérage sur la voûte céleste.

Le référentiel de Copernic est postulé galiléen.

✧ De par la masse de Jupiter (environ un millième de masse solaire), le centre de masse du système solaire n'est sensiblement pas confondu avec le centre du Soleil.



✫ le référentiel héliocentrique

> Le *référentiel héliocentrique* est le référentiel :
> ➜ centré sur le centre du Soleil ;
> ➜ dont les axes sont parallèles aux axes du référentiel de COPERNIC.

✧ En toute rigueur, le référentiel héliocentrique n'est pas galiléen au delà d'une durée de quelques années.

✧ Ce référentiel est utilisé pour décrire le mouvement d'une planète par rapport au Soleil.

✫ le référentiel géocentrique

> Le *référentiel géocentrique* est le référentiel :
> ➜ centré sur le centre de la Terre ;
> ➜ dont les axes sont parallèles aux axes du référentiel de COPERNIC.

✧ Le référentiel géocentrique n'est pas galiléen mais il peut être considéré comme tel à condition :
- ➜ de négliger les effets de marées ;
- ➜ ne pas étudier de mouvement d'une durée supérieure à quelques mois.

✧ Ce référentiel est utilisé pour décrire le mouvement d'un satellite proche de la Terre.

✫ le référentiel terrestre

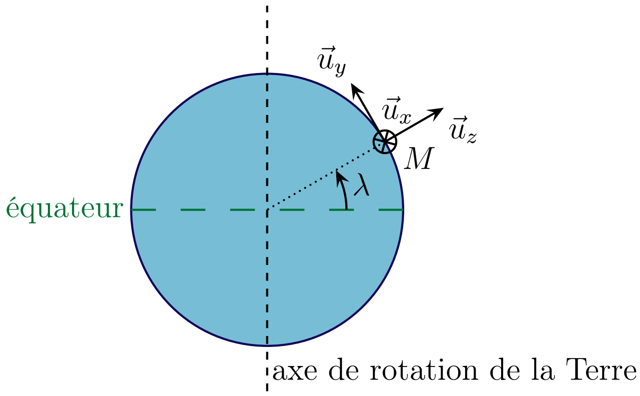
> Le *référentiel terrestre* est un référentiel dans lequel la Terre est immobile.

✧ Il y a alors deux grandes manière de définir le référentiel terrestre.

✧ Pour une étude locale, comme c'est le plus fréquent, le centre et les axes sont à adapter au problème.

✧ Pour une étude à l'échelle planétaire il est conseillé de prendre
- ➜ le centre de la Terre comme centre du référentiel ;
- ➜ $\vec{u}_z$ vers le haut local ;
- ➜ $\vec{u}_y$ vers le nord local ;
- ➜ $\vec{u}_x$ vers l'est.

✧ Cela donne cette représentation où λ est la latitude



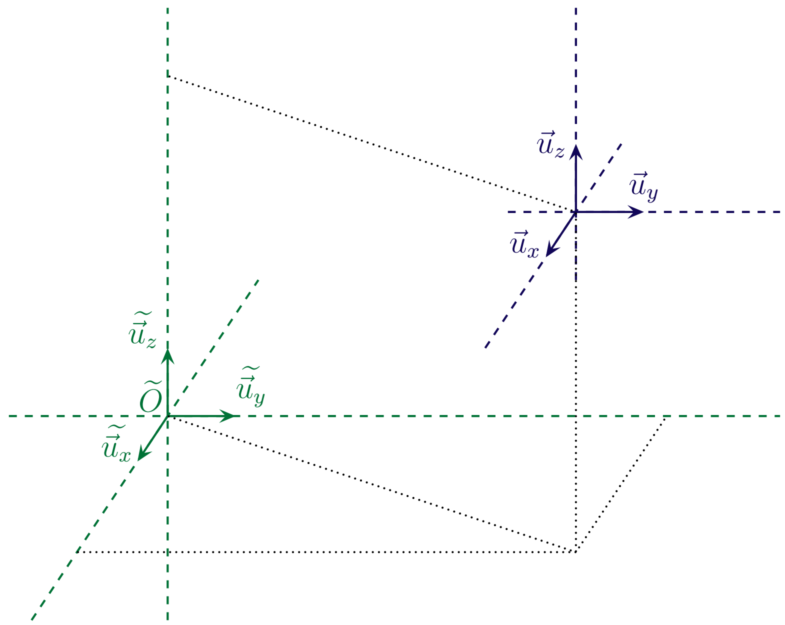
✧ Rappelons que la force d'inertie due au caractère non galiléen du référentiel terrestre est déjà incluse dans le poids.

> Bien que le référentiel terrestre soit non galiléen, il ne faut pas compter de force d'inertie d'entraînement dans ce référentiel.

✧ Ceci étant, si un manège tourne par rapport au référentiel terrestre et que l'étude se fait par rapport au référentiel lié au manège, là, évidemment, il faudra tenir compte des forces d'inertie d'entraînement dues à la rotation du *manège*.

I·3·*ii* – lois de composition entre deux référentiels en translation

> Deus référentiels sont dits en translations si leurs axes sont constamment parallèles l'un avec l'autre.



La loi de composition des vitesses entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en translation pure l'un par rapport à l'autre s'écrit

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \qquad \text{où}$$

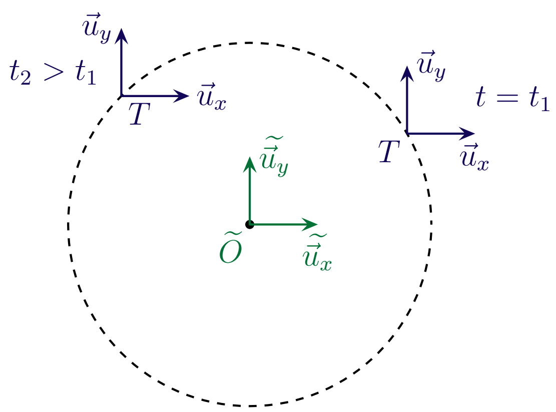
$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \overset{\text{not}}{=} \vec{v}_{\text{e}}$ est appelé la vitesse d'entraînement

La loi de composition des accélérations entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en translation pure l'un par rapport à l'autre s'écrit

$$\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \qquad \text{où}$$

$\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \overset{\text{not}}{=} \vec{a}_{\text{e}}$ est appelé l'accélération d'entraînement

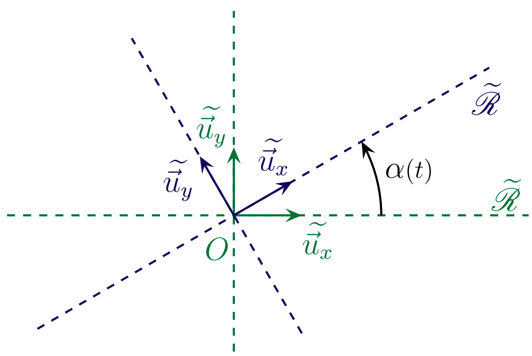
Attention ! Deux référentiels en translations ne sont pas forcément en translation *rectiligne*. Contre-exemple : le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel héliocentrique.



I·3·*iii* – lois de composition entre deux référentiels en rotation pure

Deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ sont en *rotation pure* lorsque

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{|\mathscr{R}}(\widetilde{O},t) = \vec{0}$$



Deux référentiels de centres confondus sont en rotation pure.

Le vecteur rotation noté $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}}$ caractérise la rotation de $\mathscr{R}$ par rapport à $\widetilde{\mathscr{R}}$:
- ➜ sa direction est la direction de l'axe de rotation ;
- ➜ son sens est donné par la règle de la main droite ;
- ➜ sa norme est la vitesse angulaire de rotation.

✧ Il faut savoir trouver un vecteur de rotation !

La loi de composition des vitesses entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en rotation pure l'un par rapport à l'autre s'écrit

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \text{où}$$

$$\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \overset{\text{not}}{=} \vec{v}_{\text{e}} \text{ est appelé la vitesse d'entraînement}$$

La loi de composition des accélérations entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en translation pure **et uniforme** l'un par rapport à l'autre s'écrit

$$\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathscr{R}}(M,t) - \Omega^2\,\overrightarrow{HM} + 2\,\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) \qquad \text{où :}$$

- ➜ H est le projeté de M sur l'axe de rotation ;
- ➜ $-\Omega^2\,\overrightarrow{HM} \overset{\text{not}}{=} \vec{a}_{\text{e}}$ est appelé l'accélération d'entraînement ;
- ➜ $2\,\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) \overset{\text{not}}{=} \vec{a}_{\text{c}}$ est appelé l'accélération de Coriolis.

I·3·*iv* – lois générales

✧ Elles sont très peu utilisées et à réserver aux cas désespérés.
✧ En gros, c'est la somme des résultats précédents.
✧ Il ne faut juste pas oublier le terme dû au caractère non uniforme de la rotation dans la loi de composition des accélérations (terme en rouge).
✧ La loi de composition des vitesses s'écrit

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

✧ La loi de composition des accélérations s'écrit

$$\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{OM} + 2\,\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t)$$

II – Dynamique

- Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la mécanique en terme de force.
- Contrairement à l'opinion commune, ce n'est pas l'approche la plus intuitive qui soit, il est donc important d'être très rigoureux au moment d'analyser la situation (notamment pour la liste des forces).
- Une force se décrit par un vecteur, *i.e.* elle a trois composantes.

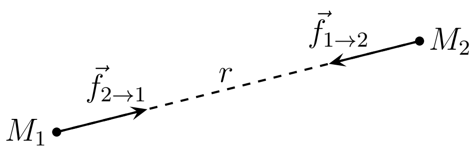
II·1 – Les quatre interactions fondamentales

- Dans l'ordre d'intensité décroissante, les quatre interactions fondamentales sont
  - l'interaction nucléaire forte, responsable de la cohésion des noyaux ;
  - l'interaction électromagnétique, inutile de la présenter ;
  - l'interaction nucléaire faible, responsable notamment des désintégrations nucléaire bêta ;
  - l'interaction gravitationnelle.
- Les interactions nucléaires forte et faible sont de courte portée et n'ont d'influence (comme leur nom l'indique) qu'à l'échelle nucléaire.
- Les interactions électromagnétique et gravitationnelle ont une portée infinie et nous n'étudierons que ces deux-là.

II·2 – Forces à distance

II·2·*i* – gravitation

Deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 s'attirent et exercent l'un sur l'autre uen force telle que



$$\vec{f}_{1\to 2} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\vec{u}_{12} \text{ où :}$$

- G est la constante universelle de gravitation ;
- r est la distance entre les deux masses ;
- $\vec{u}_{12}$ est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à attirer et à être attiré par l'interaction gravitationnelle.

Un point matériel de masse m situé au centre d'un référentiel crée le champ gravitationnel

$$\vec{\mathscr{G}}(M) = -G\,\frac{m}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Un astre à symétrie sphérique se comporte vis-à-vis de la gravitation comme un point matériel situé en son centre, dans lequel serait concentré toute la masse.

✧ L'interaction gravitationnelle est à réserver aux problèmes astronomiques.

II·2·*ii* – poids

Dans le référentiel terrestre, un objet à la surface de la Terre subit son poids $\vec{P}$ tel que

$$\vec{P} = m\,\vec{g} \qquad \text{où :}$$

➜ m est la masse grave ;
➜ g est l'accélération de pesanteur avec $g \simeq 9{,}81\ \text{m.s}^{-1}$.

$\vec{g}$ est *vertical* et dirigé vers le *bas*.

✧ Oui, ce sont effectivement les définitions de « vertical » et « bas ».

Le poids reste constant dans une zone restreinte à l'échelle planétaire.

✧ Cela permet de ne pas prendre en compte les variations (qui pourtant existent) du poids lorsqu'un problème est à l'échelle de plusieurs kilomètres.

Le poids inclut la force d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la Terre.

✧ Le poids est plus grand aux pôles qu'à l'équateur car, d'une certaine manière, l'effet « panier à salade » est plus grand proche de l'équateur.
✧ La différence est imperceptible dans la vie courante puisque le poids ne varie que de 0,3 % entre l'équateur et les pôles.

II·2·*iii* – force électromagnétique

✯ force de Lorentz

✧ C'est une force que nous utiliserons dès qu'il y a une particule (ou un corps) chargée.

Un point matériel de charge q plongé dans un champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ subit la force de Lorentz

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Pour une particule, la force de Lorentz est toujours prédominante face au poids.

✯ **force de Coulomb**

Deux points matériels de charges q_1 et q_2 en vitesse faible l'un par rapport à l'autre exercent une force

$$\vec{f}_{1\to2} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_{1\to2} \qquad \text{où :}$$

➜ $\vec{u}_{1\to2}$ est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2 ;

➜ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi} \times 10^{-9}$ F.m^{-1} est la permitivité du vide.

Le champ électrique créé en M par une charge ponctuelle q s'écrit

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r$$

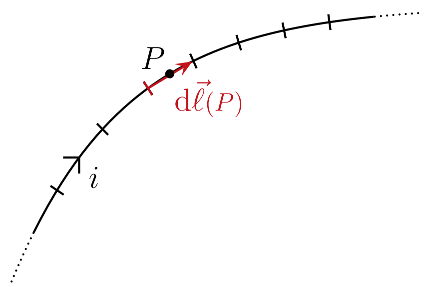
II·2·*iv* – force de Laplace

✧ C'est une force qui s'exerce lorsqu'un circuit parcouru par un courant est plongé dans un champ magnétique.

✧ Nous aurons l'occasion de revoir cette force et de nous en servir dans le chapitre sur l'induction.

La force de Laplace qui s'exerce sur un conducteur parcouru par un courant plongé dans un champ magnétique s'écrit

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = \int_{P\in\text{conducteur}} \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{L}}(P) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{L}}(P) = i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}(P)$$



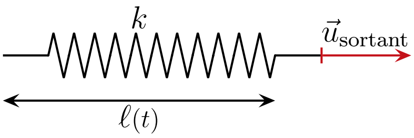
II·3 – Forces de contact connues *a priori*

II·3·*i* – force exercée par un ressort

La force exercée par un ressort sur un point attaché à une de ses extrémités s'écrit

$$\vec{f} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sortant}} \qquad \text{où :}$$

- ➜ $\ell(t)$ est la longueur du ressort ;
- ➜ ℓ_0 est la longueur naturelle du ressort ;
- ➜ $\ell(t) - \ell_0$ est l'allongement ;
- ➜ $\vec{u}_{\text{sortant}}$ est le vecteur unitaire tangent au ressort et « sortant » du ressort au niveau du point qui subit la force.



✧ Un ressort idéal est un ressort :

- ➜ de masse nulle ;
- ➜ parfaitement élastique (pas de déformation irréversible de type « plastique » quand il est trop étiré) ;
- ➜ à spires non jointives (sinon il se comporte comme une barre rigide).

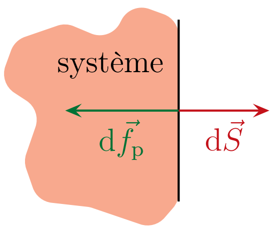
Un élastique est un ressort qui n'exerce de force que lorsqu'il est étiré.

II·3·*ii* – force pressante

✩ force

La force pressante sur une surface $\mathrm{d}\vec{S}$ dirigée conventionnellement vers l'extérieur s'écrit

$$\vec{f}_{\text{p}} = -P\,\mathrm{d}\vec{S}$$



✧ Les forces de pression sont des forces très intenses

$$\frac{\|\vec{f}_{\text{p}}\|}{S} \sim 10\ \text{N.cm}^{-2} \qquad \text{à} \qquad P = 1{,}0\ \text{bar}$$

✩ poussée d'Archimède

✧ C'est *la* résultante classique des forces de pression.

Un objet entièrement immergé dans un fluide au repos subit la poussée d'Archimède, verticale, de bas en haut et de norme le poids du fluide remplacé.

II·3·*iii* – force de frottement fluide

✧ Ces forces sont à utiliser lors qu'un objet est mobile **et** plongé dans un fluide.
✧ L'atmosphère étant un fluide c'est à peu près tout le temps.

Pour des vitesses faibles, la force de frottement fluide exercée par un fluide sur un objet est linéaire et s'écrit

$$\vec{f} = -\lambda\,\vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet}) \qquad \text{où}$$

λ est une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet.

Pour des vitesses élevées, la force de frottement fluide exercée par un fluide sur un objet est quadratique et s'écrit

$$\vec{f} = -h\,\|\vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet})\| \times \vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet}) \qquad \text{où}$$

h est une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet.

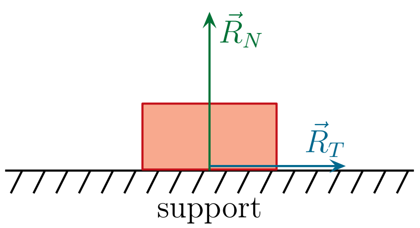
La limite basse ou haute vitesse dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement.

À grand Re la force de frottement n'est autre que la traînée avec $\vec{f} = -\dfrac{1}{2}\,\rho\,S\,C_x\,v\,\vec{v}$.

II·4 – Forces de contact inconnues *a priori* : les liaisons

II·4·*i* – force exercée par un support solide

✧ Localement, un contact est toujours plan ou, du moins, il est toujours possible de définir un plan tangent au contact.
✧ Nous pouvons alors décomposer la force exercée par le « support » sur l'objet en une composante normale et une composante tangentielle.



La réaction normale $\vec{R}_N$ est **toujours** présente dès lors qu'il y a contact et telle que :
➜ sa direction est normale au plan de tangence ;
➜ le sens est du support vers l'objet ;
➜ la norme est **inconnue**.

✧ Parfois, il est possible d'avoir une réaction normale dirigée de l'objet vers le support.

✧ Pour que tel soit le cas, il **faut** un dispositif d'anti-décollement de l'objet vis-à-vis du support comme c'est le cas des wagonnets des attractions sur les fêtes forraines.

Il n'y a de réaction tangentielle $\vec{R}_N$ que lorsqu'il y a des frottements.
Les frottements sont alors dit *solides*.

L'action tangentielle exercée par un support dépend du mouvement de l'objet sur ce support :

- si l'objet glisse sur le support :
  - la direction de $\vec{R}_T$ est la même que celle de la vitesse qu'a l'objet par rapport au support ;
  - $\vec{R}_T$ est opposée à la vitesse qu'a l'objet par rapport au support ;
  - la norme de $\vec{R}_T$ vaut $\|\vec{R}_T\| = f_\text{d}\,\|\vec{R}_N\|$ où f_d est le *coefficient de frottement dynamique* ;
- si l'objet ne glisse pas sur le support :
  - la direction de $\vec{R}_T$ est inconnue ;
  - le sens de $\vec{R}_T$ est inconnu ;
  - la norme de $\vec{R}_T$ vérifie $\|\vec{R}_T\| \leqslant f_\text{s}\,\|\vec{R}_N\|$ où f_s est le *coefficient de frottement statique*.

✧ De manière générale, $f_\text{d} \leqslant f_\text{s}$.

Sauf précision contraire, les coefficients de frottements statique et dynamique sont considérés égaux.

II·4·*ii* – fils et poulies idéaux

Un fil est *idéal* lorsqu'il est :

- sans masse ;
- inextensible ;
- infiniment souple.

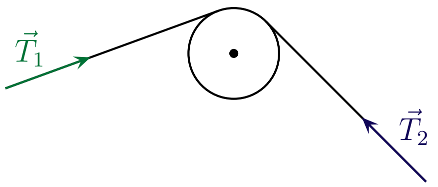
Un poulie est *idéale* lorsque :

- elle est de masse nulle ;
- elle ne frotte pas en tournant autour de son axe ;
- le fil qui l'entoure ne glisse pas en s'enroulant ou en se déroulant.

Remarque. Comme le fil ne glisse pas dans la gorge de la poulie, c'est qu'il y a *nécessairement* des frottements.

Un fil exerce une force :
- ➜ dans sa direction ;
- ➜ dirigée vers lui ;
- ➜ de norme **inconnue** mais identique à ses extrémités lorsque fils et poulie sont idéaux.

$$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$$



II·5 – Forces d'inertie

II·5·*i* – force d'inertie d'entraînement

Dans un référentiel **non galiléen**, un point matériel subit la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{\text{ie}} = -m\,\vec{a}_{\text{e}} \qquad \text{où}$$

$\vec{a}_{\text{e}}$ est l'accélération d'entraînement.

Dans un référentiel en rotation pure et uniforme, la force d'inertie d'entraînement est appelée *force centrifuge* et s'écrit

$$\vec{f}_{\text{ie}} = +m\,\Omega^2\,\overrightarrow{HM} \qquad \text{où}$$

H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

La force centrifuge n'existe **pour** pour les référentiels galiléens. En particulier, le lecteur trouvera pourquoi il est physiquement, fondamentalement et totalement faux de dire :
- ➜ que le Soleil, en attirant la Terre, lutte contre la force centrifuge qui tend à l'éjecter et lui permet ainsi de tourner sur son orbite ;
- ➜ que quand on fait tourner une essoreuse, c'est la force centrifuge qui permet d'éjecter l'eau.

II·5·*ii* – force d'inertie de Coriolis

Dans un référentiel **non galiléen** en rotation pure par rapport à un référentiel galiléen, un point matériel subit la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{\text{ic}} = -m\,\vec{a}_{\text{c}} \qquad \text{où}$$

$\vec{a}_{\text{c}} = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M,t)$ est l'accélération de Coriolis.

À l'équilibre dans un référentiel non galiléen en rotation pure par rapport à un référentiel galiléen, un point ne subit pas de force d'inertie de Coriolis.

II·5·*iii* – caractère fictif des forces d'inertie

> Les forces d'inertie n'existent pas.

- C'est bien parce qu'elles sont de nature non physique mais uniquement technique (c'est un terme d'accélération qui a changé de côté du signe égal) qu'elles n'existent pas.
- Le lecteur ira revoir le cours de première année pour les différents paradoxes et autres (très) mauvaises interprétations des forces d'inertie.

II·6 – Lois de Newton

II·6·*i* – 1^{re} loi ou principe d'inertie

✯ énoncé

> Il existe des référentiels dits *galiléens* dans lesquels tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle.

✯ utilisation

- Nous utiliserons cette loi uniquement pour savoir si un référentiel est galiléen ou non, puisqu'elle implique entre autres le résultat suivant.

> Un référentiel est galiléen si et seulement s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

II·6·*ii* – 2^e loi ou principe fondamental de la dynamique

✯ énoncé

> Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel M de masse m subissant les forces $\vec{f}_i$, nous pouvons écrire :
>
> $$\sum \vec{f}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{où} \qquad \vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t)$$
>
> $\vec{p}(t)$ est appelée la *quantité de mouvement*.

✯ utilisation

- Théoriquement, son utilité est évidente : c'est à partir de cette loi que tous les mouvements peuvent se prévoir.
- Philosophiquement, cette loi pose un problème d'interprétation en terme de « cause / conséquence » puisque forces et accélérations sont *simultanées*.
- Techniquement, cette loi :

- ➜ est une loi vectorielle donc fournit, par projection, 3 lois ;
- ➜ présente souvent des forces inconnues.

✧ En pratique, nous utiliserons cette loi :

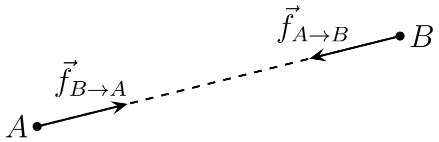
- ➜ quand les autres méthodes (énergétique, moment cinétique) ne conviennent pas ;
- ➜ lorsqu'il faudra trouver une force.

II·6·*iii* – 3e loi ou principe des actions réciproques

✯ énoncé

Lorsque deux points matériels sont en interaction, alors :

$$\vec{f}_{A\to B} = -\vec{f}_{B\to A} \qquad \textbf{et} \qquad \vec{f}_{A\to B} /\!/ \overrightarrow{AB}$$

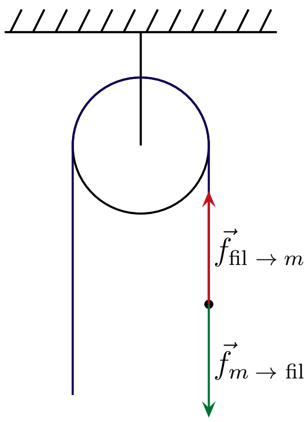


✯ intérêt

✧ D'un point de vue théorique, elle est aussi fondamentale que les deux autres puisqu'elle permet de décrire les *interactions*.

✧ En pratique, c'est cette loi qui nous permettra de passer d'un sous-système à un autre.

✧ Sur l'exemple suivant, nous pouvons dire que la force que le fil exerce sur m est égale et opposée à la force que m exerce sur le fil mais qui n'est **pas** son poids.



II·7 – Théorème du moment cinétique

II·7·*i* – quand ? pourquoi ?

Le *moment cinétique* d'un point M par rapport à un point A dans le référentiel $\mathscr{R}$ vaut

$$\vec{\sigma}_A(M/\mathscr{R})_e d\overrightarrow{AM} \wedge m\,\vec{v}(M/\mathscr{R})$$

Le moment cinétique représente la quantité de rotation de M autour de A.

✧ Le théorème du moment cinétique est très souvent (voire toujours) utilisé avec les coordonnées cylindro-polaires, coordonnées « spécial rotation » rappelons-le.

✧ Quand utiliser l'approche en terme de moment cinétique ?
- ➜ lorsqu'il n'y a qu'un point matériel, ce n'est pas obligatoire, le PFD projeté sur $\vec{u}_\theta$ « marche » tout aussi bien ;
- ➜ pour les systèmes de points, ce théorème est **indispensable**.

II·7·*ii* – énoncés

✯ version vectorielle

> Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors, pour tout point A fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :
>
> $$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$
>
> ➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique de M par rapport à A ;
>
> ➜ $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$ est le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

✧ L'avantage de cette méthode est d'être 100 % vectorielle : écrire les vecteurs, poser les produits vectoriels, remplacer, agiter, calculer, c'est terminé.

✧ L'inconvénient de cette méthode est d'être 100 % vectorielle : entre les projections et les calculs, il est non seulement possible de se tromper mais en plus l'interprétation physique est davantage mise de côté.

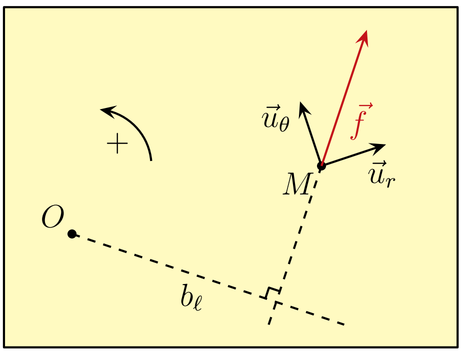
✯ version scalaire

☯ le théorème

> Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors, pour tout axe Δ fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :
>
> $$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$
>
> ➜ $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique scalaire de M par rapport à A ;
>
> ➜ $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f})$ est le moment scalaire de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

☯ calculer un moment scalaire

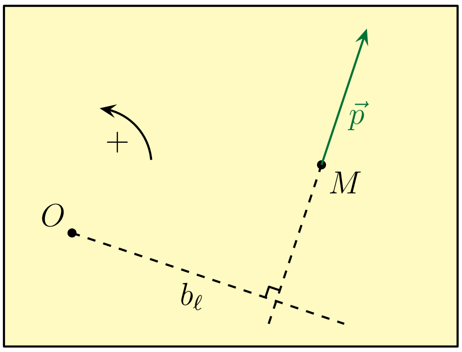
✧ Imaginons la situation suivante



✧ Pour calculer le moment scalaire de la force, il faut :
- ➜ orienter l'espace de rotation ;
- ➜ écrire $\mathscr{M}_\Delta = \pm\|f\| \times b_\ell$ avec b_ℓ le bras de levier ;
- ➜ trouver le bon signe.

✧ Dans l'exemple précédent, le moment scalaire s'écrit $\mathscr{M}_\Delta = +\|f\| \times b_\ell$.

✧ Remarquons qu'il est en de même pour le moment cinétique, qui est à la quantité de mouvement ce que le moment d'une force est à une force.



✧ Nous avons dans l'exemple précédent

$$\sigma_\Delta(M) = \pm p \times b_\ell \quad \overset{\text{ici}}{\rightsquigarrow} \quad \sigma_\Delta(M) = +p \times b_\ell$$

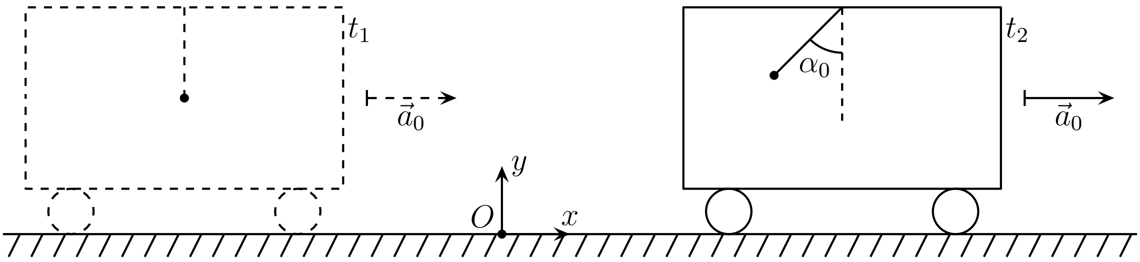
II·7·*iii* – pendule simple accéléré

✯ situation

✧ Considérons un wagon au plafon duquel est accroché un pendule simple.

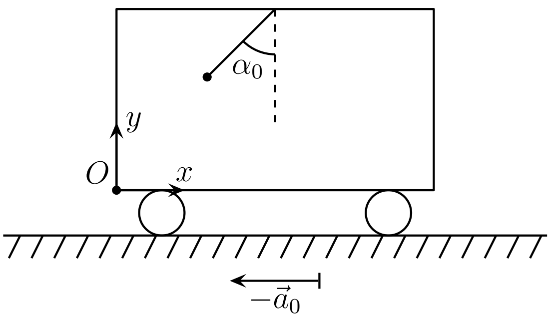
✧ Ce wagon accélère avec une accélération constante $\vec{a}_0$.

✧ Comment va osciller ce pendule ?



✧ Étant donné que le pendule est accroché au wagon, il vaut mieux prendre ce dernier pour référentiel... non galiléen.

✧ Commençons par redessiner la situation dans ce référentiel.

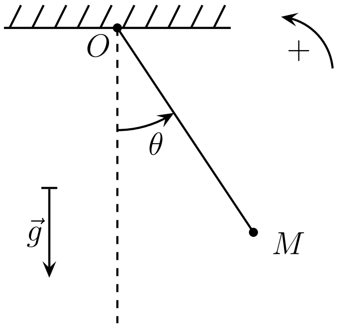


✯ analyse

✧ Pour l'analyse physique :
- ➜ il y a trois degrés de liberté, mais en admettant que le fil soit tendu, il n'en reste que 2 ;
- ➜ toutes les forces étant coplanaires à la vitesse initiale (nulle), le mouvement sera plan : il ne reste qu'un degré de description, la trajectoire sera circulaire ;
- ➜ les gandeurs pertinentes : m pour la masse, ℓ pour la géométrie, g pour l'action de la pesanteur, a_0 pour l'action de la force d'inertie d'entraînement.

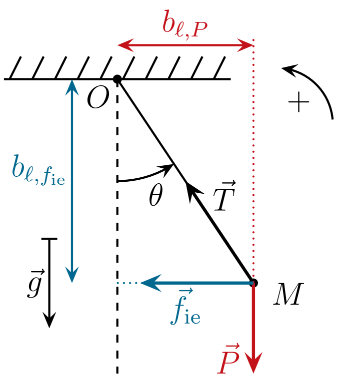
✧ Analyse technique :
- ➜ le repérage cylindro-polaire va de soi ;
- ➜ ici, comme nous ne connaissons pas d'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement et bien que le mouvement soit libre, nous allons utiliser une approche en terme de forces et même en terme de moment cinétique scalaire. . . pour s'entraîner.

✧ Nous pouvons donc représenter la situation *physique* avec le schéma ci-dessous.



✯ équation différentielle vérifiée par le mouvement

✧ Listons les forces qui s'exercent sur le système { m } dans le référentiel *non galiléen* lié au wagon :
- ➜ force à distance : le poids $\vec{P}$ exerçant le moment $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = -P\, b_{\ell,P}$;
- ➜ force de contact :
  - ➜ la tension exercée par le fil $\vec{T}$ exerçant un moment nul ;
  - ➜ les frottements sont négligés ;
- ➜ la force d'inertie d'entraînement : $\vec{f_{\text{ie}}}$ exerçant un moment $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f_{\text{ie}}}) = -f_{\text{ie}}\, b_{\ell,f_{\text{ie}}}$.



✧ Géométriquement, nous voyons alors que

$$b_{\ell,P} = \ell, \sin\theta \qquad \text{et} \qquad b_{\ell,f_{\text{ie}}} = \ell\, \cos\theta$$

✧ Parce que le mouvement est circulaire, nous pouvons tout de suite écrire le moment cinétique :

$$\sigma_\Delta = +m\,\ell^2\,\dot{\theta}(t)$$

✧ Le théorème du moment cinétique par rapport à Δ, axe fixe, donne donc

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}(\vec{P}) + \mathscr{M}(\vec{T}) + \mathscr{M}(\vec{f}_{\text{ie}}) \qquad \rightsquigarrow \qquad m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t) = -P\,\ell\,\sin\theta - f_{\text{ie}}\,\ell\,\cos\theta$$

✧ Avec les expressions des *normes* du poids $P = m\,g$ et de la force d'inertie d'entraînement $f_{\text{ie}} = m\,a_0$, nous arrivons à

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta}(t) = -m\,g\,\ell\,\sin\theta - m\,a_0\,\ell\,\cos\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta(t) - \frac{a_0}{\ell}\,\cos\theta(t) = 0$$

✧ Il s'agit d'une équation non linéaire qui est exactement celle du pendule simple pour $a_0 = 0$ (ouf !).

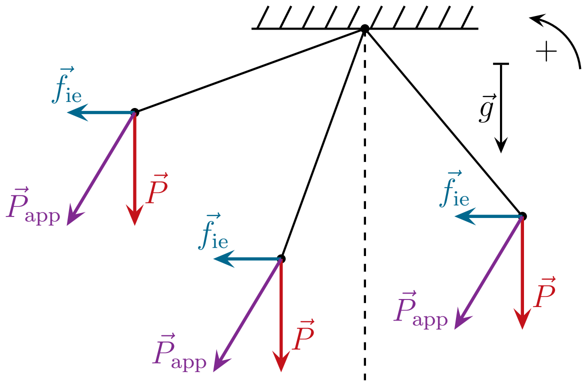
✧ La position d'équilibre est telle que

$$0 + \frac{g}{\ell}\,\sin\theta_{\text{éq}} - \frac{a_0}{\ell}\,\cos\theta_{\text{éq}} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \tan\theta_{\text{éq}} = \frac{a_0}{g}$$

✯ réinterprétation

✧ En fait, même quand $a_0 \neq 0$, cette équation est une équation de type « pendule simple », mais il faut la voir dans le bon référentiel.

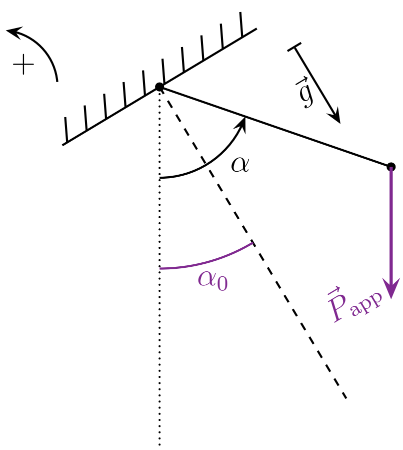
✧ Commençons par remarquer que le poids et la force d'inertie d'entraînement sont des forces vectoriellement constantes.



✧ Dans ces conditions, la résultante des forces qui font osciller le pendule est vectoriellement constante, nommons-la « poids apparent ».

✧ Plaçons-nous dans le repère où cette résultante est « verticale ».

✧ Pour cela il faut tourner d'un angle α_0 tel que $\tan\alpha_0 = \dfrac{a_0}{g}$, ce qui n'est ni plus ni moins que l'angle d'équilibre par rapport à la verticale.



✧ Nous voyons alors un pendule simple soumis à un « poids apparent » P_{app} pour lequel nous pouvons, par habitude, écrire directement l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{P_{\text{app}}}{m\,\ell}\,\sin\alpha(t) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\sqrt{g^2 + {a_0}^2}}{\ell}\,\sin\alpha(t) = 0$$

✧ Nous avions donc bien un pendule simple.

III – Énergétique du point matériel

✧ Il s'agit là d'une approche très puissante et à privilégier de manière impérative lorsque le problème est à un degré de description et en régime libre.

III·1 – Énergie cinétique

III·1·*i* – les deux versions

Théorème de l'énergie cinétique

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel $\mathscr{R}$. Alors, entre deux points A de sa trajectoire :

$$\Delta E_{\text{c}} = \sum W(\vec{f}) \text{ où :}$$

- ➜ $\Delta E_{\text{c}} = E_{\text{c}}(B) - E_{\text{c}}(A)$ est la variation d'énergie cinétique de M ;
- ➜ $W(\vec{f})$ est le travail fourni par la force $\vec{f}$.

Théorème de la puissance cinétique

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{c}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}) \text{ où :}$$

- ➜ E_{c} est l'énergie cinétique de M ;
- ➜ $\mathscr{P}(\vec{f})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$.

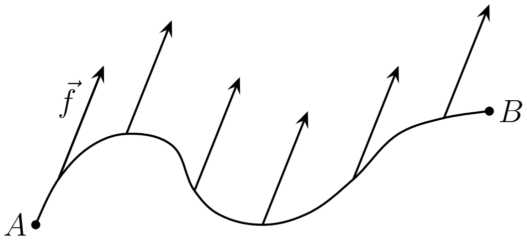
III·1·*ii* – calculer le travail fourni par une force

✧ Il y a bien sûr la définition du travail fourni par une force

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

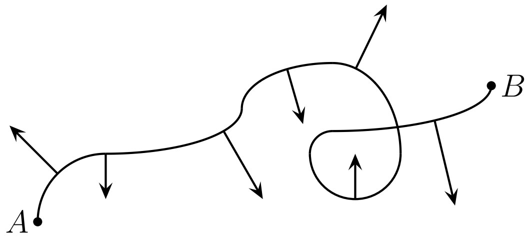
✧ Cette relation est la plupart du temps assez lourde à utiliser et inutile.
✧ Il vaut mieux connaître les quelques cas particuliers.

Un point matériel reçoit de la part d'une force vectoriellement constante $\vec{f}$ entre deux points A et B de sa trajectoire le travail :



$$W_{AB} = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment orthogonale à la trajectoire un travail nul.



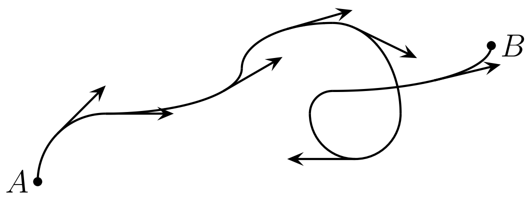
$W_{AB} = 0$

La réaction $\vec{R}_N$ ne travaille pas que si le support est **immobile**.

✧ Remarquons que, dans l'exemple du pendule simple dans un train (cf. exemple de la fin de partie précédente) :

➜ la force $\vec{T}$ exercée par le fil ne travaille pas dans le référentiel lié au wagon ;
➜ la force $\vec{T}$ exercée par le fil **travaille** dans le référentiel lié à la route, c'est elle qui permet à la masse m d'avancer « en même temps » que le wagon.

Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment parallèle à la trajectoire et d'intensité constante le travail :



$W_{AB} = \pm \ell_{AB}\, f$ où ℓ_{AB} est la longueur totale du trajet parcouru entre A et B et le signe dépendant du caractère moteur ou résistant de la force.

III·1·*iii* – quelle version ? quand ?

✧ Le théorème de la puissance cinétique est une vision locale au sens temporelle (autrement « instantanée ») des échanges énergétiques.

✧ Nous utiliserons donc cette version lorsque nous chercherons une équation différentielle.

✧ Le théorème de l'énergie cinétique, c'est tout le contraire : son expression ne fait plus apparaître la notion de temps.

✧ Nous utiliserons donc le TEC lorsque nous vondrons faire des bilans énergétiques sans préoccupation de durée.

III·2 – Énergie potentielle

III·2·i – force conservative

Une force est dite *conservative* lorsque le travail qu'elle fournit à un point matériel ne dépend pas de la trajectoire de ce dernier mais uniquement des positions initiale et finale du point matériel.

À chaque force conservative est associée une *énergie potentielle* $E_{\mathrm{p}}(M)$ ne dépendant que de la position et telle que :

➜ la force s'écrit $\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_{\mathrm{p}}$;

➜ le travail fourni entre A et B s'écrit $W_{AB} = -\Delta E_{\mathrm{p}} = -(E_{\mathrm{p}}(B) - E_{\mathrm{p}}(A))$.

III·2·ii – le gradient

Le *gradient* est un opérateur vectoriel qui transforme un champ scalaire en champ vectoriel.

Soit un champ scalaire $E_{\mathrm{p}}(M)$ quelconque ; alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_{\mathrm{p}}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$$

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial E_{\mathrm{p}}}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

En coordonnées cylindro-polaires, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{\text{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_{\text{p}}}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial E_{\text{p}}}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, E_{\text{p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_{\text{p}}}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\,\dfrac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

Quels que soient les potentiels électrostatiques $E_{\text{p1}}(M)$ et $E_{\text{p2}}(M)$, nous pouvons écrire, avec $\lambda = \text{C}^{\text{te}}$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda\,E_{\text{p}}(M)) = \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p}}(M))$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p1}}(M) + E_{\text{p2}}(M)) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p1}}(M)) + \overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p2}}(M))$$

III·2·*iii* – énergies potentielles à connaître

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{\text{p,pes}} = m\,g\,h \qquad \text{où :}$$

h est la hauteur comptée à partir d'une référence quelconque.

Attention, il s'agit bien de la « hauteur », donc « vers le haut ».

L'énergie potentielle élastique contenue dans un ressort s'écrit

$$E_{\text{p,él}} = \frac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2$$

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle s'écrit

$$E_{\text{p,grav}} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2} \qquad \text{où :}$$

- ➜ m_1 et m_2 sont les masses des deux points en interaction ;
- ➜ $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} est la constante universelle de gravitation ;
- ➜ r est la distance entre les deux points matériels.

L'énergie potentielle d'interaction coulombienne s'écrit

$$E_{\text{p,coul}} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \qquad \text{où :}$$

- ➜ q_1 et q_2 sont les charges des deux points en interaction ;
- ➜ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi} \times 10^{-9}$ F.m^{-1} est la permitivité du vide ;
- ➜ r est la distance entre les deux points matériels.

✧ Rappelons qu'une énergie potentielle d'interaction est une énergie « partagée » entre les deux points ; il vaut donc mieux considérer les deux points dans le même système.

✧ Seul cas particulier (mais néanmoins fréquent) : quand un des deux points est immobile (par exemple le ①), l'énergie potentielle est alors entièrement contenue dans l'autre (ici le ②), qui peut donc être étudiée « seul ».

L'énergie potentielle électrostatique s'écrit

$$E_{\text{p,elst}} = q\,V \qquad \text{où :}$$

- ➜ q est la charge du point matériel ;
- ➜ V est le potentiel électrostatique.

Dans un référentiel non galiléen en rotation **uniforme**, l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (ou énergie potentielle centrifuge) s'écrit

$$E_{\text{p,fie}} = -\frac{1}{2}\,m\,\Omega^2\,HM^2 \qquad \text{où :}$$

- ➜ Ω est la vitesse angulaire de rotation ;
- ➜ H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

Conventionnellement, lorsque c'est possible, les énergies potentielles sont choisies nulles là où les forces le sont.

$$E_{\text{p}}(\vec{r}_0) = 0 \quad \text{pour } \vec{r}_0 \text{ tel que} \quad \vec{f}(\vec{r}_0) = \vec{0}$$

III·2·*iv* – énergie potentielle et équilibre

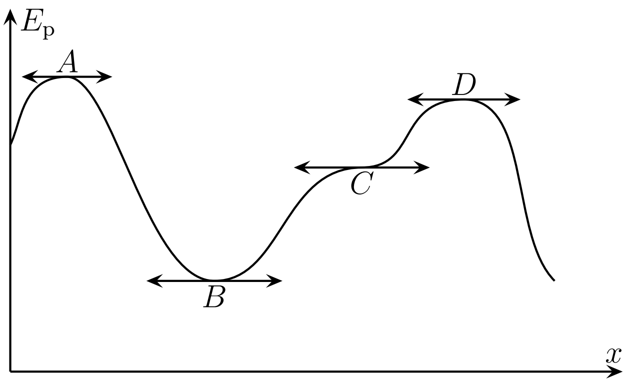
✧ C'est sans contestation possible **la** méthode à utiliser lorsque la situation :

- ➜ est à un degré de description ;

➜ est en régime libre ;
➜ a des forces de frottement nulles à l'équilibre (donc *sans* frottement solide).

Les positions d'équilibre d'un point matériel possédant l'énergie potentielle E_p sont les points de l'espace où cette énergie potentielle est stationnaire.

Les positions d'équilibre stables correspondent à des points où l'énergie potentielle est localement minimale.



✧ La plupart du temps, la stabilité en un point x_0 se prouve en calculant la dérivée seconde et en prouvant que

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_\text{p}}{\mathrm{d}x^2}(x_0) > 0$$

✧ Il ne s'agit toutefois pas là d'une condition nécessaire, tout juste est-elle suffisante.
✧ Le lecteur montrera ainsi que, avec E_0 une énergie et a une longueur, l'énergie potentielle suivante admet $x = 0$ comme point d'équilibre stable alors que $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_\text{p}}{\mathrm{d}x^2}(0) = 0$

$$E_\text{p}(x) = E_0 \times \frac{x^4}{a^4}$$

III·3 – Énergie mécanique

III·3·i – énoncés

Théorème de l'énergie mécanique
Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors, entre deux points A de sa trajectoire :

$$\Delta E_\text{m} = \sum W(\vec{f}_\text{nc}) \text{ où :}$$

➜ $\Delta E_\text{m} = E_\text{m}(B) - E_\text{m}(A)$ est la variation d'énergie mécanique de M ;
➜ $W(\vec{f}_\text{nc})$ est le travail fourni par les forces non conservatives.

Théorème de la puissance mécanique

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{\mathrm{nc}}) \text{ où :}$$

- ➜ E_{m} est l'énergie cinétique de M ;
- ➜ $\mathscr{P}(\vec{f}_{\mathrm{nc}})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$.

III·3·*ii* – intérêt

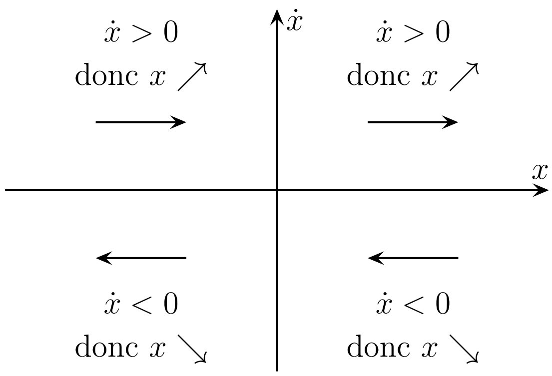
- ✧ Pour un problème de *mécanique*, les théorèmes de la puissance *mécanique* et de l'énergie *mécanique* sont évidemment plus adaptés.
- ✧ La différence entre la version « puissance » et la version « énergie » est la même que pour les versions cinétiques : la première est plus pour trouver une équation différentielle et la seconde pour faire un bilan.

III·4 – Le plan de phase

III·4·*i* – présentation

Le *plan de phase* est le plan qui permet de représenter la vitesse en fonction de la position.

- ✧ Les trajectoires vont forcément dans une certaine direction suivant le cadran.



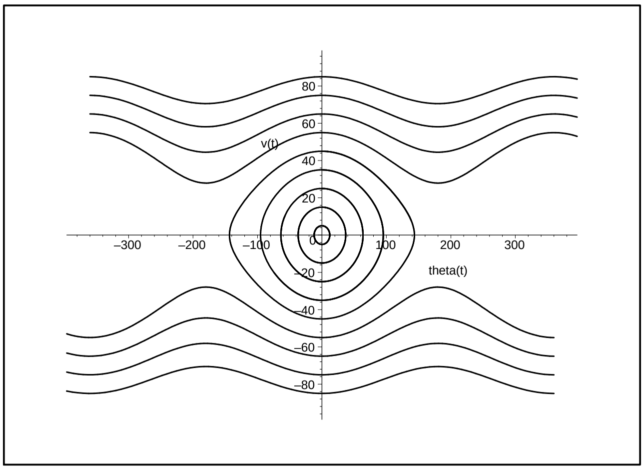
Dans le plan de phase, les trajectoires tournent globalement dans le sens horaire.

Dans le plan de phase, les points de vitesse nulle sont situés sur l'axe des absisses.

III·4·*ii* – caractères à repérer

- ✧ Faisons-le sur des exemples.

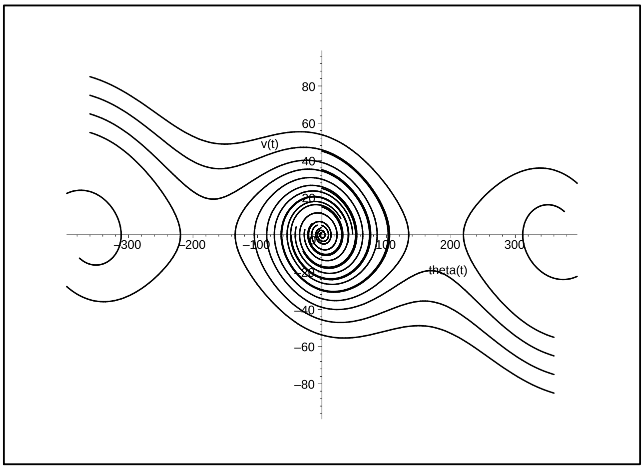
Graphique 1



✧ Sur ce plan de phase, nous pouvons voir :

➜ que les courbes sont fermées, le régime est donc périodique ;
➜ que les petites boucles sont des ellipses, l'évolution est donc sinusoïdale à faible amplitude ;
➜ globalement, de nombreuses conditions initiales permettent un état lié puisque de nombreuses trajectoires ne partent pas à l'infini ;
➜ nous pouvons constater aussi que le régime est libre puisqu'aucune trajectoire n'en croise une autre ;
➜ libre et périodique nous fait dire qu'il n'y a pas de frottement.

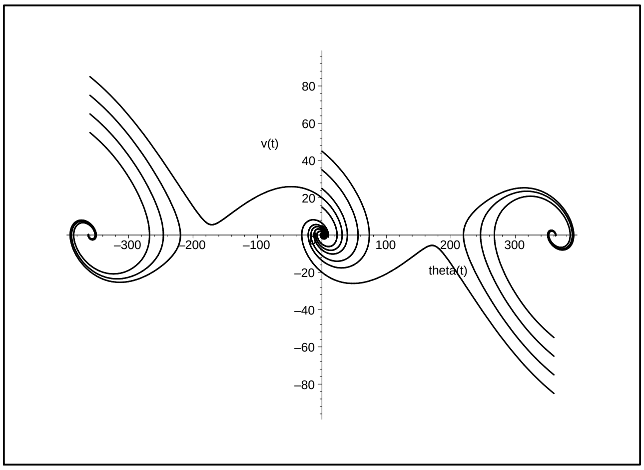
Graphique 2



✧ La situation est différente ici :

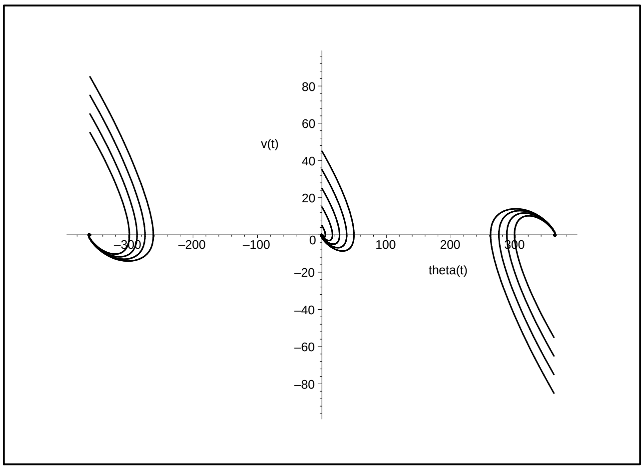
➜ il y a des frottements, nous voyons apparaître des points attracteurs (les points d'équilibre stable) ;
➜ au vu du nombre d'oscillations, nous pouvons dire que le facteur de qualité est de l'ordre de 4 ou 5 ;
➜ le régime est toujours libre puisque qu'aucune trajectoire n'en coupe une autre.

Graphique 3



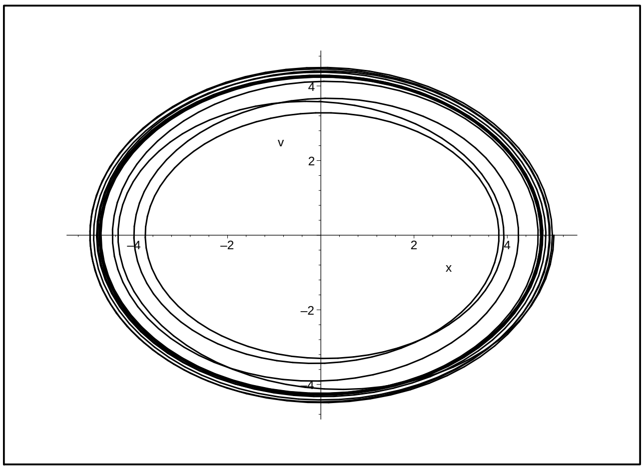
✧ Ici, nous pouvons dire que :
- ➜ le régime est toujours libre puisque qu'aucune trajectoire n'en coupe une autre ;
- ➜ il y a encore plus de frottements, le facteur de qualité étant de l'ordre de 1 ou 2.

Graphique 4



✧ Ici, nous pouvons affirmer que :
- ➜ le régime est toujours libre puisque qu'aucune trajectoire n'en coupe une autre ;
- ➜ il y a tellement de frottements qu'il n'y a plus d'oscillation, le régime est apériodique.

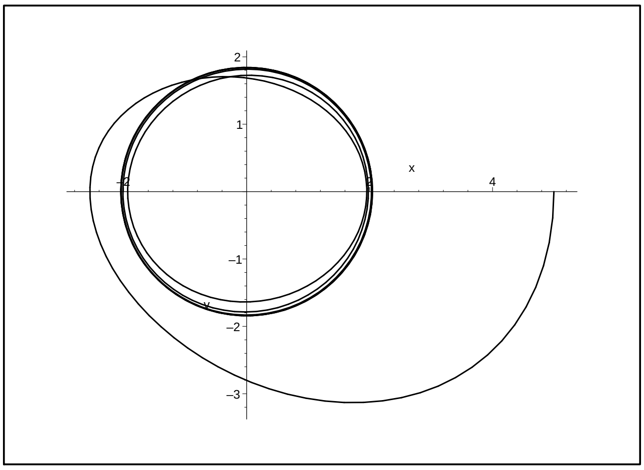
Graphique 5



✧ Ici, nous pouvons affirmer que :
- ➜ le régime n'est plus libre puisque la trajectoire se coupe ;
- ➜ nous voyons apparaître un cycle limite qui est caractéristique d'une contrainte périodique ;
- ➜ le cycle limite n'est pas atteint très rapidement, il semble ne pas y avoir beaucoup de frotte-

ments.

Graphique 6

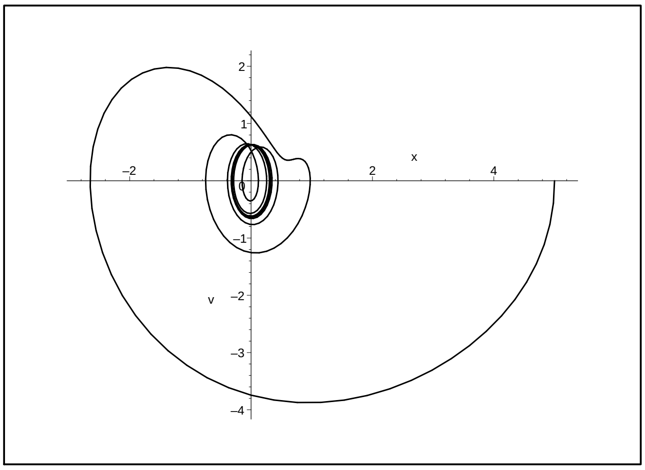


✧ Ici, nous pouvons affirmer que :

➜ le régime n'est plus libre puisque la trajectoire se coupe ;

➜ le cycle limite est très net et est atteint très rapidement, il y a beaucoup de frottements.

Graphique 7

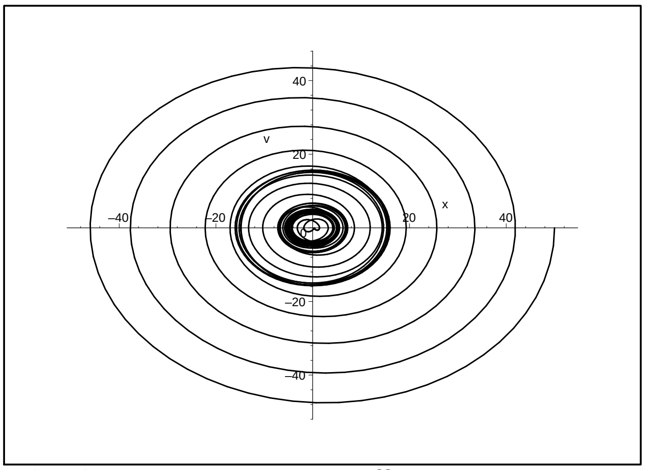


✧ Ici, nous pouvons affirmer que :

➜ le régime n'est plus libre puisque la trajectoire se coupe ;

➜ la légère irrégularité dans la trajectoire, comparé au cycle limite, montre une « interférence » entre le régime forcé et le régime transitoire : les frottements sont elevés, mais pas trop.

Graphique 8



✧ Enfin, pour ce dernier plan de phase, nous pouvons affirmer que :

➜ le régime n'est plus libre puisque la trajectoire se coupe ;

➜ la présence de deux accumulations de trajectoire montre que deux évolutions se superposent : non seulement il y a peu de frottements mais en plus l'évolution forcée doit être proche de l'évolution propre.

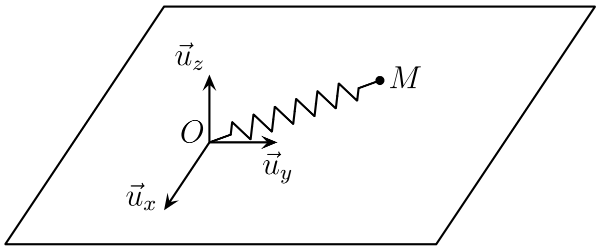
IV – Mouvement dans un champ de force central

IV·1 – Description de la situation étudiée

> Soit M un point matériel soumis à une $\vec{f}$ (force unique ou résultante) telle que la droite d'action de $\vec{f}$ passe par un point fixe du référentiel $\mathscr{R}$.
> Alors M est dit soumis à une *force centrale*.

✧ Remarque :
- ➜ cette définition implique qu'une force n'est pas intrinsèquement centrale ;
- ➜ il faut faire **extrêmement** attention aux changements de référentiels avec les forces centrales.

✧ Exemple de forces centrales :
- ➜ la force de gravitation entre deux points matériels dans leur référentiel barycentrique ;
- ➜ l'exemple ci-dessous, pourvu qu'il n'y ait pas de frottements.



✧ Bien qu'un pendule simple soit soumis à $\vec{T}$, la tension exercée par le fil, qui passe toujours par un point fixe, nous ne dirons pas du pendule simple qu'il est soumis à une force centrale car ce n'est pas la *seule* force à laquelle il est soumis.

IV·2 – Lois de conservation

IV·2·*i* – moment cinétique

> Un point soumis à une force centrale possède un moment cinétique constant.

> Si un point matériel a un moment cinétique constant, alors :
> - ➜ le mouvement est plan ;
> - ➜ il obéit à la loi des aires.

IV·2·*ii* – énergie mécanique

✧ La plupart du temps, les forces centrales sont des forces à distance donc conservatives.

> Un point soumis à une force centrale possède une énergie mécanique constante.

IV·3 – Énergie potentielle effective

IV·3·*i* – expression

✧ En notant $E_{\text{p}}(r)$ l'énergie potentielle associée à la force centrale, nous avons sucessivement

$$\begin{aligned} E_{\text{m}} & E_{\text{c}} + E_{\text{p}}(r) \\ & = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + E_{\text{p}}(r) \\ & = \frac{1}{2}\,m\,\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) + E_{\text{p}}(r) \end{aligned}$$

✧ Or, le moment cinétique est constant, ce qui implique

$$\sigma = m\,r^2\,\dot{\theta} \qquad \rightsquigarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{\sigma}{m\,r^2}$$

✧ Et ainsi

$$\begin{aligned} E_{\text{m}} & = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} + E_{\text{p}}(r) \\ & = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_{\text{p,eff}}(r) \end{aligned}$$

✧ L'énergie potentielle effective $E_{\text{p,eff}}(t)$ permet l'étude du mouvement dans le référentiel non galiléen en rotation à la vitesse $\dot{\theta} \neq \text{C}^{\text{te}}$ et est composée de deux parties :

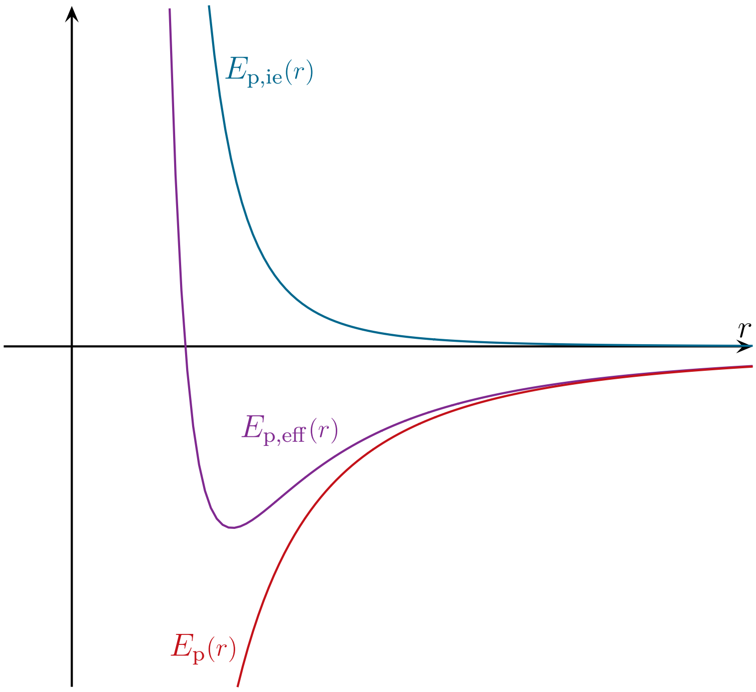
➜ $E_{\text{p}}(r)$ est l'énergie potentielle associée à la force centrale « physique » ;

➜ $E_{\text{p,ie}} = \dfrac{\sigma^2}{2\,m\,r^2}$ est l'energie potentielle associée à la force centrifuge.

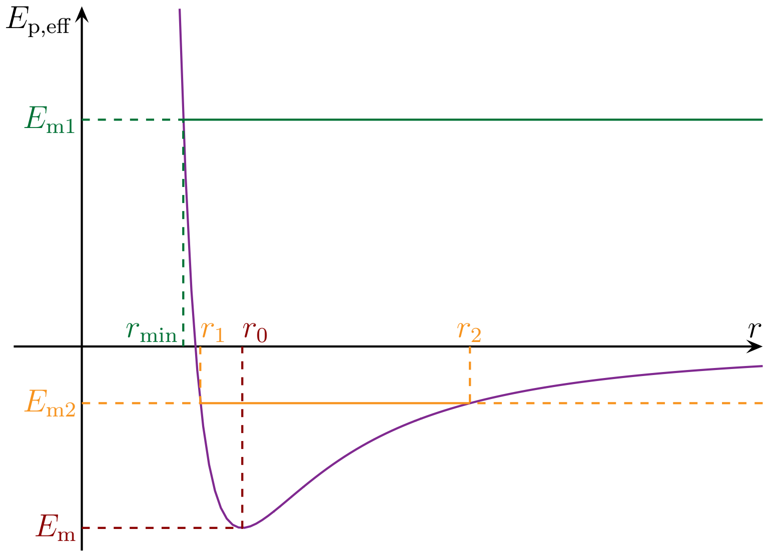
Remarque. Il est normal que l'énergie potentielle associée à la force centrifuge n'ait pas l'expression que nous connaissons car, ici, la rotation du référentiel non galiléen n'est **pas** uniforme.

IV·3·*ii* – représentation graphique

✧ En décomposant en bleu la partie $E_{\text{p,iet}}$ et en rouge la partie $E_{\text{p}}(r)$, l'énergie potentielle (en violet) effective a l'allure suivante dans le cas d'une force attractive.



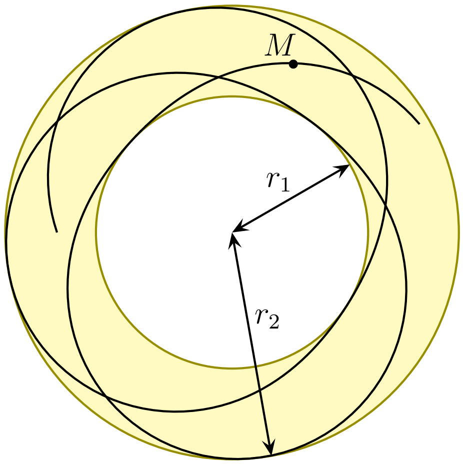
✧ Suivant les valeurs de l'énergie mécanique, il y a différents types de mouvement possibles.



✧ Dans l'exemple précédent :

- ➜ pour $E_{\text{m}} = E_{\text{m0}}$, une seule valeur de r est possible, c'est une trajectoire circulaire ;
- ➜ pour $E_{\text{m}} = E_{\text{m1}}$, r est non bornée et admet une valeur minimale r_{min}, c'est un état de diffusion ;
- ➜ pour $E_{\text{m}} = E_{\text{m1}}$, r est bornée par r_1 et r_2, c'est un état lié.

Attention ! « état lié entre r_1 et r_2 » n'implique certainement pas « trajectoire fermée » et encore moins « ellipse » mais « dans une couronne de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 », un peu comme dans la représentation ci-dessous.



IV·4 – Cas particulier du mouvement newtonien

IV·4·*i* – qui cela concerne-t-il ?

✧ Cela concerne deux forces fondamentales :
- ➜ la force de gravitation, qui est toujours attractive ;
- ➜ l'interaction coulombienne entre charges (avec l'exemple classique de l'expérience de RUTHERFORD [1]).

Une force est dite *newtonienne* lorsqu'elle peut s'écrire

$$\vec{f} = -k\,\frac{1}{r^2}\,\vec{u}_r$$

✧ Nous avons donc :
- ➜ $k = G\,m_1\,m_2$ pour l'attraction gravitationnelle ;
- ➜ $k = \dfrac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ pour la force coulombienne.

L'énergie potentielle associée à une force newtonienne s'écrit

$$E_\text{p} = -\frac{k}{r}$$

IV·4·*ii* – types de trajectoire

La trajectoire d'un point matériel soumis à une force newtonienne est une conique.

✯ états liés

☯ géométriquement

✧ Il y a deux coniques correspondant à un état lié :

1. Voir à ce propos le chapitre 7 de mécanique de première année.

➜ le cercle, cas (très) particulier de la conique d'excentricité nulle ;
➜ l'ellipse, d'excentricité $e < 1$.

> Dans le cas particulier d'un mouvement à force centrale (et en particulier pour une interaction newtionienne), si la trajectoire est circulaire, alors le mouvement est uniforme.

✧ Ce résultat tombe immédiatement avec la loi de conservation de l'énergie

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{k}{r}$$

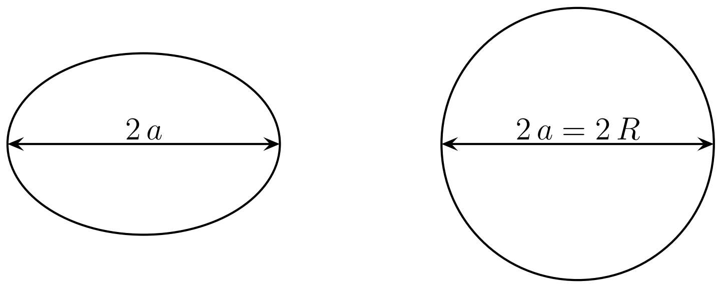
✧ Comme l'énergie mécanique est constante, si r l'est, alors v l'est aussi.
✧ Paramétriquement, la trajectoire s'écrit ave p et e des grandeurs physique et θ_0 dépendant du répérage

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)}$$

lien avec l'énergie

> L'énergie mécanique d'un point matériel soumis à une force newtonienne et dans un état lié est strictement négative et s'écrit
>
> $$E_{\mathrm{m}} = -\frac{k}{2\,a} \qquad \text{où :}$$
>
> a est le demi-grand axe de la trajectoire

✧ Si la trajectoire est circulaire, le demi-grand axe n'est autre que le rayon.



✧ Ce petit résultat est très utile.

démonstration

✧ Pour le démontrer, repartons de l'énergie mécanique $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \dfrac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} - \dfrac{k}{r}$.
✧ Pour une ellipse, état lié, il existe de valeurs r_1 et r_2 de r telles que $\dot{r} = 0$: ce sont les valeurs maximale et minimale du rayon.
✧ Pour ces deux points, **et uniquement pour ces deux points**, l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{\sigma^2}{2\,m\,r^2} - \frac{k}{r} \quad \rightsquigarrow \quad r^2\,E_{\mathrm{m}} + k\,r - \frac{\sigma^2}{2\,m} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad r^2 + \frac{k}{E_{\mathrm{m}}}\,r - \frac{\sigma^2}{2\,E_{\mathrm{m}}\,m} = 0$$

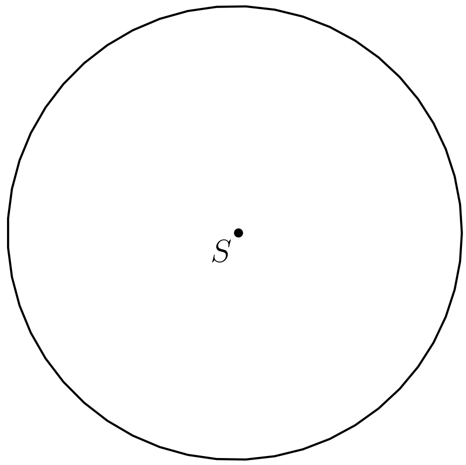
✧ Il s'agit d'un trinôme dont les solutions sont r_1 et r_2 ; nous avons donc $r^2 - (r_1 + r_2)\,r + r_1\,r_2 = 0$, ce qui donne, en identifiant :

$$r_1 + r_2 = -\frac{k}{E_{\text{m}}} \qquad \text{et} \qquad r_1 + r_2 = 2\,a \qquad \rightsquigarrow \qquad E_{\text{m}} = -\frac{k}{2\,a}$$

☯ la Terre

> L'excentricité de la trajectoire de la Terre est d'environ $\dfrac{1}{60}$.

✧ Voici ce à quoi ressemble, « vue de dessus », la trajectoire de la Terre, S étant le Soleil.



✧ L'auteur garantit que la courbe ci-dessus est la courbe polaire (en centimètres)

$$r(\theta) = \frac{3}{1 + \dfrac{1}{60}\cos\theta}$$

✯ états de diffusion

✧ Il y a deux types d'état de diffusion.

✧ Il y a tout d'abord la trajectoire parabolique pour laquelle :
- ➜ l'excentricité vaut exactement 1 ;
- ➜ l'énergie mécanique totale est nulle ;
- ➜ la vitesse à l'infini est nulle.

✧ Comme la condition pour avoir une parabole est une condition d'égalité, aucune trajectoire *réelle* n'est parabolique.

✧ Il y a ensuite l'hyperbole pour laquelle :
- ➜ l'excentricité e est supérieure à 1 ;
- ➜ l'énergie mécanique totale est strictement positive ;
- ➜ la vitesse à l'infini est non nulle.

✧ Pour une force répulsive (donc pas pour l'attraction gravitationnelle), nous préférerons écrire la trajectoire sous la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{e\,\cos(\theta - \theta_0) - 1}$$

✯ force attractive ou répulsive

- Pour les forces newtoniennes attractives (donc en particulier pour la gravitation), les trajectoires peuvent être circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.
- Pour les forces newtoniennes répulsives, la seule trajectoire possible est la trajectoire hyperbolique.

IV·4·*iii* – méthode

- L'erreur régulièrement commise est de se précipiter sur l'expression de la trajectoire.
- Mieux vaut d'abord :
  ① déterminer la nature de la trajectoire ;
  ② utiliser les deux lois de conservation du moment cinétique et de l'énergie.
- Et seulement après, éventuellement, rajouter l'expression de la trajectoire.

Mécanique du point

Au niveau du cours

✯ Programme concerné

✧ Programme de 1re année :
- ➜ I.A. Mécanique du point.
- ➜ III.B.1. Oscillations forcées dans les problèmes mécaniques à une seule dimension.
- ➜ III.B.2. Théorème du moment cinétique.
- ➜ III.B.3. Mouvement dans un champ de forces centrales conservatives.
- ➜ III.B.4. Changements de référentiel.
- ➜ III.B.6. Caractère galiléen approché de quelques référentiels d'utilisation courante.

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ repère, coordonnée cartésiennes / cylindro-polaire / polaire / sphérique, base ;
- ➜ déplacement élémentaire, volume élémentaire ;
- ➜ vecteurs position / vitesse / accélération / rotation ;
- ➜ trajectoire, mouvement uniforme / uniformément accéléré / sinusoïdal / circulaire ;
- ➜ référentiel, référentiel de COPERNIC / héliocentrique / géocentrique / terrestre ;
- ➜ vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement / de CORIOLIS ;
- ➜ interaction nucléaire forte / nucléaire faible / gravitationnelle / électromagnétique ;
- ➜ champ de gravitation / de pesanteur / électromagnétique ;
- ➜ accélération de pesanteur ;
- ➜ ressort, pression, fil, poulie, frottement, support ;
- ➜ poussée d'Archimède, réaction normale / tangentielle ;
- ➜ forces d'inerties d'entraînement / de CORIOLIS / centrifuge ;
- ➜ quantité de mouvement, moment cinétique, moment d'une force, bras de levier ;
- ➜ énergie cinétique / potentielle / mécanique ;
- ➜ gradient ;
- ➜ degré de liberté / degré de description ;
- ➜ équilibre stable / instable / métastable / indifférent ;
- ➜ plan de phase, attracteur ;
- ➜ force centrale, mouvement radial ;
- ➜ conique, ellipse, parabole, hyperbole, excentricité.

✯ Les grandeurs

✧ Connaître les unités de :
- ➜ mètre (m), seconde (s), radian (rad) ;
- ➜ g (m.s^{-2}), la constante de raideur k d'un ressort (N.m^{-1}).

✧ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leur interprétation :
- ➜ $[\omega] = (\text{rad.s}^{-1}) = \text{T}^{-1}$; $[W] = (\text{J}) = (\text{kg.m.s}^{-2}) = \text{M.L.T}^{-2}$;
- ➜ $\vec{P} = m\vec{g}$; $E_\text{p} = m\,g\,z$.

✧ Connaître les valeurs de :
- ➜ masse, rayon, période de rotation sur elle-même de la Terre ;
- ➜ rayon, excentricité de la trajectoire de la Terre ;

➜ masse, diamètre du Soleil.

✯ Les lois

✧ Sont à connaître :
- ➜ déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes / cylindro-polaire / sphérique ;
- ➜ position / vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes / cylindro-polaire ;
- ➜ moment cinétique en coordonnées cylindro-polaire ;
- ➜ position / vitesse / accélération pour un mouvement circulaire quelconque ;
- ➜ vitesse suite à une chute libre de hauteur h ;
- ➜ lois de composition des vitesses et des accélération entre deux référentiels en translation / en rotation ;
- ➜ interaction gravitationnelle, coulombienne ;
- ➜ poids, force de LORENTZ, force de LAPLACE ;
- ➜ force exercée par un ressort ;
- ➜ force pressante, poussée d'ARCHIMÈDE, force de frottement fluide ;
- ➜ force exercée par un support, par un fil idéal relié (éventuellement) à des poulies idéales ;
- ➜ forces d'inerties d'entraînement et de Coriolis pour un référentiel en translation / en rotation ;
- ➜ les trois lois de NEWTON ;
- ➜ théorème du moment cinétique et sa version scalaire ;
- ➜ théorème de l'énergie cinétique / de la puissance cinétique ;
- ➜ travail / puissance fourni(e) par une force ;
- ➜ travail fourni par une force constante / orthogonale à la trajectoire / d'intensité constante et toujours parallèle à la trajectoire ;
- ➜ expression fondamentale du gradient, coordonnées cartésiennes du gradient ;
- ➜ travail d'une force conservative en fonction de son énergie potentielle ;
- ➜ énergie potentielle gravitationnelle / de pesanteur / coulombienne / élastique / d'inertie d'entraînement ;
- ➜ caractérisation d'une position d'équilibre et de sa stabilité en termes énergétiques ;
- ➜ théorème de l'énergie mécanique / de la puissance mécanique ;
- ➜ lois de conservation dans un problème à force centrale ;
- ➜ loi des aires ;
- ➜ expression de l'énergie sur une ellipse ou un cercle pour une attraction newtonienne ;
- ➜ expression de la trajectoire en coordonnées polaire pour une attracation newtonienne.

Au niveau de l'analyse

✯ Analyse physique

✧ Savoir :
- ➜ savoir déterminer le caractère galiléen ou non d'un référentiel donné ;
- ➜ savoir reconnaître un problème à un degré de liberté.

✯ Analyse technique

✧ Savoir :
- ➜ choisir le repérage adapté (centre et coordonnées) ;
- ➜ choisir le type d'approche (force, énergie, moment cinétique).

Au niveau des savoir-faire

✯ petits gestes

✧ Savoir :

- ➜ savoir déterminer le vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre ;
- ➜ déterminer l'état lié ou de diffusion à partir de l'énergie mécanique ;
- ➜ dans le cas d'une interaction newtonienne, savoir déterminer le type de trajectoire à partir de la connaissance de l'énergie mécanique / de l'excentricité de la trajectoire.

✯ exercices classiques

✧ Savoir refaire :

- ➜ savoir lire un plan de phase et y repérer des mouvements périodiques / sinusoïdaux, des états liés / de diffusion, un régime libre / forcé, des positions d'équilibre stable / instables, une évolution conservative / non conservative ;
- ➜ savoir retrouver trajectoire pour un mouvement uniformément accéléré ;
- ➜ savoir retrouver la trajectoire d'un objet en chute libre soumis à des frottements fluides linéaires ;
- ➜ savoir retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement d'un pendule simple ;
- ➜ savoir retrouver vitesse, période, énergie, moment cinétique en fonction de r pour un mouvement circulaire dans le cas de l'attraction gravitationnelle.