

Mécanique

Chapitre 2

Mécanique du solide

Mécanique du solide

La mécanique ne se cantonne pas à l'étude de l'évolution du point matériel. De manière évidente la matière qui nous entoure ne peut se réduire systématiquement à un point. L'objectif de ce chapitre va donc être de voir comment adapter les lois de la mécanique **du** point matériel à l'étude d'objets étendus très particuliers : les solides.

La notion de solide en mécanique est particulière puisqu'il faut la comprendre comme « solide indéformable » et non pas comme en thermodynamique « dans l'état solide ».

Techniquement

Un *solide* est un ensemble de points tel que quels que soient A et B , la distance $AB = \|\vec{AB}\|$ reste constante dans le temps.

Il est donc tout à fait possible qu'un solide tourne sur lui-même. En revanche, parce que deux solides peuvent être articulés ensemble par l'intermédiaire d'une liaison,

Deux solides ne constituent pas forcément un solide.

Pour étudier un solide, nous le découperons par la pensée en minuscules petits morceaux qui seront chacun assimilables à un point matériel. Puis, après, nous écrirons des lois pour ces systèmes de points matériels.

C'est ainsi que dans une première partie nous rappellerons les lois vues en premières années sur les systèmes de *deux* points matériels pour en étendre les résultats à N points matériels quelconques.

Après nous pourrons, dans la deuxième partie, commencer par étudier un cas particulier de mouvement de solide à savoir le solide en rotation autour d'un axe fixe. Cela nous permettra d'introduire les notions cinétiques utiles à la description du mouvement d'un solide.

Enfin dans la dernière partie nous verrons comment étudier des solides qui avancent et qui tournent sur eux-même simultanément.

Table des matières

Biographies succinctes	6
I Mécanique des systèmes de points matériels	8
I-1 Cinétique	8
I-1 <i>·i</i> notations	8
I-1 <i>·ii</i> centre de masse	8
I-1 <i>·iii</i> référentiel barycentrique	9
I-1 <i>·iv</i> grandeurs cinétiques	9
quantité de mouvement	9
moment cinétique	10
énergie cinétique	10
I-2 Dynamique	11
I-2 <i>·i</i> situation	11
I-2 <i>·ii</i> théorème du centre d'inertie (TCI)	11
I-2 <i>·iii</i> théorème du moment cinétique (TMC)	12
deux versions	12
. . . plus la version barycentrique	12
dans tous les cas	12
I-2 <i>·iv</i> théorèmes énergétiques	13
version globale	13
version locale	13
interprétation	13
I-2 <i>·v</i> travail des interactions intérieures	14
deux points liés – liaison totale	14
glissement sans frottement	14
frottement sans glissement	15
interaction conservative	15
cas du ressort	15
I-3 Cas du système isolé	16
I-3 <i>·i</i> particule fictive	16
I-3 <i>·ii</i> cas $m_1 \gg m_2$	16
I-3 <i>·iii</i> intérêt	16
II Solide en rotation autour d'un axe fixe	18
II-1 Cinétique	18
II-1 <i>·i</i> moment cinétique	18
exemple : le bâton de majorette	18
généralisation	19
interprétation du moment d'inertie	19
II-1 <i>·ii</i> énergie cinétique	20
exemple : le bâton de majorette	20
généralisation	20
interprétation	21
II-2 Actions d'axe	21
II-2 <i>·i</i> support	21
II-2 <i>·ii</i> couple	21
une modélisation trompeuse	21
notion de couples	22

	couples à connaître	23
II·2·iii	aspect énergétique	23
II·3	Exemples	24
II·3·i	pendule grave	24
	situation, analyse	24
	mise en équation	24
	interprétation	25
II·3·ii	mise en rotation d'un moteur	26
	situation, analyse	26
	mise en équation	26
	interprétation	27
II·3·iii	poulie non idéale	27
	situation, analyse	27
	mise en équation	28
	interprétation	31
III	Solide en mouvement presque quelconque	33
III·1	Vitesse d'un point du solide	33
III·1·i	situation	33
III·1·ii	champ des vitesse d'un solide, loi de VARIGNON	33
	loi	33
	démonstration	34
III·2	Contact entre deux solides	35
III·2·i	généralisation d'un cas connu	35
III·2·ii	vitesse de glissement	36
III·2·iii	frottement et glissement	38
III·2·iv	interaction de contact	38
	action normale	38
	action tangentielle	38
III·2·v	aspect énergétique	40
	résultat	40
	interprétation	40
	démonstration	41
III·2·vi	phénomène négligé	42
III·3	Dynamique du solide	42
III·3·i	trois théorèmes	42
III·3·ii	méthode de résolution	43
	dispositif avec un seul solide	43
	dispositif à plusieurs solides	43
III·4	Tapis roulant	43
III·4·i	dispositif et analyse	43
	dispositif à plusieurs solides	43
	pas de frottements?	44
	analyse physique	44
III·4·ii	évolution temporelle	44
	vitesse de glissement	44
	première phase : glissement	45
	deuxième phase : pas de glissement	45
	évolution sous forme graphique	46
III·4·iii	aspect énergétique	46

III·5	Descendre une pente	47
III·5·i	situation	47
III·5·ii	version sans frottement	47
	analyse	47
	mise en équation	48
	interprétation	50
III·5·iii	version frottement sans glissement	50
	analyse	50
	hypothèse de non glissement	50
	mise en équation	51
	évolution temporelle	53
	vérification de l'hypothèse	53
	une autre façon de voir le roulement	55
III·6	Effet back-spin	55
III·6·i	modélisation simple pour une situation fréquente et analyse	55
	situations modélisées	55
	modèle	56
III·6·ii	approche quantitative	56
	analyses	56
	vitesse de glissement	57
	hypothèse : ça glisse	58
	date de fin de glissement	59
	et au delà	60
	Fiche de révision	61

Biographies succinctes

René DESCARTES

(1596 La Haye, Touraine – 1650 Stockholm)



De père conseiller au parlement et de mère issue de la noblesse, René n'aura guère de soucis financier dans sa vie. Il fait ses études au lycée de La Flèche et reçoit une solide formation en mathématique, physique et philosophie. Après les rencontres avec BEEKMAN et le père MERSENNE il écrit *Le discours de la méthode* en 1637, ouvrage dans lequel il expose sa méthode qui lui permettra d'écrire LA DIOPTRIQUE et *La géométrie*. Il publie la loi de la réfraction que SNELL avait découverte sans la publier mais il existe un doute sur le fait que DESCARTES avait connaissance de ces travaux, doutes émis par HUYGENS en particulier.

Pierre VARIGNON

(1654 Caen – 1722 Paris)



Pierre fait des études de théologie et de philosophie à Caen mais prend goût très vite aux mathématiques. Ordonné prêtre, il part à Paris en 1686 et rentre à l'académie des sciences en 1688. En 1706, il obtient la chaire de philosophie grecque et latine au Collège de France. Il est élu à l'Académie de Berlin en 1713 et à la Royal Society en 1714. Il est connu pour avoir été l'un des promoteurs les plus actifs de l'introduction en France du calcul différentiel et intégral créé par LEIBNIZ et NEWTON.

Johann Samuel KÖNIG

(1712 Büdingen – 1757 Zuilenstein)



Fils de pasteur professeur de mathématiques et de théologie, Samuel a fait ses études de mathématique et philosophie à Berne, Lausanne puis Basel. En 1738 Johann part à Paris et fait la rencontre de VOLTAIRE, RÉAUMUR et MAUPERTUIS. Suite à une brouille avec le marquis DU CHÂTELET auquel il donne des cours particulier (brouille probablement liée aux paiements de ces cours), Johann retourne à Berne mais y est banni dès 1744 pour ses opinions libérales. C'est MAUPERTUIS qui le propose à l'académie de Berlin et l'y fait élire. Toutefois suite une dispute sur la primauté du concept de moindre action (aujourd'hui attribué à MAUPERTUIS) il en est renvoyé et passe les 6 dernières années empêtré dans cette querelle.

Charles Augustin COULOMB

(1736 Angoulême – 1806 Paris)



Parce qu'il a choisit de suivre des cours de mathématiques plutôt que ceux de médecine auxquels ses parents le destinent, Charles est déshérité et doit aller vivre à Montpellier de 1757 à 1759 dans la famille de son père. Il rentre à Paris en 1759 pour suivre des cours préparatoire au concours d'entrée de l'école de génie de Mézière, concours qu'il réussit. Sorti en 1761, Charles est envoyé en mission en Martinique en 1764 et est rapatrié en 1772 pour raison médicale avec le grade de capitaine. Il effectue des recherches scientifiques tout en assurant son travail d'ingénieur militaire. Promu lieutenant-colonel en 1786, la révolution le force à abandonner tous ses biens en 1791. De retour à Paris sous Bonaparte en 1802 il sera Inspecteur général de l'instruction publique durant les 4 dernières années de sa vie.

I – Mécanique des systèmes de points matériels

Le but de cette partie est d'étendre à N points matériels voire à un ensemble continu de points les résultats et lois connus pour seulement 2 points matériels.

Dans cette partie, nous ne supposons pas *a priori* que le système étudié est un solide. Nous aurons donc là des lois *générales*.

I.1 – Cinétique

La première chose à réaliser est toujours de se doter d'outils pour *décrire* l'évolution. Ici comme il s'agit de systèmes de plusieurs points (et même *a priori* d'une infinité de points), il va être nécessaire d'inventer des outils synthétiques, *ie.* des outils qui condensent une foule d'information en un minimum de grandeurs qui seront physiquement intéressantes.

I.1.i – notations

- ◇ Sauf précision contraire, dans toute la suite, nous allons nous intéresser à un système de N point matériels M_1, M_2, \dots, M_N de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_N .
- ◇ Nous envisagerons aussi le cas d'un système continu (comme pour les solides) contenu dans le volume \mathcal{V} et découpé par la pensée en des points matériels M de masse dm .
- ◇ Dans les deux cas, nous noterons m_{tot} la masse totale du système qui, en tant que grandeur extensive s'écrit

$$m_{\text{tot}} = m_1 + m_2 + \dots + m_N \quad \text{ou} \quad m_{\text{tot}} = \iint_{\mathcal{V}} dm = \iint_{\mathcal{V}} \rho(M) d\tau_M$$

I.1.ii – centre de masse

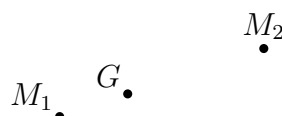
Le *centre de masse* (ou cdm) d'un système de N points est le point noté G tel que

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \iint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

Le centre de masse vérifie, quel que soit le point O

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2 + \dots + m_N \overrightarrow{OM}_N}{m_{\text{tot}}} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \times \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{OM} dm$$

Comme l'intuition peut le confirmer, le centre de masse est toujours du côté du plus massique (ici m_1).



⊛ Rappelons que le point G , le centre de masse, est un point qui « n'existe pas » ! En particulier ce n'est **pas** un point matériel et, pour cette raison, il ne subit aucune force, il n'est pas possible d'écrire un « PFD » sur lui, etc.

I.1.iii – référentiel barycentrique

Noté \mathcal{R}^* , le *référentiel barycentrique* d'un système est le référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude et centré sur le centre de masse du système considéré.

⊛ \mathcal{R}^* est « attaché » à un système. S'il manque l'explicitation de ce système, la notion de \mathcal{R}^* devient absurde.

◇ Nous pouvons remarquer que dans le référentiel barycentrique, il n'y a pas de force d'inertie de CORIOLIS et, comme nous le verrons plus tard, nous pouvons même oublier les forces d'inertie d'entraînement qui, pourtant, « existent ».

I.1.iv – grandeurs cinétiques

★ quantité de mouvement

La *quantité de mouvement* d'un point matériel s'écrit

$$\vec{p}(M,t) = m \vec{v}(M,t)$$

La quantité de mouvement est une grandeur extensive. Ainsi pour un système

$$\vec{p}(\mathcal{S},t) = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) + \dots + \vec{p}_N(t) \text{ ou } \vec{p}(\mathcal{S},t) = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{v}(M,t) dm$$

La quantité de mouvement permet de caractériser de manière globale, le mouvement d'ensemble du système.

◇ Il est facile de montrer que

La quantité de mouvement d'un système s'écrit

$$\vec{p}(\mathcal{S},t) = m_{\text{tot}} \vec{v}(G,t)$$

◇ En particulier nous avons

La quantité de mouvement d'un système dans son référentiel barycentrique est nul

$$\vec{p}^* = \vec{p}(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*,t) = \vec{0}$$

◇ Cela signifie ni plus ni moins que lorsque nous nous concentrons sur un système (en l'étudiant dans son référentiel barycentrique), ce dernier ne bouge globalement pas même s'il peut s'étendre ou tourner sur lui-même.

◇ C'est ce qui distingue le référentiel barycentrique du référentiel propre.

Le référentiel propre associé à un système \mathcal{S} est le référentiel généralement noté \mathcal{R}° par rapport auquel le système est constamment immobile.

★ moment cinétique

Le *moment cinétique* d'un point M par rapport à un point A s'écrit

$$\vec{\sigma}_{A(M,t)} = \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}(M,t)$$

Le moment cinétique de M par rapport à A représente la « quantité de rotation » que possède M lorsqu'il tourne autour de A .

- ◇ Le « lorsqu'il tourne autour de A » doit être compris comme « en faisant comme si M avait une trajectoire circulaire de centre A »

Le moment cinétique est une grandeur extensive.

$$\vec{\sigma}(\mathcal{S},t) = \vec{\sigma}_1(t) + \vec{\sigma}_2(t) + \dots + \vec{\sigma}_3(t)$$

- ◇ Il est possible de déterminer le moment cinétique d'une autre manière, bien plus pratique notamment lorsque les systèmes sont des solides.

THÉORÈME DE KËNIG

Pour un système \mathcal{S} quelconque et un point A quelconque

$$\vec{\sigma}_A(\mathcal{S},t) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}(\mathcal{S},t) + \sigma^*(\mathcal{S},t)$$

- ◇ Le moment cinétique du système dans son référentiel barycentrique est à recalculer à chaque fois.
 ◇ Cette relation nous dit qu'un système de points **n'est pas réductible** au seul point G où serait concentrée toute la masse!
 ◇ Dans tous les cas, nous pouvons travailler avec des moments scalaires.

Le moment cinétique scalaire σ_Δ d'un point M par rapport à un axe Δ se définit par

$$\sigma_\Delta = \sigma_{A(M,t)} \cdot \vec{u} \quad \text{où :}$$

- A est un point de Δ
 → \vec{u} est un vecteur unitaire directeur de Δ orienté dans le sens de la rotation

★ énergie cinétique

L'*énergie cinétique* d'un point M s'écrit

$$E_c(M,t) = \frac{1}{2} m v^2(M,t)$$

L'énergie cinétique de M représente l'énergie que possède M du fait de son mouvement.

- ◇ Attention à ne pas trop extrapoler sur cette interprétation de l'énergie cinétique. En effet cette dernière dépend (!) de la vitesse du point M , vitesse qui elle-même dépend énormément du référentiel choisi.

L'énergie cinétique est une grandeur extensive.

$$E_c(\mathcal{S}, t) = E_{c,1}(t) + E_{c,2}(t) + \dots + E_{c,3}(t)$$

- ◇ Comme pour le moment cinétique, il est possible de déterminer l'énergie cinétique d'une autre manière, bien plus pratique notamment lorsque les systèmes sont des solides.

THÉORÈME DE KËNIG

Pour un système \mathcal{S} quelconque et un point A quelconque

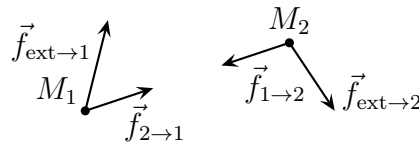
$$E_c(\mathcal{S}, t) = \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v^2(G, t) + E_c^*(\mathcal{S}, t)$$

- ◇ L'énergie cinétique du système dans son référentiel barycentrique est à recalculer à chaque fois.
- ◇ Cette relation nous dit, **une fois de plus**, qu'un système de points n'est pas réductible au seul point G où serait concentrée toute la masse !

I.2 – Dynamique

I.2.i – situation

- ◇ La situation pour deux points est la suivante.



- ◇ Quand il y a 3 points, il y a **six** forces intérieures

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2}; \vec{f}_{2 \rightarrow 1}; \vec{f}_{1 \rightarrow 3}; \vec{f}_{3 \rightarrow 1}; \vec{f}_{2 \rightarrow 3}; \vec{f}_{3 \rightarrow 2}$$

- ◇ C'est la raison pour laquelle nous préférons parler d'interaction

L'interaction $\overleftrightarrow{f}_{1 \leftrightarrow 2}$ est l'ensemble des deux forces $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$.

I.2.ii – théorème du centre d'inertie (TCI)

- ◇ Il s'agit de l'équivalent du PFD mais pour un système de points;

Pour un système \mathcal{S} quelconque, dans un référentiel \mathcal{R}

$$\frac{d\vec{p}(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} + \sum \vec{f}_{\text{inertie}}$$

- ◇ Dans la plupart des cas (sauf fusée, fluide en mouvement, ...) nous écrivons directement

$$m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}(G, t)}{dt} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} + \sum \vec{f}_{\text{inertie}}$$

- ◇ Nous pouvons remarquer ici que les interactions intérieures ne comptent pas !
- ◇ Seules les forces extérieures permettent de faire bouger !

I.2.iii – théorème du moment cinétique (TMC)

★ deux versions ...

◇ Il y a tout d'abord la version normale, la vectorielle.

Soit un système \mathcal{S} quelconque, un référentiel \mathcal{R} quelconque et un point A fixe. Alors

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(\mathcal{S},t)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{\text{inertie}}) \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM_{\text{qui subit } \vec{f}}} \wedge \vec{f}$$

◇ Ici, contrairement au TCI, il est **fondamental** de savoir quel point subit la force. Inutile de dire qu'un (beau!) schéma prend alors une importance considérable.

◇ Et puis il y a la version scalaire.

Soit un système \mathcal{S} quelconque, un référentiel \mathcal{R} quelconque et un axe Δ fixe. Alors

$$\frac{d\sigma_\Delta(\mathcal{S},t)}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_{\text{inertie}}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \pm \|\vec{f}\| \times \text{bras de levier}$$

◇ Dans les deux cas, il est fondamental de préciser que le point (ou l'axe) par rapport auquel le moment cinétique est calculé est **fixe**. Sans cela, le théorème n'est plus valide.

★ ... plus la version barycentrique

◇ C'est une version un peu particulière parce que si le théorème est bien utilisé en un point fixe (G) dans le référentiel barycentrique, en revanche, il manque quelque chose qui, normalement, devrait être présent.

Soit un système \mathcal{S} quelconque, alors dans son référentiel barycentrique \mathcal{R}^*

$$\frac{d\vec{\sigma}_G^*(\mathcal{S},t)}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{sans les forces d'inertie}$$

◇ Ou en version scalaire

Soit un système \mathcal{S} quelconque, alors dans son référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , avec Δ un axe passant par G .

$$\frac{d\sigma_\Delta^*(\mathcal{S},t)}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_{\text{ext}}) \quad \text{sans les forces d'inertie}$$

★ dans tous les cas

◇ Les interactions intérieures ne permettent pas de modifier le moment cinétique, c'est-à-dire la quantité de rotation que possède un système.

◇ Il ne faut pas confondre « quantité de rotation » et « vitesse de rotation » : l'image que nous avons tous des patineurs qui tournent plus ou moins vite sur eux-même lorsqu'ils rapprochent ou éloignent leurs bras de leurs corps est trompeuse. Il s'agit bien là d'une *conservation du moment cinétique*.

I.2.iv – théorèmes énergétiques

- ◇ C'est maintenant qu'il va y avoir une énorme différence ! Car pour les théorèmes énergétiques, il faut tenir compte des interactions intérieures.
- ◇ Les théorèmes énergétiques existent en 4 versions.

★ version globale

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE (TEC)

Soit \mathcal{S} , un système quelconque et deux états « début » et « fin » quelconques (avec B postérieur à A) alors

$$E_c(\mathcal{S}, \text{fin}) - E_c(\mathcal{S}, \text{début}) = \sum W(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum W(\vec{f}_{\text{inertie}}) + \sum W(\overleftrightarrow{f}_{\text{int}})$$

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE (TEM)

Soit \mathcal{S} , un système quelconque et deux états « début » et « fin » quelconques (avec B postérieur à A) alors

$$E_m(\mathcal{S}, \text{fin}) - E_m(\mathcal{S}, \text{début}) = \sum W(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum W(\vec{f}_{\text{inertie,nc}}) + \sum W(\overleftrightarrow{f}_{\text{int,nc}}) \quad \text{où}$$

→ $E_m = E_c + E_{p,\text{ext}} + E_{p,\text{int}}$

→ « nc » signifie « non conservative »

★ version locale

- ◇ Ces versions permettent d'obtenir des équations différentielles régissant le mouvement.
- ◇ Il faut comprendre le « local » par une localisation temporelle, à savoir une relation vraie à t .

THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE (TPC)

Soit \mathcal{S} , un système quelconque alors

$$\frac{dE_c(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{inertie}}) + \sum \mathcal{P}(\overleftrightarrow{f}_{\text{int}}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}_{(\text{qui subit } \vec{f})}$$

THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE (TPM)

Soit \mathcal{S} , un système quelconque alors

$$\frac{dE_m(\mathcal{S}, t)}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{inertie,nc}}) + \sum \mathcal{P}(\overleftrightarrow{f}_{\text{int,nc}})$$

★ interprétation

- ◇ Cette fois, ce qui se trouve à l'intérieur du système compte et pas qu'un peu !
- ◇ C'est ainsi que quelle que soit la voiture (vieux tacot ou voiture de sport), aucune des deux ne pourra avancer avec des pneus lisse sur une pente verglacée (car les forces extérieures seront nulle), autant si les forces sont suffisantes (avoir de bons pneus!) la voiture ayant « sous le capot » le plus de puissance disponible pourra augmenter son énergie cinétique (et donc sa vitesse) plus rapidement.

- ◇ Pour le calcul des travaux ou des puissances fournies par les interactions intérieures, il faut voir cela au cas par cas.

I.2.v – travail des interactions intérieures

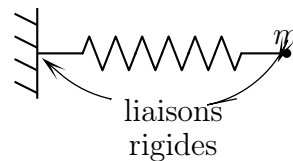
Le travail fourni par une interaction intérieure à un système est une grandeur intrinsèque, c'est-à-dire une grandeur qui ne dépend pas du référentiel choisi.

- ◇ Comme il s'agit là d'une grandeur intrinsèque, nous pourrions l'interpréter physiquement.
 ◇ En revanche nous ne calculerons que rarement la puissance fournie par une telle interaction, nous utiliserons dans quasiment tous les cas un des résultats qui suit.
 ◇ Insistons avant de commencer : l'écriture $\mathcal{P}(\overleftrightarrow{f}_{1\leftrightarrow 2})$ comprend en fait **deux** termes

$$\mathcal{P}(\overleftrightarrow{f}_{1\leftrightarrow 2}) = \vec{f}_{1\rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{f}_{2\rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1$$

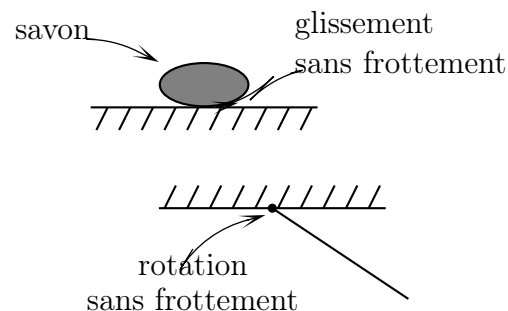
★ deux points liés – liaison totale

Lorsque deux points sont rigidement liés, le travail de l'interaction de contact entre les deux est nul.



★ glissement sans frottement

Lorsque deux points sont reliés par une liaison sans frottement (contact plan, liaison pivot, ...), le travail de l'interaction est nul.

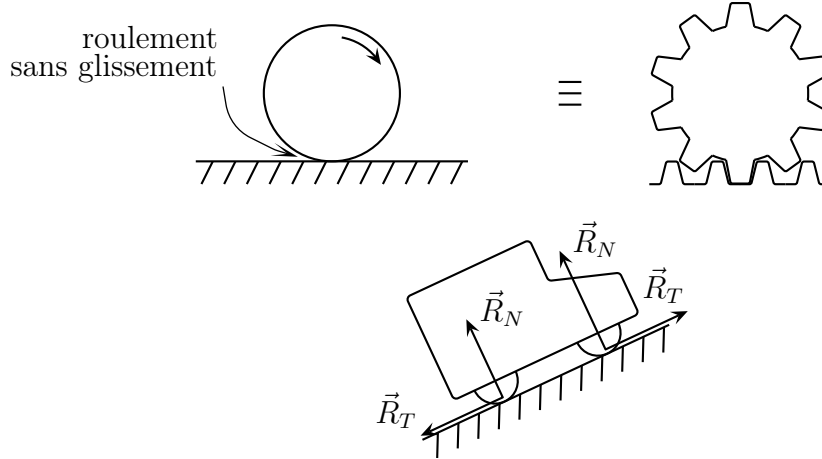


⊛ C'est bien le travail fourni par **l'interaction** qui est nul car il est tout à fait possible de trouver un exemple de réaction sans frottement de travail non nul. Exemple : le travail de la force de contact sol → bonhomme dans un ascenseur.

★ frottement sans glissement

Le travail fourni par une interaction de contact avec frottement sans glissement (ou « roulement sans glissement ») est nul.

◇ C'est un résultat très utilisé en mécanique du solide pour tout ce qui est cylindre qui roule ou autre.



★ interaction conservative

L'énergie potentielle associée à des interactions intérieures n'est pas extensive.

◇ En effet, considérons deux points entre lesquels règne une interaction gravitationnel le.

◇ Nous avons envie d'écrire :

→ Pour $\mathcal{S} = \{M_1\}$, l'énergie potentielle s'écrit $E_{p1} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$

→ Pour $\mathcal{S} = \{M_2\}$, l'énergie potentielle s'écrit $E_{p2} = -G \frac{m_1 m_2}{r}$

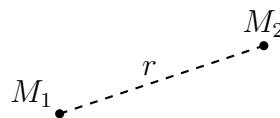
→ Pour $\mathcal{S} = \{M_1 + M_2\}$, l'énergie potentielle s'écrit $E_{p,int} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \neq E_{p1} + E_{p2}$

Pour les interactions, il ne faut compter qu'une seule fois l'énergie potentielle.

◇ Le paradoxe vient du fait qu'en réalité, l'expression de E_{p1} au dessus est juste **uniquement** si M_2 est fixe.

◇ De même E_{p2} est juste si et seulement si M_1 est fixe.

◇ En revanche $E_{p,int}$ est toujours juste.



★ cas du ressort

L'énergie potentielle interne contenue dans un ressort s'écrit

$$E_{p,int,él} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

- ◇ Considérons un cas usuel, un ressort avec deux masses fixées aux extrémités. Alors :
 - l'interaction $\overset{\leftarrow}{f}_{M_1 \leftrightarrow \text{ressort}}$ est une liaison rigide de travail nul
 - l'interaction $\vec{f}_{M_2 \leftrightarrow \text{ressort}}$ est une liaison rigide de travail nul
 - le ressort possède de manière intrinsèque l'énergie potentielle $E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$

I.3 – Cas du système isolé

- ◇ C'est un cas classique et à connaître dans deux situations *a priori* très éloignées :
 - lors de l'étude de corps célestes
 - lors de l'étude de l'interaction de molécules
- ◇ Dans le premier cas dont l'exemple canonique est le système solaire, il est souvent possible de négliger les actions de tous les corps sauf un (le Soleil pour une étude d'une planète, la planète pour l'étude d'un de ses satellites).
- ◇ Dans le deuxième cas, il n'est pas possible de nier l'influence de toutes les molécules les unes avec les autres toutefois le premier pas d'une telle étude consiste, justement, à n'étudier que deux molécules pour seulement après prendre en compte l'ensemble des molécules avec des raisonnements sur des distances moyennes.
- ◇ Dans tous les cas, ce paragraphe ne concerne que des systèmes à deux **et deux seulement** points.

I.3.i – particule fictive

Pour un système de deux points M_1 et M_2 , la particule fictive M de masse μ est définie

$$\overrightarrow{GM} \triangleq \overrightarrow{M_1 M_2} \quad \text{par} \quad \mu \triangleq \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

- ◇ Insistons : la particule fictive est une particule qui, à l'instar de G , n'existe pas ! Il n'est donc pas possible d'écrire un PFD sur elle.

I.3.ii – cas $m_1 \gg m_2$

Dans le cas d'un système avec de points de masses très différentes, la particule fictive s'identifie avec la particule la moins massique.

I.3.iii – intérêt

- ◇ Il est possible de montrer (cf. cours de 1^{re} année) que la connaissance du mouvement de la particule fictive permet de remonter facilement aux mouvements de M_1 et M_2 . L'étude de deux points en interaction est alors remplacée par l'étude d'un seul point.
- ◇ Qui plus est, bien que fictive (donc n'existant pas), cette particule obéit à des lois qui ressemblent comme deux gouttes d'eau à des vraies lois de mécanique :

$$\mu \frac{d\vec{v}(M,t)}{dt} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2}; \quad \frac{d\vec{\sigma}(M,t)}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad E_m(M,t) = C^{\text{te}}$$

- ◇ Ainsi avec un point matériel soumis à une force centrale, nous nous retrouvons à un problème plan donc avec deux degrés de description.

- ◇ En ajoutant à cela les deux lois de conservation (moment cinétique et énergie mécanique), nous pouvons alors résoudre entièrement et explicitement le problème.
- ◇ Ajoutons enfin une dernière caractéristique de cette particule : son moment cinétique et son énergie mécanique ne sont autres que le moment cinétique et l'énergie mécanique de l'ensemble des deux points M_1 et M_2 .

II – Solide en rotation autour d'un axe fixe

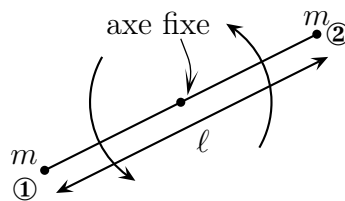
Dans cette partie, nous allons constater que la cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit très facilement. Pour ce faire, nous allons partir d'un exemple que nous généraliserons.

II.1 – Cinétique

II.1.i – moment cinétique

★ exemple : le bâton de majorette

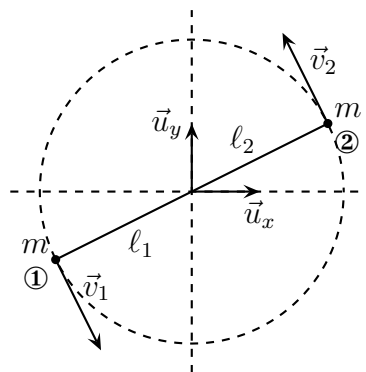
- ◇ Il s'agit d'un exemple très simple de système solide, exemple que nous réutiliserons par la suite.
- ◇ Imaginons un « bâton » de majorette constitué de deux masses identiques ponctuelles m reliées par une tige sans masse de longueur ℓ .



- ◇ Supposons que le bâton puisse tourner autour d'un axe passant par son centre O de telle sorte que l'ensemble ait un mouvement plan dans le plan de la figure ci-dessus.
- ◇ Exprimons le moment cinétique de l'ensemble { bâton } = { deux masses + tige } dans le référentiel lié à l'axe de rotation et par rapport à cet axe Δ .
- ◇ Par extensité, nous pouvons écrire

$$\sigma_{\Delta}(\mathcal{S}) = \sigma_{\Delta}(M_1) + \sigma_{\Delta}(M_2)$$

- ◇ Pour déterminer $\sigma_{\Delta}(M_1)$ et $\sigma_{\Delta}(M_2)$, regardons de plus près les trajectoires des points matériels associés.



- ◇ Nous pouvons constater que ① et ② ont des trajectoires circulaires.
- ◇ Dès alors, nous pouvons écrire, avec $\ell_1 = \ell/2$ le rayon de la trajectoire circulaire de M_1

$$\sigma_{\Delta}(M_1) = \ell_1 \times (m_1 \ell_1 \dot{\theta}) = \frac{m \ell^2}{4} \dot{\theta}$$

- ◇ De même pour M_2 : $\sigma_{\Delta}(M_2) = \frac{m \ell^2}{4} \dot{\theta}$.

- ◇ Finalement nous pouvons écrire le moment cinétique scalaire total sous la forme

$$\sigma_{\Delta}(\mathcal{S}) = \frac{m \ell^2}{2} \times \dot{\theta} = \text{constante caractéristique} \times \text{vitesse angulaire}$$

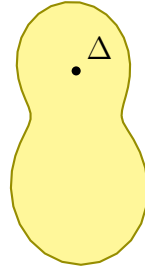
★ généralisation

◇ Nous admettons que l'expression précédente est généralisable à tout solide¹.

Le moment cinétique scalaire d'un solide Σ quelconque tournant autour d'un axe Δ fixe s'écrit

$$\sigma_{\Delta}(\Sigma) = J_{\Delta} \times \Omega \quad \text{où :}$$

- J_{Δ} est le *moment d'inertie* du solide par rapport à Δ
- Ω est la vitesse de rotation algébrique du solide autour de Δ .



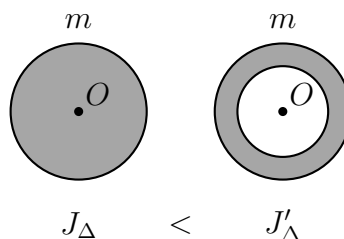
- ◇ Dans le cas général nous ne pouvons **pas** écrire la relation sous forme vectorielle, c'est-à-dire que pour un solide quelconque $\vec{\sigma}_O(\mathcal{S}) \neq J_{\Delta} \vec{\Omega}$ (avec O sur Δ) car cela dépend de la répartition de masse et notamment de la « symétrie » du solide autour de cet axe.
- ◇ Quoiqu'il en soit, ce n'est absolument pas grave car quand nous aurons affaire à un solide en rotation autour d'un axe fixe, nous raisonnerons toujours avec le moment cinétique scalaire, le seul intéressant pour nous.

★ interprétation du moment d'inertie

Dimensionnellement parlant, en utilisant les unité SI pour les dimensions

$$[J_{\Delta}] = (\text{kg}).(\text{m})^2$$

- ◇ À partir de la dimension du moment d'inertie, nous pouvons dire :
- plus la masse est grande, plus le moment d'inertie est grand
 - plus les distances sont grandes, plus le moment d'inertie est grand
- ◇ En particulier, à masse et à taille fixées, les objets « creux » ont un moment d'inertie plus grand puisque les points sont globalement plus éloignés de l'axe (cf. ci-dessous).



- ◇ Bien que les moments d'inerties s'expriment de manière simple en fonction des grandeurs géométriques du solide considéré (du moins pour des objets suffisamment réguliers), leurs expressions ne sont ni à connaître ni à savoir calculer.

1. Et ce, bien que le cas général ne soit pas difficile à faire. Le lecteur pourra s'y essayer.

- ◇ Le moment d'inertie est une grandeur caractéristique d'un solide une fois l'axe de rotation choisi, c'est pourquoi nous le considérerons toujours comme une grandeur pertinente.

Un solide possède *a priori* une infinité de moment d'inertie puisque « le » moment d'inertie dépend de l'axe de rotation choisi.

Plus un axe passe près du centre de masse, plus le moment d'inertie associé à la rotation autour de cet axe est petit.

II.1.ii – énergie cinétique

★ exemple : le bâton de majorette

- ◇ Reprenons l'exemple du bâton de majorette et cherchons l'expression de l'énergie cinétique du bâton.
- ◇ Les points M_1 et M_2 ont toujours des trajectoires circulaire de rayons $\ell_1 = \ell_2 = \frac{\ell}{2}$ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
- ◇ Nous pouvons ainsi écrire l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} E_c(\mathcal{S}) &= E_c(M_1) + E_c(M_2) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{m \ell^2}{2}}_{\text{la même constante}} \times \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

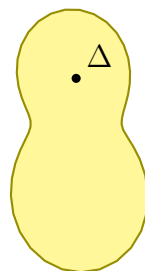
- ◇ Nous pouvons constater qu'intervient, dans l'expression de l'énergie cinétique, la même constante que celle qui permet d'exprimer le moment cinétique. Ce n'est pas qu'une coïncidence.

★ généralisation

L'énergie cinétique d'un solide Σ quelconque tournant autour d'un axe Δ fixe s'écrit

$$E_c(\Sigma) = \frac{1}{2} J_{\Delta} \times \Omega^2 \quad \text{où :}$$

- J_{Δ} est le *moment d'inertie* du solide par rapport à Δ
- Ω est la vitesse de rotation algébrique du solide autour de Δ .



★ interprétation

- ◇ Compte-tenu de la présence du moment d'inertie aussi bien dans le moment cinétique que dans l'énergie cinétique, nous pouvons dire que le moment d'inertie est l'analogue, pour la rotation, de ce qu'est la masse pour la translation.

translation	m	v	$p = m v$	$E_c = \frac{1}{2} m v^2$
rotation	J_Δ	Ω	$\sigma_\Delta = J_\Delta \Omega$	$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$

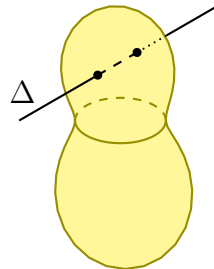
J_Δ caractérise l'inertie pour la rotation :

- plus J_Δ est grand, plus c'est difficile à mettre en rotation (ou à freiner)
- plus J_Δ est grand, plus il y a d'énergie cinétique dans la rotation

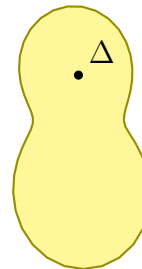
II.2 – Actions d'axe

II.2.i – support

- ◇ Considérons un solide en rotation autour d'une tige rigide et fixe.



vue en perspective



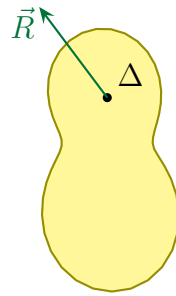
vue de face

- ◇ Cette tige devient, de fait, un axe de rotation.
- ◇ Cet axe a deux rôles **distincts**.
- ◇ Il doit tout d'abord supporter l'objet et pour cela il exerce une force de contact *a priori inconnue*. Pour trouver cette force, rien de tel qu'un bon TCI. Sauf que, à moins d'avoir une question spécifique dessus, nous ne le ferons jamais puisque ce qui sera intéressant c'est l'aspect rotation.
- ◇ La tige peut aussi influencer la rotation en la créant (axe moteur), en la freinant (frottement) ou en étant complètement neutre (liaison parfaite). Dans tous les cas, il est fondamental de connaître *a priori* le rôle de la tige pour pouvoir écrire le TMCS.

II.2.ii – couple

★ une modélisation trompeuse

- ◇ La modélisation des actions de contact par une force unique s'exerçant au niveau de l'axe est trompeuse.

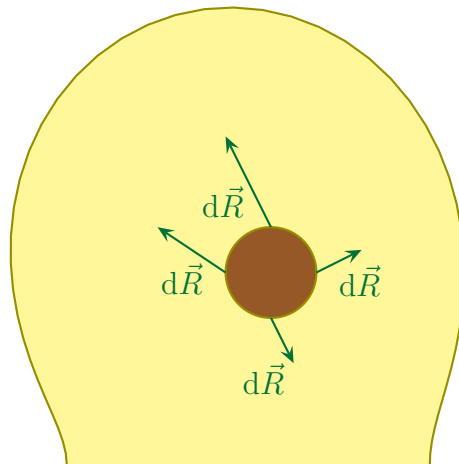


◇ En effet avec le schéma précédent, il est tentant d'écrire

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) = \text{bras de levier} \times f = 0 \times f = 0$$

◇ Or le moment n'est pas forcément nul!

◇ En effet, si le bras de levier **semble** nul, c'est uniquement parce qu'à l'échelle du dessin, l'axe est représenté comme un point. Sauf que ce n'est pas un point! Zoomons.



◇ Avec la vue précédente, nous pouvons aisément constater que les bras de levier associés aux forces qui s'exercent n'est pas vraiment tout à fait nul. Et cela change tout!

◇ C'est pourquoi, pour une fois, il ne faut pas raisonner avec le schéma mais raisonner avec le bon sens et se poser la question : quelle est l'influence de la tige (ou de l'axe) sur la rotation du solide?

★ notion de couples

Un *couple* (ou *couple de forces*) est un ensemble de forces de résultante nulle mais de moment par rapport à un axe non nul.

Par extension, le *couple* est le moment d'un couple de forces.

◇ Pour décrire l'ensemble des actions qu'une tige exerce sur un solide il faut donc, normalement, donner deux choses :

- la force de contact au niveau de la tige
- le couple exercée par la tige sur le solide

◇ En pratique nous ne nous intéresserons qu'au moment **scalaire** du couple qu'une tige peut exercer sur un solide en rotation autour d'elle.

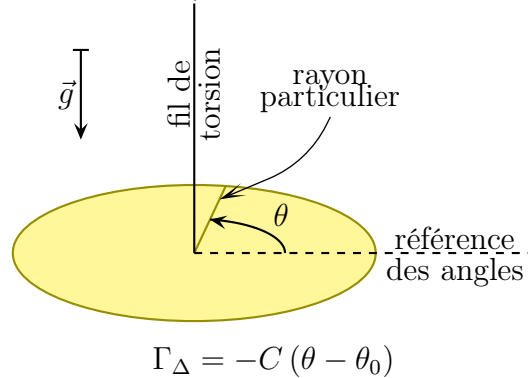
★ couples à connaître

- ◇ Avant toute chose, rappelons le bon sens : le couple exercé par une tige sur l'objet en rotation correspond à l'influence qu'a la tige sur la rotation.
- ◇ Dans les exemples qui suivent le couple est donné scalairement et correspond à l'effet qu'il engendre sur la rotation autour de l'axe.

Dans le cas d'une liaison parfaite (dite aussi « sans frottement »), le couple est nul.

$$\Gamma_{\Delta} = 0$$

Dans le cas d'un couple de rappel (comme avec un fil de torsion), le couple s'écrit



$$\Gamma_{\Delta} = -C(\theta - \theta_0)$$

Dans le cas d'un couple résistant (liaison un peu « grippée »), le couple s'écrit

$$\Gamma_{\Delta} = -h\Omega$$

Dans le cas d'un couple moteur (tige reliée à une machine), le couple s'écrit

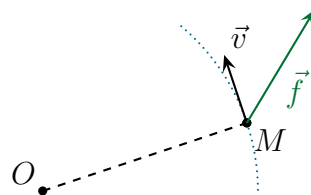
$$\Gamma_{\Delta} = \Gamma_m \stackrel{\text{svt}}{=} C^{\text{te}}$$

II.2.iii – aspect énergétique

Le travail élémentaire et la puissance fournis par une force (ou un couple) s'écrivent

$$\delta W = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) d\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{f}) \times \Omega$$

- ◇ Démontrons ce résultat en ne considérant qu'un point du solide : celui qui subit la force \vec{f} .



- ◇ Comme m fait partie d'un solide qui tourne autour d'un axe passant par O , il aura une trajectoire circulaire, ce qui permet d'écrire son déplacement élémentaire sous la forme $d\vec{r} = r d\theta \vec{u}_{\theta}$.
- ◇ Dès lors, l'énergie reçue par m (et donc fournie par \vec{f}) s'écrit

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \vec{f} \cdot d\vec{r} \\
 &= (f_r \vec{u}_r + f_\theta \vec{u}_\theta) \cdot (r d\theta \vec{u}_\theta) \\
 &= r f_\theta d\theta
 \end{aligned}$$

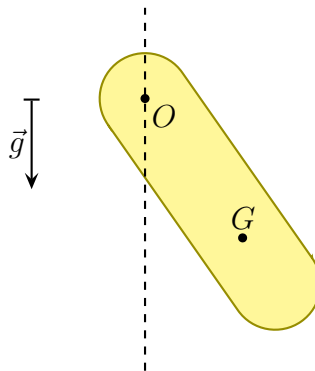
◇ Et comme $r f_\theta$ est le moment de la force, nous obtenons bien le résultat.

II.3 – Exemples

II.3.i – pendule grave

★ situation, analyse

- ◇ Considérons un pendule grave² en rotation autour d'une tige.
- ◇ La liaison se fait avec des frottements mais les frottements de l'air sont négligés.

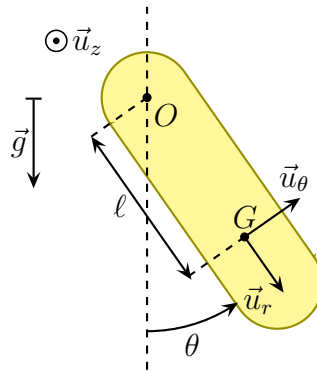


- ◇ Quelle est l'équation différentielle régissant le mouvement ?
- ◇ Analyse physique :
 - il s'agit d'un dispositif à un degré de liberté (liaison pivot) donc à un seul degré de description. De plus l'évolution est libre **mais** non conservative (frottements)
 - les grandeurs pertinentes sont : J_Δ et m (inertie), ℓ et α (géométrie), g et h pour les actions. Il n'y a pas ici ni de conditions initiales, ni de contraintes particulières.
- ◇ Analyse technique :
 - nous allons évidemment choisir un degré de description de rotation, donc un angle, que nous re-pèrerons par rapport à la verticale de sorte que la position d'équilibre naturelle (celle « stable ») soit en $\theta = 0$
 - comme le dispositif n'est pas conservatif, nous allons plutôt choisir une approche en TMCS

★ mise en équation

- ◇ Commençons par un schéma.

². « grave » vient de « gravitation ». Il s'agit simplement d'un pendule qui oscille à cause de la pesanteur.



◇ Écrivons le TMCS par rapport à l'axe Δ fixe dans le référentiel pour le système { pendule }.

◇ Le système subit deux forces *extérieures* :

→ force à distance : le poids $\vec{P} = m \vec{g} = m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$

→ action de l'axe : une force \vec{R} inconnue et un couple $\vec{\Gamma}$ de frottement

◇ Calculons le moment par rapport à l'axe Δ du poids

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) &= \left(\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} \right) \cdot \vec{u}_z \\ &= \alpha \ell \vec{u}_r \wedge m g (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z \\ &= -m g \alpha \ell \sin \theta \end{aligned}$$

◇ En ce qui concerne l'action d'axe, la projection du couple sur \vec{u}_z donne, compte-tenu du fait qu'il s'agit de frottement linéaires

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = -h \dot{\theta}$$

☛ *Remarque* : les composantes de $\vec{\Gamma}$ sur les autres axes de l'axe \vec{u}_z sont inconnus et *a priori* non nuls.

◇ Le TMCS par rapport à Δ appliqué au pendule s'écrit donc

$$\frac{d\sigma_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \Gamma$$

◇ Et comme le pendule est en rotation autour de l'axe fixe Δ

$$\sigma_{\Delta} = J_{\Delta} \dot{\theta}$$

◇ En regroupant le tout nous arrivons à

$$J_{\Delta} \ddot{\theta}(t) = -m g \alpha \ell \sin \theta(t) - h \dot{\theta}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + \frac{h}{J_{\Delta}} \frac{d\theta}{dt}(t) + \frac{\alpha m g \ell}{J_{\Delta}} \sin \theta(t) = 0}$$

★ interprétation

◇ Vérifions tout d'abord l'homogénéité :

→ $h \dot{\theta}$ est un moment de force, comme $\alpha m g \ell$

→ en terme de coefficients (et en utilisant les unités en guise de dimension)

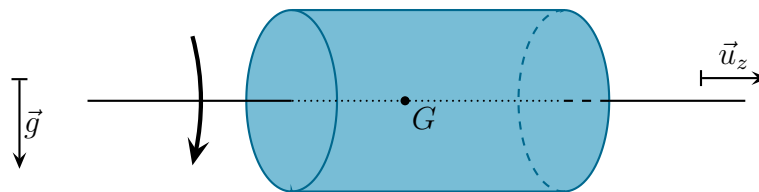
$$\frac{\alpha m g \ell}{J_{\Delta}} \equiv \frac{\text{kg.m.m.s}^{-2}}{\text{kg.m}^2} \equiv \text{s}^{-2}$$

- ◇ D'un point de vue cohérence, nous pouvons aisément vérifier que tous les termes sont positifs, il s'agit donc d'un mouvement non divergent.
- ◇ Le terme d'amortissement est en $\frac{h}{J_\Delta}$ soit d'autant plus élevé que les frottements sont intenses et d'autant plus faible que l'inertie est grande. C'est normal.

II-3·ii – mise en rotation d'un moteur

★ situation, analyse

- ◇ Considérons un modèle simple de moteur qui est *la* machine tournante par excellence.
- ◇ Pour une telle machine, le centre de masse G est positionné sciemment sur l'axe de rotation. Sans une telle précaution, la machine tremblerait lors du fonctionnement comme le font les machines à laver³.
- ◇ Représentons-la de manière simple.



- ◇ Quelle est l'équation différentielle régissant le mouvement sachant que la machine est initialement immobile ?
- ◇ Analyse physique :
 - il s'agit d'un dispositif à un degré de liberté (liaison pivot) donc à un seul degré de description. L'évolution est *forcée* donc non conservative.
 - les grandeurs pertinentes sont : J_Δ (inertie), Γ_m et h pour les actions. Nous pouvons d'ores et déjà nous douter que la pesanteur ne jouera aucun rôle. De plus la condition initiale étant une condition de nullité et qu'il n'y a pas de contrainte particulière, cela n'engendre pas de grandeur pertinente supplémentaire.
- ◇ Analyse technique :
 - nous allons évidemment choisir un degré de description de rotation, donc un angle, dont le repérage « exact » n'a que peu d'importance puisque ce qui va essentiellement compter c'est la vitesse de rotation.
 - comme le dispositif n'est pas conservatif, nous allons plutôt choisir une approche en TMCS

★ mise en équation

- ◇ Écrivons le TMCS par rapport à l'axe Δ fixe dans le référentiel pour le système { moteur }.
- ◇ Le système subit deux forces *extérieures* :
 - force à distance : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
 - action de l'axe : une force \vec{R} inconnue et un couple $\vec{\Gamma}_m$
 - action de l'air : un couple de frottement proportionnel à la vitesse de rotation
- ◇ Comme le centre de masse est choisi sur l'axe Δ de rotation, le moment exercé par le poids est nul

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$$

- ◇ Pour les frottements, nous avons, comme pour le pendule

3. Le lecteur cherchera où, dans la vie courante, les constructeurs font exprès de ne pas mettre le centre de masse sur l'axe de rotation.

$$\vec{\Gamma}_f \cdot \vec{u}_z = -h \dot{\theta}(t)$$

◇ En ce qui concerne l'action d'axe, la projection du couple sur \vec{u}_z donne immédiatement

$$\vec{\Gamma} \cdot \vec{u}_z = \Gamma_m \stackrel{\text{ici}}{=} C^{\text{te}}$$

☛ *Remarque* : ici aussi les composantes de $\vec{\Gamma}$ sur les autres axes de l'axe \vec{u}_z sont inconnus et *a priori* non nuls.

◇ Le TMCS par rapport à Δ appliqué au moteur s'écrit donc

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = 0 + \Gamma_m - h \dot{\theta}(t)$$

◇ Et comme le moteur est en rotation autour de l'axe fixe Δ

$$\sigma_\Delta = J_\Delta \dot{\theta}$$

◇ En regroupant le tout nous arrivons, en notant $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}(t)$

$$J_\Delta \ddot{\theta}(t) = -h \dot{\theta}(t) + \Gamma_m \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\frac{d\omega}{dt}(t) + \frac{h}{J_\Delta} \omega(t) = \Gamma_m}$$

★ interprétation

◇ Le temps caractéristique $\tau = \frac{J_\Delta}{h}$ apparaît. Autrement dit, il faut attendre d'autant plus longtemps le régime permanent que l'inertie J_Δ est grande. C'est normal.

◇ Résolvons l'équation différentielle compte-tenu de $\omega(0) = 0$

$$\omega(t) = \frac{\Gamma_m}{h} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J_\Delta}{h}$$

◇ Graphiquement cela donne

◇ Nous pouvons constater que le régime permanent (qui est ici un régime permanent stationnaire) est

$$\omega_{RS} = \frac{\Gamma_m}{h}. \text{ Autrement dit :}$$

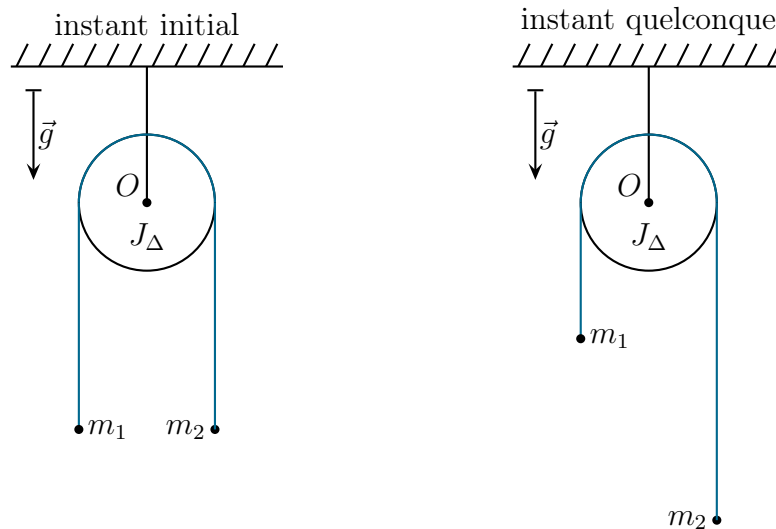
- il est d'autant plus rapide que le moteur est puissant (normal)
- il est d'autant plus lent qu'il y a de frottement (normal)
- il est indépendant de l'inertie (normal pour un régime stationnaire)

II-3-iii – poulie non idéale

★ situation, analyse

◇ Considérons le dispositif suivant qui, s'il n'a pas vraiment d'intérêt pratique (quoiqu'une poulie ...) permet de mieux comprendre que le concept de « transmission de force » est un concept qui n'existe pas scientifiquement ou, pour dire autrement, qui est **faux**.

◇ Imaginons une poulie « toute simple » à savoir qui tourne librement autour de son axe Δ mais qui possède un moment d'inertie J_Δ . Autour de cette poulie est enroulé un fil aux extrémités duquel sont attachées deux masses m_1 et m_2 .



- ◇ Bien évidemment, nous n'allons pas nous compliquer la vie :
 - le fil est idéal (en particulier inextensible et sans masse)
 - le fil ne glisse pas par rapport à la poulie
 - nous allons négliger les frottements avec l'air
- ◇ La question est : « Quelle est l'accélération de M_1 ? »
- ◇ Analyse physique
 - Tout étant initialement immobile et les actions agissant sur les masses étant verticales, l'ensemble évoluera dans un plan. Autrement dit, alors qu'il y a beaucoup de degrés de liberté (il n'est pas très difficile d'en trouver 7), un seul degré de description suffira.
 - L'évolution est clairement libre et comme il n'y a pas de phénomènes dissipatifs, l'évolution sera conservative.
 - grandeurs pertinents : J_Δ , m_1 et m_2 (inertie), R rayon de la poulie et ℓ longueur du fil (géométrie), g action et comme nous cherchons une accélération les conditions initiales ne rentreront pas en compte.
- ◇ Analyse technique
 - Comme nous cherchons l'accélération de M_1 , nous allons prendre $z_1(t)$ comme degré de description final.
 - nous aurons comme degré de description intermédiaire la cote $z_2(t)$ de M_2 et l'angle de rotation $\theta(t)$ de la poulie
 - « 1DD – libre – conservatif », pas le temps de réfléchir nous savons déjà que nous allons utiliser une approche énergétique. Ici comme nous cherchons une accélération, nous allons utiliser le TPM.
 - En ce qui concerne le système, nous allons prendre tous les morceaux avec de l'inertie ainsi que tout ce qui les relie soit $\{ m_1, m_2, \text{fil, poulie} \}$. L'axe autour duquel tourne la poulie n'est pas dans le système.

★ mise en équation

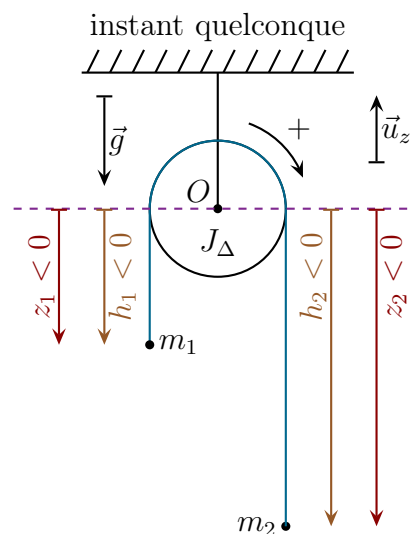
🌀 TPM

- ◇ Commençons par faire la liste des actions extérieures s'exerçant sur le système choisi :
 - force à distance : les poids \vec{P}_1 et \vec{P}_2 des masses M_1 et M_2 . Il s'agit de forces conservatives dont il faudra déterminer l'énergie potentielle. Le poids de la poulie n'entre pas en ligne de compte puisque son centre de masse reste immobile.

- force de contact : puisque nous négligeons l'action de l'air, la seule force de contact est celle qu'exerce l'axe de la poulie sur la poulie. Et comme il s'agit d'une action sans frottement nous pouvons dire $\mathcal{P}_{\text{axe}} = 0$.
- ◇ Liste des interactions intérieures :
 - interactions $M_1 \leftrightarrow \text{fil}$ et $M_1 \leftrightarrow \text{fil}$: interaction de travail nul puisqu'il s'agit d'une liaison rigide
 - interaction poulie $\leftrightarrow \text{fil}$: interaction de travail nul puisque le contact se fait avec frottement mais sans glissement (un peu comme une chaîne de vélo)
 - interaction fil $\leftrightarrow \text{fil}$: interaction de travail nul puisque le fil est idéal (aucune élasticité, aucune torsion, souplesse infinie)
 - interaction poulie $\leftrightarrow \text{poulie}$: interaction de travail nul puisque la poulie est un solide.
- ◇ Finalement, le système n'est soumis qu'à des forces et des interactions intérieures conservatives ou de travail nul.
- ◇ L'évolution est donc bien conservative.
- ◇ Remarquons au passage que la démonstration de la conservation de l'énergie est complexe car elle fait intervenir de nombreux phénomènes (souplesse du fil, caractère solide de la poulie, ...) mais elle est facile étant donné le peu de calculs présents.

🌀 E_c

- ◇ Faisons un schéma à un instant quelconque pour mieux préciser les repérages.



- ◇ L'énergie cinétique est une grandeur extensive donc pour le système elle s'écrit

$$E_c(\mathcal{S}) = E_c(M_1) + E_c(M_2) + E_c(\text{poulie})$$

- ◇ Comme les points sont en translation suivant un seul axe et que la poulie est en rotation autour d'un axe fixe, cela donne immédiatement

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2(t)$$

🌀 E_p

- ◇ L'énergie potentielle de pesanteur est extensive puisqu'elle est associée à une force extérieure.
- ◇ Cela donne, pour le point M_1 et compte-tenu de l'orientation de $z_1(t)$ choisie sur le schéma

$$E_{p1} = m_1 g \underbrace{h_1}_{<0} \quad \rightsquigarrow \quad E_{p1} = m_1 g \underbrace{z_1}_{<0}$$

◇ De même

$$E_{p1} = m_2 g h_2 = m_2 g z_2$$

🌀 couplage des degrés de description

- ◇ Au fond nous savons que tout peut s'écrire en fonction d'un seul degré de description (nous avons choisi $z_1(t)$) mais nous en avons pour l'instant deux supplémentaires ($z_2(t)$ et $\theta(t)$).
- ◇ Pour faire disparaître ces deux degrés de description superflus, nous allons utiliser deux lois physiques qui, une fois traduites analytiquement constitueront des lois de *couplage*.
- ◇ Si M_1 bouge lorsque M_2 bouge c'est bien parce que fil est inextensible. Imaginez un élastique en lieu et place du fil et vous verrez que vous pouvez tirer M_2 vers le bas en maintenant M_1 à sa cote initiale.
- ◇ Traduisons donc l'inextensibilité du fil. Commençons par écrire sa longueur ℓ en supposant que le fil fait n tours autour de la poulie

$$\ell = -z_1(t) + \pi R + 2n\pi R - z_2(t)$$

◇ Comme le fil est inextensible, sa longueur est constante et donc

$$\frac{d\ell}{dt} = 0 = -\dot{z}_1(t) + 0 + 0 - \dot{z}_2(t) \quad \rightsquigarrow \quad \dot{z}_2(t) = -\dot{z}_1(t)$$

- ◇ Ceux qui voient directement la relation $\dot{z}_2(t) = -\dot{z}_1(t)$ peuvent l'écrire directement **à condition** de préciser qu'elle vient de l'inextensibilité du fil.
- ◇ De même si la poulie tourne lorsque M_1 monte ou descend c'est bien parce que le fil ne glisse pas par rapport à la poulie. En écrivant que la vitesse d'un point du fil est la même que la vitesse d'un point de la poulie nous obtenons (attention aux signes)

$$\dot{z}_1(t) = +R\dot{\theta}(t)$$

🌀 rassemblement

◇ Finalement le TPM donne

$$\frac{dE_m(\mathcal{S})}{dt} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) + \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2(t) + m_1 g z_1(t) + m_2 g z_2(t) \right) = 0$$

◇ Cela donne d'abord

$$m_1 \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + m_2 \dot{z}_2(t) \ddot{z}_2(t) + J_\Delta \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) + m_1 g \dot{z}_1(t) + m_2 g \dot{z}_2(t) = 0$$

◇ En utilisant les relations de couplage

$$m_1 \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + m_2 \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + \frac{J_\Delta}{R^2} \dot{z}_1(t) \ddot{z}_1(t) + m_1 g \dot{z}_1(t) - m_2 g \dot{z}_1(t) = 0$$

◇ Simplifions par la solution inintéressante correspondant à l'équilibre $\dot{z}_1(t) = 0$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{R^2} \right) \ddot{z}_1(t) + (m_1 - m_2) g = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\ddot{z}_1(t) = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + J_\Delta/R^2}}$$

★ **interprétation**🕒 **analyse du résultat**

- ◇ Du point de vue de l'homogénéité tout va bien puisque J_Δ/R^2 est une masse. Ainsi le dénominateur est une masse, la fraction se réduit dimensionnellement à g qui est bien une accélération.
- ◇ Remarquons aussi que le dénominateur caractérise l'inertie du système. Les masses m_1 et m_2 sont des masses *inertielles* qui proviennent de l'énergie cinétique. De même J_Δ est directement lié à l'inertie.
- ◇ Au numérateur, en revanche, les masses sont des masses *graves* qui proviennent de l'expression du poids.
- ◇ Nous constatons que l'intuition est juste lorsqu'il s'agit de savoir quelle masse monte et quelle masse descend puisque si M_2 est plus lourde que m_1 alors cette dernière monte. Ce qui est, répétons-le, logique.

🕒 **tension exercée par le fil**

- ◇ Cherchons l'expression de la tension exercée par le fil sur M_1 .
- ◇ Il s'agit d'une force de contact donc *a priori* inconnue, rien de tel qu'un PFD pour venir à bout. En effet cette loi relie force et mouvement. La plupart du temps nous l'utilisons dans le sens « j'ai la force, je cherche le mouvement », là nous allons l'utiliser dans l'autre sens « j'ai le mouvement, je cherche la force ».
- ◇ Pour cela il faut d'abord déterminer le mouvement de M_1 . C'est là que la vie est bien faite puisque nous connaissons *déjà* son mouvement grâce à la détermination de son accélération.
- ◇ La liste des forces qui s'exercent sur M_1 se réduit à
 - force à distance : le poids
 - force de contact : la force exercée par le fil
- ◇ Le PFD appliqué à la masse M_1 et directement projeté sur \vec{u}_z donne :

$$m_1 \ddot{z}_1(t) = -m_1 g + T_1 \quad \rightsquigarrow \quad T_1 = m_1 g + m_1 \ddot{z}_1(t)$$

- ◇ En remplaçant par l'expression trouvée, nous obtenons ainsi

$$T_1 = m_1 g + \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + J_\Delta/R^2} \quad \rightsquigarrow \quad T_1 = \frac{2m_1 m_2 + m_1 \frac{J_\Delta}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{R^2}} \times g$$

- ◇ Nous pouvons aisément vérifier qu'il s'agit d'une force dirigée vers le haut.
- ◇ Contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser, nous pouvons aussi voir que $T_1 \neq m_2 g$, autrement dit la force que le fil exerce sur M_1 n'est **pas** le poids de M_2 ! Et ce n'est pas qu'une question de poulie puisque même avec $J_\Delta = 0$ nous aurions encore $T_1 \neq m_2 g$.
- ◇ La raison de cette non-égalité est simple : c'est parce que la « transmission de force » n'existe pas. Les rares cas où il s'avère que de telles « transmissions » existent c'est dans le cas très particulier de l'équilibre qui est, en général, assez peu intéressant.
- ◇ De plus comme les masses ① et ② ont des rôles symétriques, par un simple changement $1 \leftrightarrow 2$, nous pouvons trouver la force que le fil exerce sur M_2 et cela donne

$$T_2 = \frac{2m_1 m_2 + m_2 \frac{J_\Delta}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{R^2}} \times g$$

- ◇ Nous constatons alors que $T_1 \neq T_2$ ce qui signifie que la force que le fil exerce sur M_1 n'est pas la même que celle que le fil exerce sur M_2 . Cela peut surprendre (à tort) pour deux raisons.

- Tout d'abord, parce qu'il s'agit d'un fil idéal, il n'est pas déraisonnable de penser qu'il exerce une force de même intensité à chacune de ses extrémités. C'est oublier que pour que tel soit le cas il faut aussi que les poulies associées au fil soient idéales, hypothèse fautive ici. D'ailleurs en faisant $J_\Delta = 0$ nous retrouvons bien $T_1 = T_2$.
- L'autre erreur, plus « grave » car beaucoup plus fautive physiquement parlant, c'est de croire que cela nie la loi des actions réciproques. En effet, il est courant de penser que la masse M_2 exerce une force sur la masse M_1 « par l'intermédiaire » du fil. En d'autres termes M_1 et M_2 seraient en interaction et les forces qu'ils exerceraient l'un sur l'autre devraient obéir à la 3^e loi de NEWTON. Comme nous pouvons le constater, c'est faux. Le concept de force qui s'exerce « par l'intermédiaire » n'existe pas. Une force est soit à distance (gravitation, électromagnétisme) soit de contact. Ici l'interaction entre M_1 et M_2 n'est manifestement pas une des deux forces à distance et M_1 ne **touche pas** M_2 mais touche *le fil*, en conséquence de quoi il n'est pas possible qu'il s'agisse d'une interaction de contact.

🌀 cas $m_1 \gg m_2$

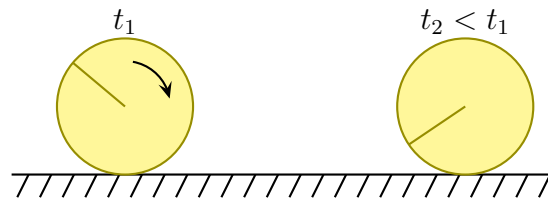
- ◇ Une idée répandue est que dans le cas particulier où $m_2 \gg m_1$ alors il va entraîner « de tout son poids » M_1 vers le bas. Vérifions ;
- ◇ Lorsque $m_2 \gg m_1$ et $m_2 \gg J_\Delta/R^2$ l'expression de T_1 devient

$$T_1 = \frac{2 m_1 m_2 g + \text{néglig}}{m_2 + \text{néglig} + \text{néglig}} \rightarrow 2 m_1 g$$

- ◇ Autrement dit, plus m_2 est lourd, plus la force que le fil exerce sur M_1 tend vers le double du poids de M_1 !
- ◇ Cela s'explique en fait très simplement. Si M_2 est très lourd, alors il va tomber en chute libre comme si de rien n'était et donc avoir l'accélération g vers le bas. Lié qu'il est avec M_1 , ce dernier va avoir une accélération g mais vers le haut. Or, naturellement, avec la gravité, M_1 a une accélération g vers le bas. Le fil doit créer une double accélération g vers le haut : la première pour annuler la pesanteur, la 2^e pour correspondre au mouvement imposé par la chute de M_2 . Et une force créant une double accélération de g n'est ni plus ni moins que le double du poids.
- ◇ Par cet exemple, nous pouvons bien voir qu'il faut faire très attention au concept de force car il ne correspond pas forcément à l'intuition que nous pouvons en avoir.
- ◇ C'est pourquoi, pour éviter de tenter l'intuition et (donc) d'augmenter le risque d'erreur, il est fortement conseillé de raisonner en termes énergétiques dès que la situation le permet.

III – Solide en mouvement presque quelconque

- ◇ Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un solide en rotation autour d'un axe de direction fixe.

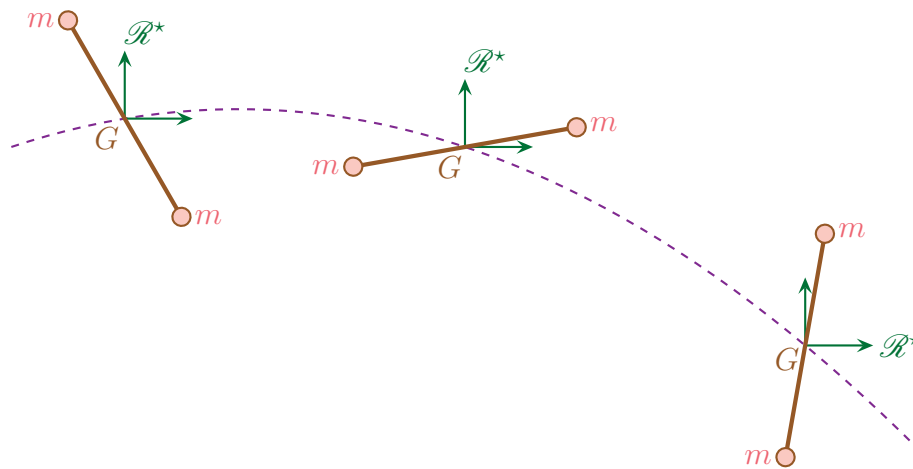


- ◇ Cela concerne typiquement toutes les roues qui roulent « tout droit » sur un support : roue de voiture, roulements à bille, etc.

III.1 – Vitesse d'un point du solide

III.1.i – situation

- ◇ Considérons le bâton de majorette en plein vol lors d'un défilé. Comme la majorette avant pendant que le bâton est en l'air, il faut que ce dernier avant lui aussi globalement. Mais, comme nous le savons tous, « pendant ce temps-là, il tourne ».
- ◇ La situation ressemble donc à quelque chose de ce genre



- ◇ Il apparaît que les points matériels ont des vitesses qui ne semblent pas simples à exprimer. C'est pourtant ce que nous allons faire.

III.1.ii – champ des vitesses d'un solide, loi de VARIGNON

★ loi

- ◇ Le résultat est le suivant

Pour deux points A et B quelconques d'un même solide

$$\vec{v}(A/\mathcal{R},t) = \vec{v}(B/\mathcal{R},t) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA} \quad \text{où}$$

$\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du solide par rapport à \mathcal{R} .

- ◇ Très souvent nous utiliserons le cas particulier suivant

Pour A quelconque d'un solide

$$\vec{v}(A/\mathcal{R},t) = \vec{v}(G/\mathcal{R},t) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA} \quad \text{où}$$

- G est le centre de masse du solide
- $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du solide par rapport à \mathcal{R}

- ◇ Ces lois sont typiques de ce qui est appelé le *torseur cinétique* du solide.
- ◇ De manière plus simple, nous pouvons constater que la connaissance de la vitesse d'*un seul* point (souvent G mais pas toujours) et du vecteur rotation permet de déterminer la vitesse de n'importe quel autre point du même solide.

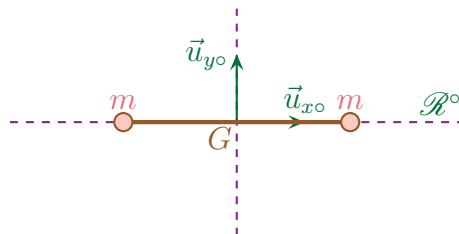
La donnée de la vitesse d'un point d'un solide et du vecteur rotation de ce solide permet de décrire entièrement le champ de vitesse de ce solide.

★ démonstration

- ◇ Précisons tout d'abord qu'il est hors de question de refaire cette démonstration à chaque fois.
- ◇ Pour cela, en plus du référentiel \mathcal{R} d'étude, considérons deux référentiels intermédiaires :
 - le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , bien connu
 - le référentiel propre \mathcal{R}° qui est le référentiel centré sur G dans lequel le solide est immobile.

🕒 champ des vitesses dans le référentiel propre

- ◇ Commençons par un dessin.

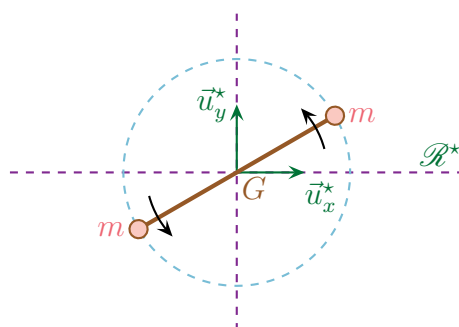


- ◇ Là, par définition du référentiel propre, rien de plus simple, quel que soit M

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}^\circ) = \vec{0}$$

🕒 champ des vitesses dans le référentiel barycentrique

- ◇ Les deux référentiels \mathcal{R}° et \mathcal{R}^* sont en rotation pure l'un par rapport à l'autre puisqu'ils sont centrés sur le même point G . Notons $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}^*}$ le vecteur rotation associé.



◇ Là, nous pouvons utiliser la loi bien connue de composition des vitesses

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}^*) = \underbrace{\vec{v}(M/\mathcal{R}^\circ)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}^*} \wedge \overrightarrow{GM} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}^*} \wedge \overrightarrow{GM}$$

🔗 champ des vitesses dans le référentiel d'étude

◇ Entre le référentiel \mathcal{R}^* et \mathcal{R} il n'y a qu'une translation donc la loi de composition des vitesses s'écrit simplement

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \underbrace{\vec{v}(G/\mathcal{R})}_{\vec{v}_e} + \vec{v}(G/\mathcal{R}^\circ)$$

◇ Et comme \mathcal{R} et \mathcal{R}^* sont en translation

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}^*} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^*/\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}^*} + \vec{0}$$

◇ Finalement nous avons, quel que soit M

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{GM}$$

◇ Il s'agit bien du résultat attendu avec la notation $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}^\circ/\mathcal{R}} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{\Omega}$.

◇ Pour obtenir le résultat entre deux points A et B quelconque, il suffit d'écrire les deux relations et de les soustraire

$$\begin{aligned}\vec{v}(A/\mathcal{R}) &= \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GA} \\ \vec{v}(B/\mathcal{R}) &= \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GB} \\ \vec{v}(A/\mathcal{R}) - \vec{v}(B/\mathcal{R}) &= \vec{0} + \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})\end{aligned}$$

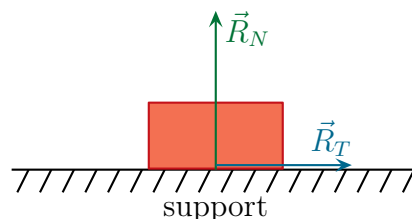
◇ Ce qui conduit à

$$\vec{v}(A/\mathcal{R}) = \vec{v}(B/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA}$$

III.2 – Contact entre deux solides

III.2.i – généralisation d'un cas connu

◇ Rappelons qu'en première année a été vu le cas de deux solides en contact dans le cas où le support est immobile.

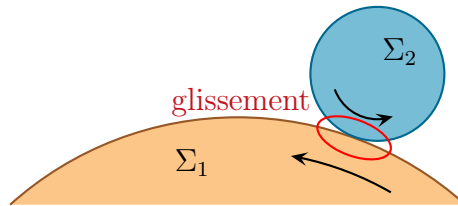


◇ Ici nous allons généraliser au cas où le support peut bouger.

◇ L'idée générale va consister à faire une sorte de changement de référentiel (bien que cela n'en soit pas vraiment un) de manière à regarder comment l'un des deux solides bouge par rapport à l'autre.

III.2.ii – vitesse de glissement

◇ Regardons ce qui peut se passer au niveau du contact entre deux solides quelconques.



◇ C'est une notion à comprendre davantage de manière physique avant même de savoir la « calculer » ce qui est souvent assez simple.

La vitesse de glissement d'un solide ② par rapport à un solide ① caractérise la manière dont ② bouge par rapport à ① au niveau du point de contact.

◇ Exemple de contact avec glissement (donc avec une vitesse de glissement non nulle) :

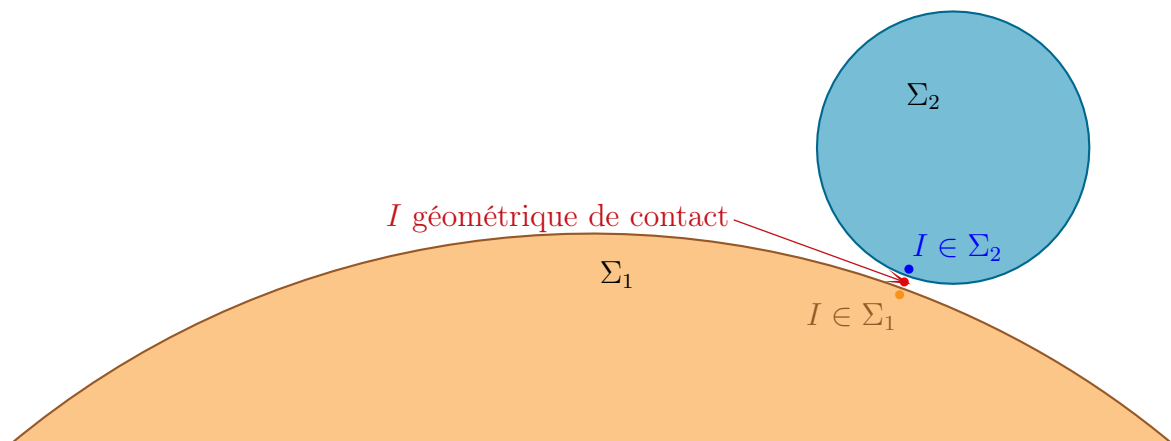
- la pointe d'un crayon de papier lors de l'écriture
- une voiture qui avance alors que ses roues sont bloquées
- lorsque nous poussons l'armoire de grand-mère pour la mettre de l'autre côté de la pièce
- lorsque nous manipulons une souris optique
- ...

◇ Exemple de contact sans glissement (donc avec une vitesse de glissement nul) :

- une roue de voiture sur la route⁴
- des roues qui tournent avec des engrenages
- une bille de stylo bille lors de l'écriture
- ...

◇ En zoomant sur une zone de contact entre deux solides, nous pouvons constater qu'il existe en fait 3 points différents de contact :

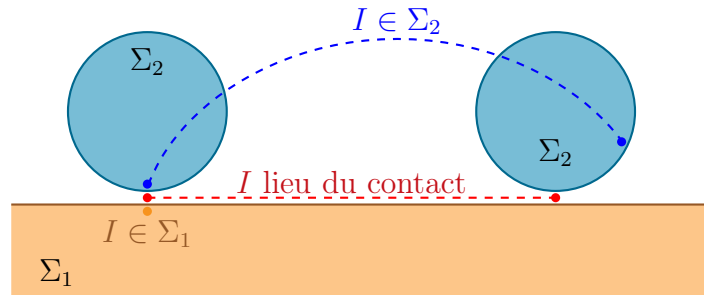
- le point I qui appartient au solide ① et qui est en contact avec le solide ②
- le point I qui appartient au solide ② et qui est en contact avec le solide ①
- le point I lieu purement géométrique de la rencontre entre les deux points I précédents



☛ *Remarque* : Sur le schéma ci-dessus, les deux solides sont représentés légèrement décollés dans un souci d'une meilleure visibilité des trois points différents.

4. à l'échelle macroscopique, il n'y a pas de glissement, une étude mésoscopique plus poussée montre qu'il existe des glissements qui sont indispensables pour que le pneu « épouse » les irrégularités de la route.

- ◇ Pour bien différencier les 3, suivons-les dans leurs « mouvements » avec l'exemple canonique de la roue qui roule sans glisser sur un plan.



- ◇ Pour les points en contact à l'instant initial :
 - celui sur la roue décrit un mouvement complexe (qui est une cycloïde mais cela n'a guère d'importance)
 - celui sur le sol reste immobile
 - le point de lieu de contact, qui n'est pas un point matériel, avance « tout droit »
- ◇ Il n'y aura pas glissement lorsque les deux points de contact qui appartiennent aux solides ont la même vitesse soit lorsque

$$\vec{v}(I \in \textcircled{1}/\mathcal{R}) = \vec{v}(I \in \textcircled{2}/\mathcal{R})$$

La vitesse de glissement de $\textcircled{2}$ par rapport à $\textcircled{1}$ s'écrit

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\textcircled{2}/\textcircled{1}) = \vec{v}(I \in \textcircled{2}/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \textcircled{1}/\mathcal{R})$$

- ◇ Il est important de bien préciser qui glisse par rapport à qui.

Pour deux solides quelconques

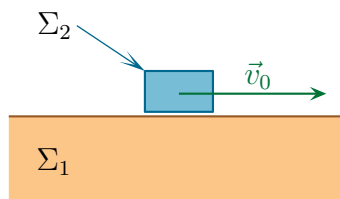
$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\textcircled{2}/\textcircled{1}) = -\vec{v}_{\text{gliss}}(\textcircled{1}/\textcircled{2})$$

- ◇ Un cas fréquent est le suivant

La vitesse de glissement d'un solide Σ par rapport à un support immobile s'écrit

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\Sigma) = \vec{v}(I \in \Sigma/\mathcal{R})$$

- ◇ Petit exemple. Imaginons simplement un objet qui se déplace à \vec{v}_0 sur un support.



- ◇ Alors

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\text{obj}/\text{sol}) = \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}_{\text{gliss}}(\text{sol}/\text{obj}) = -\vec{v}_0$$

La vitesse de glissement d'un solide par rapport à un autre est tangentielle au contact entre les deux solides.

- ◇ En effet, comme la vitesse de glissement représente la vitesse de l'un par rapport au support qu'est l'autre, si la vitesse avait une composante normale, soit les solides se sépareraient, soit ils s'interpénétreraient. Dans un cas comme dans l'autre, c'est exclu.

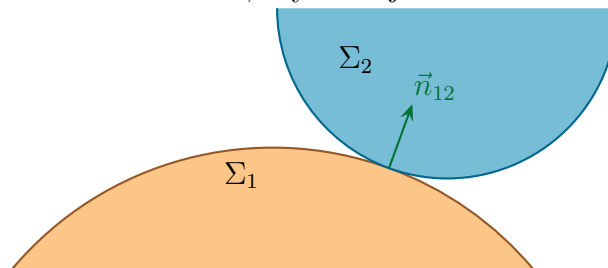
III.2.iii – frottement et glissement

- ◇ Insistons tout de suite sur le fait que *frottement* et *glissement* sont deux notions indépendantes.
- ◇ Exemples :
- frottement et glissement : une voiture qui avance roue bloquée
 - frottement et glissement : une voiture qui avance sans roue bloquée
 - frottement et glissement : un savon bien humide qui avance sur un support
 - frottement et glissement : un objet immobile sur de la glace savonnée
- ◇ Le problème vient essentiellement du fait que dans le langage courant la notion de « frottement » ressemble davantage à celle que dans le cours nous appellerons « glissement ».

III.2.iv – interaction de contact

★ action normale

Entre deux solides en contact, il y a toujours une interaction normale



$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = R_N \vec{n}_{12} \quad \text{où}$$

- \vec{n}_{12} est le vecteur normal et unitaire dirigé de ① vers ②
- $R_N > 0$ est toujours possible
- $R_N < 0$ que si le décollement entre les deux est impossible

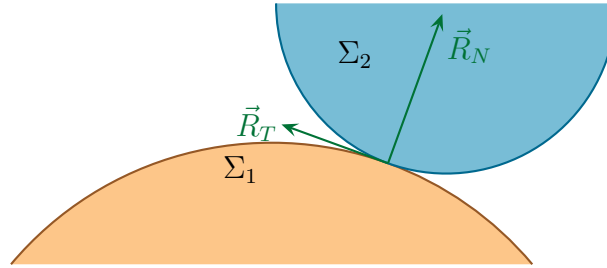
- ◇ $R_N > 0$ traduit le fait que les deux solides ne peuvent s'interpénétrer.

★ action tangentielle

🌀 loi

Les actions tangentielles de contact traduisent le frottement.

LOIS DE COULOMB



Lors du contact entre deux solides, il y a deux cas possibles suivant qu'il y a ou non glissement :

→ s'il y a glissement, *ie.* si $\vec{v}_{\text{gliss}}(\text{②}/\text{①}) \neq \vec{0}$ alors

$$\|\vec{R}_{T,1 \rightarrow 2}\| = f_d \|R_N\| \quad \text{et} \quad \vec{R}_{T,1 \rightarrow 2} \text{ opposée à } \vec{v}_{\text{gliss}}(\text{②}/\text{①})$$

→ s'il n'y a pas glissement, *ie.* si $\vec{v}_{\text{gliss}}(\text{②}/\text{①}) = \vec{0}$ alors

$$\|\vec{R}_{T,1 \rightarrow 2}\| \leq f_s \|R_N\| \quad \text{et} \quad \vec{R}_{T,1 \rightarrow 2} \text{ de direction inconnue}$$

f_d et f_s sont appelés respectivement *coefficient de frottement dynamique et statique*.

◇ Expérimentalement

En ce qui concerne le contact, nous avons toujours

$$f_d \leq f_s$$

◇ Toutefois

Si rien n'est précisé, nous prendrons

$$f_d = f_s \stackrel{\text{not}}{=} f$$

◇ Enfin

Les coefficients de frottements sont des grandeurs sans dimension et dont la valeur est de l'ordre de l'unité.

Les frottements associés au contact entre deux solides sont appelés *frottement solides*.

🔗 méthode

- ◇ Comment travailler avec des frottements solides ?
- ◇ Il s'agit de forces *non linéaires* car l'expression même de la force dépend d'un paramètre (ici la vitesse de glissement).
- ◇ C'est pourquoi, comme pour les autres phénomènes non linéaire (A0 en régime de saturation, diode, précipitation d'un soluté, ...) nous allons, dans cet ordre :
 - faire une hypothèse explicite
 - poser l'égalité associée à cette hypothèse
 - vérifier l'hypothèse

◇ Dans le cas des frottements solides, cela donne le tableau

hypothèse	nous savons / nous posons	nous devons vérifier
glissement	$\vec{R}_T \begin{cases} \text{opposée à } \vec{v}_{\text{gliss}} \\ \ \vec{R}_T\ = f \ \vec{R}_N\ \end{cases}$	$\vec{v}_{\text{gliss}} \stackrel{?}{=} \vec{0}$
glissement	$\vec{v}_{\text{gliss}(\text{Ⓜ}/\text{Ⓢ})} = \vec{0}$	$\ \vec{R}_T\ \stackrel{?}{\leq} f \ \vec{R}_N\ $

◇ Il est bien évident que rien n'interdit d'avoir la bonne intuition et de commencer par faire l'hypothèse correcte.

III.2.v – aspect énergétique

★ résultat

La puissance totale fournie par une interaction de contact aux deux solides en contact est strictement négative en cas de frottement avec glissement et nulle sinon.

★ interprétation

◇ Il s'agit d'un énoncé dense. La première chose à remarquer, c'est que cela confirme ce que nous avons dit précédemment à savoir

Un contact avec frottement mais sans glissement n'est pas dissipatif.

◇ Nous avons vu cela dans le cas de la poulie mais c'est vrai aussi dans le cas d'une roue qui roule sur un support.

Un contact avec glissement mais sans frottement n'est pas dissipatif.

◇ Ça, nous le savons depuis longtemps.

◇ Remarquons maintenant quelque chose de très important. La loi précédente parle de *l'interaction de contact* et non de la *force* de contact.

◇ La différence est fondamentale car elle signifie une chose

Une réaction normale peut fournir un travail, positif ou négatif.

◇ Exemples :

→ Dans un ascenseur, ce qui vous fait gagner de l'énergie cinétique par rapport au référentiel terrestre, c'est l'action normale du plancher de l'ascenseur.

→ Quand un joueur de tennis arrive à faire un amorti avec sa raquette de manière à stopper la balle sans que celle-ci ne rebondisse, c'est bien l'action normale qui a arrêté la balle qui possédait initialement une vitesse. Le travail fourni est alors négatif.

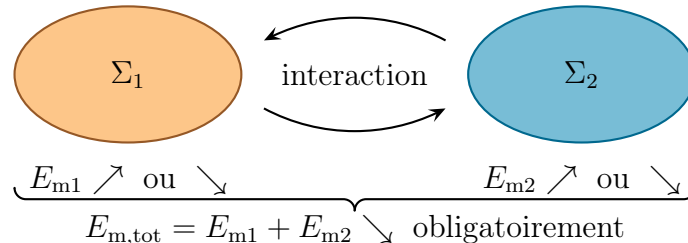
◇ Mais nous pouvons aller plus loin ;

Une force de frottement peut fournir un travail positif.

◇ En effet, en notant ① et ② les deux solides nous avons

$$\mathcal{P}_{r,1} \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{r,2} \geq 0 \quad \text{mais} \quad \mathcal{P}_{r,1} + \mathcal{P}_{r,2} < 0$$

◇ En symbolisant le tout



◇ Exemple le plus classique de mise en mouvement par frottement : le vent. Si les feuilles s’envolent lorsque le vent souffle, c’est bien parce qu’il y a des frottements entre le vent et la feuille.

◇ Autre exemple : posez un grand carton par terre sur du carrelage. Prenez de l’élan, courez et sautez sur le carton : celui-ci va se mettre à avancer. Grâce à quelle force ? Aux forces de contact tangentielles entre vous (ou du moins vos pieds) et le carton. Celui-ci acquiert de l’énergie cinétique, ces forces sont donc motrices.

★ **démonstration**

◇ Recherchons tout d’abord la puissance fournie par $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$. Comme cette force s’exerce sur le point de contact du solide Σ_2 , la puissance reçue s’écrit

$$\mathcal{P}_{r,2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I \in \textcircled{2} / \mathcal{R})$$

◇ De même la puissance fournie par $\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ s’écrit

$$\mathcal{P}_{r,1} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}(I \in \textcircled{1} / \mathcal{R})$$

◇ La somme de ces deux puissance s’écrit donc, compte-tenu de la loi des actions réciproques

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{tot}} &= \mathcal{P}_{r,1} + \mathcal{P}_{r,2} \\ &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I \in \textcircled{2} / \mathcal{R}) - \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}(I \in \textcircled{1} / \mathcal{R}) \\ &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{\text{gliss}}(\textcircled{2} / \textcircled{1}) \end{aligned} \qquad \vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot (\vec{v}(I \in \textcircled{2} / \mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \textcircled{1} / \mathcal{R}))$$

◇ Comme la vitesse de glissement est tangentielle à la surface de contact, nous pouvons d’ores et déjà constater que seule la composante tangentielle peut travailler.

◇ Il reste donc

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \vec{R}_{T,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{\text{gliss}}(\textcircled{2} / \textcircled{1})$$

◇ Or nous savons que l’action de frottement de ① sur ② est opposée à la vitesse de glissement de ② par rapport à un, qui se traduit par

$$\vec{R}_{T,1 \rightarrow 2} = -\lambda \vec{v}_{\text{gliss}}(\textcircled{2} / \textcircled{1}) ; \lambda > 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathcal{P}_{\text{tot}} = -\lambda \|\vec{v}_{\text{gliss}}(\textcircled{2} / \textcircled{1})\|^2 < 0$$

◇ Ce qui montre que :

- la puissance fournie est nulle si $\lambda = 0$ *ie.* s'il n'y a pas de frottement (peu importe le glissement)
- la puissance fournie est nulle si $\|\vec{v}_{\text{gliss}}\| = 0$ *ie.* s'il n'y a pas de glissement (peu importe les frottements)
- la puissance fournie est négative dans les autres cas

III.2.vi – phénomène négligé

- ◇ Dans tout ce qui précède et dans tout ce qui suit, sauf précision contraire, nous négligeons une action particulière qui agit au niveau du contact à savoir le moment de roulement.
- ◇ Concrètement il s'agit d'une action qui s'oppose au roulement d'un objet sur un autre.
- ◇ Le modèle le plus simple pour le voir est d'imaginer ce qui se passe au niveau d'une boule de billard roulant sur un billard.
- ◇ Le simple poids de la bille permet à celle-ci d'écraser très légèrement le tapis.
- ◇ En roulant la bille doit donc continuellement écraser un peu le tapis qui, bien sûr, ne restitue pas l'énergie perdue.
- ◇ En perdant ainsi de l'énergie, tout se passe donc comme si quelque chose s'opposait au roulement de la bille : cela se traduit analytiquement par un moment de roulement.
- ◇ Notons aussi que ce phénomène est loin d'être négligeable pour les pneus des voitures. Ceux-ci sont en effet constamment écrasés (regardez une voiture si vous êtes incroyables) à tel point que la perte énergétique associée est estimée comme responsable à plus de 10% de la consommation d'essence.

III.3 – Dynamique du solide

III.3.i – trois théorèmes

- ◇ Attention, les théorèmes qui suivent sont des applications à *un* solide des théorèmes des systèmes de points.

THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE (TCI)

Pour un solide dans un référentiel quelconque

$$m \frac{dv(G/\mathcal{R},t)}{dt} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} + \sum \vec{f}_{\text{inertie}}$$

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE BARYCENTRIQUE SCALAIRE (TMCBS)

Pour un solide dans un référentiel quelconque

$$m \frac{d\sigma^*}{dt} = \sum \mathcal{M}(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum \mathcal{M}(\vec{f}_{\text{inertie de } \mathcal{R}}) \quad \text{avec}$$

$$\sigma^* = J_{G\Delta} \Omega \quad \text{avec } (G\Delta) \text{ axe fixe ans } \mathcal{R}^* \text{ passant par } G$$

- ◇ Pour les versions énergétiques, nous n'en donnerons qu'une parmi les quatre

THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE (TPM)

Pour un solide dans un référentiel quelconque

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum \mathcal{M}(\vec{f}_{\text{inertie,nc}})$$

- ◇ Comme le système est constitué **d'un** solide, la puissance totale des interactions intérieures est nulle.

III.3.ii – méthode de résolution

★ dispositif avec un seul solide

- ◇ Il s'agit là d'un cas très fréquent : objet qui roule, qui glisse peut-être, ...
- ◇ Dans ce cas il y a deux possibilités.
- ◇ Si le dispositif est à un seul degré de description, libre et conservatif, il ne faut pas réfléchir : la méthode sera **énergétique**.
- ◇ Rappelons deux choses importante pour être dans ce cas là :
 - pour qu'il n'y ait qu'un seul DD quand il y a roulement, il *faudrait* qu'il y ait roulement sans glissement (comme les engrenages)
 - il ne faut pas oublier qu'un roulement sans glissement avec frottement est conservatif
- ◇ Dans les autres cas (non libre, non conservatif, au moins 2 DD) alors de manière quasi systématique, nous ferons :
 - un TCI pour le mouvement d'ensemble
 - un TMCBS pour le mouvement propre
 - le tout en tenant compte des éventuelles hypothèse à faire sur la nature du contact (glissement ou non)

★ dispositif à plusieurs solides

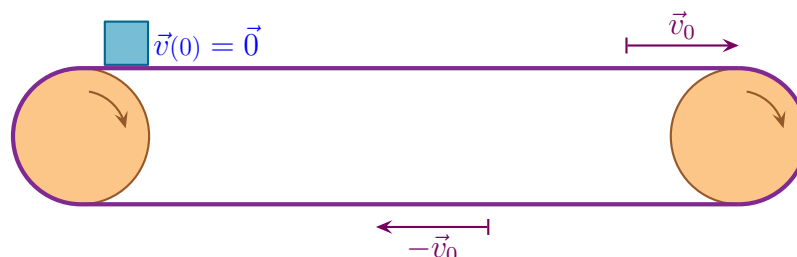
- ◇ Là encore deux possibilités.
- ◇ La première, toujours la même, est que si le dispositif est à un DD, libre conservatif, il ne faudra pas réfléchir et commencer d'abord par une approche énergétique.
- ◇ La deuxième, celle qui correspond au cas où il y a plus d'un seul DD, alors il faudra autant de TCI, TMCBS que de DD. Ce n'est clairement pas évident et de manière générale il n'y a pas de solution analytique simple (exemple canonique : le pendule double).

III.4 – Tapis roulant

III.4.i – dispositif et analyse

★ dispositif à plusieurs solides

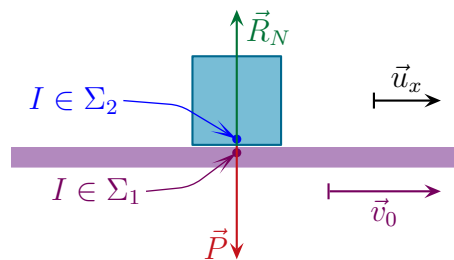
- ◇ Imaginons un tapis roulant à l'instar des tapis roulant présents aux caisses des supermarchés.



- ◇ Le tapis roulant est animé de la vitesse constante \vec{v}_0 et un objet est lâché dessus avec une vitesse horizontale nulle et une vitesse verticale négligeable (la « chute » ne faisant qu'un millimètre ou deux).
- ◇ Expérimentalement, nous savons que l'objet va être entraîné à l'autre bout du tapis d'où les questions :
 - des frottements sont-ils nécessaires ?
 - combien faut-il de temps pour aller jusqu'à L ?

★ pas de frottements ?

◇ Imaginons le cas sans frottements.



◇ Dans ce cas, le PFD appliqué à l'objet et projeté sur l'axe \vec{u}_x donne immédiatement, avec les deux seules forces que sont le poids et la réaction normale :

$$m \ddot{x}(t) = 0$$

◇ Et avec les conditions initiales nous arrivons tout aussi vite à

$$\dot{x}(t) = 0$$

◇ Autrement dit sans frottement l'objet ne bouge pas.

◇ Expérimentalement nous observons le contraire *donc* il y a des frottements.

★ analyse physique

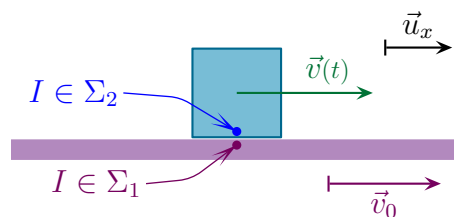
◇ Ici l'évolution est clairement à un seul degré de description que nous avons déjà plus ou moins choisi comme étant $x(t)$.

◇ Comme des moteurs agissent sur le tapis et que le tapis agit sur l'objet, nous pouvons dire que l'évolution est *forcée* et donc *a priori* non conservative. Mettons de côté l'approche énergétique et concentrons-nous sur le mouvement d'ensemble *via* un TCI.

III.4.ii – évolution temporelle

★ vitesse de glissement

◇ Petit préliminaire avant de commencer la résolution proprement dite : déterminons l'expression de la vitesse de glissement de l'objet par rapport au tapis.



◇ Par définition cette vitesse s'écrit

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\mathcal{S}/\text{tapis}) = \vec{v}(I \in \mathcal{S}/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \text{tapis}/\mathcal{R})$$

◇ Ce qui donne immédiatement

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\mathcal{S}/\text{tapis})_e n \vec{v}_{\text{gliss}} = \dot{x}(t) \vec{u}_x - v_0 \vec{u}_x$$

◇ Comme à l'instant initial nous avons $\dot{x}(0) = 0$, cela conduit à $v_{\text{gliss}}(0) = -v_0 \neq 0$.

◇ Ainsi comme nous *savons* qu'à l'instant initial il y a glissement, nous allons commencer par nous placer dans le cadre de l'hypothèse « glissement ».

★ première phase : glissement

🕒 relation connue

◇ Aussitôt l'hypothèse faite, nous pouvons écrire, conformément aux lois sur le frottement

$$\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\| \quad \rightsquigarrow \quad \vec{R}_T = \pm f R_N \vec{u}_x$$

◇ Pour choisir le signe, il ne faut pas oublier que la force de frottement ne s'oppose **pas** à la vitesse de l'objet mais à la vitesse de *glissement* de l'objet.

◇ Or, ici, à l'instant initial, la vitesse de glissement s'écrit $\vec{v}_{\text{gliss}}(0) = -v_0 \vec{u}_x$ donc est dirigée vers $-\vec{u}_x$.

◇ Le frottement est donc de la forme $\vec{R}_T = +f R_N \vec{u}_x$.

🕒 évolution

◇ Les forces qui s'exercent sur la masse m sont :

→ le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$

→ la force exercée par le tapis $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T = R_N \vec{u}_z + f R_N \vec{u}_x$

→ les autres frottement (air) sont négligés

◇ Le PFD appliqué à la masse donne, en projection

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} / \vec{u}_z : & 0 = -m g + R_N + 0 \quad (\text{mouvement horizontal}) \\ / \vec{u}_x : & m \ddot{x}(t) = 0 + 0 + f R_N \end{cases}$$

◇ Nous tirons très vite de ces deux équations

$$R_N = m g \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) = f g$$

◇ En tenant compte des conditions initiales, cela donne

$$\dot{x}(t) = f g t \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{1}{2} f g t^2$$

🕒 vérification

◇ N'oublions pas que tout ceci n'est vrai que si l'hypothèse de glissement est vérifiée.

◇ Or la vitesse de glissement s'écrit

$$v_{\text{gliss}} = \dot{x}(t) - v_0 = f g t - v_0$$

◇ Nous voyons donc qu'à l'instant $t_0 = \frac{v_0}{f g}$ la vitesse de glissement devient nulle, autrement dit **il n'y a plus de glissement**.

★ deuxième phase : pas de glissement

◇ Plaçons nous au delà de l'instant t_0 , instant pour lequel nous savons que la vitesse de glissement est nul.

🕒 relation connue

◇ Comme la vitesse de glissement est nulle, nous pouvons tout de suite écrire

$$v_{\text{gliss}} = \dot{x}(t) - v_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dot{x}(t) = v_0$$

🌀 évolution

- ◇ Comme nous connaissons la vitesse, inutile ici de ressortir la grosse artillerie du PFD et contentons nous de trouver la position à partir de la vitesse.
- ◇ Sans oublier les conditions initiales à $t = t_0$, cela donne

$$\dot{x}(t) = v_0 \quad \rightsquigarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} f g t_0^2 + v_0 (t - t_0)$$

🌀 vérification

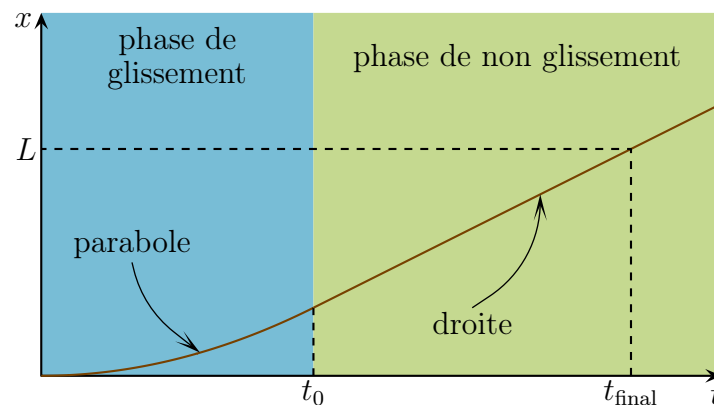
- ◇ Nous devons vérifier que $\|\vec{R}_T\| \leq f \|\vec{R}_N\|$.
- ◇ Pour trouver \vec{R}_T , comme d'habitude, nous allons prendre le PFD « à l'envers ».
- ◇ La projection sur \vec{u}_x du PFD appliqué à la masse donne très vite

$$m \ddot{x}(t) = R_T \quad \rightsquigarrow \quad R_T = 0$$

- ◇ La vérification est immédiate et nous pouvons aussi voir que la masse ne glissera plus jamais.

★ évolution sous forme graphique

- ◇ Graphiquement l'évolution est d'abord parabolique avant d'être affine.



- ◇ En fait le tapis accélère l'objet posé dessus jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse et après l'objet et le tapis restent « solidaires ».
- ◇ Bien sûr il est possible de discuter sur la durée t_0 , savoir si elle est assez brève pour que la longueur L soit atteinte, ou non, durant la phase affine, mais le fait est qu'expérimentalement L est toujours suffisamment grande.
- ◇ En fait en pratique les tapis « accrochent » suffisamment de telle sorte que la durée t_0 est si brève qu'il est commun de penser que les objets sur les tapis bougent « instantanément » à la vitesse v_0 .
- ◇ Deux méthodes pour se convaincre du contraire :
 - constater que les bouteilles sont moins bien entraînées dans un sens que dans l'autre
 - poser une boîte de céréales à plat et constater qu'elle se déplace vers l'arrière **par rapport** au tapis, ce qui prouve le glissement.

III.4.iii – aspect énergétique

- ◇ Écrivons le TEM pour la masse entre l'instant initial et un instant quelconque.

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \sum W(\vec{f}_{nc})$$

◇ Cela donne

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - 0 + (0 - 0) = W(\vec{R}_T) + W(\vec{R}_N)$$

◇ Comme \vec{R}_N porté par \vec{u}_z et que la vitesse du solide est portée par \vec{u}_x

$$\mathcal{P}(\vec{R}_N) = \vec{R}_N \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad W(\vec{R}_N) = 0$$

◇ Il ne reste donc que le travail fourni par \vec{R}_T , *ie.* par les frottements

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2(t) = W(\text{frottement}) > 0$$

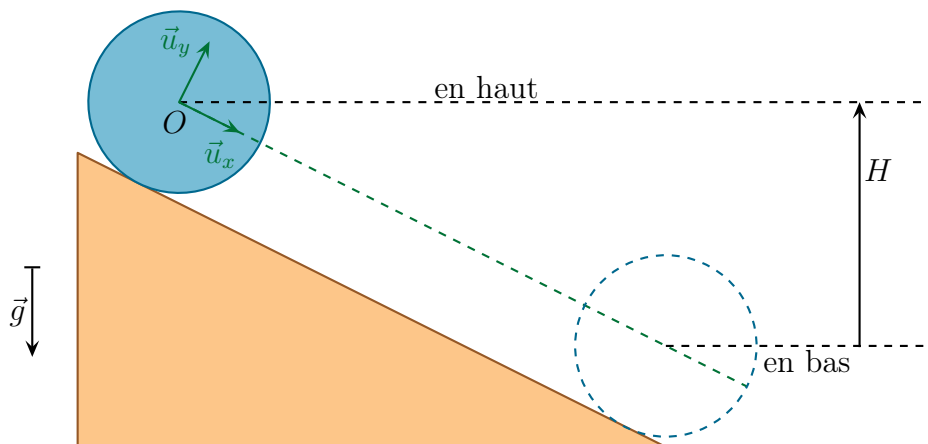
◇ Nous sommes là face à un cas flagrant de travail *moteur* de la part de forces de frottement.

◇ L'apparent paradoxe est sauvé lorsque nous prenons en compte la perte énergétique subie par le tapis du fait du frottement : cette perte est plus grande que le gain de la masse.

III.5 – Descendre une pente

III.5.i – situation

◇ Considérons un cylindre solide tout ce qu'il y a de plus normal posé sur une pente inclinée avec un angle α par rapport à l'horizontale.



◇ Quelle sera sa vitesse d'ensemble lorsqu'il sera « en bas » ? Combien de temps mettra-t-il pour arriver « en bas » ?

◇ Nous étudierons deux cas : le premier pour lequel il n'y a *aucun* frottement et l'autre pour lequel il y a des frottements.

III.5.ii – version sans frottement

★ analyse

◇ Pour bien se représenter les choses, le cas de la pente « sans frottement » correspond à une pente verglacée, légèrement humide et un peu savonneuse.

◇ Analyse physique :

→ En considérant de manière assez naturelle que l'axe du cylindre reste constamment orthogonal au plan de la figure (*ie.* que le cylindre descend « tout droit »), alors il n'y a que deux degrés de description : un de translation et un de rotation.

- Une fois lâchée, l'évolution est clairement libre (pas de moteur) et conservative (aucun frottement).
- Les grandeurs pertinentes sont : m et $J_{G\Delta}$ (inertie), α et R (géométrie), g (action), H (condition initiale)

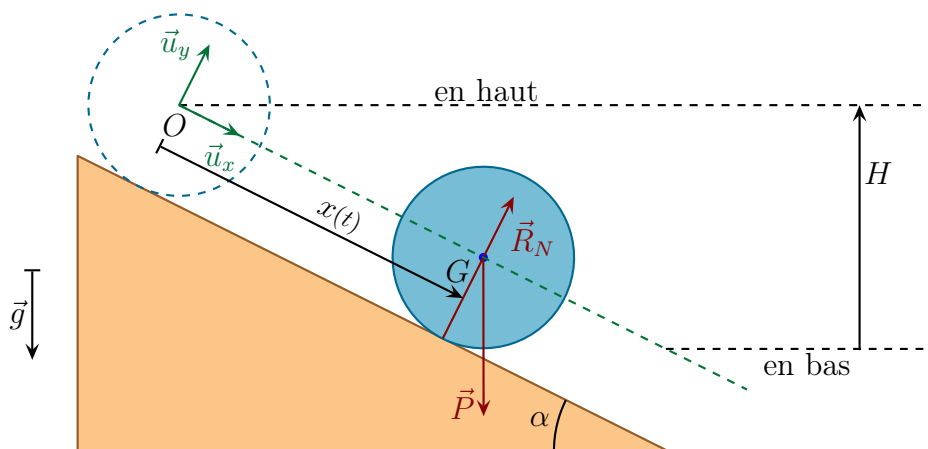
◇ Analyse technique :

- Comme ici nous sommes face à une situation à plusieurs DD, nous allons mettre de côté l'approche énergétique. Nous allons faire un TCI + un TMCBS
- En ce qui concerne le repérage, nous allons le choisir de telle sorte qu'un axe soit parallèle à la translation principale du c.d.m.

★ mise en équation

🕒 aspect translation

◇ Commençons par un schéma.



◇ Listons les forces *extérieures* agissant sur le cylindre :

→ force à distance : le poids $\vec{P} = m \vec{g} = m g (+ \sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$

→ force de contact : la réaction du support, uniquement normale $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_y$ avec $R_N \geq 0$.

◇ Comme le cylindre ne décolle pas, le mouvement de G est porté uniquement par \vec{u}_x ce qui donne un PFD et sa projection sur \vec{u}_x comme suit

$$m \cdot \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R}_N \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{x}(t) = +m g \sin \alpha + 0 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) = +g \sin \alpha$$

◇ Avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ nous obtenons

$$\dot{x}(t) = g t \sin \alpha \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$$

◇ À l'instant final, le c.d.m. est descendu d'une hauteur H ce qui fait qu'il a parcouru la distance $x_f = \frac{H}{\sin \alpha}$. Ainsi

$$x(t_f) = \frac{1}{2} g t_f^2 \sin \alpha = \frac{H}{\sin \alpha} \quad \rightsquigarrow \quad t_f = \sqrt{\frac{2 H}{g \sin^2 \alpha}}$$

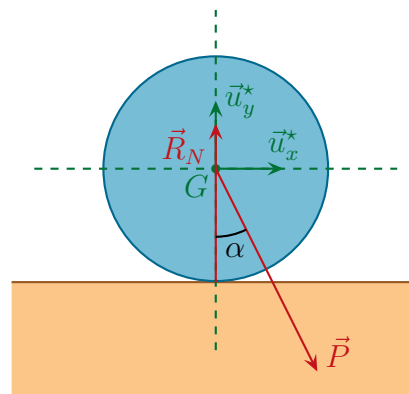
◇ La vitesse finale est donc

$$v_f = \dot{x}(t_f) = \sqrt{\frac{2 H}{g \sin^2 \alpha}} \times g \sin \alpha \quad \rightsquigarrow \quad v_f = \sqrt{2 g H}$$

- ◇ Nous pouvons constater que la vitesse ne dépend ni de α ni de $J_{G\Delta}$ ni de m .
- ◇ Le fait que v_f ne dépende pas de $J_{G\Delta}$ signifie que l'évolution est *indépendante* de la rotation. Autrement dit, dans cette situation, il n'y a pas d'effet de rotation.
- ◇ Sachant qu'il n'y a pas d'effet de rotation, l'indépendance du résultat vis-à-vis de m est alors usuel : c'est du au fait que seuls entrent en jeu l'inertie (*via* la masse inertielle m) et la gravité (*via* la masse grave m). Ces deux masses se simplifiant pour d'évidente raison d'homogénéité.

🌀 aspect rotation

- ◇ Comme nous allons travailler dans le référentiel barycentrique, commençons par refaire un schéma **par rapport** au référentiel barycentrique.



- ◇ Rappelons que dans ce référentiel, le cylindre est globalement immobile et ne fait que tourner sur lui-même : c'est la route qui « avance » sous lui.
- ◇ La liste des forces extérieures étant déjà faite, écrivons tout de suite le TMCBS appliqué au cylindre.

$$\frac{d\sigma^*(t)}{dt} = \sum \mathcal{M}_{(G\Delta)}(\vec{f}_{\text{ext}})$$

- ◇ Comme tout se passe comme si le poids s'appliquait en G , nous pouvons écrire

$$\mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{P}) = \vec{\mathcal{M}}_G \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{GG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = 0$$

- ◇ Nous aurions pu tout aussi bien dire que le bras de levier pour le poids était nul.
- ☛ *Remarque* : le moment du poids dans le référentiel barycentrique sera donc forcément **toujours** nul.
- ◇ De même

$$\mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{R}_N) = \vec{\mathcal{M}}_G \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{GI} \wedge \vec{R}_N) \cdot \vec{u}_z = (-R \vec{u}_r \wedge R_N \vec{u}_r) \cdot \vec{u}_z = 0$$

- ◇ Nous avons donc ainsi, puisque *dans le référentiel barycentrique* le cylindre a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma^* = J_{G\Delta} \dot{\theta} \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\theta}(t) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(t) = C^{\text{te}}$$

- ◇ Comme à l'instant initial le cylindre est immobile, nous avons tout de suite

$$\theta(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \theta(t) = 0$$

- ◇ Autrement dit : le cylindre ne tournant pas à l'instant initial, il ne pourra pas se mettre en rotation après car il n'y a pas de forces tangentielles.

★ interprétation

- ◇ Dans le cas sans frottement, il faut bien imaginer que le cylindre ne **tourne pas** lors de sa descente : il *glisse* tout simplement.
- ◇ Ce sont les frottements qui permettent de faire tourner et nous allons le constater dans le cas suivant, le cas où justement il y a des frottements.

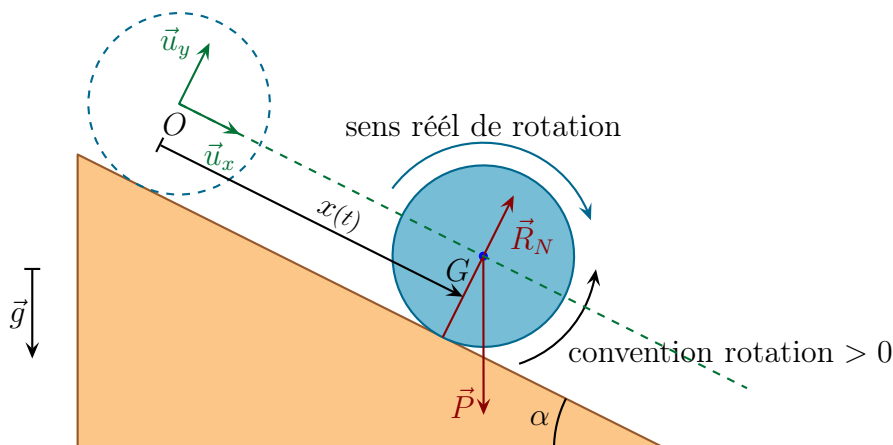
III.5.iii – version frottement sans glissement

★ analyse

- ◇ Reprenons l'analyse physique
 - Comme cette fois le roulement se fait sans glissement (toujours penser aux engrenages), nous pouvons dire qu'il n'y aura plus qu'un seul DD, même si de manière temporaire nous pourrions éventuellement travailler avec deux (l'un pour la translation, l'autre pour la rotation).
 - Ici aussi, une fois le cylindre lâché, l'évolution est clairement libre (pas de moteur) et conservative (puisque les seuls frottements se font sans glissement).
 - Les grandeurs pertinentes sont : m et $J_{G\Delta}$ (inertie), α et R (géométrie), g et f (action), H (condition initiale)
- ◇ Remarquons que comme ici l'évolution ne peut **pas** se faire sans rotation, il serait très étrange de ne pas retrouver du $J_{G\Delta}$ dans les résultats.
- ◇ Analyse technique :
 - 1DD-libre-conservatif-donc-énergie.
 - Pour trouver la vitesse finale, nous utiliserons un TEM directement et ensuite (et seulement ensuite) nous utiliserons un TPM pour trouver l'évolution complète.
 - Nous allons bien évidemment choisir le même repère que pour le cas précédent.

★ hypothèse de non glissement

- ◇ Un petit schéma de rappel.



- ◇ L'hypothèse de non glissement nous permet de dire que la vitesse de glissement est nulle soit

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\text{cyl}/\text{pente}) = \vec{v}(I \in \text{cyl}/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in \text{pente}/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

- ◇ Or, la pente est immobile donc $\vec{v}(I \in \text{pente}/\mathcal{R}) = \vec{0}$.
- ◇ Et le cylindre est un solide (!) donc le champ des vitesse associé permet d'écrire

$$\begin{aligned}\vec{v}(I \in \text{cyl}/\mathcal{R}) &= \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} \\ &= \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{\theta} \vec{u}_z \wedge (-R \vec{u}_y) \\ &= (\dot{x}(t) + R \dot{\theta}(t)) \vec{u}_x\end{aligned}$$

◇ Finalement la CNG s'écrit

$$\dot{x} + R \dot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{R}$$

◇ Il est parfois possible (car plus rapide) de donner tout de suite la condition de non glissement (CNG) mais sous deux conditions :

- faire **très** attention aux signes
- ne le faire que si le support est *plan et immobile*

◇ Si les deux conditions précédentes ne sont pas vérifiées, l'erreur sera très probable.

★ mise en équation

🌀 TPM

◇ Commençons par montrer que l'évolution du cylindre est conservative.

◇ Liste de toutes les actions :

- forces extérieures :
 - force à distance : le poids, conservatif, d'énergie potentielle mgh
 - force de contact : l'action exercée par le support $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$
- interaction intérieures : uniquement les interactions de cohésion du solide donc de travail nul

◇ Reste à *montrer* (même si nous le savons déjà) que le travail fourni par \vec{R} est nul.

◇ La puissance fournie par \vec{R} s'écrit

$$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}(I \in \text{cyl}/\mathcal{R})$$

◇ Or, justement, $\vec{v}(I \in \text{cyl}/\mathcal{R}) = \vec{0}$ du **double** fait qu'il n'y a pas de glissement et que le support est fixe.

◇ En conséquence de quoi la puissance fournie par \vec{R} est toujours nulle et donc le travail fourni aussi.

◇ Dans ces conditions, le TEM appliqué au cylindre entre la position initiale et la position tout en bas donne

$$\Delta E_m = W(\vec{f}_{\text{ext}}) + W(\vec{f}_{\text{int}}) = 0$$

🌀 E_c

◇ Le théorème de KOENIG appliqué au cylindre nous permet d'écrire

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m v_G^2 + E_c^*$$

◇ Et comme dans le référentiel barycentrique le cylindre est en rotation autour d'un axe fixe

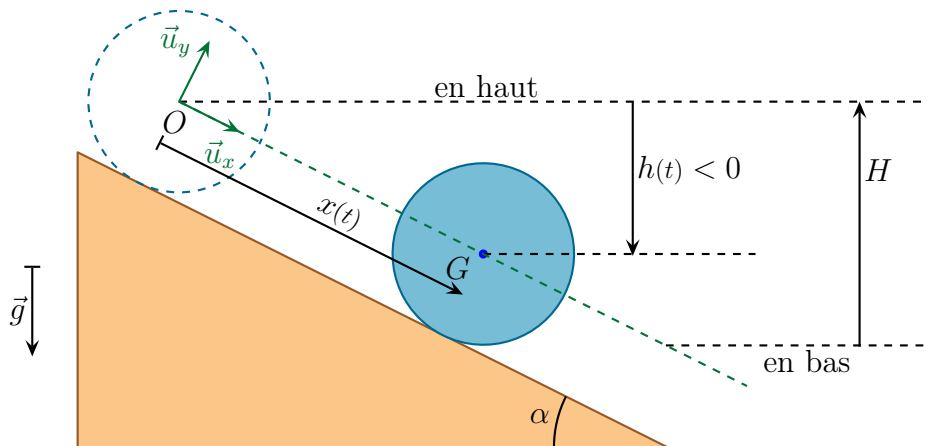
$$E_c^* = \frac{1}{2} J_{G\Delta} \Omega^2 \quad \rightsquigarrow \quad E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{G\Delta} \dot{\theta}^2(t)$$

◇ Cela donne, avec la relation de couplage (la CNG)

$$E_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} J_{G\Delta} \frac{\dot{x}^2(t)}{R^2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J_{G\Delta}}{R^2} \right) \dot{x}^2(t)$$

🌀 E_p

◇ Pour l'énergie potentielle de pesanteur, n'hésitons pas à refaire un petit schéma.



◇ Nous voyons alors clairement que la hauteur h est négative ce qui donne

$$E_p(\mathcal{S}) = m g h \quad \text{et} \quad h = -x \sin \alpha \quad \rightsquigarrow \quad E_p(\mathcal{S}) = -m g x(t) \sin \alpha$$

🌀 rassemblement

◇ En écrivant la conservation de l'énergie entre le point de départ ($x = 0$) et le point final ($x = -H/\sin \alpha$) nous arrivons à

$$0 + 0 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J_{G\Delta}}{R^2} \right) v_f^2 - m g H \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha}$$

◇ Ce qui donne

$$v_f = \sqrt{\frac{2 m g H}{m + \frac{J_{G\Delta}}{R^2}}}$$

🌀 interprétation

◇ Ici, comme dans le calcul précédent, nous pouvons constater la présence des deux masses :

→ la masse grave au numérateur, celle associée à g

→ la masse inertielle au dénominateur, celle associée à la grandeur typique de l'inertie $J_{G\Delta}$

◇ Remarquons aussi que ce résultat est totalement indépendant du coefficient de frottement !

◇ Cela peut paraître surprenant mais en fait cela ne l'est pas puisque le rôle des frottements se traduit par la CNG qui est une relation purement cinématique alors même que f est une grandeur dynamique.

◇ Nous pouvons réécrire le résultat sous la forme

$$v_f = \sqrt{\frac{2 g H}{1 + \frac{J_{G\Delta}}{m R^2}}} < \sqrt{2 g H}$$

◇ Autrement dit, ici, la vitesse de translation est inférieure à ce qu'elle était lorsqu'il n'y avait pas de frottement ou plutôt pas de roulement.

◇ Car ne nous y trompons pas, il y a bien simultanément de « la vitesse est moins grande qu'avant » et « ici contrairement à avant il y a des frottements » **mais** il ne faut surtout pas comprendre par là que les frottements ont dissipé l'énergie.

- ◇ Les frottements ont indubitablement bien ralenti le cylindre mais de manière parfaitement conservative : **toute** l'énergie potentielle s'est transformée en énergie cinétique.
- ◇ La grosse différence avec le cas précédent c'est que l'énergie cinétique est cette fois sous deux formes : une partie de translation et une partie de rotation. Comme il y en a autant à se partager mais qu'il faut cette fois partager, il est normal que l'aspect translatore soit diminué.
- ◇ Constatons aussi que le résultat fait intervenir $J_{G\Delta}$, grandeur qui dépend de la répartition de masse dans le cylindre.
- ◇ Il s'agit là d'un résultat fondamental car cela signifie que l'observation de l'évolution du cylindre nous permet de comprendre un peu mieux la manière dont est fabriqué le cylindre.
- ◇ De manière tout à fait analogue, l'observation précise des mouvements de la Lune permet de mieux comprendre sa structure interne.

★ évolution temporelle

- ◇ Pour avoir cette fois la durée, nous ne pouvons pas nous passer d'une équation locale au point de vue temporelle, *ie.* d'une équation différentielle.
- ◇ Pour cela utilisons le TPM avec les expressions de $E_c(\mathcal{S})$ et $E_p(\mathcal{S})$ que nous avons trouvées précédemment

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(m + \frac{J_{G\Delta}}{R^2} \right) \dot{x}^2(t) - m g x(t) \sin \alpha \right) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left(m + \frac{J_{G\Delta}}{R^2} \right) \dot{x}(t) \ddot{x}(t) - m g \dot{x}(t) \sin \alpha = 0$$

- ◇ En simplifiant par la solution inintéressante $\dot{x}(t)$ correspondant à l'équilibre, nous arrivons à

$$\ddot{x}(t) = \frac{m g \sin \alpha}{m + \frac{J_{G\Delta}}{R^2}} \stackrel{\text{not}}{=} g_{\text{eff}}$$

- ◇ Avec les conditions initiales, cela donne donc

$$\dot{x}(t) = g_{\text{eff}} t \quad \text{et} \quad x_d(t) = \frac{1}{2} g_{\text{eff}} t^2$$

- ◇ L'instant final t_f est tel que $x(t_{\text{eff}}) = H / \sin \alpha$ ce qui donne

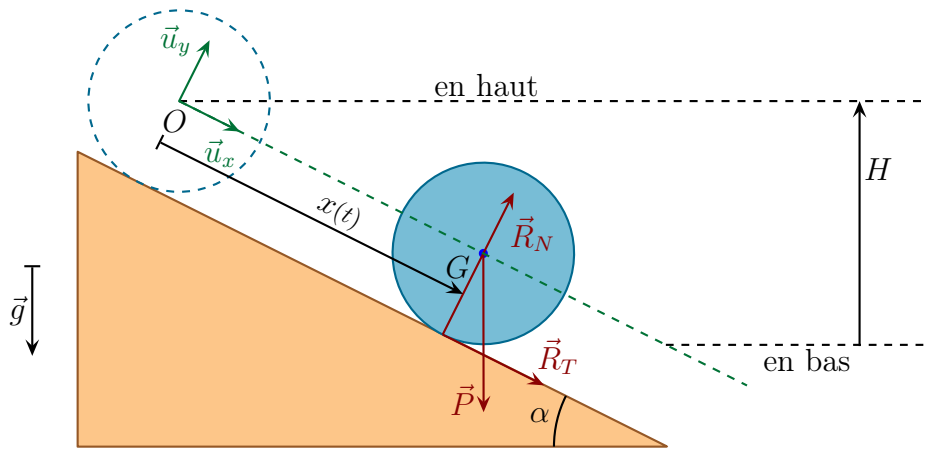
$$\frac{1}{2} g_{\text{eff}} t_f^2 = \frac{H}{\sin \alpha} \quad \rightsquigarrow \quad t_f = \sqrt{\frac{2 H}{g_{\text{eff}} \sin \alpha}}$$

★ vérification de l'hypothèse

- ◇ Vérifions enfin l'hypothèse de non glissement à savoir vérifions que

$$\|\vec{R}_T\| \leq f \|\vec{R}_N\|$$

- ◇ Comme d'habitude, pour trouver ces forces, nous allons passer par le TCI « à l'envers » appliqué au cylindre.
- ◇ Un petit schéma, pour les projections de forces.



◇ La liste des forces extérieures a été faite précédemment et nous avons ainsi

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{x}(t) = m g (-\cos \alpha \vec{u}_y + \sin \alpha \vec{u}_x) + R_N \vec{u}_y + R_T \vec{u}_x$$

◇ Ici nous avons algébrisé R_T .

◇ En projetant sur \vec{u}_y

$$R_N - m g \cos \alpha = 0 \quad \rightsquigarrow \quad R_N = m g \cos \alpha$$

◇ En projetant sur \vec{u}_x et en utilisant l'expression de l'accélération

$$R_T + m g \sin \alpha = \frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{J_{G\Delta}}{m R^2}}$$

◇ En réarrangeant et en simplifiant

$$\begin{aligned} R_T &= m g \sin \alpha \left(\frac{1}{1 + \frac{J_{G\Delta}}{m R^2}} - 1 \right) \\ &= m g \sin \alpha \times \frac{-\frac{J_{G\Delta}}{m R^2}}{1 + \frac{J_{G\Delta}}{m R^2}} \\ &= -\frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{J_{G\Delta}}{m R^2}} < 0 \end{aligned}$$

◇ Nous voyons alors que R_T est bien dirigé vers $-\vec{u}_x$ ce qui est doublement normal :

- du point de vue du TCI, comme nous savons que l'évolution est plus lente, il faut bien quelque chose qui « freine »
- du point de vue du TMCBS, comme le cylindre se met à tourner, il faut bien une force qui crée un couple dans le bon sens

◇ Enfin pour que l'hypothèse de non glissement soit vérifiée, il faut

$$\frac{m g \sin \alpha}{1 + \frac{m R^2}{J_{G\Delta}}} \leq f m g \cos \alpha \quad \rightsquigarrow \quad f \geq \frac{\tan \alpha}{1 + \frac{m R^2}{J_{G\Delta}}}$$

◇ Commentaires :

- pour que le cylindre ne glisse pas, il faut que f soit suffisamment grand (cf. sens de l'inégalité). Rien de plus normal
- la condition est indépendante de t donc soit il n'y aura **jamais** glissement, soit il y aura **toujours** glissement
- plus $J_{G\Delta}$ est grand, plus le cylindre est difficile à faire tourner et plus la valeur minimale de f augmente.

★ une autre façon de voir le roulement

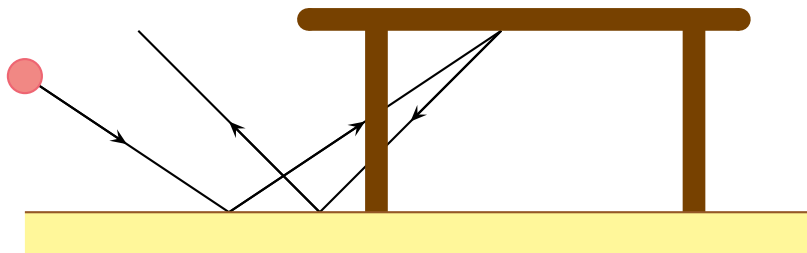
- ◇ Comme nous avons pu le voir, tout se passe comme s'il n'y avait pas de frottement puisqu'hormis pour la vérification de l'hypothèse de non glissement, tous les résultats sont indépendants de f .
- ◇ Comme l'expérience courante (du moins pour certains) le montre facilement, il est équivalent d'avoir un contact sans frottement mais avec avoir un contact sans glissement mais avec roulement.
- ◇ Typiquement, nous savons tous qu'il n'est pas facile de rester debout sur un sol verglacé (glissement sans frottement). De même que sans entraînement il n'est pas facile de rester debout sur un sol non verglacé mais avec des patins à roulettes aux pieds!
- ◇ La seule différence technique est qu'au lieu de considérer une masse m sans frottement, nous devons considérer une masse $m_{\text{eff}} = m + \frac{J_{G\Delta}}{R^2}$.
- ◇ Cela justifie *a posteriori* le fait que de nombreux exercices considèrent l'évolution sans frottement d'une bille alors même que l'expérience (flipper !) montre que toute bille *roule* alors même que nous savons qu'il n'est pas possible de rouler sans frottement.

III.6 – Effet back-spin

III.6.i – modélisation simple pour une situation fréquente et analyse

★ situations modélisées

- ◇ Nous allons modéliser un petit effet back-spin à savoir comment une rotation propre peut influencer le mouvement.
- ◇ Ce genre d'effet est en particulier très utilisé dans les jeux de balles mais uniquement lors du rebond.
- ◇ L'exemple extrême étant qu'il n'est pas possible de faire passer une balle rebondissant *sous* un obstacle telle une chaise en tapant dessous.

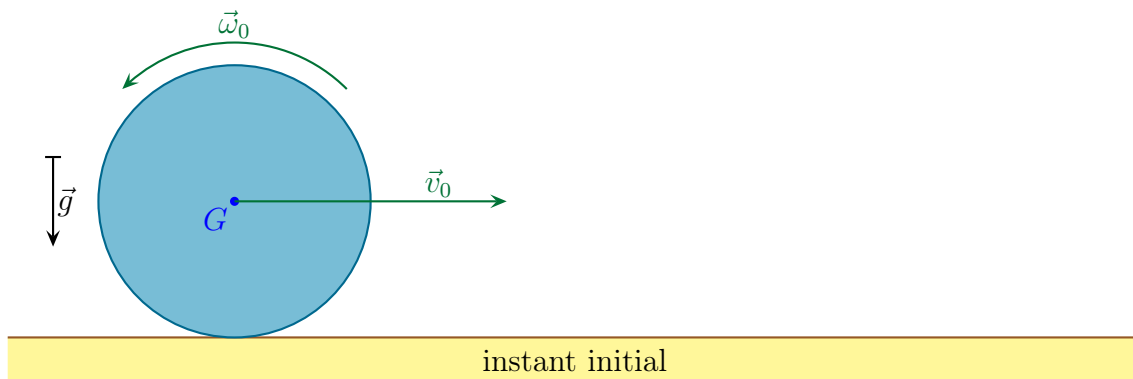


- ◇ Le modèle d'effet back-spin que nous allons utiliser peut se réaliser très simplement avec un effaceur : il suffit de le lancer en appuyant dessus de manière à lui donner un effet rétro.

- ◇ Après quelques essais, il n'est pas trop difficile de le lancer « droit » et de constater que l'effaceur revient, parfois, en arrière.
- ◇ Il est aussi très facile de faire cet effet avec une simple balle de ping-pong.

★ modèle

- ◇ Finalement nous allons étudier l'évolution d'un cylindre sur un support plan et horizontal.

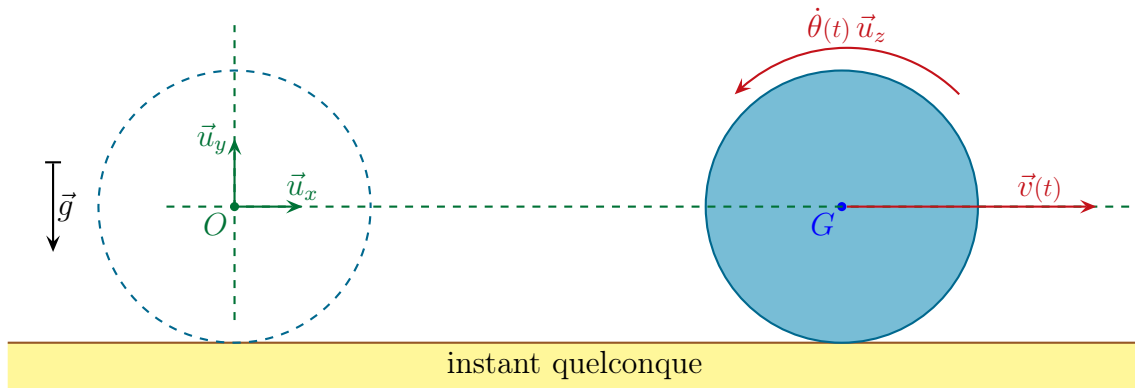


- ◇ Les conditions initiales sont telles que le cylindre avance globalement (son c.d.m. a une vitesse v_0) et tourne sur lui-même à la vitesse angulaire ω_0 .
- ◇ Nous allons juste chercher à savoir ce qui se passe en fonction du temps :
 - le cylindre va-t-il toujours continuer à avancer ? comment peut-il revenir en arrière ?
 - quel va être le rôle des frottements ? y aura-t-il toujours glissement ?

III.6.ii – approche quantitative

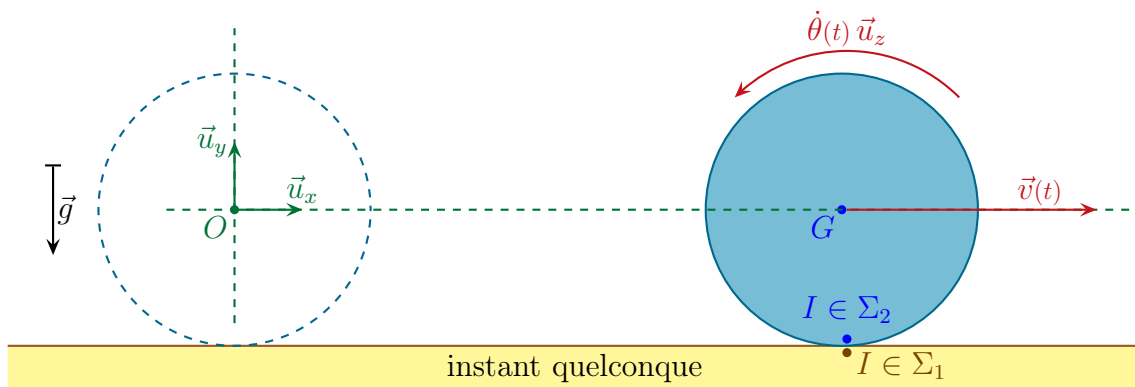
★ analyses

- ◇ Analyse physique :
 - en considérant que le cylindre est toujours au contact du support et qu'il roule « droit », l'évolution est à 2 degrés de description : un DD pour la translation (la position du c.d.m.) et un DD pour la rotation.
 - une fois lancé, le cylindre a une évolution libre (il n'y a pas de moteur) mais pas forcément conservative, du moins pas au début, à cause de la présence de frottements et de glissement en même temps.
 - grandeurs pertinentes : m et $J_{G\Delta}$ (inertie), R (géométrie), g , f (action), v_0 et ω_0 (conditions initiales). Ici bien que l'évolution soit horizontale, le poids g va jouer un rôle car nous savons que le frottement, *via* les lois de COULOMB couple les actions horizontales (ce qui nous intéresse) et verticales (le poids).
- ◇ Analyse technique :
 - choisissons des axes tels qu'au moins à l'instant initial, la vitesse et la rotation aient des projections positives. De plus choisissons le centre du repère de telle sorte que la position du c.d.m. soit nulle à l'instant initial.
 - du point de vue de l'approche, comme nous avons 2DD et que l'évolution n'est très certainement pas libre, ne pensons pas à l'énergie mais plutôt au couple TCI / TMCBS.



★ vitesse de glissement

◇ Commençons par écrire l'expression de la vitesse de glissement à un instant quelconque.



◇ Comme dans le cas du cylindre roulant sur une pente

$$\vec{v}_{\text{gliss}} = \vec{v}(I \in \text{cyl}/\mathcal{R}) - \underbrace{\vec{v}(I \in \text{sol}/\mathcal{R})}_{=\vec{0} \text{ (immobile)}}$$

◇ De plus le cylindre étant solide

$$\begin{aligned} \vec{v}(I \in \text{cyl}/\mathcal{R}) &= \vec{v}(G/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} \\ &= \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{\theta} \vec{u}_z \wedge (-R \vec{u}_y) \\ &= (\dot{x}(t) + R \dot{\theta}(t)) \vec{u}_x \end{aligned}$$

◇ Finalement

$$v_{\text{gliss}}(t) = \dot{x} + R \dot{\theta}(t)$$

◇ À l'instant initial, nous avons

$$\dot{x}(0) = v_0 > 0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0 > 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_{\text{gliss}}(0) = v_0 + R \omega_0 > 0$$

◇ Donc c'est officiel, le cylindre glisse à l'instant initial

◇ Maintenant, à moins d'avoir du temps à perdre, nous savons par quelle hypothèse commencer.

★ hypothèse : ça glisse

🕒 ce que nous savons

◇ Les lois de COULOMB nous permettent de dire que

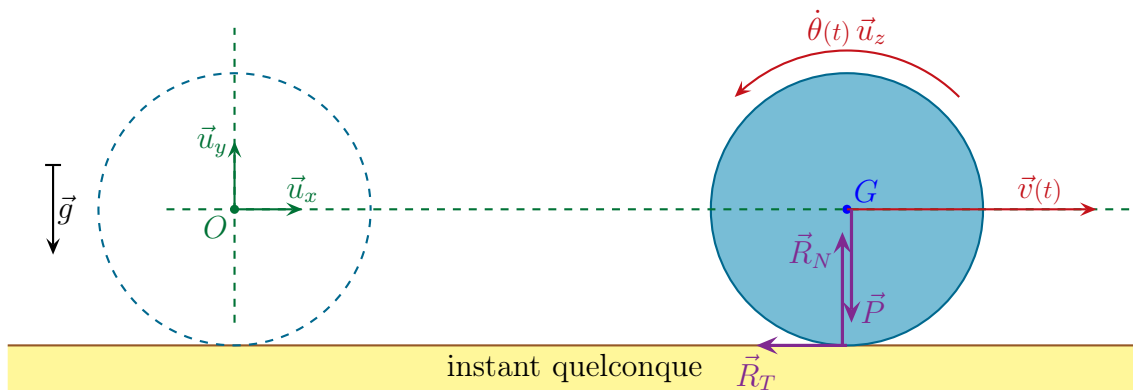
$$R_T = f R_N$$

◇ Ce n'est pas forcément grand chose, en particulier nous n'avons *pas* les expressions de R_T et R_N , mais il s'agit au moins d'une relation supplémentaire.

🕒 aspect translatore : TCI

◇ Les forces *extérieures* qui s'exercent sur le cylindre sont :

- force à distance : le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_y$
- force de contact :
 - la force exercée par le support $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N = -f R_N \vec{u}_x + R_N \vec{u}_y$ (nous connaissons déjà le sens de \vec{R}_T car nous savons que cette force est opposée à \vec{v}_{gliss})
 - les autres frottements (air) sont négligés



◇ Le TCI appliqué au cylindre donne donc

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

◇ Et comme le mouvement n'est porté que par \vec{u}_x (le cylindre ne décolle pas), les projections du TCI sur \vec{u}_y et \vec{u}_x donnent respectivement

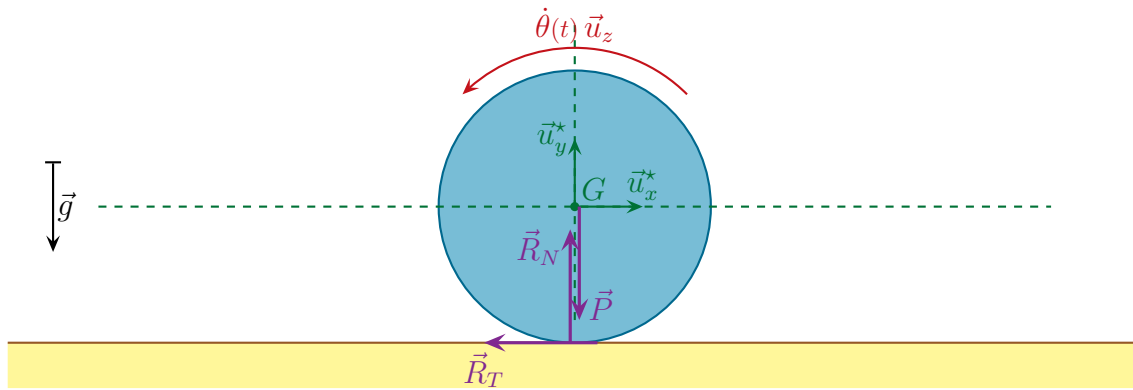
$$-m g + R_N = 0 \quad \text{et} \quad -f R_N = m \ddot{x}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{x}(t) = -f g$$

◇ Avec les conditions initiales, nous avons donc très vite

$$\dot{x}(t) = -f g t + v_0 \quad \text{et} \quad x(t) = -\frac{1}{2} f g t^2 + v_0 t$$

🕒 aspect rotatoire : TMCBS

◇ Tout d'abord replaçons-nous dans le référentiel barycentrique.



◇ Rappelons que, dans ce référentiel, le cylindre est globalement immobile et que c'est le support qui bouge « sous » lui.

◇ Le TMCBS s'écrit donc (cf. liste des forces extérieures plus haut)

$$\frac{d\sigma^*}{dt} = \mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{R}_N) + \mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{R}_T)$$

◇ Comme nous pouvons le voir, les bras de levier pour le poids et la réaction normale sont nuls donc

$$\mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{P}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{R}_N) = 0$$

◇ Pour la réaction tangentielle, le bras de levier vaut R et étant donné le sens de \vec{R}_T , son moment est négatif ce qui donne

$$\mathcal{M}_{G\Delta}(\vec{R}_T) = -f m g \times R$$

◇ Enfin, comme dans le référentiel barycentrique le cylindre est en rotation autour d'un axe fixe

$$\sigma^* = j_{G\Delta} \dot{\theta}(t)$$

◇ En rassemblant le tout cela donne :

$$J_{G\Delta} \ddot{\theta}_{det} = -f m g R \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{\theta}(t) = -\frac{m g R}{J_{G\Delta}} \quad \rightsquigarrow \quad \omega(t) = \dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{f m g R}{J_{G\Delta}} \times t$$

★ date de fin de glissement

◇ Les résultats précédents ne sont bien sûr valables que sous l'hypothèse de glissement, hypothèse qu'il faut désormais vérifier.

◇ Cherchons s'il existe un instant t_0 (positif!) tel que $v_{\text{gliss}}(t_0) = 0$.

$$\dot{x}(t_0) + R \dot{\theta}(t_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_0 - f g t_0 + R \left(\omega_0 - \frac{f m g R}{J_{G\Delta}} \times t_0 \right) = 0$$

◇ Cette équation admet une solution

$$t_0 = \frac{v_0 + R \omega_0}{f g \left(1 + \frac{m R^2}{J_{G\Delta}} \right)} > 0$$

◇ $t_0 > 0$ existe donc nous pouvons affirmer que l'arrêt du glissement est **obligatoire**.

◇ Constatons que conformément à l'intuition, plus les frottements sont importants (plus f est grand) plus les glissements s'arrêtent rapidement.

◇ Nous voyons aussi que g intervient, comme nous l'avions prévu.

★ et au delà ...

🕒 hypothèse

- ◇ Si à t_0 le glissement s'arrête, nous pouvons faire l'hypothèse de non glissement pour la suite.
- ◇ Nous avons alors $v_{\text{gliss}} = 0$ autrement dit nous n'avons plus qu'un seul DD mais nous n'avons plus aucune idée de la force R_T en jeu.

🕒 trouver R_T

- ◇ Nous savons que (CNG) $\dot{x}(t) + R\dot{\theta}(t) = 0$.
- ◇ La projection du TCI sur \vec{u}_x donne $-R_T = m\ddot{x}(t)$.
- ◇ Le TMCBS donne, lui, $-R_T \times R = J_{G\Delta}\ddot{\theta}(t)$.
- ◇ En dérivant la CNG et en remplaçant les dérivées secondes obtenue nous arrivons à

$$\ddot{x}(t) + R\ddot{\theta}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\frac{R_T}{m} - \frac{R^2 R_T}{J_{G\Delta}} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -R_T \left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{J_{G\Delta}} \right) = 0$$

- ◇ Comme le terme $\frac{1}{m} + \frac{R^2}{J_{G\Delta}}$ est clairement non nul, cela implique

$$R_T = 0$$

- ◇ D'un autre côté nous avons immédiatement $R_T \leq f R_N$ et donc l'hypothèse de non glissement sera à jamais vérifiée.

🕒 évolution temporelle

- ◇ Avec $R_T = 0$, l'accélération est nulle et donc la vitesse constante.
- ◇ Calculons $\dot{x}(t_0)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t > t_0) &= \dot{x}(t_0) = v_0 - f g t_0 \\ &= v_0 - f g \times \frac{v_0 + R\omega_0}{f g \left(1 + \frac{m R^2}{J_{G\Delta}} \right)} \\ &= \frac{v_0 \times \frac{m R^2}{J_{G\Delta}} - R\omega_0}{1 + \frac{m R^2}{J_{G\Delta}}} > 0 \end{aligned}$$

- ◇ Comme nous pouvons le voir cette vitesse finale, celle à laquelle ne pourra pas manquer d'atteindre le cylindre, peut être positive ou négative suivant les conditions initiales.
- ◇ D'ailleurs, conformément à l'intuition, plus ω_0 est grand, plus il y a de chance que la vitesse finale soit négative.
- ◇ Constatons aussi que la vitesse finale, contrairement à la durée de la phase de glissement, est indépendante de la force de frottement.
- ◇ Quand il y a un rebond (balle de tennis par exemple), la durée du rebond peut être un facteur limitant.

Mécanique du solide

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 1^{re} année :
 - III.B.5. Système formé de deux points matériels
- ◇ Programme de 2^e année :
 - I.G. Mécanique du solide

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - centre de masse / d'inertie / de gravité
 - référentiel barycentrique
 - forces extérieures, interactions intérieures
 - système isolé / pseudo-isolé
 - particule fictive, masse réduite
 - moment d'inertie
 - axe, couple
 - pendule grave
 - vitesse de glissement d'un solide par rapport à un autre
 - roulement sans glissement

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 - moment d'inertie (kg.m^2)

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - quantité de mouvement totale d'un système de points, moment cinétique total d'un système de points, énergie cinétique totale d'un système de points
 - théorèmes de KOENIG
 - théorème du centre d'inertie
 - théorèmes du moment cinétique pour les systèmes de points
 - théorèmes énergétiques pour les systèmes de points
 - expression des travaux des interactions intérieures dans les cas particuliers
 - énergie potentielle contenue dans un ressort
 - moment cinétique d'un solide, énergie cinétique d'un solide
 - savoir exprimer les actions d'axe
 - puissance et énergie fournies par un couple
 - savoir exprimer la vitesse d'un point quelconque d'un solide
 - savoir exprimer la force d'interaction entre deux solides
 - théorème du moment cinétique barycentrique

★ la phénoménologie

- ◇ Savoir :
 - comparer deux moments d'inertie
 - interpréter lorsque l'énergie reçue par des forces de frottement est positive
 - réfréner l'utilisation *a priori* d'intuition sur les forces

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

- ◇ Savoir :
 - compter le nombre de degré de description d'une situation avec des solides en rotation
 - trouver les contraintes du mouvement (fils inextensible, non glissement, ...)
 - trouver et prouver qu'une évolution est conservative

★ Analyse technique

- ◇ Savoir :
 - reconnaître les situations où la méthode énergétique est la meilleure
 - quand l'approche TCI + TMC est nécessaire

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

- ◇ Connaître parfaitement :
 - le produit vectoriel
 - la projection de vecteurs

★ petits gestes

- ◇ Savoir :
 - savoir placer un centre d'inertie
 - savoir trouver sans calcul la direction et le sens d'une vitesse de glissement d'un solide par rapport à un autre

★ exercices classiques

- ◇ Savoir :
 - retrouver l'équation différentielle régissant l'évolution du pendule grave
 - retrouver l'évolution temporelle d'un moteur soumis à un couple constant
 - réétudier l'effet back-spin