

Mécanique

Chapitre 3

Premières ondes

Premières ondes

Cette année nous allons étudier un thème transversal : les ondes. Ces ondes apparaissent en effet dans quasiment tous les domaines de la physique :

- en mécanique avec les ondes le long des cordes ;
- en mécanique des fluides avec les ondes sonores ;
- en optique où le caractère ondulatoire de la lumière engendrera interférence et diffraction ;
- en thermodynamique où nous effleurerons les ondes thermiques ;
- enfin en électromagnétisme avec tout ce qui est « radiation » ;

C'est la raison pour laquelle ce chapitre est important puisqu'il fixe les bases de la phénoménologie des ondes et donc de la propagation. Pour les mêmes raisons, il est assez lourd et est divisé en cinq parties :

- la première est destinée à arriver à l'équation régissant les ondes tout en faisant comprendre les raisons profondes qui sont à l'origine de la propagation ;
- dans la 2^e nous verrons quelles sont les solutions de l'équation d'onde et leurs interprétations ;
- ensuite dans la 3^e nous étudierons comment tenir compte des conditions aux limites et verrons ainsi comment résoudre un problème propagatif ;
- après, dans la 4^e partie, nous nous intéresserons à l'aspect énergétique des ondes, aspect qui recèle quelques aspects pas forcément intuitifs ;
- enfin dans la dernière partie nous verrons ce qui se passe dans la propagation n'est pas parfaite mais qu'il existe des phénomènes dits de dispersion ou d'atténuation.

Table des matières

Biographies succinctes	8
I Vers l'équation d'onde	9
I-1 Oscillateur mécanique à un degré de description	9
I-1 <i>·i</i> régime libre	9
modèle	9
équation différentielle	9
solution dans le plan de phase	10
I-1 <i>·ii</i> régime forcé	11
modèle	11
équation différentielle	11
solution	12
passage en complexe	12
I-1 <i>·iii</i> résonance en élongation	13
résultats	13
graphe	14
I-1 <i>·iv</i> résonance en vitesse	14
résultats	14
graphe	15
I-1 <i>·v</i> aspects énergétique	15
énergie cinétique	15
énergie potentielle	16
lien avec l'énergie mécanique	16
théorème de la puissance mécanique	17
I-1 <i>·vi</i> résonance en puissance fournie	17
puissance moyenne dissipée	17
qualité du résonateur	18
I-2 Couplage de deux oscillateurs	18
I-2 <i>·i</i> situation	18
présentation	18
mise en équation	18
I-2 <i>·ii</i> découplage : vers les modes propres	20
de nouvelles inconnues	20
de nouvelles équations	20
interprétation	20
retour sur les oscillateurs couplés	21
I-2 <i>·iii</i> couplage faible	22
expression des pulsations	22
solution	22
un phénomène qui reviendra : les battements	23
I-2 <i>·iv</i> oscillations forcées	24
modification du modèle	24
solutions en complexe	24
résonance et antirésonance	25
couplage faible	25
pour M_2	26
avec frottement	26
I-3 Chaîne d'oscillateurs	27

I.3.i	modèle	27
I.3.ii	équation de couplage	27
I.3.iii	approximation des milieux continus	28
	idée	28
	transformation de l'équation de couplage	29
	équation de D'ALEMBERT	29
I.4	Ondes longitudinales dans un solide	30
I.4.i	effort interne à un solide	30
I.4.ii	son dans un solide	30
	modélisation	30
	force à l'échelle mésoscopique	30
	équation de propagation	31
I.4.iii	expression phénoménologique du module d'YOUNG	32
	Approche microscopique	32
	célérité des ondes	33
II	Solutions de l'équation de D'ALEMBERT	34
II.1	Équation de propagation le long d'une corde	34
II.1.i	pas n'importe quelle corde	34
II.1.ii	mise en équation	34
	TCI	34
	projection sur \vec{u}_x	35
	projection sur \vec{u}_y	35
	réécriture du terme d'accélération	35
	couplage géométrique	36
	rassemblement et fin	36
II.2	Solutions en Ondes Planes Progressives (OPP)	37
II.2.i	forme des solutions	37
	expression	37
	vérification	37
II.2.ii	image des solutions	37
	une onde	37
	interprétation de $f(x - ct)$	38
	interprétation de $g(x + ct)$	39
	résumé	39
	philosophie de l'onde	40
II.2.iii	quelques applications numériques	40
	propagation dans le fer	40
	corde de guitare	40
II.3	Solutions en Ondes Planes Progressives Monochromatiques (OPPM)	41
II.3.i	c'est un cas particulier	41
	forme	41
	nouveau vocabulaire	42
	relation de dispersion	42
II.3.ii	intérêt de l'OPPM	43
	c'est un modèle	43
	. . . et un intermédiaire de calcul	43
II.4	Ondes Stationnaires (OS)	44
II.4.i	c'est encore un cas particulier	44
	définition	44

	OS pour une équation de D'ALEMBERT	44
II.4	<i>ii</i> visualisation	45
II.5	Changement de description	46
	II.5. <i>i</i> à partir d'une OS	46
	vers OPPM	46
	vers OPP	46
	II.5. <i>ii</i> à partir d'une OPPM	47
	vers OS	47
	vers OPP	47
	II.5. <i>iii</i> à partir d'une OPP	47
	II.5. <i>iv</i> superpositions	48
II.6	L'équation de D'ALEMBERT n'est qu'une équation différentielle	48
III	Tenir compte des conditions aux limites	49
III.1	Équation de propagation dans un câble coaxial	49
	III.1. <i>i</i> présentation	49
	la fin de l'ARQS	49
	le modèle mésoscopique ou le retour de la l'ARQS	49
	III.1. <i>ii</i> équation de propagation	50
	le « circuit »	50
	loi des mailles	50
	loi des nœuds	51
	équations de D'ALEMBERT	51
III.2	Grandeurs duales	52
	III.2. <i>i</i> équations couplées	52
	pour le câble	52
	pour la corde	52
	de manière générale	53
	III.2. <i>ii</i> impédance d'un milieu propagatif	53
	pour le câble coaxial	53
	pour la corde	55
III.3	Réflexion et transmission	56
	III.3. <i>i</i> à l'extrémité d'un milieu propagatif	56
	câble coaxial	56
	application aux TP	58
	traduire les conditions aux limites pour une corde	59
	cas à retenir parmi tous	59
	III.3. <i>ii</i> jonction entre deux milieux propagatifs	60
	situation	60
	une autre forme de solution	61
	conditions aux limites	61
	coefficients de réflexion et transmission	63
III.4	Vibrations d'une corde	64
	III.4. <i>i</i> présentation de la corde de MELDE	64
	dispositif	64
	analyse	64
	III.4. <i>ii</i> modes propres	65
	solution <i>a priori</i>	65
	utilisation des conditions aux limites	65
	résultat à connaître	65

III·4·iii	oscillations forcées	66
	dispositif en TP	67
	solution <i>a priori</i>	67
	conditions aux limites	67
	résonance	68
III·4·iv	solution en régime libre	68
	exemple de la corde pincée	68
	idée de la méthode	69
IV	Aspect énergétique	70
IV·1	Bilan énergétique pour un câble coaxial	70
IV·1·i	densité linéique d'énergie	70
	définition	70
	pour le câble	70
IV·1·ii	conservation de l'énergie	71
	loi générale à de nombreux phénomènes	71
	démonstration	71
IV·1·iii	flux énergétique	72
	expression pour le câble coaxial	72
	OPP vers les x croissants	73
	OPP vers les x décroissants	74
	OPP quelconque	74
IV·2	Bilan énergétique pour une corde	75
IV·2·i	de nombreux résultats immédiats	75
	traduction locale de la conservation de l'énergie	75
	puissance transmise	75
	densité linéique d'énergie cinétique	76
IV·2·ii	... mais pas pour l'énergie potentielle linéique	76
	expression	76
	démonstration	76
IV·2·iii	bilan lors d'une réflexion – transmission	78
	situation, rappels	78
	coefficient de transmission – réflexion en vitesse	79
	coefficients de transmission – réflexion en tension	79
	coefficients de transmission – réflexion en puissance	80
V	Dispersion, atténuation	81
V·1	Câble coaxial résistif	81
V·1·i	nouveau modèle mésoscopique	81
V·1·ii	équations de couplage	81
	loi des mailles	81
	loi des nœuds	82
V·1·iii	équation de propagation	82
	équation en $u(x,t)$	82
	équation en $i(x,t)$	83
	interprétation	83
V·2	Solutions de l'équation de « propagation »	84
V·2·i	passage en complexe	84
	méthode	84
	exemple pour $u(x,t)$	84

	bilan	85
V.2.ii	relation de dispersion	85
V.2.iii	le vecteur d'onde complexe traduit l'atténuation et la dispersion	85
	solution en notation réelle	85
	dispersion et atténuation	86
	milieu passif ou actif	87
V.2.iv	câble peu résistif	87
	équation de dispersion – simplification	87
	interprétation	88
V.2.v	câble coaxial bien choisi	88
V.3	Paquet d'ondes	89
V.3.i	superposition discrète d'OPPM	89
	2 OPPM	89
	plein d'OPPM	91
V.3.ii	superposition continue d'OPPM	91
	onde carrée	91
	onde gaussienne	92
V.3.iii	évolution temporelle	93
	observation	93
	vitesse de groupe	94
	Fiche de révision	96

Biographies succinctes

TABLE DES MATIÈRES Biographies succinctes

Jean le Rond D'ALEMBERT

(1717 Paris – 1783 Paris)



Enfant illégitime, Jean le Rond est abandonné le lendemain de sa naissance sur les marches d'une chapelle attenante à Notre Dame de Paris, celle qui lui donna son nom, la chapelle Saint Jean le Rond. Bien qu'élevé en nourrice, son père veillera de loin, à ce qu'il puisse accéder à des études. Il obtient le baccalauréat en art mais abandonne ensuite ses études de médecine. Ses travaux le font entrer dès 24 ans dans l'académie des sciences en tant qu'adjoint de la section Astronomie. En 1743 il publie son *Traité de dynamique*. Par la suite il se consacrera essentiellement aux lettres et en particulier à la rédaction de l'encyclopédie avec DIDEROT avec qui il se fâche en 1757. Jusqu'à sa mort il continuera ses travaux scientifiques et les publiera sous forme si peu conventionnelle qu'ils en seront difficiles à lire.

Thomas YOUNG

(1773 Milverton (Somerset) – 1829 Londres)



Véritable esprit universel, Thomas YOUNG parle une dizaine de langues contemporaines, en traduit 5 ou 6 anciennes dont les hiéroglyphes égyptiens et se passionne pour la médecine, la botanique, la philosophie, ... Même s'il exerce la médecine, il enseigne la physique et travaille essentiellement sur l'optique. Comme il propose en 1807 une expérience (les trous d'YOUNG) pour tester la théorie ondulatoire de la lumière, il est critiqué par la plupart de ses contemporains pour qui la théorie valide est la théorie corpusculaire, celle d'Isaac NEWTON.



Franz MELDE

(1832 – 1901)

Physicien allemand, Franz a été professeur à l'université de Marburg. Il a travaillé notamment sur la météorologie, la mécanique des fluides et l'acoustique. Musicien lui-même il s'est intéressé aux figures de CHLADNI. Il est surtout connu pour l'expérience qui porte son nom et qui visait à montrer l'existence d'ondes stationnaires.

Hermann Amandus SCHWARZ

(1843 Hermsdorf – 1921 Berlin)



Alors qu'il poursuit des études de chimie Hermann se réoriente vers les mathématiques suite aux arguments persuasifs de son professeurs, WEIERSTRASS. Il devient professeur d'université successivement à Halle en 1865, à Zurich en 1867 puis à Göttingen à partir de 1875. Il travaille sur la théorie des fonctions, la géométrie différentielles, le calcul des variations. En 1892 il devient professeur à l'université de Berlin et en même temps membre de l'académie des sciences de Berlin. ZERMELO fut l'un de ses étudiants.

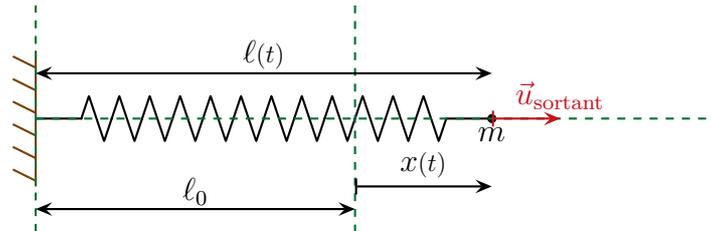
I – Vers l'équation d'onde

I.1 – Oscillateur mécanique à un degré de description

I.1.i – régime libre

★ modèle

◇ Considérons un oscillateur horizontal, sans frottement, tout ce qu'il y a de plus simple.



★ équation différentielle

◇ Inutile de nous apesantir sur l'analyse physique ici ; choisissons simplement un repère tel que la position d'équilibre soit $x = 0$.

◇ Bien qu'ici une approche énergétique serait évidemment plus efficace, nous allons malgré tout procéder à une approche en terme de forces de manière à être cohérent avec les situations qui vont suivre et pour lesquelles nous utiliserons une telle approche.

◇ La liste des forces est immédiate :

→ force à distance : le poids $\vec{P} = m \vec{g} = -m g \vec{u}_z$;

→ force de contact :

→ la réaction du support : $\vec{R} = \vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$ (pas de frottement solide) ;

→ la tension exercée par le ressort : $\vec{T} = -k (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort}}$;

→ les frottements exercés par l'air : $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x}(t) \vec{u}_x$.

◇ La longueur du ressort s'écrit

$$\ell(t) = \ell_0 + x(t) \quad \rightsquigarrow \quad \ell(t) - \ell_0 = x(t)$$

◇ Le PFD en projection sur \vec{u}_x donne

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{x}(t) = 0 + 0 - k x(t) - \lambda \dot{x}(t)$$

◇ Nous arrivons ainsi à

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

◇ Et en identifiant avec l'écriture canonique, cela donne

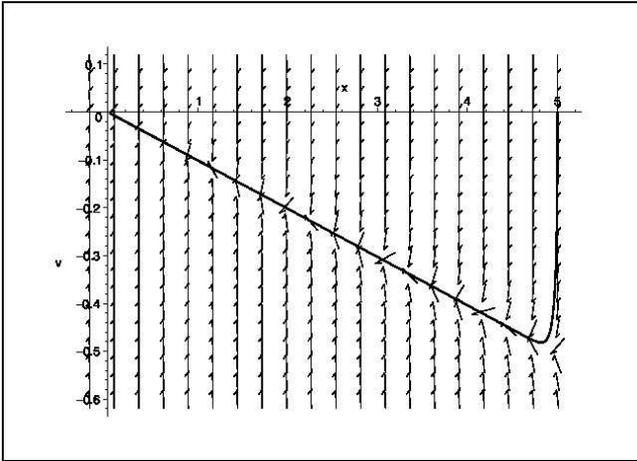
$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{k m}}{\lambda}$$

◇ Sans que cette dernière équation différentielle soit *stricto sensu* à connaître par cœur, il convient de savoir la retrouver très très vite.

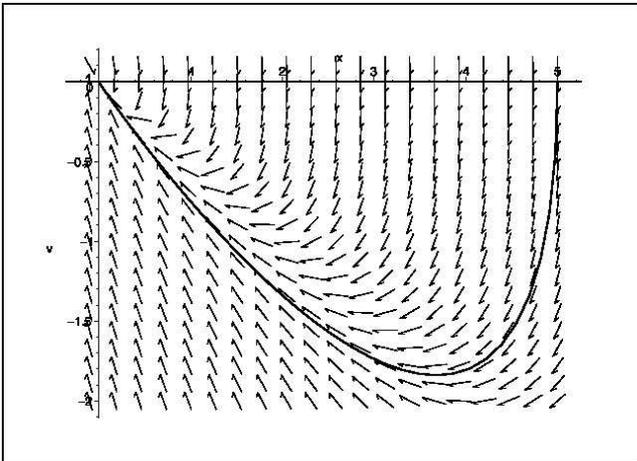
★ solution dans le plan de phase

◇ Pour mémoire, observons et interprétons les trajectoires obtenues dans le plan de phase.

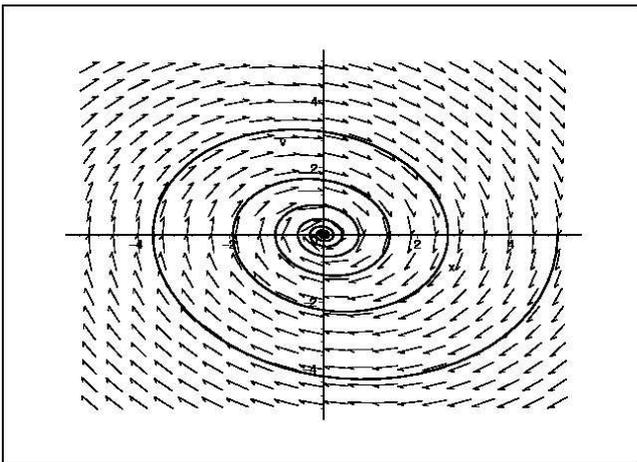
Graphique 1



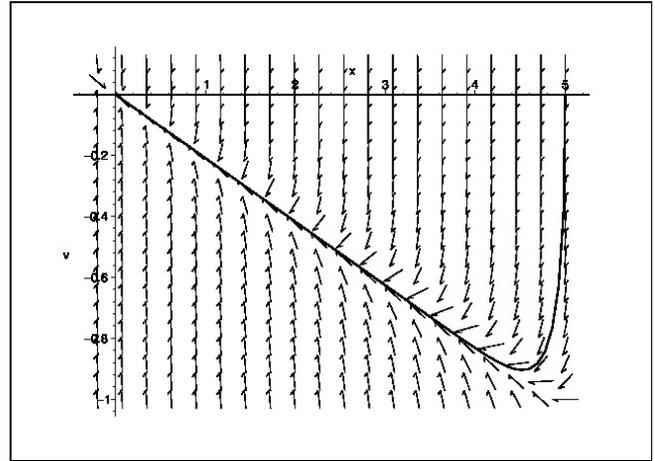
Graphique 3



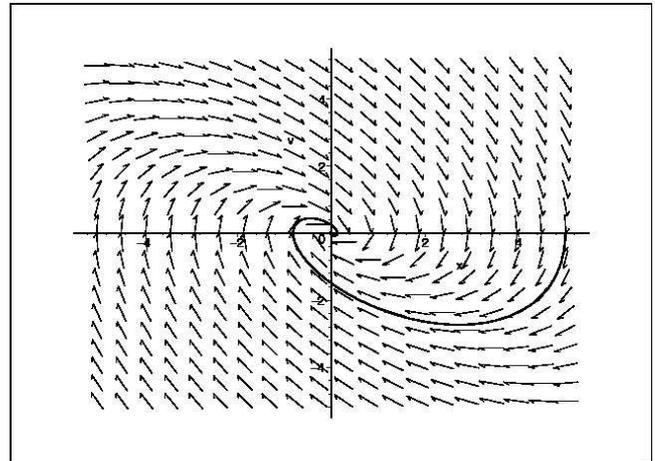
Graphique 5



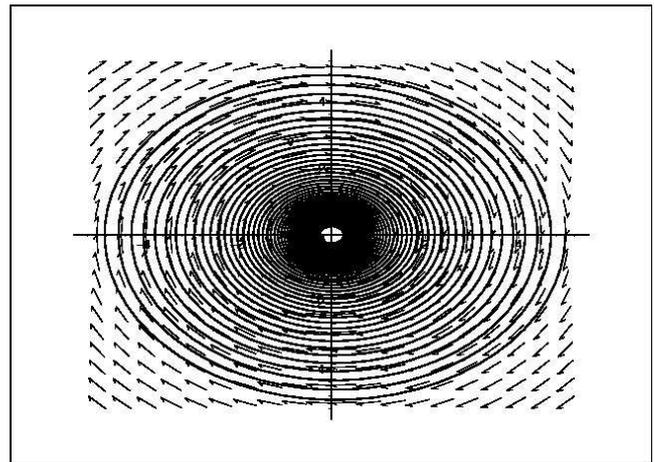
Graphique 2



Graphique 4

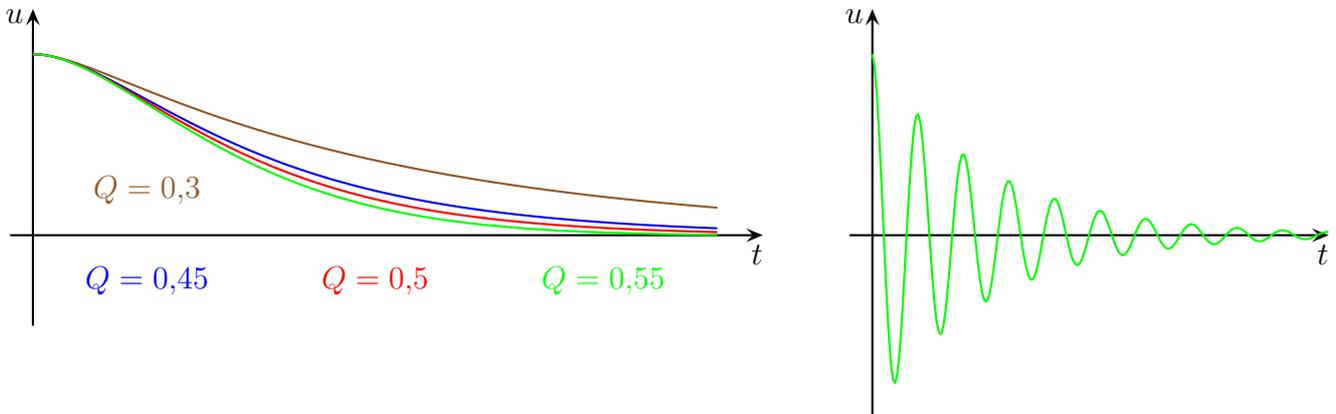


Graphique 6



- ◇ Dans tous les cas nous voyons que l'évolution finit au centre : non seulement il s'agit donc là d'un point d'équilibre stable mais en plus cela prouve que le dispositif est dissipatif.
- ◇ Nous constatons de plus que les graphiques 1 à 3 correspondent à des évolutions sans oscillations puisque $x(t)$ ne devient jamais négatif : il ne peut s'agir que d'évolutions apériodique ou critique.
- ◇ En comparant les ordonnées des évolutions 1 à 3 nous voyons que les vitesses ne sont pas les mêmes : l'évolution 1 est plus lente que la 2 elle même plus lente que la 3. Le facteur de qualité est donc croissant.
- ◇ Les graphiques 4 à 6 présentent des oscillations : ce sont des régimes pseudo-périodiques.

- ◇ Plus le nombre d'oscillation est grand, plus la trajectoire dans le plan de phase fait de tours autour de la position d'équilibre : le graphique 6 a donc le facteur de qualité le plus grand.
- ◇ Rappelons que, temporellement, les régimes apériodiques et pseudopériodiques ressemblent à



- ◇ Le régime critique n'est intéressant qu'au point de vue de la résolution. Physiquement parlant aucun régime n'est critique.
- ◇ Rappelons néanmoins deux aspects qualitatifs importants

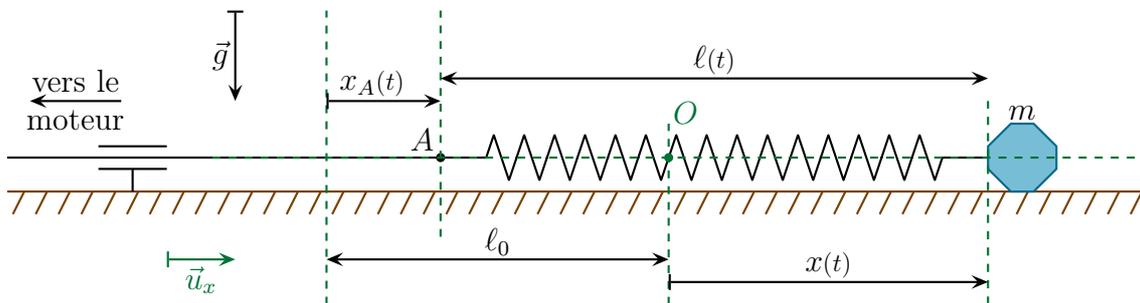
Pour un régime apériodique avec $Q \ll 1$, le régime permanent est atteint au bout de la durée $\frac{T_0}{Q}$ où T_0 est la période propre.

Pour un régime pseudopériodique avec $Q \gg 1$, le régime permanent est atteint au bout de la durée $2Q T_0$ où T_0 est la période propre.

I.1.ii – régime forcé

★ modèle

- ◇ Reprenons le même dispositif mais cette fois de telle sorte que l'autre extrémité du ressort soit mise en mouvement à l'aide d'un moteur non représenté.



★ équation différentielle

- ◇ Cette fois l'approche en terme de forces va de soi puisque l'évolution est forcée.
- ◇ La liste des forces reste strictement la même que dans le cas précédent ! La seule chose qui change c'est l'expression de l'allongement du ressort.
- ◇ Dans le cas présent

$$\ell(t) = \ell_0 + x(t) - x_A(t) \quad \rightsquigarrow \quad \ell(t) - \ell_0 = x(t) - x_A(t) \quad \text{avec} \quad x_A(t) = a \cos(\omega t)$$

◇ Dès lors, la projection du PFD sur \vec{u}_x donne cette fois

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{x}(t) = 0 + 0 - k(x(t) - a \cos(\omega t)) - \lambda \dot{x}(t)$$

◇ En réarrangeant les termes nous arrivons à

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt}(t) + \frac{k}{m} x(t) = \frac{ak}{m} \cos(\omega t)$$

◇ Et en identifiant avec l'écriture canonique, cela donne

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 a \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$$

★ solution

◇ Comme il s'agit d'une équation différentielle *linéaire* nous pouvons écrire la solution générale sous la forme

$$x(t) = x_{\text{libre}}(t) + x_{\text{forcé}}(t) \quad \text{où} :$$

- $x_{\text{libre}}(t)$ est une solution qui tend vers 0 en $t \rightarrow \infty$ sachant qu'humainement parlant c'est très court en électrocinétique mais que cela peut être très long pour un système mécanique ;
- $x_{\text{forcé}}(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ où ω est la **même** que celui de l'excitation : c'est une des propriétés fondamentales des milieux linéaires.

★ passage en complexe

🕒 principe

- ◇ Tout d'abord nous allons chercher uniquement la partie forcée de la solution que nous noterons $x(t)$ et non $x_{\text{forcé}}(t)$.
- ◇ Ce choix de notation permet d'alléger considérablement l'écriture mais a l'inconvénient de faire oublier la partie transitoire de la solution ce qui, dans le cas des oscillations mécaniques, peut être très préjudiciable.
- ◇ Nous allons ainsi chercher $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_m e^{j\omega t}$ de telle sorte que

$$x_f(t) \stackrel{\text{not}}{=} x(t) = \Re(\underline{x}(t))$$

◇ Pour « passer » une équation (linéaire !) en complexe, il suffit de

$$x(t) \longrightarrow \underline{x}(t) \quad \text{et} \quad \cos() \longrightarrow e^{j0}$$

◇ Attention

$$\sin() \longrightarrow \text{rien} \quad \text{mais} \quad \sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2) \longrightarrow e^{j(\alpha - \pi/2)} = \frac{e^{j\alpha}}{j}$$

🕒 élongation

✧ Ici l'équation différentielle (prise sous forme canonique) se transforme ici en

$$\ddot{\underline{x}}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = a \omega_0^2 e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad -\omega^2 \underline{x}(t) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x}(t) = a \omega_0^2 e^{j\omega t}$$

✧ En factorisant par $\underline{x}(t) = \underline{X}_m e^{j\omega t}$

$$\left(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \underline{X}_m e^{j\omega t} = a \omega_0^2 e^{j\omega t}$$

✧ Finalement

$$\underline{X}_m = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{Q}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{X}_m = \frac{a}{1 - u^2 + \frac{j u}{Q}} \quad \text{avec} \quad u \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$$

La grandeur $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ est appelée *pulsation réduite*.

✧ Ici nous pouvons remarquer que la réponse en élongation est une réponse de type « filtre passe-bas ».

🕒 vitesse

✧ En réel, la vitesse et l'élongation sont reliés par $v(t) = \dot{x}(t)$ ce qui implique qu'en complexe nous avons

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{x}}(t) = j\omega \underline{x}(t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V}_m = \frac{a j\omega}{1 - u^2 + \frac{j u}{Q}} \quad \text{avec} \quad u \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0}$$

✧ Et avec la pulsation réduite

$$\underline{V}_m = \frac{V_0 j u}{1 - u^2 + \frac{j u}{Q}} \quad \text{avec} \quad u \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{où} \quad V_0 \stackrel{\text{not}}{=} a \omega_0$$

✧ En divisant par $j u$ nous pouvons réécrire l'expression de \underline{V}_m sous la forme

$$\underline{V}_m = \frac{V_0}{\frac{1}{j u} - \frac{1}{j} + \frac{1}{Q}} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{V}_m = \frac{Q V_0}{1 + j Q \left(u - \frac{1}{u} \right)}$$

✧ Il s'agit là d'une réponse de type « passe-bande »

I.1.iii – résonance en élongation

★ résultats

✧ Notons $X_m = |\underline{X}_m|$ l'amplitude réelle des oscillations.

✧ Nous avons alors

$$X_m = \frac{a}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

◇ Rappelons des résultats obtenus en 1^{re} année

Dans le cas de l'amplitude de l'élongation en régime sinusoïdal forcé :

→ si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ il n'y a **pas** de résonance ;

→ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il a résonance en $u_r \neq 1$ et avec $X_{m,\max} \neq Q a$.

◇ Les expressions suivantes ne sont pas à mémoriser :

$$u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{et} \quad X_{m,\max} = \frac{Q a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Si $Q \gg 1$, il y a résonance de l'amplitude de l'élongation avec

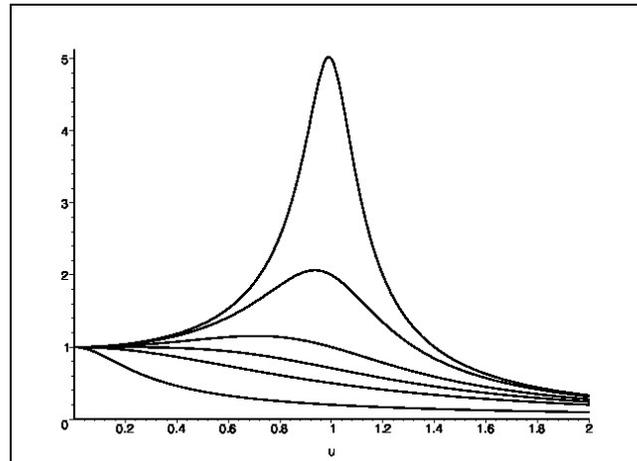
$$u_r = 1 \quad \text{et} \quad X_{m,\max} = Q a$$

En pratique $Q \gg 1$ correspond à $Q > 5$.

★ graphe

◇ Quelques courbes $X_m(u)$ avec Q prenant les valeurs $0,2 \ll 1$; $0,5$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1 ; 2 et $5 \gg 1$.

Graphique 7



◇ Nous pouvons remarquer que quelle que soit la valeur du facteur de qualité, dès $x = 2$ les courbes se ressemblent beaucoup et l'échelle n'est **pas** logarithmique.

◇ Cela signifie que le comportement en RSF de ces oscillateur diffère essentiellement autour de la pulsation propre.

I.1.iv – résonance en vitesse

★ résultats

◇ De même nous avons

$$V_m = |\underline{V}_m| = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

◇ Résultats de 1^{re} année

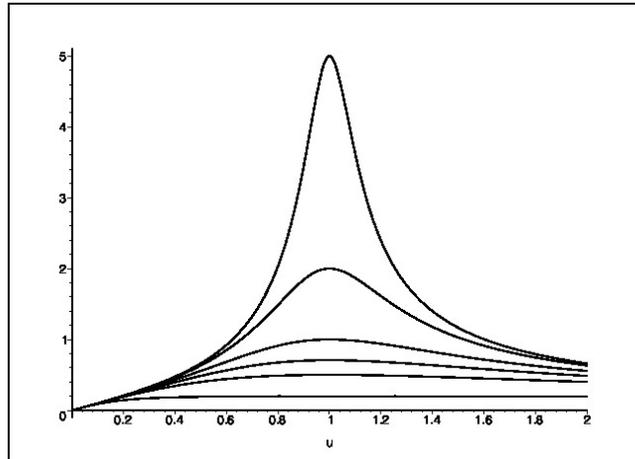
Dans le cas de l'amplitude de la vitesse en régime sinusoïdal forcé :

- il y a toujours résonance;
- la résonance est toujours en $u_r = 1$;
- l'amplitude maximale vaut (ici) $Q V_0$.

★ graphe

◇ Quelques courbes $X_m(u)$ avec Q prenant les valeurs $0,2 \ll 1$; $0,5$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1 ; 2 et $5 \gg 1$.

Graphique 8



◇ Même si cela ne se voit pas pour la courbe associée à $Q = 0,2$, le maximum est en $u = 1$.

I.1.v – aspects énergétique

◇ Regardons d'un peu plus près les aspects énergétiques dans l'oscillateur.

★ énergie cinétique

◇ L'énergie cinétique s'écrit naturellement

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

◇ Là nous ne pouvons pas utiliser la notation complexe car l'énergie cinétique est une grandeur quadratique.

◇ Nous allons simplement chercher sa valeur moyenne en utilisant une technique vue en électrocinétique

$$P = \frac{1}{2} \Re \left(\underline{U}_m \underline{I}_m^* \right) \quad \rightsquigarrow \quad \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{1}{2} m \underline{V}_m \underline{V}_m^* \right)$$

◇ Comme $\underline{V}_m \underline{V}_m^* = V_m^2$

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m V_m^2$$

★ énergie potentielle

🌀 expression

◇ Nous pouvons généraliser l'expression de l'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$ en remarquant qu'elle fait intervenir l'élongation $(\ell - \ell_0)$, élongation qui n'est autre que $x(t)$.

👉 *Remarque.* En toute rigueur, l'élongation dans le cas du dispositif que nous avons étudié n'est *pas* $\ell(t) - \ell_0 \neq x(t)$ mais nous pouvons faire comme si. En effet, peu importe d'où vient la force excitatrice dans le cadre de la généralisation que nous cherchons. La seule chose qui compte c'est la réponse et la réponse est $x(t)$, l'écart au repos.

◇ Nous pouvons donc écrire qu'ici $E_p = \frac{1}{2} k x^2(t)$.

◇ De même que pour l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique est une grandeur quadratique donc il n'est pas question d'utiliser la notation complexe mais nous allons nous contenter de chercher sa valeur moyenne

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{1}{2} k \underline{X_m} \underline{X_m}^* \right) \quad \rightsquigarrow \quad \langle E_p \rangle = \frac{1}{4} k X_m^2$$

🌀 lien avec l'énergie cinétique

◇ Comme $\underline{V_m} = j\omega \underline{X_m}$ nous avons $V_m = \omega X_m$ et ainsi

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 X_m^2 \times \frac{k}{k}$$

◇ Nous pouvons reconnaître la pulsation propre $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ce qui donne

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} k \frac{\omega^2}{\omega_0^2} X_m^2 \quad \rightsquigarrow \quad \langle E_c \rangle = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \langle E_p \rangle$$

★ lien avec l'énergie mécanique

◇ L'énergie mécanique n'est autre que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle ce qui donne

$$\langle E_m \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle E_m \rangle = \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \times \langle E_p \rangle$$

◇ Rappelons qu'ici nous *devons* prendre la valeur moyenne de l'énergie mécanique qui n'a aucune raison d'être constante puisque l'évolution est *forcée*.

◇ Cette expression nous permet de trouver celle de l'énergie potentielle

$$\langle E_p \rangle = \frac{\langle E_m \rangle}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

◇ Puis celle de l'énergie cinétique

$$\langle E_c \rangle = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \times \langle E_p \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle E_p \rangle = \frac{\langle E_m \rangle}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

◇ Ces expressions impliquent que :

- en basse fréquence c'est l'énergie potentielle qui domine ;
- en haute fréquence c'est l'énergie cinétique qui domine.

★ théorème de la puissance mécanique

◇ Le théorème de la puissance mécanique s'écrit, pour la masse accrochée au ressort,

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{frott}} + \mathcal{P}_{\text{excitateur}}$$

◇ Soit, en valeur moyenne,

$$0 = \langle \mathcal{P}_{\text{frott}} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle$$

◇ Où nous avons naturellement

$$\langle \mathcal{P}_{\text{frott}} \rangle < 0 \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle > 0$$

En régime permanent, l'excitateur (ou le moteur) ne fait *que* compenser les pertes par frottement.

I.1.vi – résonance en puissance fournie

★ puissance moyenne dissipée

◇ Avec ce qui précède, nous pouvons écrire

$$\langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle = - \langle \mathcal{P}_{\text{frott}} \rangle$$

◇ Comme la force de frottement s'écrit $\vec{f} - \lambda \vec{v}$ nous obtenons

$$\langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle = \langle \lambda v^2(t) \rangle = \lambda \langle v^2(t) \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle = \frac{1}{2} \lambda V_m^2$$

◇ En multipliant et divisant par m , nous voyons apparaître le facteur de qualité tel que $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$

$$\langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle = \frac{\lambda}{m} \frac{1}{2} m V_m^2 \quad \rightsquigarrow \quad \langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle = \frac{\omega_0}{Q} \times 2 \langle E_c \rangle$$

◇ Nous obtenons ainsi

$$\langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle = \frac{2\omega_0}{Q} \times \frac{\langle E_m \rangle}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

★ qualité du résonateur

- ◇ Calculons l'énergie moyenne perdue sur une période. Celle-ci n'est autre que l'énergie *fournie* par l'excitateur.

$$\langle \mathcal{E}_{\text{perdue}} \rangle = \langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle \times T = \langle \mathcal{P}_{\text{excitateur}} \rangle \times \frac{2\pi}{\omega}$$

- ◇ Avec l'expression obtenue juste avant

$$\frac{\langle \mathcal{E}_{\text{perdue}} \rangle}{\langle E_m \rangle} = \frac{2\omega_0}{Q} \times \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{4\pi}{Q} \times \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}}$$

- ◇ Finalement

$$\frac{\langle \mathcal{E}_{\text{perdue}} \rangle}{\langle E_m \rangle} = \frac{4\pi}{Q} \times \frac{1}{u + \frac{1}{u}}$$

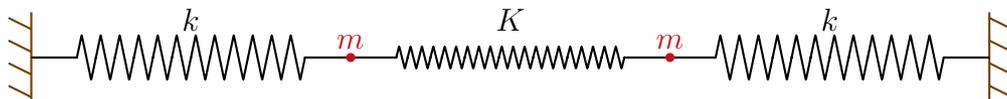
- ◇ La question est de savoir comment maximiser le dispositif c'est-à-dire faire en sorte que les pertes soient, en proportion, les plus faibles possibles.
- ◇ Il y a deux possibilités :
- si la contrainte u est fixée alors la seule possibilité est de diminuer autant que possible les frottements de manière à avoir un facteur de qualité Q le plus grand possible ;
 - si, en revanche, le dispositif est déjà fixé comme Q y est intrinsèque, pour l'utiliser au mieux, il faut s'arranger pour avoir $u = 1$.
- ◇ Insistons : Q est une contrainte « intrinsèque », elle est entièrement déterminée par le dispositif quelle que soit son utilisation, alors que u est une contrainte extérieure indépendante du dispositif.

I.2 – Couplage de deux oscillateurs

I.2.i – situation

★ présentation

- ◇ Un oscillateur c'est un ensemble { masse + ressort }.
- ◇ Prenons deux oscillateurs et relier-les par un ressort de constante de raideur *a priori* différente.



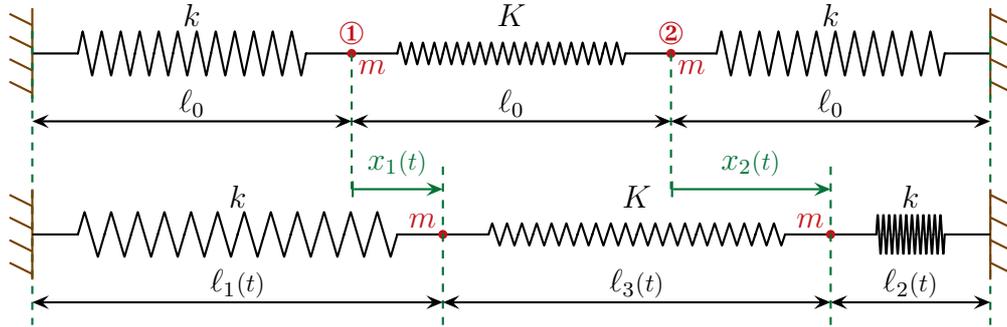
- ◇ Nous obtenons alors deux oscillateurs *couplés* : le mouvement de l'un va influencer le mouvement de l'autre.
- ◇ Regardons cela d'un peu plus près.

★ mise en équation

🕒 analyse

- ◇ Ici nous avons un dispositif à deux degrés de description. Nous allons considérer qu'il n'y a pas de frottement ce qui fait que l'évolution est libre et conservative.

- ◇ Toutefois nous allons plutôt utiliser une approche en terme de force de par la présence de deux degrés de description.
- ◇ Commençons par bien mettre en place le repérage.



🕒 PFD sur la première masse

- ◇ Les forces qui s'exercent sur m_1 et qui ont une composante sur \vec{u}_x sont :
 - la force exercée par le ressort k de gauche : $\vec{f}_1 = -k(\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort,lg}}$;
 - la force exercée par le ressort K : $\vec{F}_1 = -k(\ell_2(t) - \ell_0) \vec{u}_{\text{sort1,d}}$.
- ◇ La projection du PFD donne donc

$$\underbrace{0}_{\text{poids}} + \underbrace{0}_{\text{réaction}} + \underbrace{0}_{\text{frott}} - k(\ell_1(t) - \ell_0)(+1) - K(\ell_2(t) - \ell_0)(-1) = m\ddot{x}_1(t)$$

- ◇ Les allongements s'écrivent

$$\ell_1(t) - \ell_0 = +x_1(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) - \ell_0 = x_2(t) - x_1(t)$$

- ◇ Nous arrivons ainsi à

$$-k x_1(t) + K(x_2(t) - x_1(t)) = m\ddot{x}_1(t) \quad \rightsquigarrow \quad m\ddot{x}_1(t) + (k + K)x_1(t) = K x_2(t)$$

- ◇ Nous pouvons vérifier que les signes associés au coefficient de la partie gauche de l'équation différentielle sont tous les mêmes : cela correspond à une évolution stable, ce qui est normal pour un oscillateur.

🕒 PFD sur la deuxième masse

- ◇ Avec la même technique, nous trouvons

$$0 + 0 + 0 - k(\ell_3(t) - \ell_0)(-1) - K(\ell_2(t) - \ell_0)(+1) = m\ddot{x}_2(t)$$

- ◇ Puis

$$\ell_3(t) - \ell_0 = -x_2(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) - \ell_0 = x_2(t) - x_1(t)$$

- ◇ Ce qui donne

$$-k x_2(t) + K(x_1(t) - x_2(t)) = m\ddot{x}_2(t) \quad \rightsquigarrow \quad m\ddot{x}_2(t) + (k + K)x_2(t) = K x_1(t)$$

- ◇ Étant donné que les rôles des deux masses sont strictement identiques, il est normal de trouver les mêmes équations différentielles avec $1 \leftrightarrow 2$. Ce que, d'ailleurs, nous aurions pu dire dès le début.

I.2.ii – découplage : vers les modes propres

◇ Finalement nous nous trouvons face au système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1(t) + (k + K) x_1(t) = K x_2(t) & (\odot) \\ m \ddot{x}_2(t) + (k + K) x_2(t) = K x_1(t) & (\otimes) \end{cases}$$

◇ Il s'agit bien d'un système d'équations différentielles couplées car dans l'équation « de $x_1(t)$ » il y a « du $x_2(t)$ » et réciproquement.

★ de nouvelles inconnues

◇ Introduisons de nouvelles fonctions inconnues et cherchons les équations différentielles auxquelles elles obéissent.

$$\sigma(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{et} \quad \alpha(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

★ de nouvelles équations

◇ En sommant (\odot) et (\otimes) nous obtenons

$$m (\ddot{x}_2(t) + x_1(t)) + (k + K) (x_2(t) + x_1(t)) = K (x_1(t) + x_2(t)) \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{\sigma}(t) + (k + K) \sigma(t) = K \sigma(t)$$

◇ Et ainsi

$$m \ddot{\sigma}(t) + k \sigma(t) = 0$$

◇ De même en faisant $(\odot) - (\otimes)$

$$m (\ddot{x}_1(t) - x_2(t)) + (k + K) (x_1(t) - x_2(t)) = K (x_2(t) - x_1(t)) \quad \rightsquigarrow \quad m \ddot{\alpha}(t) + (k + K) \alpha(t) = -K \alpha(t)$$

◇ Et ainsi

$$m \ddot{\alpha}(t) + (k + 2K) \alpha(t) = 0$$

◇ Nous obtenons ainsi un nouveau système d'équations différentielles *découplées*

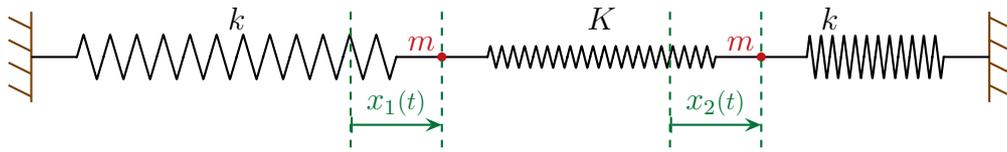
$$\begin{cases} \ddot{\sigma}(t) + \omega_s^2 \sigma(t) = 0 & \text{avec} \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \ddot{\alpha}(t) + \omega_a^2 \alpha(t) = 0 & \text{avec} \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}} \end{cases}$$

★ interprétation

🕒 signification de $\sigma(t)$

◇ Imposons $\alpha(t) = 0$ pour pouvoir interpréter $\sigma(t)$ *seul*.

◇ Cela implique alors $x_1(t) - x_2(t) = 0$ soit $x_1(t) = x_2(t)$.

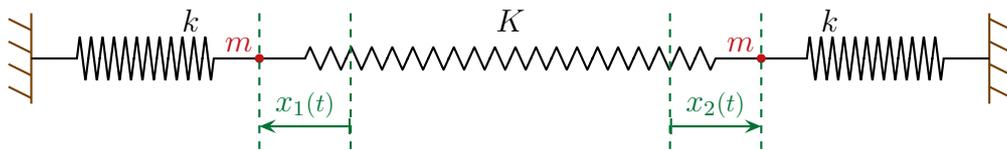


- ◇ Dans ce cas le ressort de couplage devient « solide », il n'a plus d'influence sur le mouvement, ce qui est confirmé par l'expression de la pulsation de $\sigma(t)$ qui ne fait pas intervenir K .
- ◇ Il s'agit là d'un mode *symétrique* : les deux oscillateurs font la même chose.
- ☞ *Remarque.* Cela explique *a posteriori* la notation σ et l'indice « s » de ω_s .
- ◇ La solution est alors, puisqu'il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\sigma(t) = S \cos(\omega_s t + \varphi_s)$$

🕒 signification de $\alpha(t)$

- ◇ Imposons cette fois $\sigma(t) = 0$ pour pouvoir interpréter $\alpha(t)$ *seul*.
- ◇ Cela implique donc $x_1(t) + x_2(t) = 0$ soit $x_1(t) = -x_2(t)$.



- ◇ Il s'agit là d'un mode *antisymétrique* : les deux oscillateurs ont des mouvements opposés.
- ☞ *Remarque.* Cela explique là aussi la notation α et l'indice « a » de ω_a .
- ◇ La solution est, puisqu'il s'agit là aussi de l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_a t + \varphi_a)$$

★ retour sur les oscillateurs couplés

- ◇ Une fois les solutions connues pour $\sigma(t)$ et $\alpha(t)$ il est relativement facile de revenir à la solution en $x_1(t)$ et $x_2(t)$

$$\begin{cases} \sigma(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ \alpha(t) = x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{\sigma(t) + \alpha(t)}{2} \\ x_2(t) = \frac{\sigma(t) - \alpha(t)}{2} \end{cases}$$

- ◇ $\sigma(t)$ et $\alpha(t)$ sont des solutions *indépendantes* pour l'évolution des oscillateurs couplés.
- ◇ Nous constatons aussi que les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont des combinaisons linéaires de $\alpha(t)$ et $\sigma(t)$.
- ◇ Tout cela revient à dire que $\sigma(t)$ et $\alpha(t)$ sont des modes d'évolutions « naturelles » pour le dispositif : ce sont des *modes propres*.
- ◇ Ici il y a *deux* oscillateurs, *deux* degrés de descriptions et *deux* modes propres. Ce n'est pas un hasard du tout. L'algèbre linéaire est passée par là.
- ⚠ La corde de MELDE a une infinité de degrés de description, il est normal qu'elle est une infinité de *modes propres*.

I-2.iii – couplage faible

★ expression des pulsations

◇ Dans le cas d'un couplage faible $K \ll k$ alors

$$\begin{aligned}\omega_a - \omega_s &= \sqrt{\frac{k + 2K}{m}} - \sqrt{\frac{k}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{\frac{2K + k}{k}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{\frac{k}{m}} \left(\sqrt{1 + \frac{2K}{k}} - 1 \right) \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{K}{k} - 1 \right)\end{aligned}$$

◇ Finalement

$$\omega_a - \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{K}{k} \quad \rightsquigarrow \quad \omega_a - \omega_s = \frac{K}{k} \times \omega_s$$

◇ Les deux pulsations sont d'autant plus proches que le couplage est faible.

◇ Dans ces conditions, au premier ordre, nous pouvons écrire

$$\omega_s + \omega_a = 2\omega_s$$

★ solution

◇ Imaginons les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = a ; \quad x_2(0) = 0 ; \quad \dot{x}_1(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

◇ Nous pouvons écrire

$$\sigma(t) = S \cos(\omega_s t) + S' \sin(\omega_s t)$$

◇ Les conditions initiales sont

$$\sigma(0) = x_1(0) + x_2(0) = a \quad \text{et} \quad \dot{\sigma}(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0$$

◇ Ce qui conduit à

$$\sigma(t) = a \cos(\omega_s t)$$

◇ De même nous pouvons écrire

$$\alpha(t) = A \cos(\omega_a t) + A' \sin(\omega_a t)$$

◇ Les conditions initiales sont cette fois

$$\alpha(0) = x_1(0) - x_2(0) = a \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = 0$$

◇ Ce qui conduit là aussi à

$$\alpha(t) = a \cos(\omega_a t)$$

◇ Revenons maintenant d'abord à $x_1(t)$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\sigma(t) + \alpha(t)}{2} \\ &= \frac{1}{2} a (\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_a t)) \\ &= \frac{a}{2} \times 2 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \times \cos\left(\frac{\omega_s - \omega_a}{2} t\right) \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} a \cos(\omega_s t) \times \cos\left(\frac{K}{k} \omega_s t\right) \end{aligned}$$

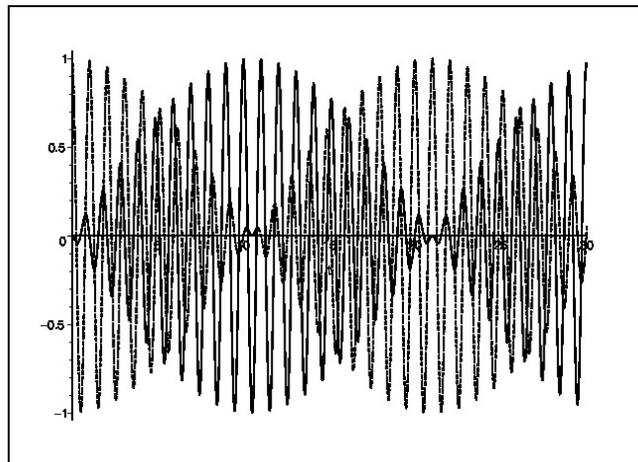
◇ De même pour $x_2(t)$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{\sigma(t) - \alpha(t)}{2} \\ &= \frac{1}{2} a (\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_a t)) \\ &= \frac{a}{2} \times 2 \cos\left(\frac{\omega_s + \omega_a}{2} t\right) \times \sin\left(\frac{\omega_s - \omega_a}{2} t\right) \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} a \cos(\omega_s t) \times \sin\left(\frac{K}{k} \omega_s t\right) \end{aligned}$$

★ un phénomène qui reviendra : les battements

◇ Nous obtenons ainsi des oscillations qui vont se « transmettre » d'un oscillateur à l'autre.

Graphique 10



◇ Sur le graphe précédent, nous avons représenté $x_1(t)$ et $x_2(t)$: nous voyons bien que lorsque l'un bouge, l'autre est plutôt immobile.

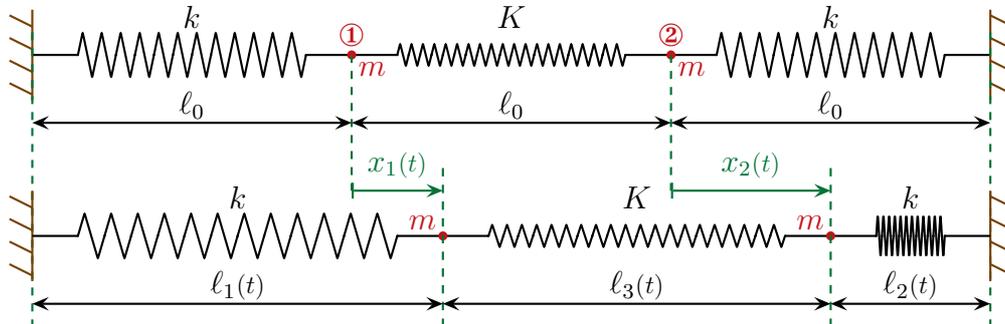
◇ En fait les deux oscillateurs *s'échangent* sans arrêt de l'énergie.

◇ C'est ce phénomène qui est à la base de la propagation : l'énergie peut se transmettre par couplage d'oscillations.

I.2.iv – oscillations forcées

★ modification du modèle

◇ Reprenons le dispositif.



◇ Sans préjuger de l'origine physique de la force excitatrice, supposons que la masse M_1 , et uniquement celle-là, soit soumise à une force supplémentaire de type sinusoïdal.

◇ Alors les PFD sur M_1 et M_2 sont modifiés de la manière suivante

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1(t) + (k + K) x_1(t) - K x_2(t) = F_0 \cos(\omega t) \\ m \ddot{x}_2(t) + (k + K) x_2(t) - K x_1(t) = 0 \end{cases}$$

★ solutions en complexe

◇ Cherchons une solution particulière, la solution en régime forcée sous la forme

$$\underline{x}_1(t) = \underline{X}_{m1} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{x}_2(t) = \underline{X}_{m2} e^{j\omega t}$$

☞ *Remarque.* La pulsation intervenant dans la recherche des solutions est la même que celle intervenant dans l'excitation et ce grâce au caractère *linéaire* du dispositif.

◇ En remplaçant dans les équations différentielles et en simplifiant par $e^{j\omega t}$

$$\begin{cases} -m\omega^2 \underline{X}_{m1} + (k + K) \underline{X}_{m1} - K \underline{X}_{m2} = F_0 \\ -m\omega^2 \underline{X}_{m2} + (k + K) \underline{X}_{m2} - K \underline{X}_{m1} = 0 \end{cases}$$

◇ Il s'agit là d'un système qui se réécrit

$$\begin{cases} \left((K + k) - m\omega^2 \right) \times \underline{X}_{m1} + (-K) \times \underline{X}_{m2} = F_0 \\ (-K) \times \underline{X}_{m1} + \left((k + K) - m\omega^2 \right) \times \underline{X}_{m2} = 0 \end{cases}$$

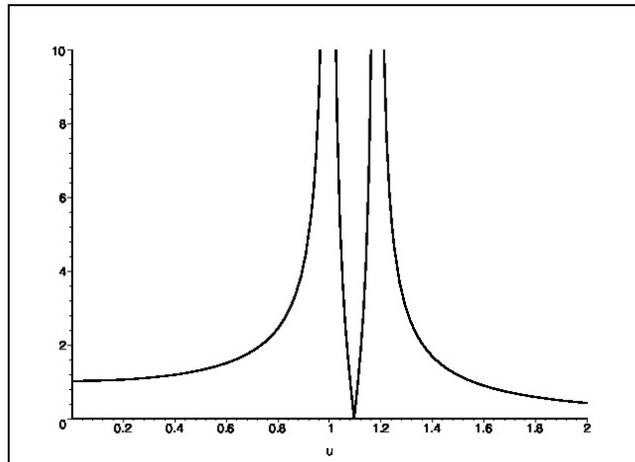
◇ Les solutions sont

$$\underline{X}_{m1} = \frac{\left((k + K) - \omega^2 \right) F_0}{\left((k + K) - \omega^2 \right)^2 - K^2} \quad \text{et} \quad \underline{X}_{m2} = \frac{K F_0}{\left((k + K) - \omega^2 \right)^2 - K^2}$$

★ résonance et antirésonance

◇ Commençons par représenter $|X_{m1}|$ en fonction de la pulsation.

Graphique 11



◇ Nous constatons qu'il y a deux valeurs de ω pour lesquelles l'amplitude devient infinie : il s'agit là de phénomènes de *résonance*.

◇ Mais nous voyons aussi qu'il y a une valeur de ω pour laquelle l'amplitude est nulle ! C'est le phénomène d'*antirésonance*. À cette pulsation et bien qu'elle soit excitée, la masse M_1 reste immobile.

🕒 pulsation de résonance

◇ Il s'agit des pulsations pour lesquelles le dénominateur est nul.

◇ Nous avons ainsi

$$\left((k+K) - \omega^2\right)^2 - K^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \left((k+K) - \omega^2\right)^2 = K^2 \quad \rightsquigarrow \quad (k+K) - \omega^2 = \pm K$$

◇ Cela nous conduit à

$$m\omega^2 = K + k \mp K \quad \rightsquigarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \omega_s^2 \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{2K+k}{m} = \omega_a^2$$

Il y a résonance quand la pulsation extérieure est égale à la pulsation propre **quand il n'y a pas de frottement.**

🕒 pulsation d'antirésonance

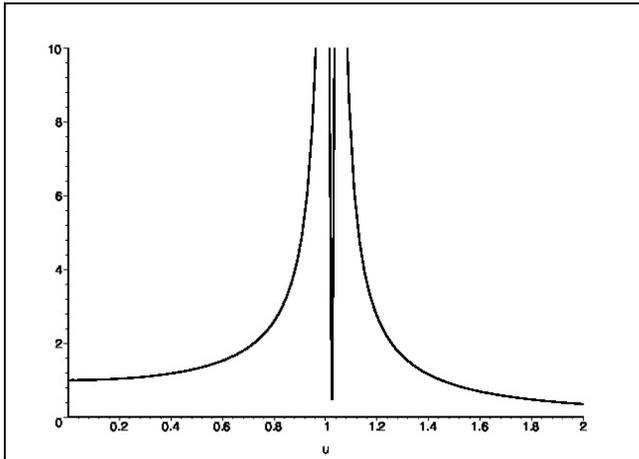
◇ C'est lorsque $|X_{m1}| = 0$ ce qui donne

$$m\omega^2 = K + k \quad \rightsquigarrow \quad \omega_{\text{anti}}^2 = \frac{K+k}{m}$$

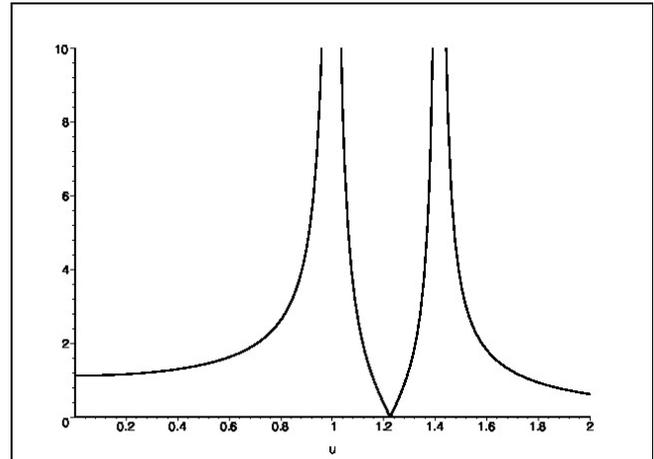
★ couplage faible

◇ Sur les graphiques 12 et 13 nous avons représenté $|X_{m1}|$ pour, respectivement, un couplage plus faible puis un couplage plus fort que celui du graphique 11.

Graphique 12



Graphique 13

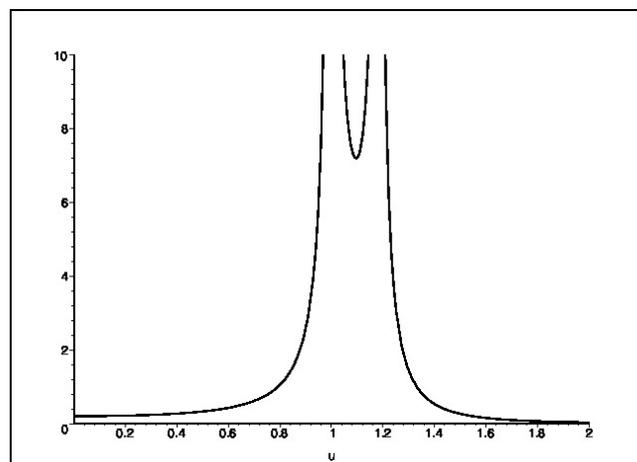


- ◇ Nous constatons que les résonances sont les plus proches lorsque le couplage est faible.
- ◇ À la limite, les deux pulsations de résonances sont égales lorsque le couplage est nul, ce qui est tout à fait normal : quand le ressort du milieu n'est plus là, nous avons deux oscillateurs identiques.

★ pour M_2

- ◇ Traçons $|X_{m2}|$ dans le cas sans frottement.

Graphique 14



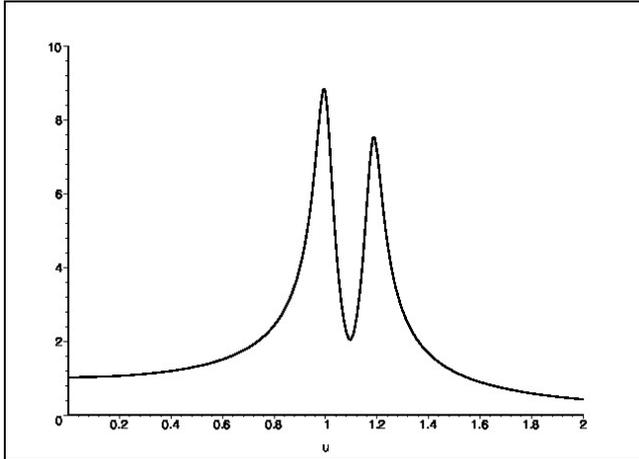
- ◇ Nous pouvons constater que pour M_2 il n'y a pas de phénomène d'antirésonance mais il reste le phénomène de résonance.

La résonance est intrinsèque au dispositif alors que l'antirésonance dépend de la manière d'exciter un dispositif.

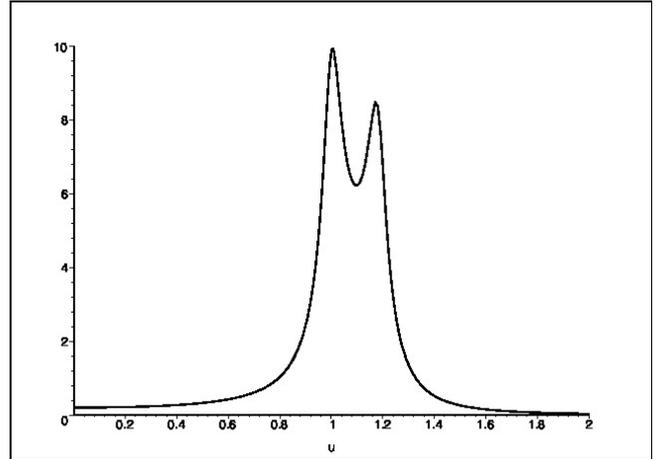
★ avec frottement

- ◇ Pour en tenir compte, il suffit d'introduire une force en $-\lambda \vec{v}$ dans le PFD?
- ◇ Sur les graphiques suivants nous avons tracé $|X_{m2}|$ et $|X_{m1}|$ en fonction de la pulsation.

Graphique 15



Graphique 16

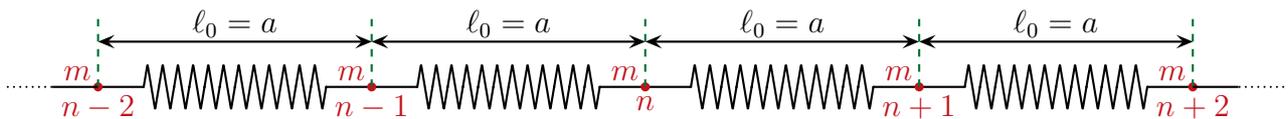


- ◇ Nous pouvons constater que nous voyons apparaître les mêmes phénomènes que lorsqu'il n'y a pas frottement à savoir la présence de résonances et d'une antirésonance.
- ◇ De manière qualitative nous voyons aussi que les résonances ne sont plus infinies et que l'antirésonance n'est plus vraiment nulle.
- ◇ En fait ce qui change, c'est la *qualité* de la résonance et de l'antirésonance.
- ◇ Techniquement cela s'explique par le terme de frottement qui, une fois traduit en complexe, engendre des termes en $\lambda j \omega$ qui empêche le dénominateur d'être nul.
- ◇ Remarquons enfin que même si un dispositif réel présente des frottements faibles, l'étudier sans frottement est pertinent :
 - pour trouver les zones de résonances ;
 - pour trouver les solutions dans des zones « loin » des résonances.

I.3 – Chaîne d'oscillateurs

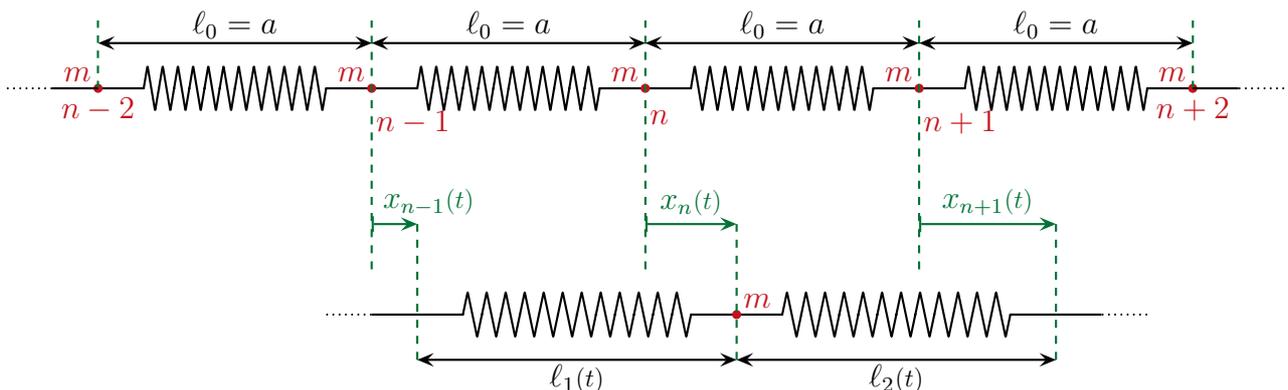
I.3.i – modèle

- ◇ Considérons cette fois une chaîne infinie d'oscillateurs identiques.



I.3.ii – équation de couplage

- ◇ L'idée est toujours la même : écrire un PFD sur une masse.
- ◇ Considérons la masse n .



◇ En projetant le PFD appliqué à la masse n et en négligeant les frottements nous obtenons

$$m \ddot{x}_n(t) = 0 + 0 + 0 - k(\ell_1(t) - \ell_0)(+1) - k(\ell_2(t) - \ell_0)(-1) \quad \text{avec :}$$

$$\rightarrow \ell_1(t) - \ell_0 = x_n(t) - x_{n-1}(t);$$

$$\rightarrow \ell_2(t) - \ell_0 = x_{n+1}(t) - x_n(t).$$

◇ Finalement

$$m \ddot{x}_n(t) = k(x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) - 2x_n(t))$$

◇ Pour résoudre, il faudrait écrire N équations différentielles et toutes les résoudre ce qui est non concevable.

◇ Il va falloir faire autrement.

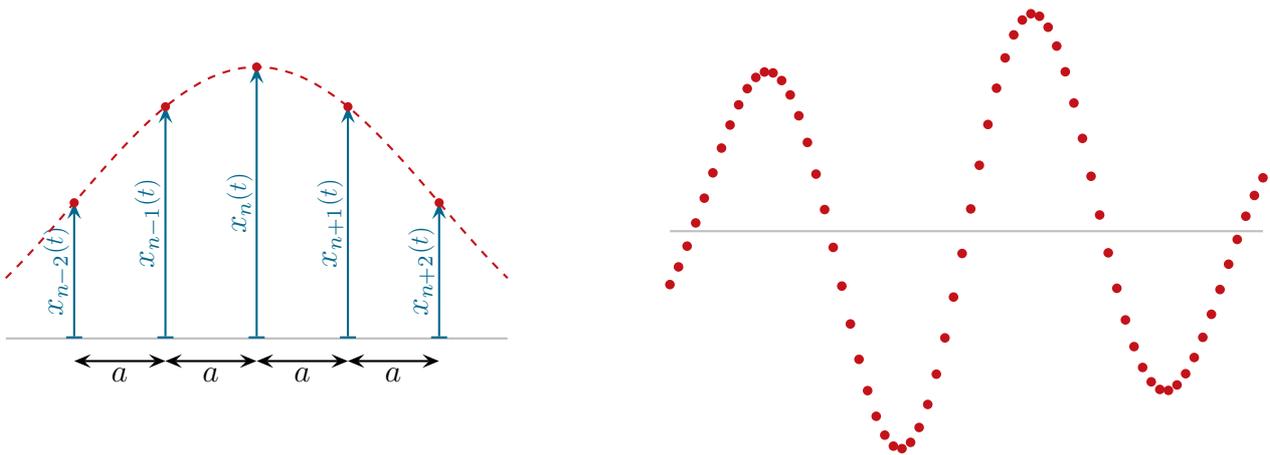
I.3.iii – approximation des milieux continus

★ idée

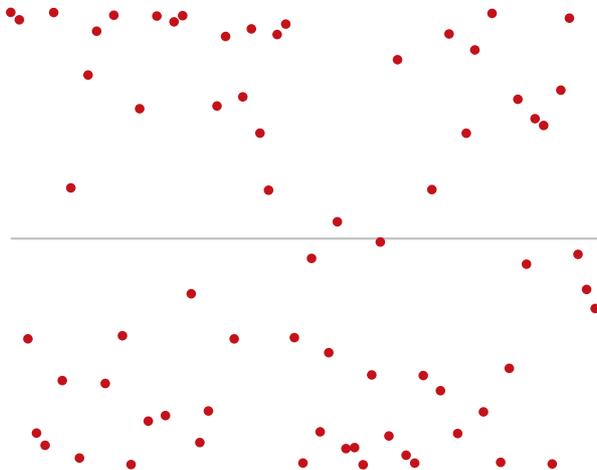
◇ Regardons les choses de loin.

◇ Vu de loin la distance a entre les oscillateurs devient « invisible ».

◇ De la sorte, nous pouvons approcher toutes les fonctions $x_n(t)$ par une fonction $X(x,t)$.



◇ En fait cette approximation fonctionne dès lors que les $x_n(t)$ ne varient pas trop de l'un à l'autre. Cela revient à dire que la fonction $X(x,t)$ ne doit pas trop varier à l'échelle de a sinon voilà ce que cela donne.



◇ C'est un véritable changement de point de vue : au lieu d'avoir N fonctions $x_n(t)$ du temps (donc à une variable) par **une** fonction $X(x,t)$ de la position et du temps (donc à deux variables).

★ transformation de l'équation de couplage

◇ Nous avons ainsi

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(na, t)$$

◇ Maintenant que a est considéré comme petit nous pouvons faire un développement limité.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0)$$

◇ Et comme $x_{n+1}(t) = X((n+1)a, t) = X(na + a, t)$ nous avons

$$X(na + a, t) = X(na, t) + a \times \frac{\partial X}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t)$$

◇ De même

$$X(na - a, t) = X(na, t) - a \times \frac{\partial X}{\partial x}(na, t) + \frac{(-a)^2}{2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t)$$

◇ Enfin, de manière toute simple

$$-2x_n(t) = -2X(na, t)$$

◇ Sommons le tout

$$x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) - 2x_n(t) = 0 + 0 + a^2 \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t)$$

◇ Remplaçons le tout dans l'équation de couplage

$$m \times \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(na, t) = k a^2 \times \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(na, t)$$

◇ C'est une relation vraie pour tout n donc posons $x = na$.

◇ Finalement

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(x, t) = \frac{m}{k a^2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(x, t)$$

★ équation de D'ALEMBERT

Nous appellerons *équation de D'ALEMBERT* ou *équation de propagation* l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{où :}$$

c est homogène à une vitesse.

◇ L'équation de D'ALEMBERT est une équation :

- aux dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à t ;
- aux dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x .

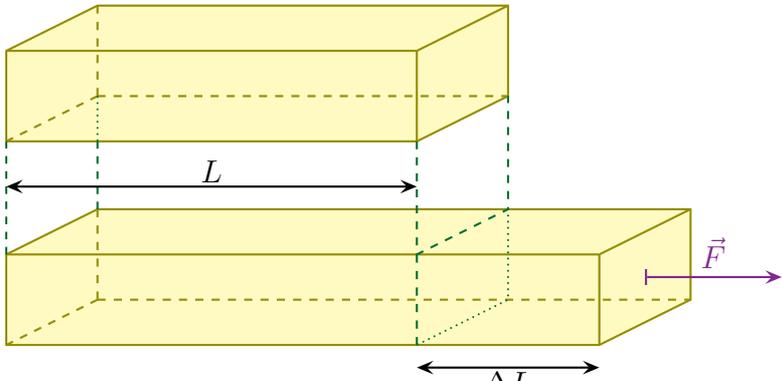
◇ Cette équation aux dérivées partielles mélange le x et le t , *i.e.* le spatial et le temporel : nous allons obtenir des phénomènes spatio-temporels.

I.4 – Ondes longitudinales dans un solide

I.4.i – effort interne à un solide

◇ Ici nous allons étudier un solide au sens usuel mais pas au sens mécanique : le solide va être déformable.

La force nécessaire pour allonger un solide de la longueur ΔL s'écrit



$$\frac{\Delta L}{L} \triangleq \frac{1}{E} \times \frac{F}{S} \quad \text{où :}$$

E est le *module d'YOUNG* du matériau et S la section du solide.

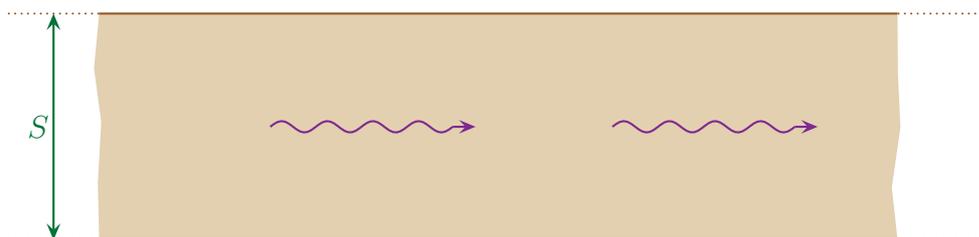
◇ Quelques valeurs

$$E_{\text{fer}} = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad E_{\text{diamant}} = 1,0 \cdot 10^{12} \text{ Pa}$$

I.4.ii – son dans un solide

★ modélisation

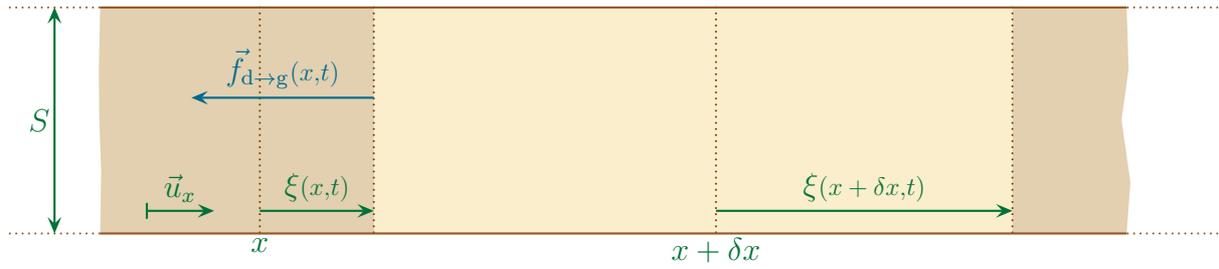
◇ Considérons un solide de section constante ainsi qu'une onde longitudinale qui s'y propage.



◇ Compte-tenu des efforts internes décrits par le module d'YOUNG, quelle est la célérité du son ?

★ force à l'échelle mésoscopique

◇ Commençons par traduire à l'échelle mésoscopique la force qu'exerce une portion mésoscopique sur la portion située à sa gauche.



◇ Par simple principe des actions réciproques, la force qu'il exerce est celle qu'il subit et il subit

$$\ll F = E \times S \times \frac{\Delta L}{L} \gg$$

◇ Sa longueur initiale s'écrit tout de suite δx .

◇ Sa variation de longueur vaut, elle,

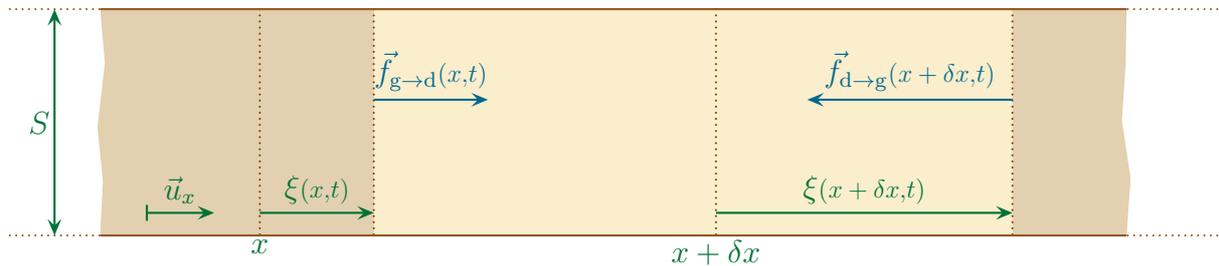
$$\Delta L = (x + \delta x + \xi(x + \delta x, t) - x - \xi(x, t)) - \delta x \quad \rightsquigarrow \quad \Delta L = \xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t)$$

◇ Et donc, en faisant tendre δx vers 0

$$F_{d \rightarrow g}(x, t) = E S \times \frac{\xi(x + \delta x, t) - \xi(x, t)}{\delta x} \quad \rightsquigarrow \quad F_{d \rightarrow g}(x, t) = E S \times \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)$$

★ équation de propagation

◇ Écrivons simplement le PFD pour le système (mésoscopique) situé initialement entre x et $x + \delta x$ tout projetant sur \vec{u}_x .



◇ Introduisons le centre de masse G dont nous ne savons pas exactement où il se trouve, si ce n'est que $x_G = x + \alpha \delta x$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$\delta m \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = F_{g \rightarrow d}(x, t) + F_{d \rightarrow g}(x + \delta x, t)$$

◇ Utilisons le principe des actions réciproque

$$\delta m \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = -F_{d \rightarrow g}(x, t) + F_{d \rightarrow g}(x + \delta x, t)$$

◇ Remplaçons par l'expression des forces internes

$$\delta m \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = -E S \times \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) + E S \times \frac{\partial \xi}{\partial x}(x + \delta x, t)$$

◇ La masse δm s'écrit, comme elle est constante, $\delta m = S \rho \delta x$, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x_G, t) = \frac{E}{\rho} \times \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)}{\delta x}$$

◇ En faisant tendre δx vers 0, nous avons

$$x_g \longrightarrow x \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}(x + \delta x, t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t)}{\delta x} \longrightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$$

◇ Nous arrivons ainsi à

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}(x, t) = \frac{E}{\rho} \times \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(x, t)$$

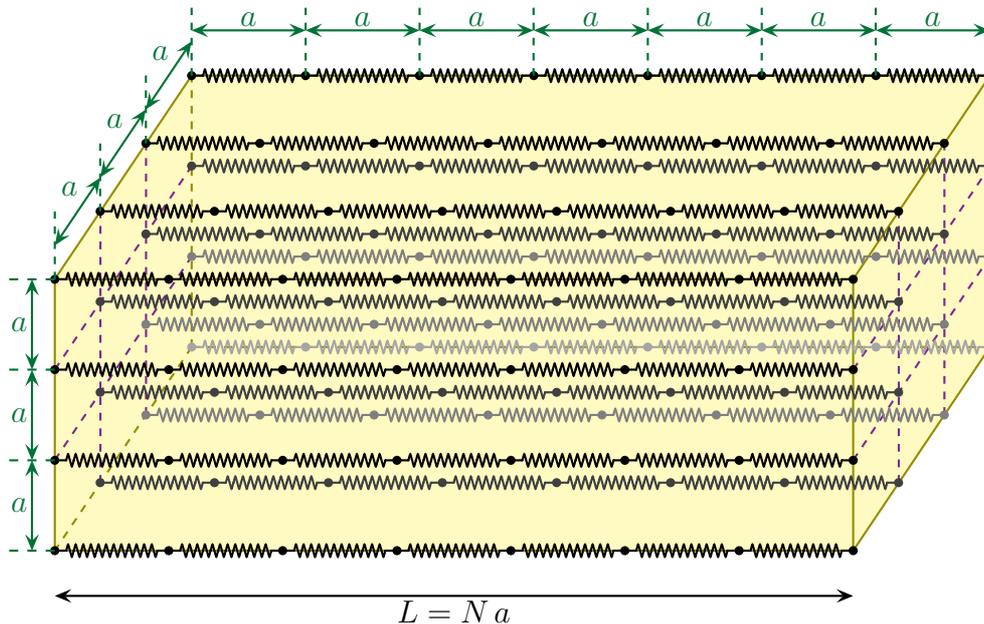
◇ Il s'agit bien d'une équation de propagation telle que nous l'avons définie avec

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

I.4.iii – expression phénoménologique du module d'YOUNG

★ Approche microscopique

◇ Modélisons un solide par un ensemble de chaînes d'oscillateurs.



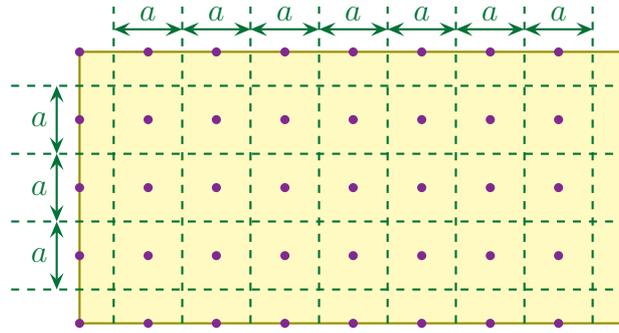
◇ Le solide est de longueur $L = N a$ au repos.

◇ Imaginons un allongement de ΔL suite à la force F .

◇ Cet allongement est réparti sur l'ensemble des ressorts ce qui fait que chacun s'allonge de $\Delta \ell = \frac{\Delta L}{N}$.

◇ En notant n_0 le nombre de chaînes différentes, chaque chaîne subit la force $f = \frac{F}{n_0}$ (extensité des forces).

◇ Pour déterminer n_0 , nous pouvons compter le nombre de chaînes coupées dans une section.



◇ Nous voyons, grâce au schéma ci-dessus, que chaque chaîne occupe la surface « propre » a^2 . Si la section est S , nous avons alors $n_0 = \frac{S}{a^2}$ et ce en mettant de côté le nombre totalement négligeable de chaînes « juste au bord » de la section.

◇ En regardant le dernier ressort d'une chaîne quelconque nous pouvons écrire $f = k \Delta \ell$.

◇ Ainsi, comme $\frac{F}{n_0} = k \frac{\Delta L}{N}$

$$N = \frac{L}{a} \quad \text{et} \quad n_0 = \frac{S}{a^2} \quad \rightsquigarrow \quad k \times \frac{\Delta L}{L/a} = \frac{F}{S/a^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{S} \times \frac{a}{k}$$

◇ Par identification $E = \frac{k}{a}$.

★ célérité des ondes

◇ Avec la chaîne d'oscillateur, nous avons trouvé

$$\frac{1}{c^2} = \frac{m}{k a^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{m}{E a^3}$$

◇ Or $\rho = \frac{m}{a^3}$ ce qui donne

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{E}$$

II – Solutions de l'équation de D'ALEMBERT

- ◇ Dans cette partie nous allons nous intéresser tout particulièrement aux types de solutions générales qui existent pour l'équation de D'ALEMBERT.

II.1 – Équation de propagation le long d'une corde

- ◇ Nous allons commencer par retrouver l'équation de D'ALEMBERT dans un cas particulier fréquent, celui de l'ébranlement d'une corde.

II.1.i – pas n'importe quelle corde

- ◇ Nous allons considérer une corde :
- filiforme ;
 - infiniment souple ;
 - sans mouvement longitudinal ;
 - pour laquelle la pesanteur est négligeable ;
 - dont l'ébranlement est faible.
- ◇ Rien que faire le dessin implique de respecter l'hypothèse « filiforme ».

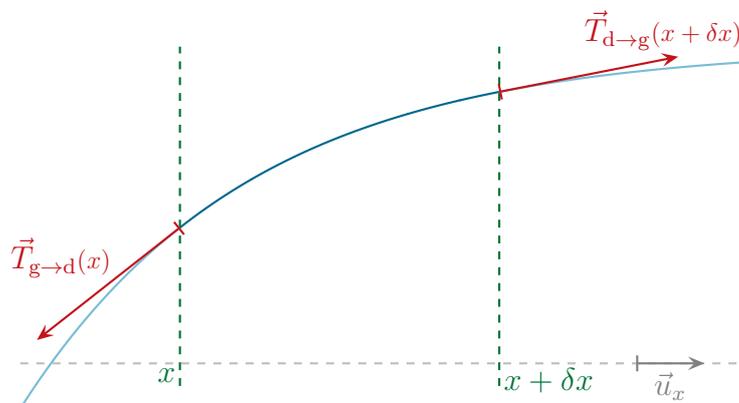


II.1.ii – mise en équation

- ◇ Comme souvent lorsqu'il s'agira de traiter un dispositif continu, nous allons faire une approche *mésoscopique*.
- ▲ C'est comme en diffusion !

★ TCI

- ◇ Commençons par zoomer sur un élément de corde compris entre x et $x + \delta x$.



- ◇ Comme la corde est infiniment souple, les tensions exercées par la partie droite sur la partie gauche $\vec{T}_{d \rightarrow g}$ et par la partie gauche sur la partie droite $\vec{T}_{g \rightarrow d}$ sont *tangentes* au fil.
- ◇ La pesanteur étant négligée, nous allons poser $\vec{g} = \vec{0}$.
- STOP Nous négligeons la pesanteur, surtout pas la *masse* car la masse reste en tant que masse inertielle.

- ◇ Ici le système \mathcal{S} { bout de corde entre x et $x + \delta x$ } a une évolution forcée (par ses « voisins ») donc bien qu'il ait une évolution à un seul degré de description $y_{\mathcal{S}}(t)$, nous allons utiliser une approche en terme de force.
- ◇ Le TCI s'écrit

$$dm \times \vec{a}_G(t) = \vec{T}_{g \rightarrow d}(x) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \delta x)$$

- ◇ Nous avons négligé les frottements.
- ◇ La 3^e loi de NEWTON permet d'écrire

$$dm \times \vec{a}_G(t) = -\vec{T}_{d \rightarrow g}(x) + \vec{T}_{d \rightarrow g}(x + \delta x)$$

★ projection sur \vec{u}_x

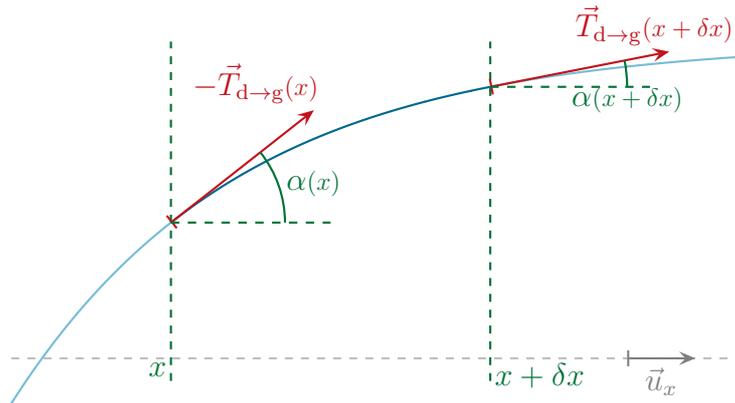
- ◇ Comme il n'y a pas de mouvement longitudinal, l'accélération sur \vec{u}_x est nulle et donc

$$0 = -T_{d \rightarrow g}(x) + T_{d \rightarrow g}(x + \delta x) \quad \rightsquigarrow \quad T_{d \rightarrow g}(x) = T_{d \rightarrow g}(x + \delta x)$$

- ◇ Cela implique $T(x) = C^{te} \stackrel{\text{not}}{=} T_0$.

★ projection sur \vec{u}_y

- ◇ Redessinons le schéma en introduisant des angles judicieux.



- ◇ Comme T_0 est la composante sur \vec{u}_x de la force, nous avons

$$dm \ddot{y}_G(t) = +T_0 \tan \alpha(x + \delta x) - T_0 \tan \alpha(x)$$

- ◇ L'hypothèse des petits ébranlements nous permet d'écrire

$$|\alpha| \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad dm \ddot{y}_G(t) = +T_0 \alpha(x + \delta x) - T_0 \alpha(x)$$

★ réécriture du terme d'accélération

- ◇ Et comme G est situé entre x et $x + \delta x$, nous avons

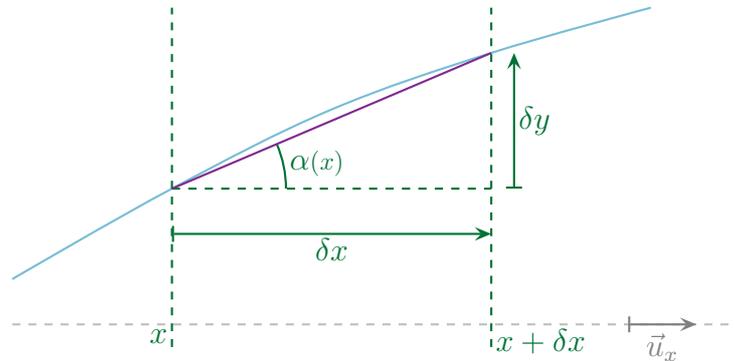
$$y_G(t) = y(x + \beta \delta x, t) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \ddot{y}_G(t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x + \beta \delta x, t)$$

- ◇ De plus la corde étant filiforme et en notant μ sa masse linéique

$$dm = \mu \frac{\delta x}{\cos \alpha} \stackrel{DL}{=} \mu \delta x$$

★ couplage géométrique

- ◇ Comme la tension est tangente à la corde (hypothèse de fil infiniment souple), une photo (donc un dessin à t fixé) donne



- ◇ Cela conduit à

$$\tan \alpha = \frac{\delta y}{\delta x}$$

- ◇ Or δy est la variation de la cote quand x augmente de δx à t fixé. Traduit techniquement cela donne

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \times \delta x$$

- ◇ Et ainsi compte-tenu de l'hypothèse des petits angles

$$\tan \alpha \simeq \alpha \quad \rightsquigarrow \quad \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

★ rassemblement et fin

- ◇ Nous obtenons ainsi

$$\mu \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x + \beta \delta x, t) = +T_0 \alpha(x + \delta x) - T_0 \alpha(x) \quad \rightsquigarrow \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x + \beta \delta x, t) = +T_0 \times \frac{\alpha(x + \delta x) - \alpha(x)}{\delta x}$$

- ◇ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous voyons apparaître un taux d'accroissement à droite alors que le terme à gauche se simplifie et

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = +T_0 \times \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$$

- ◇ Et avec l'expression de $\alpha(x, t)$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = +T_0 \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\mu}{T_0} \frac{d^2 y}{dt^2}(x, t)$$

- ◇ Il s'agit bien d'une équation de D'ALEMBERT avec

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\mu}{T_0} \quad \rightsquigarrow \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

Pour une corde infiniment fine et souple, sans mouvement longitudinal et pour laquelle pesanteur et frottements sont négligeables, les petits ébranlements obéissent à l'équation de D'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

II.2 – Solutions en Ondes Planes Progressives (OPP)

II.2.i – forme des solutions

★ expression

Toutes les solutions de l'équation de D'ALEMBERT $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$ s'écrivent sous la forme

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad \text{avec } f \text{ et } g \text{ quelconques.}$$

◇ Le « quelconque » est bien sûr à prendre au sens physique du terme car mathématiquement il faut quand même des fonctions suffisamment régulières pour être dérivées deux fois.

★ vérification

◇ Posons $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ et calculons simplement les dérivées.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = f'(x-ct) + g'(x+ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = f''(x-ct) + g''(x+ct)$$

◇ De même

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = -c f'(x-ct) + c g'(x+ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = +c^2 f''(x-ct) + c^2 g''(x+ct)$$

◇ Et là nous constatons facilement que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

◇ Nous venons de prouver que la forme $y_{dext} = f(x-ct) + g(x+ct)$ est une solution de l'équation de D'ALEMBERT et nous admettrons que toute solution peut s'écrire sous cette forme.

II.2.ii – image des solutions

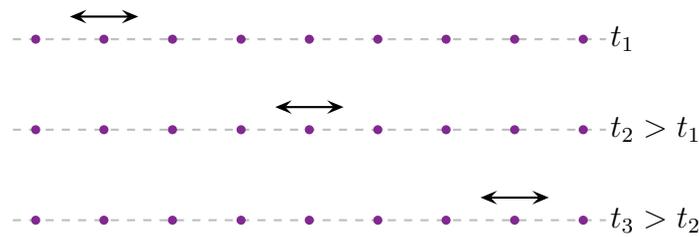
★ une onde

◇ L'équation de D'ALEMBERT étant dite l'équation d'onde, ses solutions représenteront physiquement une onde.

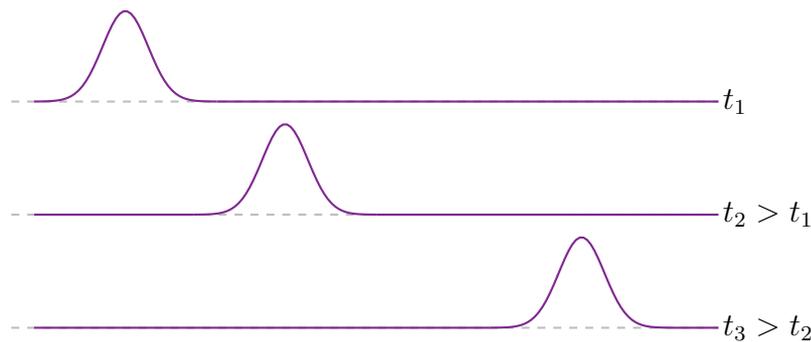
Une grandeur a un caractère *ondulatoire* si elle obéit à l'équation de D'ALEMBERT.

◇ Il s'agit certe là d'une définition autoréférente, mais il est difficile de faire mieux.

- ◇ Dans le cas d'une onde mécanique la grandeur intéressante est souvent un ébranlement, *i.e.* un léger écart par rapport à la position au repos.
- ◇ Pour la chaîne d'oscillateurs

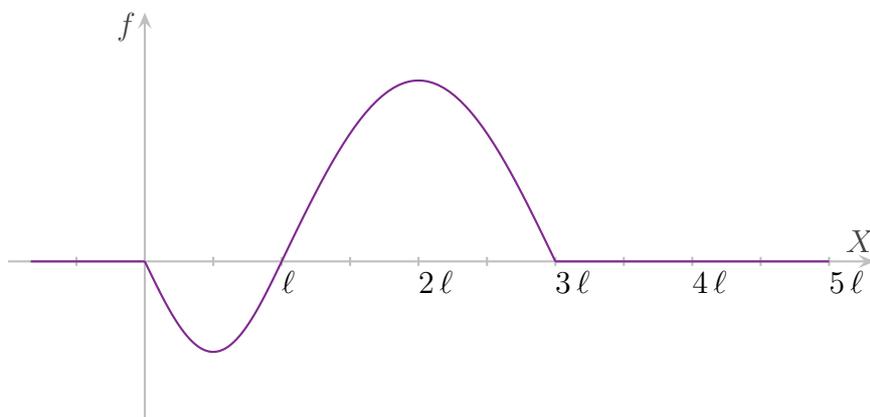


- ◇ Pour une corde

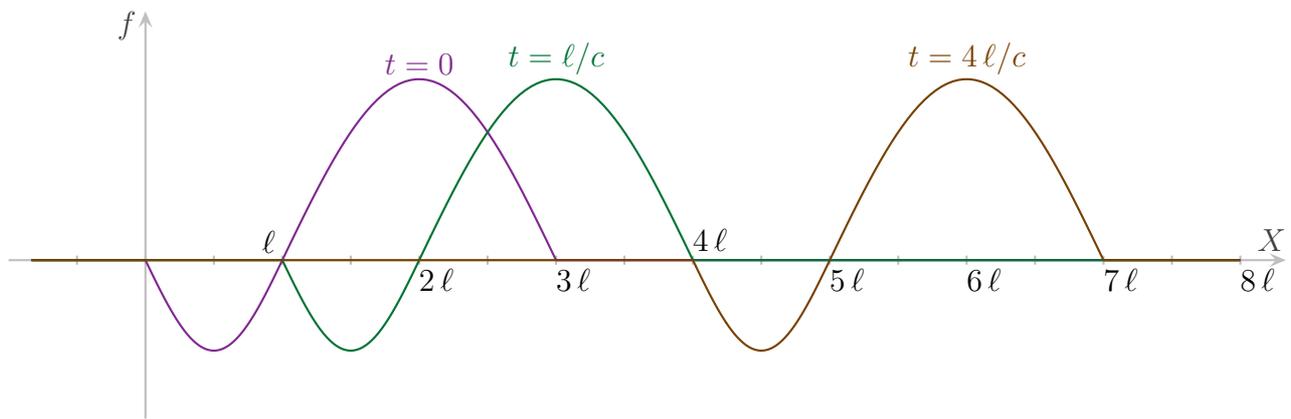


★ interprétation de $f(x - ct)$

- ◇ Prenons une fonction $f(X)$ quelconque et représentons la.



- ◇ À quelle onde correspond $f(x - ct)$?
- ◇ Il faut tout d'abord bien comprendre qu'il n'est pas simple de *dessiner* une telle solution puisque qu'*intrinsèquement* la solution est une fonction du temps.
- ◇ Il faudrait alors dessiner un film ce qui n'est pas possible.
- ◇ Nous nous contenterons d'une « bande-dessinée » car nous ne pouvons faire mieux, mais il ne faudra pas oublier que ce n'est qu'une bande-dessinée.
- ◇ Examinons ce qu'il en est pour les instants $t = 0$, $t = \ell/c$ et $t = 4\ell/c$
 - $y(x,0) = f(x)$ (en violet) ;
 - $y(x,\ell/c) = f(x - c(\ell/c)) = f(x - \ell)$ (en vert) ;
 - $y(x,3\ell/c) = f(x - c3(\ell/c)) = f(x - 4\ell)$ (en marron).



◇ Nous voyons que le sommet de la bosse se déplace avec le temps.

Montrer la vidéo de l'OPP ▶

◇ Notons $x_b(t)$ l'abscisse de la bosse.

◇ Nous savons que $X_b = 2l$ donc

$$x_b - ct = X_b \quad \rightsquigarrow \quad x_b(t) = X_b + ct$$

La *célérité* est la vitesse de propagation d'une onde.

◇ Il est préférable de dire « célérité d'une onde » en lieu et place de « vitesse d'une onde » car le mot « vitesse » peut être ambigu. Il peut, en effet, faire aussi référence à la vitesse $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ du support matériel.

★ interprétation de $g(x+ct)$

◇ Avec la même fonction $f(X)$ que juste avant, considérons $y(x,t) = f(x+ct)$

Montrer la vidéo de l'OPP ◀

◇ Cette fois l'onde va vers les x décroissant, « vers la gauche ».

◇ Nous aurions ainsi, toujours en considérant l'abscisse de la bosse $X_b = 2l$

$$X_b = x_x + ct \quad \rightsquigarrow \quad x_b = X_b - ct \quad \rightsquigarrow \quad x_b = 2l - ct$$

◇ Nous retrouvons bien le fait que cette abscisse se « déplace » vers les x décroissant.

★ résumé

◇ Pour f et g deux fonctions quelconques d'une variable

→ $f(x-ct)$ représente une onde progressive vers les x croissant à la célérité c ;

→ $g(x+ct)$ représente une onde progressive vers les x décroissant à la célérité c .

Mettre sous la forme $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ une solution de l'équation de D'ALEMBERT consiste à écrire cette solution sous la forme d'une **O**nde **P**lane

Progressive :

→ *onde* parce que solution de l'équation de D'ALEMBERT ;

→ *plane* par opposition aux ondes sphériques ;

→ *progressives* parce qu'elles avancent.

Nous distinguons :

- les OPP \rightarrow qui est une OPP qui va vers les x (ou les z !) croissant ;
- les OPP \leftarrow qui est une OPP qui va vers les x (ou les z !) décroissant, ces ondes étant parfois appelées *Ondes Planes Régressives*.

★ philosophie de l'onde

- ◇ Ne pas oublier qu'*in fine* le fait que l'onde aille vers les x croissant ou décroissant n'a que peu de réalité physique et que ce qui compte vraiment c'est

La philosophie d'une onde est

« Je suis ici et maintenant ce que j'étais là-bas tout à l'heure. »

- ◇ Par exemple, si nous considérons les points O d'abscisse nulle et le point M d'abscisse x_0 , nous pouvons dire que l'onde en M est la même que celle en O **mais retardé** de la durée qu'il a fallu à l'onde pour voyager entre O et M .
- ◇ Et comme entre O et M il y a la distance c et que l'onde avance à la célérité c , cela donne un retard $t_0 = \frac{x_0}{c}$.
- ◇ La philosophie de l'onde implique donc que

$$y(x_0, t) = y(0, t - t_0) \quad \rightsquigarrow \quad y(x_0, t) = y(0, t - x_0/c)$$

- ◇ Or, pour une onde progressive, nous avons $y(x, t) = f(x - ct)$ donc il faut vérifier

$$f(x_0 - ct) = f(0 - c(t - x_0/c))$$

- ◇ En développant la parenthèse, nous pouvons vérifier l'exactitude de la relation.

II.2.iii – quelques applications numériques

★ propagation dans le fer

- ◇ Avec

$$E = 1,9 \cdot 10^{11} \text{ Pa} \quad \text{et} \quad \rho_{\text{fer}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

- ◇ Nous trouvons $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5,0 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- ◇ Cette valeur explique le comportement des indiens dans les films de cow-boys. S'ils collaient leurs oreilles aux rails c'est non seulement pour entendre le train en avance (puisque le son dans les rails avançait bien plus vite que le train lui-même) mais aussi pour l'entendre de loin car le son, en ne s'échappant pas des rails, pouvait se propager à grande distance.

★ corde de guitare

- ◇ Prenons une corde de guitare en fer, tendue sous une tension de $T_0 = 100 \text{ N}$

$$\rho_{\text{fer}} \quad \text{et} \quad \varnothing = 0,3 \text{ mm} \quad \rightsquigarrow \quad \mu_{\text{fer}} = \rho_{\text{fer}} \times \frac{\pi \varnothing^2}{4}$$

◇ Et ainsi $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$.

◇ Rappelons que les deux valeurs ne sont pas intrinsèquement comparables puisque l'une consiste à la célérité d'onde longitudinales, des ondes de *compression* du fer, alors que l'autre correspond à des ondes transversales.

II.3 – Solutions en Ondes Planes Progressives Monochromatiques (OPPM)

II.3.i – c'est un cas particulier

◇ Insistons : c'est un cas particulier au sens où toutes les solutions ne pourront pas forcément s'écrire sous la forme d'une OPPM.

Une *OPPM* est une **O**nde **P**lane **P**rogressive **M**onochromatique.
Nous dirons aussi parfois OPPH pour **O**nde **P**lane **P**rogressive **H**armonique.

◇ OPPM et OPPH sont deux notions techniquement identiques. La seule différence est que « monochromatique » étant plus souvent associé à des ondes lumineuses, son emploi peut paraître déplacé dans le cas d'ondes non lumineuse.

★ forme

◇ Il s'agit d'une OPP usuelle $y(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ pour laquelle $f(X)$ et $g(X)$ sont des fonctions sinusoïdales.

◇ Ainsi pour une OPP \rightarrow

$$f(X) = A \cos(kX - \varphi) \quad \rightsquigarrow \quad y(x,t) = f(x-ct) = A \cos(k(x-ct) - \varphi) = A \cos(kx - kct - \varphi)$$

Une OPPM \rightarrow s'écrit
 $y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$

Une OPPM \leftarrow s'écrit
 $y(x,t) = A \cos(\omega t + kx + \psi)$

Montrer les vidéos sur les OPPM \rightarrow et OPPM \leftarrow .

◇ Insistons les points bougent de haut en bas uniquement.

La superposition de deux OPPM n'est pas une OPPM.

◇ Sauf si, par hasard, elles ont le même ω , le même k et qu'elles vont dans le même sens. Sauf qu'alors nous ne parlerons pas de deux ondes mais d'une seule.

◇ Considérons en effet la solution « générale »

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) + B \cos(\omega t + kx + \psi)$$

◇ Cette solution **ne peut pas** s'écrire sous la forme

$$y(x,t) = A' \cos(\omega' t - k' c + \varphi') \quad \text{ou} \quad y(x,t) = B' \cos(\omega' t + k' c + \psi')$$

★ nouveau vocabulaire

◇ L'image de l'OPPM nous montre immédiatement une double périodicité.

Le *vecteur d'onde* d'une OPPM est le vecteur :

- de norme k ;
- de direction la direction de propagation ;
- de sens le sens de propagation.

$$\begin{cases} \vec{k} = +k \vec{u}_x & \text{pour une OPPM} \rightarrow \\ \vec{k} = -k \vec{u}_x & \text{pour une OPPM} \leftarrow \end{cases}$$

 Il n'y a **pas** de vecteur d'onde pour les OPP « tout court ».

Double périodicité d'une OPPM

vision temporelle	vision spatiale
pulsation ω	vecteur d'onde k
fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$	nombre d'onde $\sigma = \frac{k}{2\pi}$
période $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$	longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma}$

★ relation de dispersion

La *relation de dispersion* est la relation (*i.e.* l'équation) entre les périodes spatiales et temporelle d'une OPPM.

◇ De manière plus prosaïque c'est l'équation entre ω et k . Mais de manière plus profonde, la relation de dispersion est très importante puisque

La relation de dispersion caractérise le couplage spatio-temporel pour une OPPM.

 Tout comme k n'est défini que pour une OPPM, la relation de dispersion n'existe que pour une OPPM.

 Ici comme ailleurs, comme toujours en fait, pour trouver une relation de dispersion nous allons utiliser l'équation de D'ALEMBERT.

◇ Pour savoir comment se couplent les aspects spatiaux-temporels, il est normal d'utiliser l'équation, la loi, qui les relie : l'équation de D'ALEMBERT.

◇ Nous avons

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{avec} \quad y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

◇ Cela donne, en dérivant deux fois

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = -k^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi))$$

◇ Cela donne

$$-k^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi) = -\frac{1}{c^2} \times \omega^2 A \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \rightsquigarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

◇ Nous aurions obtenu la même chose avec une OPPM \blacktriangleleft .

La relation de dispersion pour l'équation de D'ALEMBERT s'écrit

$$\omega^2 = k^2 c^2$$

II.3.ii – intérêt de l'OPPM

★ c'est un modèle ...

◇ Soyons clair : une OPPM, ça n'existe pas.

◇ En effet, comme la fonction $\cos(X)$ est définie pour tout x , l'écriture d'une OPPM implique :

→ $-\infty < x < +\infty$, *i.e.* que l'onde occupe tout l'espace ;

→ $-\infty < t < +\infty$, *i.e.* que l'onde a toujours existé et qu'elle existera toujours.

◇ Malgré son inexistence « réelle », nous l'utiliserons énormément dans les dispositifs où la propagation obéit à des lois linéaires, car alors nous utiliserons une technique « à la FOURIER » : en superposant des OPPM qui n'existent pas nous arriverons à représenter, à traiter, à étudier une onde qui existe.

★ ... et un intermédiaire de calcul

◇ L'énorme avantage des OPPM c'est qu'elle permet l'utilisation de la notation complexe qui va nous faciliter grandement les calculs.

◇ Considérons la solution

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) + B \cos(\omega t + kx + \psi)$$

◇ Passons-la en notation complexe

$$\underline{y}(x,t) = A e^{j(\omega t - kx + \varphi)} + B e^{j(\omega t + kx + \psi)}$$

Une solution en OPPM \blacktriangleright et OPPM \blacktriangleleft s'écrit, en notation complexe

$$\underline{y}(x,t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{j(\omega t + kx)}$$

◇ C'est *a priori* la forme que nous utiliserons systématiquement lorsque nous chercherons des solutions sous la forme de superposition d'OPPM.

II.4 – Ondes Stationnaires (OS)

II.4.i – c'est encore un cas particulier

- ◇ Insistons : c'est *encore* un cas particulier au sens où toutes les solutions ne pourront pas forcément s'écrire sous la forme d'une onde stationnaire.

Une *OS* est une **O**nde **S**tationnaire.

★ définition

Une *solution stationnaire* d'une équation est une solution qui peut s'écrire sous la forme

$$y(x,t) = f(x) \times g(t)$$

- ◇ Remarquons que la définition vaut aussi pour les équations qui ne sont pas des équations d'onde.

Une *onde stationnaire* est une solution stationnaire de l'équation d'onde.

- ◇ Cela paraît évident, mais le but est d'insister sur le fait qu'il peut y avoir des solutions « non onde » mais stationnaires.

★ OS pour une équation de D'ALEMBERT

🔗 expression

Une onde stationnaire d'une équation de D'ALEMBERT s'écrit

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \times \cos(kx + \psi)$$

- ◇ C'est une expression que nous pourrions utiliser *directement* dans le cas de l'équation de D'ALEMBERT car il n'est pas utile de repasser systématiquement par la démonstration qui suit.

🔗 démonstration

- ◇ Cherchons une solution de l'équation de D'ALEMBERT sous la forme

$$y(x,t) = f(x) \times g(t)$$

- ◇ Injectons cette solution dans l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

- ◇ Nous avons immédiatement

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = f''(x) \times g(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = f(x) \times g''(t)$$

- ◇ Ce qui conduit à

$$f''(x) \times g(t) = \frac{1}{c^2} \times f(x) \times g''(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

◇ Nous pouvons réécrire cette relation sous la forme

$$F(x) = G(t) \quad \text{où} \quad F(x) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{f''(x)}{f(x)} \quad \text{et} \quad G(t) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{c^2} \frac{G''(t)}{G(t)}$$

◇ Cette relation est vraie **pour tout x et tout t** .

◇ En particulier en faisant $t = 0$, nous avons **pour tout x**

$$F(x) = G(0) = C^{\text{te}}$$

◇ Nous pouvons alors en déduire

$$F(x) = G(t) = C^{\text{te}} \stackrel{\text{not}}{=} K$$

◇ $g(t)$ obéit alors à l'équation

$$G(t) = \frac{g''(t)}{c^2 g(t)} = K \quad \rightsquigarrow \quad g''(t) - c^2 g(t) = 0$$

◇ Deux types de solutions sont possibles :

→ soit $-c^2 K > 0$ alors $g(t) = D \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{-c^2 K}$;

→ soit $-c^2 K < 0$ alors $g(t) = D \cosh(\omega t) + \sinh(\omega t)$ qui est une solution qui diverge ce qui n'est pas possible avec un milieu *passif*.

◇ La seule solution physiquement possible est donc

$$g(t) = D \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad -c^2 K = \omega^2$$

◇ Pour l'équation en $f(x)$

$$F(x) = \frac{f''(x)}{f(x)} = K = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad \rightsquigarrow \quad f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

◇ La solution est alors immédiate

$$f(x) = E \cos(\omega, x/c + \psi) \stackrel{\text{not}}{=} E \cos(kx + \psi)$$

◇ D'où le résultat.

II.4.ii – visualisation

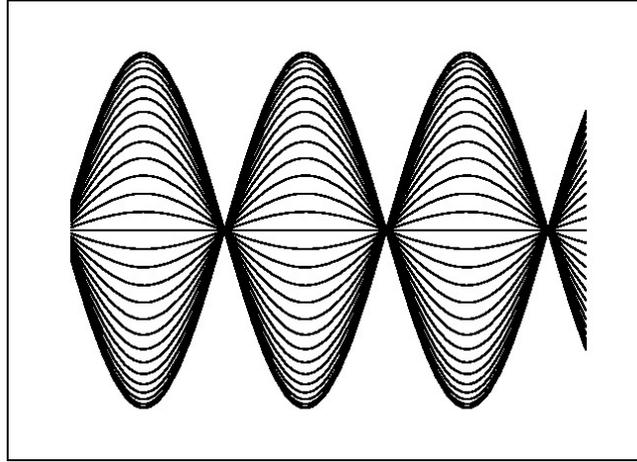
Montrer la vidéo d'une OS.

◇ Nous pouvons voir la solution sous la forme

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) = \text{amplitude}(x) \times \cos(\omega t + \varphi)$$

◇ En représentant sur un même schéma $y(x,t)$ à différents instants cela donne le graphe 17 suivant.

Graphique 17



Pour une onde stationnaire :

- un *nœud de vibration* est une zone où les vibrations sont d'amplitude nulle ;
- un *ventre de vibration* est une zone où les vibrations sont d'amplitude maximale.

II.5 – Changement de description

- ◇ La question est maintenant de savoir s'il est possible techniquement et intéressant physiquement de passer d'une représentation à une autre.

II.5.i – à partir d'une OS

★ vers OPPM

- ◇ Nous pouvons nous baser sur la relation trigonométrique

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

- ◇ Cela donne

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \\ &= \frac{A}{2} \cos(\omega t + kx + \varphi + \psi) + \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx + \varphi - \psi) \\ &= \text{OPPM} \leftarrow + \text{OPPM} \rightarrow \end{aligned}$$

Une onde stationnaire pour l'équation de D'ALEMBERT peut être vue comme la superposition de deux OPPM de même amplitude, l'une allant vers les x croissant et l'autre allant vers les x décroissant.

★ vers OPP

- ◇ Une OPPM étant une OPP, le résultat est immédiat.

Une onde stationnaire pour l'équation de D'ALEMBERT peut être vue comme la superposition de deux OPP, l'une allant vers les x croissant et l'autre allant vers les x décroissant.

II.5.ii – à partir d'une OPPM

★ vers OS

◇ Considérons une OPPM avec $\varphi = 0$

$$y(x,t) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t) \cos(kx) - A \sin(\omega t) \sin(kx) \neq f(x) \times g(t)$$

◇ Visiblement il ne peut pas s'agir d'une OS.

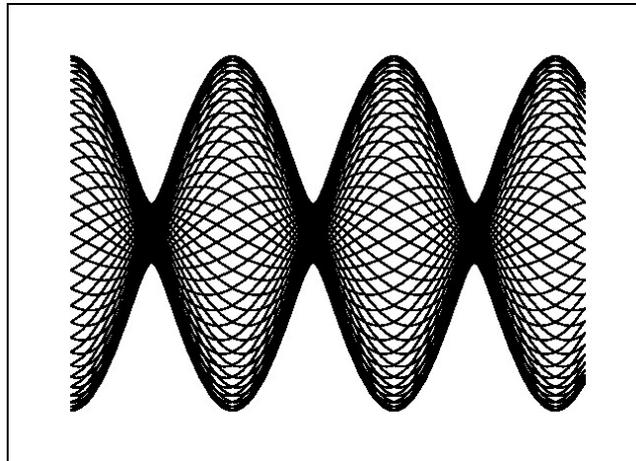
◇ En superposant cette fois une OPPM d'amplitude A et une OPPM d'amplitude $B \stackrel{\text{not}}{=} A + \delta A$ nous obtenons

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A \cos(\omega t - kx) + B \cos(\omega t + kx) \\ &= A (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)) + \delta A \cos(\omega t + kx) \\ &= 2A \cos(\omega t) \times \cos(kx) + \delta A \cos(\omega t + kx) \end{aligned}$$

◇ Et ce n'est pas une onde stationnaire.

◇ Représentons une telle onde à différents instants.

Graphique 18



Montrer la vidéo d'une superposition de deux OPPM.

★ vers OPP

◇ C'est une traduction inutile puisque une OPPM est déjà une OPP.

II.5.iii – à partir d'une OPP

◇ Nous pouvons écrire une OPP sous la forme d'une somme d'OPPM avec une technique « à la FOURIER » :

→ soit l'OPP est périodique et la superposition donne une somme discrète dite « série de FOURIER » ;

→ soit l'OPP n'est pas périodique et la superposition donne une somme continue dite « transformée de FOURIER ».

II.5.iv – superpositions

◇ N'oublions pas quelques interprétations qualitatives.

Une superposition d'OPP n'est pas forcément une OPP.

◇ En effet

$$y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \neq h(x-ct)$$

Une superposition d'OPP \Rightarrow (resp. d'OPP \Leftarrow) est une OPP \Rightarrow (resp. OPP \Leftarrow).

◇ Le résultat est immédiat :

$$y(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x-ct) = F(x-ct) \quad \text{avec} \quad F(X) = f_1(X) + f_2(X)$$

Une superposition d'OPPM n'est pas forcément une OPPM.

◇ Les raisons sont les mêmes que pour les OPP.

Une superposition d'OS n'est pas forcément une OS.

◇ En effet

$$y(x,t) = f_1(x) \times g_1(t) + f_2(x) \times g_2(t) \neq f(x) \times g(t)$$

II.6 – L'équation de D'ALEMBERT n'est qu'une équation différentielle

◇ Il ne faut pas oublier que malgré son apparente complexité, l'équation de D'ALEMBERT est analogue à une EDL usuelle.

EDL 1	équation de D'ALEMBERT
$\frac{dy}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} y(t) = 0$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$
$y(t) = \lambda e^{-t/\tau}$	$y = \begin{cases} f(x-ct) + g(x+ct) \\ \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)} \\ A \cos(\omega t + \varphi) \times \cos(kx + \psi) \end{cases}$
constante d'intégration : λ	constantes d'intégration : $\underline{A}, \underline{B}, A, \varphi, \psi$

III – Tenir compte des conditions aux limites

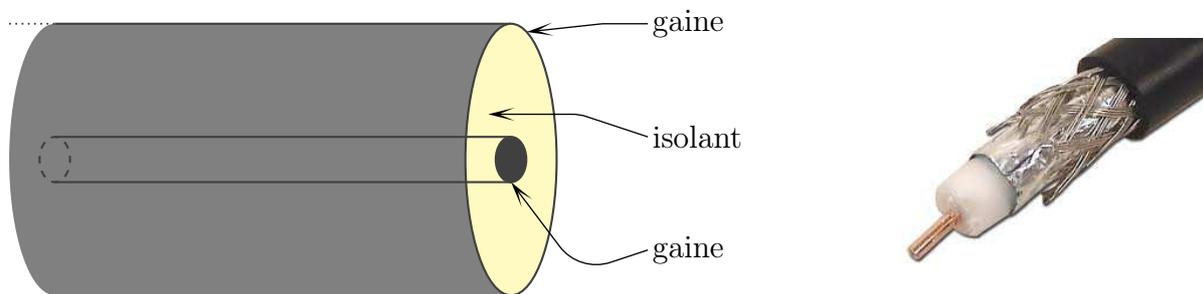
- ◇ Nous allons « résoudre » deux problèmes particuliers de propagation d'onde et, pour le premier, nous allons mettre en équation un dispositif propagatif classique : le câble coaxial.

III.1 – Équation de propagation dans un câble coaxial

III.1.i – présentation

★ la fin de l'ARQS

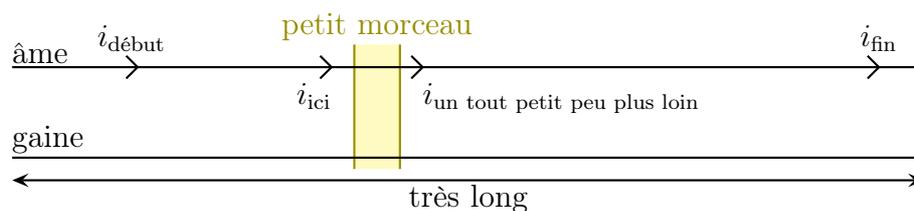
- ◇ Le câble coaxial se compose de deux conducteurs coaxiaux (d'où le nom) :
- l'âme, qui est le conducteur au centre ;
 - la gaine qui est le conducteur autour de l'âme et qui est en général reliée à la masse.
- ◇ Entre les deux il y a évidemment un isolant pour éviter tout contact entre les deux conducteurs.



- ◇ Outre en TP d'électrocinétique, ces câbles sont utilisés couramment pour la transmission des ondes reçues par satellite ou par des antennes jusqu'à un décodeur ou une télévision.
- ◇ Le fait est que ces câbles peuvent devenir longs et que, dans ces conditions, nous n'avons pas $l \ll cT$.

Un câble coaxial pris dans sa globalité ne fonctionne pas dans l'ARQS.

- ◇ En représentant la partie électrocinétique d'un câble par les deux fils qui les composent, nous avons, dans le dessin suivant $i_{\text{début}} \neq i_{\text{fin}}$



- ◇ En revanche, nous pouvons toujours observer des « tranches » de câble et ces tranches (de quelques centimètres par exemple) tombent, elles, sous le coup de l'ARQS et là nous avons

$$i_{\text{ici}} = i_{\text{un tout petit peu plus loin}}$$

★ le modèle mésoscopique ou le retour de la l'ARQS

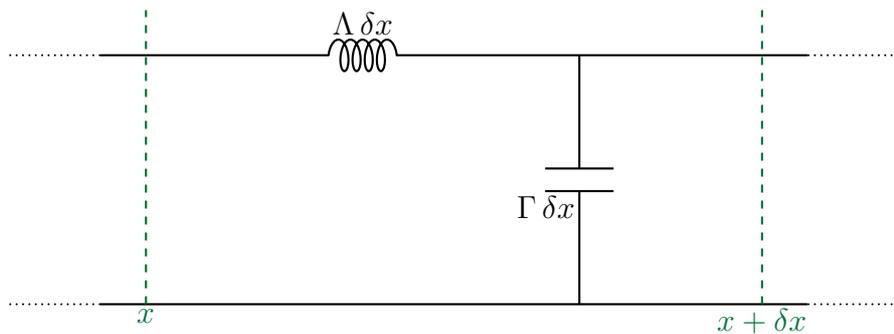
- ◇ Le fait que deux conducteurs soient très proches l'un de l'autre implique un certain effet capacitif puisqu'un condensateur n'est autre qu'un ensemble de deux conducteurs espacés par un isolant.
- ◇ Comme nous ne l'avons encore pas vu, le fait que deux conducteurs soient très proches va impliquer un effet inductif car le courant qui circule dans l'un va influencer le courant qui circule dans l'autre

par l'intermédiaire du champ \vec{B} créé. Mais ceci est une autre histoire et nous y reviendrons dans le chapitre consacré à l'induction.

◇ Finalement la portion de câble coaxial située entre x et $x + \delta x$ peut se modéliser par une association de deux composants :

- une bobine d'inductance $L = \Lambda \delta x$ avec Λ l'inductance *linéique* (donc en H.m^{-1});
- un condensateur de capacité $C = \Gamma \delta x$ avec Γ la capacité *linéique* (donc en F.m^{-1}).

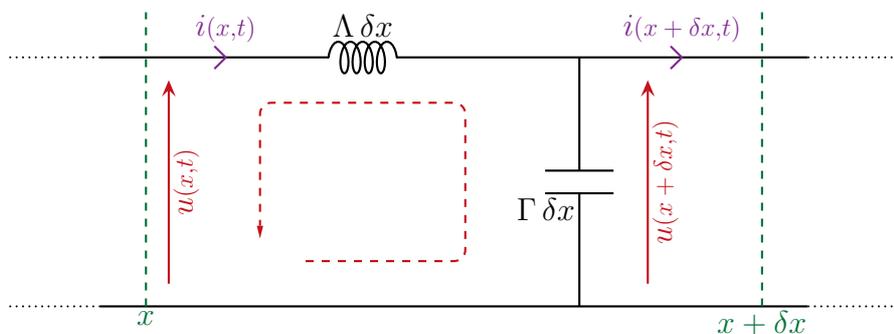
◇ Le schéma équivalent pour une portion de câble est donc



III.1.ii – équation de propagation

★ le « circuit »

◇ Étudions d'un peu plus près ce qui se passe entre x et $x + \delta x$ et pour cela introduisons les deux grandeurs pertinentes de l'électrocinétique : le courant et la tension.



★ loi des mailles

◇ Écrivons la loi des mailles dans la maille représentée et manipulons

$$u(x + \delta x, t) + \Lambda \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - u(x, t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{u(x + \delta x, t) - u(x, t)}{\delta x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$$

◇ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous voyons apparaître une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (\text{éq. maille})$$

◇ Il s'agit là de la première relation de couplage.

★ loi des nœuds

◇ Écrivons la loi des nœuds pour le seul nœud du circuit

$$i(x,t) = i(x + \delta x, t) + \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x + \delta x, t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{i(x + \delta x, t) - i(x, t)}{\delta x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x + \delta x, t)$$

◇ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous voyons apparaître une dérivée partielle à gauche et une simplification à droite

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (\text{éq.nœud})$$

◇ C'est la deuxième relation de couplage.

★ équations de D'ALEMBERT

👉 pour $u(x, t)$

◇ Dérivons (éq.maille) par rapport à x et (éq.nœud) par rapport à t . Cela donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t) = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

🛑 Attention au sens d'écriture : la première dérivée effectuée est celle écrite à droite

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) \right)$$

THÉORÈME DE SCHWARZ

Pour une fonction $f(x, y)$ suffisamment régulière

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right)$$

◇ En physique, toutes les fonctions sont suffisamment régulières donc nous pouvons remplacer $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}(x, t)$ par son expression et nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -\Lambda \left(-\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \right)$$

◇ Et finalement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}$$

◇ Il s'agit bien d'une équation de D'ALEMBERT.

👉 pour $i(x, t)$

◇ Pour trouver l'équation « en $i(x, t)$ » nous allons éliminer les $u(x, t)$ et pour cela faire apparaître la double dérivée croisée de $u(x, t)$.

◇ Dérivons (éq.maille) par rapport à t et (éq.nœud) par rapport à x . Cela donne

$$-\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t)$$

◇ Nous obtenons ainsi

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = -\Gamma \left(-\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) \right) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t)$$

◇ Remarquons que non seulement $i(x,t)$ obéit aussi à une équation de D'ALEMBERT mais qu'en plus c'est la même équation que celle vérifiée par $u(x,t)$.

III.2 – Grandeurs duales

III.2.i – équations couplées

★ pour le câble

◇ Reprenons les équations de couplage c'est-à-dire (éq.maille) et (éq.nœud)

$$-\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial i}{\partial x}(x,t)$$

◇ Nous pouvons constater qu'elles sont similaires puisqu'elles s'écrivent toutes les deux sous la forme

$$-C^{\text{te}} \times \frac{\partial \text{qqch}}{\partial t} = \frac{\partial \text{truc}}{\partial x}$$

Des grandeurs *duales* sont des grandeurs qui obéissent à des équations couplées, en général symétriques.

Pour qu'il y ait propagation il est nécessaire d'avoir des échanges énergétiques entre les grandeurs duales.

◇ Pour le câble coaxial, les grandeurs duales sont $u(x,t)$ et $i(x,t)$ et comme nous le verrons dans la suite, les énergies associées sont l'énergie électrique en $u^2(x,t)$ et l'énergie magnétique en $i^2(x,t)$.

★ pour la corde

◇ Bien que cela ne se voit pas spontanément, il y a des équations de couplage pour la propagation le long d'une corde. Essayons de les retrouver.

🔗 PFD

◇ Le PFD nous avait mené à

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$$

◇ Nous pouvons réécrire cette expression sous la forme

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \times \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right)$$

◇ En remarquant que $T_0 \times \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = T_0 \times \alpha(x,t) = T_y(x,t)$

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial T_y}{\partial x}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad -\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial(-T_y)}{\partial x}(x,t)$$

◇ Il s'agit bien d'une équation de couplage entre v_y et $(-T_y)$.

🔗 relation géométrique

◇ Lors de la mise en équation, nous avons vu que

$$\alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \quad \text{et} \quad T_y(x,t) = T_0 \alpha(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad T_y(x,t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

◇ En dérivant la relation précédente par rapport au temps nous obtenons

$$\frac{\partial T_y}{\partial t}(x,t) = T_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial T_y}{\partial t}(x,t) = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \right)$$

◇ Et comme $v_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$

$$\frac{\partial T_y}{\partial t}(x,t) = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial(-T_y)}{\partial t}(x,t) = -T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}(x,t)$$

◇ Nous obtenons donc une 2^e équation de couplage qui confirme que les grandeurs duales sont v_y et $(-T_y)$.

◇ Le signe « $-$ » de $(-T_y)$ se comprend par le fait que $(-T_y)$ est la force qu'exerce un bout de corde sur la portion à droite, *i.e.* dans le sens de \vec{u}_x , *i.e.* dans le sens « naturel » de propagation.

◇ Comme T_y faisait référence à la force que la droite exerçait sur la gauche, nous noterons $T_y^+ \stackrel{\text{not}}{=} -T_y$ la force qui s'exerce dans le sens de $+\vec{u}_x$ *i.e.* de la gauche sur la droite.

★ de manière générale

◇ Les grandeurs duales sont souvent choisies de sorte que leur produit soit homogène à une puissance.

◇ C'est bien le cas ici puisque

$$u \times i \equiv \mathcal{P} \quad \text{et} \quad v_y \times T_y^+ \equiv \mathcal{P}$$

◇ Finalement nous pouvons dire que les grandeurs duales caractérisent l'état d'une portion mésoscopique du milieu propagatif.

III.2.ii – impédance d'un milieu propagatif

◇ Comme nous allons le voir, il est possible de relier directement les expressions des grandeurs duales.

★ pour le câble coaxial

🔗 OPP se dirigeant vers les x croissants

Si une onde de courant le long d'un câble coaxial est une OPP \blacktriangleright , alors l'onde en tension est une OPP \blacktriangleright qui lui est proportionnelle

$$u(x,t) = +Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

◇ Pour le démontrer, partons de l'expression générale d'une OPP \blacktriangleright pour l'onde en courant

$$i(x,t) = f(x - ct)$$

◇ Injectons cette solution dans l'équation de couplage (éq.maille)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} (f(x - ct)) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = +\Lambda c f'(x - ct)$$

◇ Intégrons par rapport à x .

$$u(x,t) = c\Lambda f(x - ct) + h(t)$$

◇ La « constante » qui apparaît n'est une constante que par rapport à x , c'est donc bien une fonction du temps.

◇ Toutefois en tant que fonction du temps *seule*, cela ne peut pas être une solution *ondulatoire* de l'équation de D'ALEMBERT car ces dernières font intervenir des phénomènes spatiaux *et* temporels.

◇ Étant donné que $h(t)$ ne représente pas une solution propagative **et** que l'équation de D'ALEMBERT est linéaire, nous pouvons nous permettre de ne pas la prendre en compte sans même chercher à la déterminer.

◇ Dès lors il reste

$$u(x,t) = c\Lambda f(x - ct) \rightsquigarrow u(x,t) = Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

🕒 OPP se dirigeant vers les x décroissants

Si une onde de courant le long d'un câble coaxial est une OPP \blacktriangleleft , alors l'onde en tension est une OPP \blacktriangleleft qui lui est proportionnelle

$$u(x,t) = -Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

◇ Pour le démontrer, utilisons le même raisonnement que celui qui précède et partons de l'expression générale d'une OPP \blacktriangleleft pour l'onde en courant

$$i(x,t) = g(x + ct)$$

◇ Injectons cette solution dans l'équation de couplage (éq.maille)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} (g(x + ct)) \rightsquigarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\Lambda c g'(x + ct)$$

◇ Intégrons par rapport à x .

$$u(x,t) = -c\Lambda g(x + ct) + h(t)$$

◇ Encore une fois nous voyons apparaître un terme non propagatif que nous pouvons mettre de côté et il reste

$$u(x,t) = -c\Lambda g(x + ct) \rightsquigarrow u(x,t) = -Z_c i(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \Lambda c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

🔗 cas général

Si une onde de courant le long d'un câble coaxial est une somme d'OPP notées $i(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, alors l'onde en tension est aussi une somme OPP

$$u(x,t) = +Z_c (f(x-ct) - g(x+ct)) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

Z_c est appelée *impédance caractéristique*.

Dans le cas du câble coaxial, l'impédance caractéristique est homogène à une résistance.

◇ Cela se voit très bien à partir de l'expression du facteur de qualité d'un circuit *RLC*

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \equiv \sqrt{\frac{L/\ell}{C/\ell}} \equiv \sqrt{\frac{L}{C}} \equiv Q R \equiv R$$

◇ En TP les câbles coaxiaux ont une impédance caractéristique de 50Ω comme c'est parfois écrit dessus. Que 50Ω soit précisément l'impédance d'entrée des GBF n'est pas une coïncidence comme nous le verrons dans la suite.

STOP Attention de ne pas confondre : les câbles coaxiaux en TP ont une résistance très faible. L'impédance caractéristique de 50Ω renvoie à des caractéristiques électrocinétiques propagatives et non à des caractéristiques statiques.

◇ Pour les câbles antenne, l'impédance caractéristique est de 75Ω .

★ pour la corde

◇ Pour trouver l'impédance caractéristique, *i.e.* le facteur de proportionnalité entre les grandeurs duales, nous allons faire comme pour le câble à savoir partir d'une équation de couplage.

◇ Supposons que $v_y(x,t)$ soit une OPP de la forme $v_y(x,t) = f(x-ct)$.

◇ Écrivons la relation de couplage

$$-\mu \frac{\partial v_y}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial T_y^+}{\partial x} \quad \rightsquigarrow \quad -\mu \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = \frac{\partial T_y^+}{\partial x}$$

◇ Et ainsi

$$\mu c f'(x-ct) = \frac{\partial T_y^+}{\partial x}$$

◇ En primitivant par rapport à x et en mettant de côté le terme non propagatif, nous arrivons à

$$T_y^+ = \mu c f(x-ct) + h(t) \quad \rightsquigarrow \quad T_y^+ = Z_c v_y(x,t) \quad \text{avec} \quad Z_c = \mu c$$

Pour une corde obéissant à l'équation de D'ALEMBERT, si $v_y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ alors

$$T_y^+(x,t) = Z_c (f(x-ct) + g(x+ct)) \quad \text{avec} \quad Z_c = \sqrt{\mu T_0}$$

◇ Un moyen **purement mnémotechnique** pour se souvenir que dans le cas de la corde $T = Z v$ est de se souvenir que $u = Z i$ (facile) et que

→ T est une force, qu'une force peut dériver d'une énergie *potentielle* et donc que c'est analogue à u qui est une différence de *potentiel*;

→ v est une *vitesse* donc c'est analogue à i dont la densité surfacique $j = \rho v$ fait intervenir la *vitesse* des porteurs de charge..

◇ En ce qui concerne l'homogénéité, en prenant les unités en lieu et place des dimensions

$$Z_c = \mu c \equiv \sqrt{\text{kg.m}^{-1} \times \text{kg.m.s}^{-2}} \equiv \text{kg.s}^{-1} \neq \Omega$$

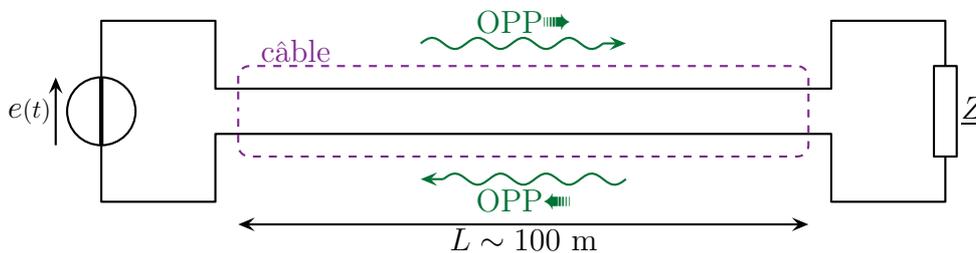
III.3 – Réflexion et transmission

III.3.i – à l'extrémité d'un milieu propagatif

★ câble coaxial

🕒 situation

◇ Considérons la situation simple suivante où un câble coaxial est relié à un GBF *idéal* et à une impédance quelconque.



◇ Analyse physique :

- nous avons affaire à une propagation dans un milieu unidimensionnel donc *a priori* nous aurons deux ondes : une OPP \rightarrow et une OPP \leftarrow ;
- comme la source énergétique est le GBF et que celui-ci va naturellement être considéré comme sinusoïdal, nous pouvons dire que les ondes seront des OPPM;
- en terme de grandeurs pertinentes nous avons : Z_c (caractéristique du milieu), c (célérité), L (géométrie), ω , E et \underline{Z} (contraintes).

◇ Analyse technique :

- OPPM ? notation complexe !
- nous avons deux ondes donc pour les déterminer *entièrement* il nous faut deux conditions aux limites. Cela tombe bien, il y a deux extrémités au câble;
- en terme de repérage, nous avons le choix pour la position du $x = 0$. Le plus naturel est de placer $x = 0$ au niveau de la source;
- nous avons le choix de résoudre en courant ou en tension. Comme nous savons que les OPP sont proportionnelles, mieux vaut choisir les ondes en courant comme inconnues de manière à faire apparaître des produits avec Z_c pour les ondes en tension.

🕒 solution

◇ Comme nous savons qu'il s'agit d'OPPM, nous pouvons écrire

$$\underline{i}(x,t) = \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kx)} + \underline{I}_- e^{j(\omega t + kx)}$$

◇ Les deux grandeurs à déterminer, les deux « inconnues » sont donc \underline{I}_+ et \underline{I}_- .

◇ Nous pouvons donc écrire tout de suite

$$\underline{u}(x,t) = Z_c \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kx)} - Z_c \underline{I}_- e^{j(\omega t + kx)}$$

🔗 conditions aux limites

- ◇ Tout d'abord en $x = 0$, la tension au bout du câble n'est autre que celle imposée par le GBF. Cela donne

$$u(0,t) = e(t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{u}(0,t) = E e^{j\omega t}$$

- ◇ Et ainsi

$$Z_c \underline{I}_+ e^{j\omega t} - Z_c \underline{I}_- e^{j\omega t} = E e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad Z_c \underline{I}_+ - Z_c \underline{I}_- = E$$

- ◇ Traduisons maintenant l'autre condition aux limites, celle en $x = L$.
 ◇ En $x = L$, le courant $i(L,t)$ qui sort du câble traverse l'impédance et le câble impose sa tension ce qui implique

$$\underline{u}(L,t) = \underline{Z} i(L,t)$$

- ◇ Cela donne, avec les expressions de $\underline{u}(x,t)$ et $\underline{i}(x,t)$

$$Z_c \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kL)} - Z_c \underline{I}_- e^{j(\omega t + kL)} = \underline{Z} \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kL)} + \underline{Z} \underline{I}_- e^{j(\omega t + kL)}$$

- ◇ Cela conduit à

$$(Z_c - \underline{Z}) \underline{I}_+ e^{-jkL} - (Z_c + \underline{Z}) \underline{I}_- e^{jkL} = 0$$

🔗 solutions

- ◇ Les deux conditions aux limites aboutissent donc au système

$$\begin{cases} Z_c \underline{I}_+ - (Z_c + \underline{Z}) \underline{I}_- = E \\ (Z_c - \underline{Z}) e^{-jkL} \underline{I}_+ - (Z_c + \underline{Z}) e^{jkL} \underline{I}_- = 0 \end{cases}$$

- ◇ Les solutions sont

$$\underline{I}_+ = \frac{-(Z_c + \underline{Z}) E e^{jkL}}{Z_c (Z_c - \underline{Z}) e^{-jkL} - Z_c (Z_c + \underline{Z}) e^{jkL}} \quad \text{et} \quad \underline{I}_- = \frac{-(\underline{Z} - Z_c) E e^{-jkL}}{-Z_c (Z_c + \underline{Z}) e^{jkL} + Z_c (Z_c - \underline{Z}) e^{-jkL}}$$

- ◇ Le résultat, et surtout son expression, n'est pas en soi intéressant. Mais nous allons le commenter.

🔗 coefficient de réflexion

Un *coefficient de réflexion* est défini en une extrémité d'un milieu propagatif par

$$r = \frac{\text{amplitude de la grandeur réfléchie}}{\text{amplitude de la grandeur incidente}}$$

Pour les milieux linéaires, le coefficient de réflexion est indépendant de l'amplitude de la grandeur incidente.



Lorsque nous parlerons de « coefficient de réflexion » il faudra bien préciser de *quelle* grandeur duale nous parlons.

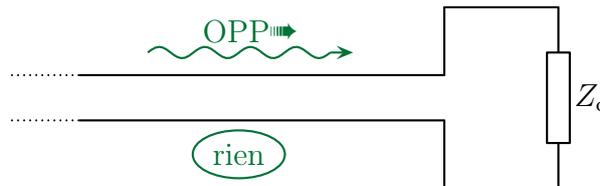
✧ Ici nous pouvons aisément trouver l'expression du coefficient de réflexion en intensité au point $x = L$

$$r_i = \frac{I_- e^{jkL}}{I_+ e^{-jkL}} = \frac{(Z - Z_c) E}{(Z + Z_c) E} \rightsquigarrow r_i = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$$

✧ Nous voyons aussi quelque chose de très important : lorsque $Z = Z_c$ alors il n'y a plus d'onde réfléchie !

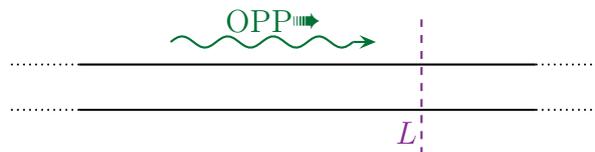
Lorsqu'un milieu propagatif est fermé sur son impédance caractéristique, cela implique qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

✧ Regardons la situation « réelle » en $x = L$: une onde arrive et « rien » ne revient.



✧ Mettons-nous à la place de l'onde qui arrive en $x = L$:

- quand nous arrivons, nous « voyons » une impédance Z_c **exactement comme si** c'était une portion de câble ;
- nous, en tant qu'onde, « entrons » dans cette impédance mais n'avons aucune raison d'en « sortir » tout comme nous n'avons pas de raison, en tant qu'onde, de revenir sur nos pas en plein milieu d'une zone propagative.



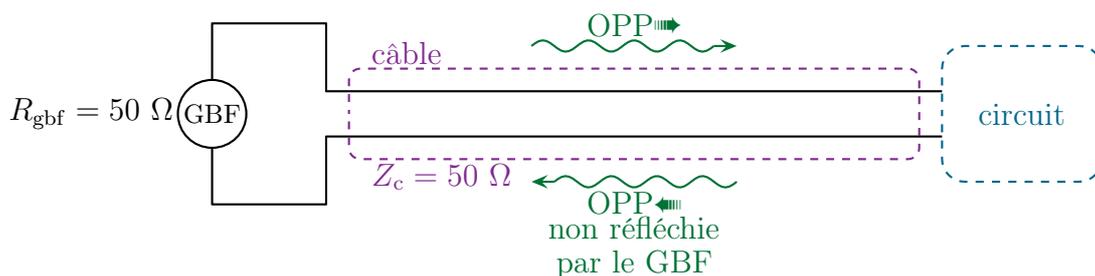
Une impédance caractéristique permet de simuler l'infini propagatif.

✧ Donc les fois où nous rencontrerons un exercice parlant de milieu « infini » cela ne sera absolument pas une approximation grossière de la réalité mais une *autre* traduction du fait que le milieu est fermé sur son impédance caractéristique.

✧ Remarquons qu'en optique aussi, nous pouvons accéder de manière rigoureuse à l'infini : avec le plan focal d'une lentille convergente.

★ application aux TP

✧ Le fait qu'une onde ne se réfléchit pas lorsqu'en bout de milieu propagatif elle rencontre son impédance caractéristique explique pourquoi un GBF possède une résistance interne de 50Ω .



- ◇ En reliant le GBF à un circuit *a priori* quelconque, il va y avoir des phénomènes de réflexion et une onde risque de « revenir » vers le GBF.
- ◇ Pour éviter que l'onde qui revient soit à nouveau renvoyée dans le circuit au risque de créer un phénomène de résonance potentiellement destructif, une résistance équivalente de 50Ω est placée dans le GBF de manière à absorber l'onde retour.

★ traduire les conditions aux limites pour une corde

- ◇ Il y a quelques cas à connaître dont le plus classique est le premier.

Pour une corde fixée à une extrémité



$y(\text{extrémité}, t) = 0$ ou $v_y(\text{extrémité}, t) = 0$

- ◇ Parfois nous rencontrons une autre condition, plus difficile à réaliser en pratique.

Pour une corde fixée à un anneau sans masse coulissant sans frottement



$T_y(\text{extrémité}, t) = 0$

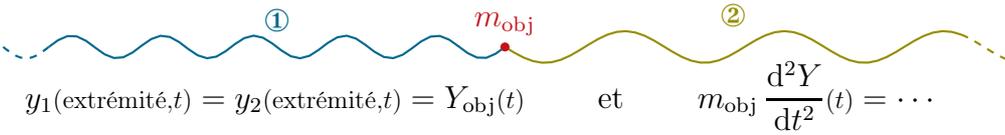
- ◇ L'explication est immédiate.
- ◇ Écrivons le PFD pour l'anneau sans masse

$$\underbrace{0}_m \times \vec{a} = \underbrace{\vec{0}}_{\text{poïds}} + R_{\text{tige} \rightarrow \text{anneau}} + \underbrace{(-\vec{T})}_{\text{gauche sur droite}}$$

- ◇ En projetant sur \vec{u}_y et sachant que la réaction anneau / tige se fait sans frottement, nous obtenons

$$0 = 0 - T_y(\text{extrémité}, t)$$

Lorsqu'une corde est accrochée à quelque chose (ressort, masse...), une condition aux limites est donnée par la continuité de la corde et l'autre est donnée par le PFD sur l'objet accroché.



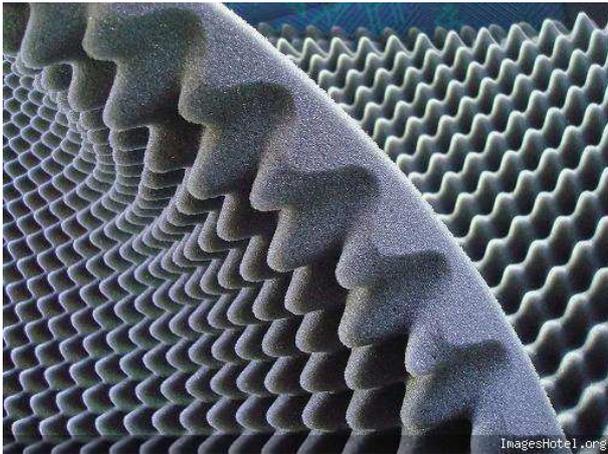
$y_1(\text{extrémité}, t) = y_2(\text{extrémité}, t) = Y_{\text{obj}}(t)$ et $m_{\text{obj}} \frac{d^2 Y}{dt^2}(t) = \dots$

★ cas à retenir parmi tous

- ◇ Et n'oublions pas la condition que nous utiliserons régulièrement

Lorsqu'une corde est fermée sur son impédance caractéristique, il n'y a pas d'onde réfléchi.

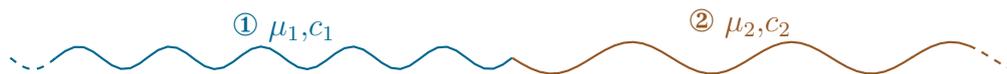
- ◇ Nous ne savons pas trop ce qu'est cette « impédance caractéristique » sans aucun doute un mélange de ressort et d'amortisseur.
- ◇ Peu importe ce qu'est, ou non, cette « impédance caractéristique », cette condition se traduit immédiatement par la suppression d'une onde donc d'une « inconnue ».
- 👉 *Remarque.* Dans les studios d'enregistrement, des « impédances caractéristiques » d'ondes sonores sont plaquées contre les murs de sorte qu'il n'y ait pas de réflexion / d'écho lors de l'enregistrement (ici le studio d'enregistrement 44 à Bouguenais, près de Nantes¹).



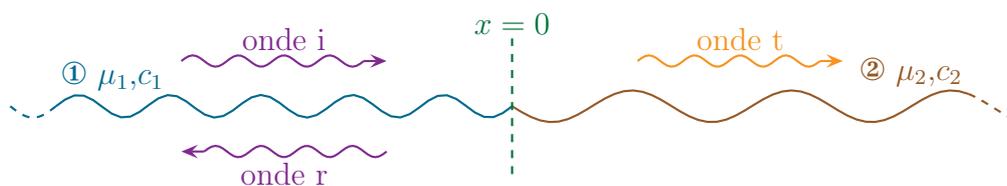
III.3.ii – jonction entre deux milieux propagatifs

★ situation

- ◇ Considérons deux cordes différentes (*i.e.* de masses linéiques différentes) semi-infinie et attachée ensemble.



- ◇ Regardons ce qui se passe lorsqu'une onde arrive au niveau de la jonction.
- ◇ Analyse physique :
 - une onde arrive sur une discontinuité entre deux milieux propagatifs, il y a donc *a priori* une onde réfléchi et une onde transmise ;
 - nous savons que la propagation et les milieux sont linéaires donc nous pouvons dire que **toutes** les grandeurs seront proportionnelles ;
 - comme les milieux propagatifs sont différents, les célérités sont elles aussi *a priori* différentes ;
 - ici rien n'impose que l'onde incidente soit une OPPM.



1. Ce n'est pas que l'auteur fait de la publicité pour ce studio, c'est surtout que l'auteur n'a trouvé que cette photo sur internet où les murs étaient aussi visibles.

◇ Analyse technique :

- en considérant l'onde incidente comme « contrainte », les ondes « réfléchi » et « transmise » sont donc les deux inconnues ;
- deux inconnues donc deux conditions aux limites : la continuité de la position et un PFD sur le point de jonction ;
- nous allons chercher des solutions sous la forme d'une OPP car rien n'impose une OPPM ;
- comme ici **un seul** point nous intéresse, *i.e.* nous n'avons pas de vision globale de l'onde et des milieux propagatifs, nous allons utiliser une vision temporelle des ondes.

★ une autre forme de solution

Les solutions de l'équation de D'ALEMBERT s'écrivent, au choix

- soit sous forme spatiale $y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$;
- soit sous forme temporelle $y(x,t) = F(t - x/c) + G(t + x/c)$.

◇ La démonstration est très simple :

$$f(x - ct) = f(-c(t - x/c)) = F(t - x/c) \quad \text{et} \quad g(x + ct) = g(c(t + x/c)) = G(t + x/c)$$

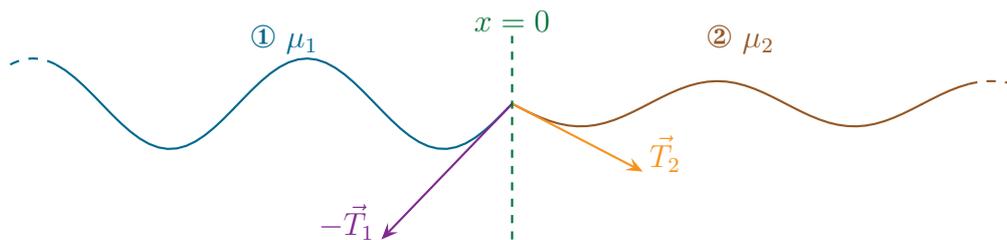
◇ Nous écrivons donc :

- $F(t - x/c_1)$ l'onde incidente, considérée comme connue ;
- $G(t + x/c_1)$ l'onde réfléchi, inconnue ;
- $H(t - x/c_2)$ l'onde réfléchi, inconnue.

★ conditions aux limites

🕒 la jonction

◇ Faisons un dessin.



◇ L'onde « à gauche », celle dans le milieu ①, s'écrit

$$y_1(x,t) = F(t - x/c_1) + G(t + x/c_1)$$

◇ L'onde « à droite », celle dans le milieu ②, s'écrit

$$y_2(x,t) = H(t - x/c_2)$$

🕒 continuité de la corde

◇ Comme les deux cordes sont attachées en $x = 0$, nous pouvons écrire

$$y_1(0^-,t) = y_2(0^+,t) \quad \rightsquigarrow \quad F(t) + G(t) = H(t)$$

🔗 le PFD

- ✧ Écrivons le PFD pour le point matériel *entre* les deux cordes. Ce point matériel est un point de masse nulle.
- ✧ Commençons par la projection sur \vec{u}_x

$$0 \times \ddot{x}(t) = -T_1 + T_2$$

- ✧ Sachant que la composante horizontale de la tension est une constante T_1 sur la portion gauche et est une constante T_2 sur la portion à droite, nous trouvons

$$T_1 = T_2 \stackrel{\text{not}}{=} T_0$$

- ✧ En projetant le PFD sur ce même point de masse nulle sur \vec{u}_y , nous obtenons

$$0 \times \ddot{y}(t) = -T_{1y(0^-,t)} + T_{2y(0^+,t)}$$

- ✧ N'oublions pas que nous avons défini $T(x,t)$ comme la force exercée par la droite sur la gauche. C'est ce qui explique la présence du signe « - ».
- ✧ Avec l'expression de $T(x,t)$ pour une corde, nous obtenons

$$-T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0^-,t) + T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(0^+,t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_1}{\partial x}(0^-,t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(0^+,t)$$

🔗 autre vision du PFD

- ✧ La démonstration (et donc le résultat) précédent est juste. Malgré tout il est possible de raffiner la démonstration.
- ✧ Écrivons le PFD à un morceau mésoscopique de corde compris entre 0 et $+\delta x$.
- ✧ Comme l'ensemble de ce petit bout de corde est « à droite » sa masse vaut $\mu_2 \delta x$.
- ✧ La force exercée par la portion à gauche est la force exercée par la corde ① donc sa composante sur \vec{u}_y s'écrit

$$T_g = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t)$$

- ✧ De même la composante sur \vec{u}_y de la force exercée par la portion droite s'écrit

$$T_d = +T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(\delta x,t)$$

- ✧ Finalement le PFD donne

$$\mu_2 \delta x \ddot{Y}(t) = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) + T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(\delta x,t)$$

- ✧ Comme $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ sont deux fonctions différentes, il n'est pas question de faire un développement de TAYLOR comme lors de la mise en équation d'une corde.
- ✧ En faisant tendre $\delta x \rightarrow 0$ nous retrouvons bien le résultat.

🔗 dernière méthode pour retrouver le PFD

- ✧ Le plus facile à s'imaginer et à écrire reste encore peut-être d'introduire une vraie masse m entre les deux cordes.
- ✧ De là nous pouvons écrire le PFD ce qui, en négligeant la pesanteur, conduit à²

2. Le lecteur vérifiera

$$m \ddot{Y}(t) = -T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) + T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t)$$

◇ Et il ne reste plus qu'à faire $m = 0$.

🔗 traduction du PFD

◇ N'oublions que nous cherchons les ondes réfléchi et transmise. Il nous faut donc traduire « en F , G et H » la condition trouvée.

◇ Exprimons $\frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t)$ et pour cela commençons par $\frac{\partial y_1}{\partial x}(x,t)$:

$$y_1(x,t) = F(t - x/c_1) + G(t + x/c_1) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_1}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{c_1} F'(t - x/c_1) + \frac{1}{c_1} G'(t + x/c_1)$$

◇ Et donc, en $x = 0$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{c_1} F'(t) + \frac{1}{c_1} G'(t)$$

◇ De même pour $\frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t)$:

$$y_2(x,t) = H(t - x/c_2) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_2}{\partial x}(x,t) = -\frac{1}{c_2} H'(t - x/c_2) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t) = -\frac{1}{c_2} H'(t)$$

◇ Et ainsi nous obtenons

$$-\frac{1}{c_1} F'(t) + \frac{1}{c_1} G'(t) = -\frac{1}{c_2} H'(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{c_1} F'(t) - \frac{1}{c_1} G'(t) = \frac{1}{c_2} H'(t)$$

◇ En primitivant

$$\frac{1}{c_1} F(t) - \frac{1}{c_1} G(t) = \frac{1}{c_2} H(t) + \text{termes non propagatifs}$$

◇ Encore une fois, grâce à la linéarité du milieu, nous pouvons mettre de côté les termes non propagatifs.

★ coefficients de réflexion et transmission

◇ Finalement les deux conditions aux limites permettent d'obtenir un système 2×2 assez simple

$$\begin{cases} F(t) + G(t) = H(t) \\ \frac{1}{c_1} F(t) - \frac{1}{c_1} G(t) = \frac{1}{c_2} H(t) \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} -G(t) + H(t) = F(t) \\ +c_2 G(t) + c_1 H(t) = c_2 F(t) \end{cases}$$

◇ Les solutions sont

$$G(t) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \times F(t) \quad \text{et} \quad H(t) = \frac{2c_2}{c_2 + c_1} \times F(t)$$

◇ Finalement les coefficients de réflexion et de transmission de l'ébranlement sont

$$r = \frac{G(t)}{F(t)} = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \quad \text{et} \quad t = \frac{H(t)}{F(t)} = \frac{2c_2}{c_2 + c_1}$$

- ◇ Nous pouvons remarquer que si $c_1 = c_2$ alors $r = 0$ et $t = 1$.
- ◇ Cela peut paraître surprenant mais avoir $c_1 = c_2$ implique

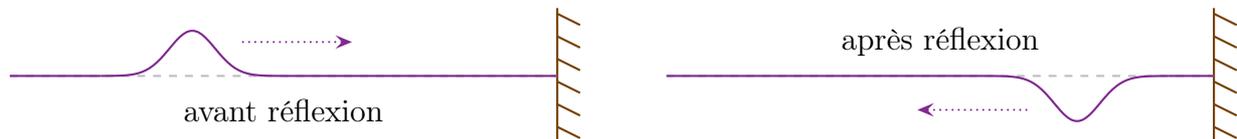
$$\sqrt{\frac{T_0}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_2}} \quad \rightsquigarrow \quad \mu_1 = \mu_2$$

- ◇ Autrement dit pour qu'il n'y ait pas de réflexion, il faut relier deux cordes identiques ensemble, puisqu'alors les deux cordes semi-infinies forment une seule et unique corde infinie.

🔗 cas particulier

- ◇ Si $\mu_2 > \mu_1$ alors $c_2 < c_1$.
- ◇ À la limite, si la 2^e corde devient excessivement inertielle³ alors la célérité c_2 devient nulle.
- ◇ Et une corde excessivement inertielle n'est autre qu'un point fixe.

Une onde sur une corde se réfléchit en son opposée lorsqu'elle arrive sur une extrémité fixe.

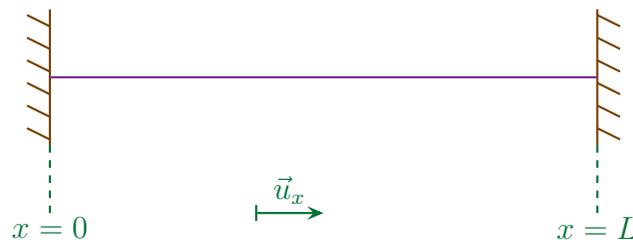


III.4 – Vibrations d'une corde

III.4.i – présentation de la corde de MELDE

★ dispositif

- ◇ Le dispositif est très simple : il s'agit d'une corde de longueur L tendue et fixée à ses deux extrémités.



★ analyse

- ◇ Analyse physique :
 - ici nous avons un seul milieu propagatif ;
 - les deux conditions aux limites sont des conditions de nullité : il va y avoir des nœuds de vibration ;
 - les grandeurs pertinentes sont μ et T_0 (caractéristique milieu propagatif), L (géométrie) et... c'est tout.
- ◇ Analyse technique :
 - comme il y a au moins un nœud de vibration, nous allons chercher une solution en OS ;
 - ici le régime n'est pas forcé, nous pouvons nous contenter d'une notation réelle.

3. Malheureusement nous ne pouvons pas dire « lourde » ici car le poids est négligé.

Quand, dans un milieu propagatif, au moins un nœud de vibration est imposé, il est pratique de rechercher une solution en onde stationnaire.

III.4.ii – modes propres

★ solution *a priori*

- ◇ Cherchons donc une solution sous la forme d'onde stationnaire *i.e.* sous la forme $y(x,t) = f(x) g(t)$.
- ◇ Comme il s'agit d'un milieu obéissant à l'équation de D'ALEMBERT, nous pouvons écrire tout de suite

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

★ utilisation des conditions aux limites

🕒 condition en $x = 0$

- ◇ L'immobilité de la corde en $x = 0$ se traduit par

$$y(0,t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) = 0$$

- ◇ Cette relation étant vraie quel que soit l'instant t , cela impose

$$\cos \psi = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad \text{avec } p \text{ entier}$$

🕒 condition en $x = L$

- ◇ L'immobilité de la corde en $x = L$ se traduit par

$$y(L,t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \psi) = 0$$

- ◇ Avec l'expression de ψ

$$A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kL + \pi/2 + p\pi) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad A (-1)^p \cos(\omega t + \varphi) (-\sin(kL)) = 0$$

- ◇ Et puisque cette relation est valable **pour tout** t , nous arrivons à la relation

$$\sin(kL) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad kL = n\pi \quad \text{avec } n \text{ entier}$$

★ résultat à connaître

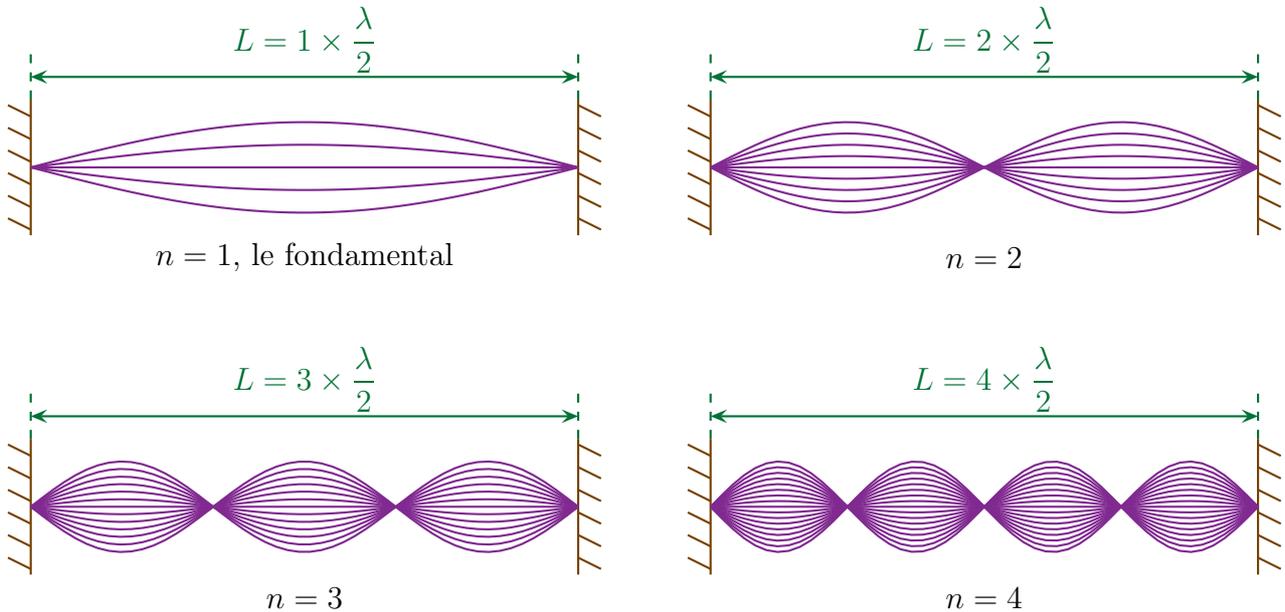
Les vecteurs d'ondes des modes propres de la corde de MELDE ne peuvent prendre que quelques valeurs dépendant d'un entier. Ces modes sont dits *quantifiés*.

- ◇ Oui, « quantifiés » comme en mécanique quantique. Ce n'est pas un hasard.
- ◇ Réécrivons les résultats et utilisons la relation de dispersion valable pour l'équation de D'ALEMBERT

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

Les modes propres de la corde de MELDE sont tels que L soit un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde du mode propre considéré.

$$L = n \times \frac{\lambda}{2}$$



Dans le cas d'un système oscillant, le mode propre associé à la fréquence la plus basse est appelé *fondamental*. Les autres sont appelés *harmoniques*.

Dans le cas de la corde de MELDE, les fréquences propres des harmonique sont des multiples entier de la fréquence propre du fondamental.

◇ Cela se voit immédiatement

$$\omega_n = \frac{n \pi c}{L} = n \times \frac{\pi c}{L} = n \omega_1$$

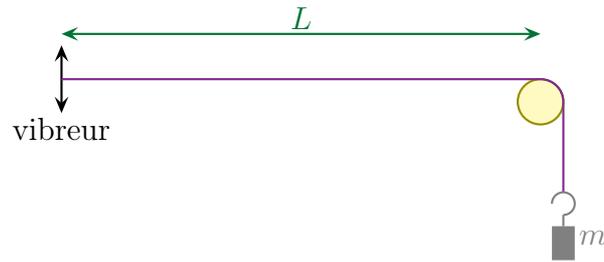
STOP Le fait que les fréquences propres suivent une progression arithmétique n'est pas une loi générale de la physique. C'est en particulier faux pour tous les systèmes oscillants soit n'obéissant pas à l'équation de D'ALEMBERT soit n'étant pas unidimensionnels. Nous verrons un contre exemple en TP avec la plaque de CHLADNI.

III.4.iii – oscillations forcées

- ◇ Remarquons tout d'abord que si une seule des extrémités est fixée, ce n'est plus *tout à fait* une corde de MELDE.
- ◇ Toutefois, par abus de langage, nous continuerons à parler de la corde de MELDE en régime forcé.
- ◇ Cette approximation de langage n'est pas pire que « oscillateur harmonique amorti ». ☺

★ **dispositif en TP**

◇ Voilà comment nous procéderons en TP.



◇ Un PFD appliqué à la masse donne

$$m \ddot{Y}(t) = T_0 - m g$$

◇ Si la masse reste immobile alors

$$\ddot{Y}(t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad T_0 = m g$$

◇ Modifier la masse m permet donc de modifier la tension du fil et donc la célérité des ondes dans le milieu.

★ **solution a priori**

◇ Ici nous avons un et un seul nœud (celui en L) donc nous allons chercher la solution sous la forme d'une onde stationnaire.

◇ De plus, comme l'oscillation est forcée, nous utiliserons la notation complexe

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{y}(x,t) = \underline{A} e^{j\omega t} \cos(kx + \psi)$$

★ **conditions aux limites**🕒 **condition en $x = 0$**

◇ Le vibreur impose, en $x = 0$ l'oscillation

$$y(0,t) = a \cos(\omega t) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{y}(0,t) = a e^{j\omega t}$$

◇ En utilisant l'expression en OS de $y(x,t)$

$$\underline{A} e^{j\omega t} \cos(\psi) = a e^{j\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A} \cos(\psi) = a$$

🕒 **condition en $x = L$**

◇ L'immobilité en $x = L$ impose

$$\underline{y}(L,t) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A} e^{j\omega t} \cos(kL + \psi) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \cos(kL + \psi) = 0$$

◇ Nous avons donc

$$kL + \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad \rightsquigarrow \quad \psi = \frac{\pi}{2} + p\pi - kL$$

🕒 rassemblement

◇ Simplifions $\cos \psi$

$$\cos \psi = \cos(\pi/2 + p\pi - kL) = (-1)^p \cos(\pi/2 - kL) = (-1)^p \sin(kL)$$

◇ Ainsi

$$\underline{A} \cos(\psi) = a \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A} = \frac{a}{(-1)^p \sin(kL)}$$

◇ Et en remplaçant

$$\begin{aligned} \underline{y}(x,t) &= \frac{a e^{j\omega t}}{(-1)^p \sin(kL)} \times \cos(kx + \frac{\pi}{2} + p\pi - kL) \\ &= \frac{a e^{j\omega t}}{(-1)^p \sin(kL)} \times (-1)^p (-\sin(kx - kL)) \\ &= -\frac{a}{\sin(kL)} \times \sin(k(x - L)) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

◇ Et en réel

$$y(x,t) = \frac{a}{\sin(kL)} \times \sin(k(L - x)) \cos(\omega t)$$

★ résonance

La corde de MELDE résonne lorsque l'excitation correspond à la fréquence d'un mode propre.

- ◇ En effet si l'excitation se fait sur un mode propre, alors $\sin(kL) = 0$ et l'amplitude diverge.
- ◇ En réalité l'amplitude ne peut pas diverger et sera limitée par des effets dissipatifs ou non linéaires.
- ◇ Tout se passe exactement comme dans le cas des oscillations forcées de deux masses pour lesquelles nous avons vu que la résonance se faisait au niveau des modes propres lorsqu'il y avait peu de frottements. I.2.iv

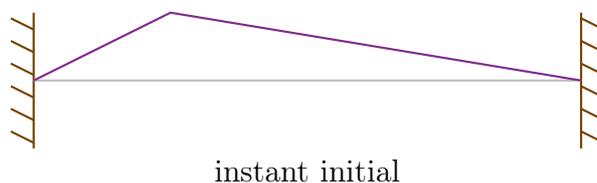
III.4.iv – solution en régime libre

- ◇ La corde de MELDE constitue un premier modèle simple et réaliste des cordes des instruments à cordes.

★ exemple de la corde pincée

🕒 situation

- ◇ Une corde pincée est une corde écartée de sa position initiale et lâchée sans vitesse initiale.



✧ À $t = 0$, la déformation est telle que $y(x,0) = a(x)$.

🔗 forme de la solution

✧ Ici nous allons utiliser le principe de superposition et dire que l'évolution pour $t > 0$ est une superposition de modes propres.

✧ Autrement dit nous avons

$$y(x,t) = \sum_n (C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x + \psi_n))$$

✧ En reprenant les résultats vus précédemment pour $k_n x + \psi_n$ et en développant le $\cos(\omega_n t + \varphi_n)$ nous obtenons

$$y(x,t) = \sum_n \left((A_n \cos(n \omega_1 t) + B_n \sin(n \omega_1 t)) \sin(k_n (L - x)) \right)$$

★ idée de la méthode

✧ Regardons la condition initiale

$$y(x,0) = a(x) \quad \rightsquigarrow \quad \sum_n (A_n \sin(k_n (L - x))) = a(x)$$

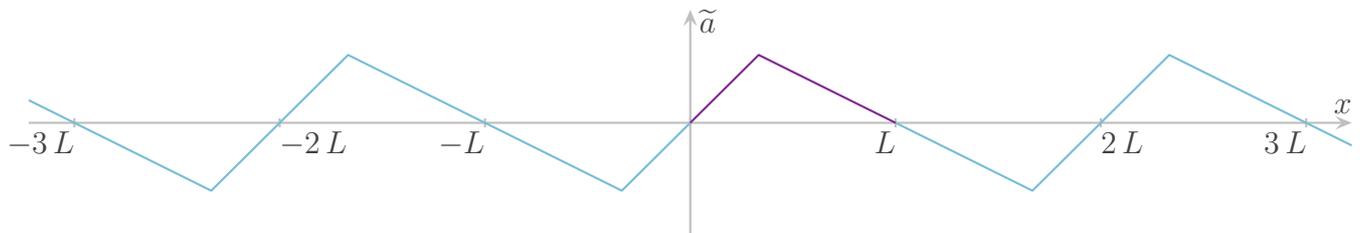
✧ Or $\sum_n (A_n \sin(k_n (L - x)))$ est le développement en série de FOURIER d'une fonction *de l'espace* :

→ impaire ;

→ dont le fondamental est de période $2L$.

✧ Pour trouver les A_n nous devons donc trouver le développement en série de FOURIER de la fonction $\tilde{a}(x)$ impaire et $2L$ -périodique qui coïncide avec $a(x)$ entre $x = 0$ et $x = L$.

✧ Dessinons cette fonction.



✧ Pour trouver les B_n , nous ferions exactement la même chose mais pour la vitesse :

→ calculer $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$;

→ exprimer $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ et reconnaître une série de FOURIER ;

→ écrire $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = v_y(x)$ (pour la corde pincée, $v_y(x) = 0$) ;

→ trouver la fonction $\tilde{v}_y(x)$ qui correspond au développement de la série de FOURIER ;

→ mélanger le tout pour trouver les B_n .

IV – Aspect énergétique

- ◇ La propagation d'onde s'accompagne *a priori* d'un transport énergétique.
- ◇ Nous allons voir dans cette partie comment se propage l'énergie et en particulier si elle se propage (comme le laisse à penser l'intuition) comme les ondes.

IV.1 – Bilan énergétique pour un câble coaxial

IV.1.i – densité linéique d'énergie

★ définition

- ◇ Comme nous allons regarder ce qui passe au niveau mésoscopique, nous devons commencer par une définition.

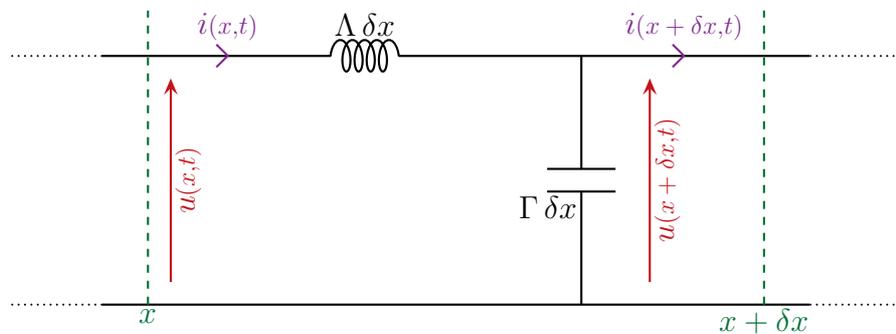
La *densité linéique d'énergie* e est telle que l'énergie $d\mathcal{E}$ contenue dans un tronçon de longueur δx s'écrit

$$d\mathcal{E} = e \delta x$$

- ◇ Cette définition est analogue à la densité linéique de charge en électrostatique par exemple.

★ pour le câble

- ◇ Reprenons le schéma d'une portion de câble.



- ◇ Nous voyons ici immédiatement que l'énergie contenue dans cette portion est l'énergie contenue dans la bobine et dans le condensateur.
- ◇ Cela donne

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_L + d\mathcal{E}_C \quad \rightsquigarrow \quad d\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\Lambda \delta x) i^2(x,t) + \frac{1}{2} (\Gamma \delta x) u^2(x + \delta x,t)$$

- ◇ En divisant par $\delta x \rightarrow 0$ nous obtenons

Pour un câble coaxial, la densité linéique d'énergie s'écrit

$$e(x,t) = \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma u^2(x,t)$$

IV.1.ii – conservation de l'énergie

★ loi générale à de nombreux phénomènes



Ce raisonnement va être utilisé dans différent chapitre, il est important de bien le travailler.

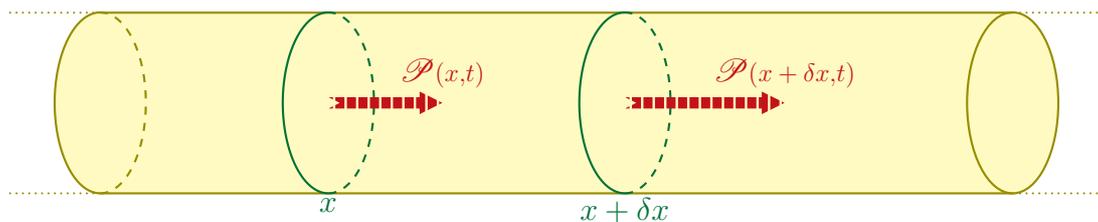
Dans une propagation unidimensionnelle suivant \vec{u}_x dans un milieu passif, en notant $e(x,t)$ la densité linéique d'énergie et $\mathcal{P}(x,t)$ la puissance transférée comptée positivement suivante $+\vec{u}_x$, la loi de conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}(x,t) = 0$$

★ démonstration

🕒 principe

- ◇ Comme il s'agit d'une loi locale autant dans l'espace (loi « en x ») que dans le temps (loi valable « à t »), nous allons utiliser une approche mésoscopique.
- ◇ Considérons un milieu propagatif et plus particulièrement une tranche comprise entre x et $x + \delta x$.



- ◇ Faisons un bilan d'énergie pour ce petit volume entre les instants t et $t + dt$.

Quelle que soit la grandeur considérée, le bilan d'une grandeur pour un système quelconque durant une durée quelconque se résume par
variation dans le temps = échange à travers la surface + création à l'intérieur



Ne pas oublier de toujours préciser :

- quelle grandeur concerne le bilan ;
- pour quel système le bilan est fait ;
- sur quelle durée est fait le bilan.

- ◇ Ici nous allons :

- faire un bilan d'énergie ;
- pour le système \mathcal{S} compris entre x et $x + \delta x$;
- entre t et $t + dt$.

🕒 variation

- ◇ La variation d'énergie pour \mathcal{S} s'écrit

$$\text{variation} = \delta \mathcal{E}_{\text{fin}} - \delta \mathcal{E}_{\text{début}} \quad \rightsquigarrow \quad \text{variation} = e(x,t + dt) \delta x - e(x,t) \delta x$$

🌀 échange

- ◇ Les échanges se font **toujours** aux frontières, *i.e.* à la surface.
- ◇ Ici le milieu n'échange de l'énergie que en x et $x + \delta x$.
- ◇ Il n'y a pas d'énergie qui part sur les côtés car, ici, la propagation se fait uniquement suivant \vec{u}_x .
- ◇ Comme la puissance $\mathcal{P}(x,t)$ est comptée positivement vers la droite, nous pouvons interpréter
 - la puissance échangée en x comme de la puissance reçue ;
 - la puissance échangée en $x + \delta x$ comme de la puissance fournie.
- ◇ Nous avons alors

$$\text{échange} = \delta \mathcal{E}_{\text{reçue}} - \delta \mathcal{E}_{\text{fournie}} \quad \rightsquigarrow \quad \text{échange} = \mathcal{P}(x,t) dt - \mathcal{P}(x + \delta x,t) dt$$

🌀 création

- ◇ Le milieu est passif, *i.e.* il n'absorbe ni ne crée d'énergie, donc

$$\text{création à l'intérieur} = 0$$

- ✂ Il y a parfois des termes de création comme la création d'énergie (chapitre de diffusion), création de particules (diffusion) ou absorption par le milieu (second membre de l'équation de POYNTING).

🌀 rassemblement

- ◇ Le bilan s'écrit donc

$$\text{variation} = \text{échange} + \text{création} \quad \rightsquigarrow \quad e(x,t+dt) \delta x - e(x,t) \delta x = \mathcal{P}(x,t) dt - \mathcal{P}(x + \delta x,t) dt + 0$$

- ◇ Cela nous conduit à

$$\frac{e(x,t+dt) - e(x,t)}{dt} + \frac{\mathcal{P}(x,t) - \mathcal{P}(x + \delta x,t)}{\delta x} = 0$$

- ◇ Et en faisant tendre $dt \rightarrow 0$ et $\delta x \rightarrow 0$ nous voyons apparaître des taux d'accroissement ce qui donne

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}(x,t) = 0$$

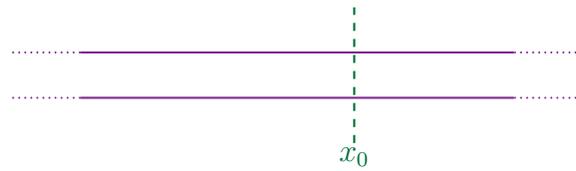
🌀 interprétation

- ◇ La loi trouvée est valable quel que soit le milieu propagatif.
- ◇ Cette loi est donc vraie aussi bien pour le câble coaxial que pour la corde.
- ◇ Comme nous connaissons déjà $e_{\text{câble}}(x,t)$, il nous reste à trouver
 - $\mathcal{P}_{\text{câble}}(x,t)$;
 - $e_{\text{corde}}(x,t)$;
 - $\mathcal{P}_{\text{corde}}(x,t)$.

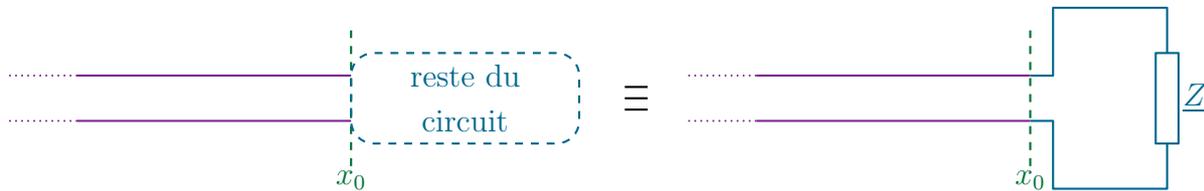
IV.1.iii – flux énergétique

★ expression pour le câble coaxial

- ◇ Prenons un câble coaxial et positionnons nous à une abscisse x_0 quelconque pour « compter » la puissance qui va dans le sens $+\vec{u}_x$



- ◇ En fait pour déterminer cette puissance, nous pouvons voir le câble en $x > x_0$ comme une impédance \underline{Z} où $\underline{Z} = Z_c$ si la portion est infinie.



- ◇ Dans ces conditions la puissance reçue par \underline{Z} s'écrit $\mathcal{P} = +u(x,t) i(x,t)$.

Dans un câble coaxial, la puissance transférée suivant $+\vec{u}_x$ à l'abscisse x s'écrit

$$\mathcal{P}(x,t) = u(x,t) i(x,t)$$

★ OPP vers les x croissants

Pour une OPP \blacktriangleright , la densité d'énergie se déplace à la célérité $+c\vec{u}_x$.

🕒 préliminaire

- ◇ Montrons que si l'énergie d'une OPP \blacktriangleright se déplace à la célérité v , alors la puissance s'écrit

$$\mathcal{P}(x,t) = v \times e(x,t)$$

- ◇ Pour cela comptons l'énergie qui passe au niveau de l'abscisse x durant dt
 ◇ En terme de puissance, cette énergie s'écrit

$$d\mathcal{E} = \mathcal{P}(x,t) dt$$

- ◇ Comme l'onde est une OPP \blacktriangleright , nous pouvons dire que l'énergie qui passe en x était à gauche de x et comprise dans une portion de longueur $d\ell = v dt$ ce qui donne une énergie

$$d\mathcal{E} = v dt e(x,t)$$

- ◇ En rassemblant les deux résultats, nous obtenons bien $\mathcal{P}(x,t) = v e(x,t)$.

🕒 démonstration pour le câble coaxial

- ◇ Nous allons montrer que $\mathcal{P} = c e(x,t)$.
 ◇ Rappelons tout d'abord une relation vraie pour les OPP \blacktriangleright

$$u(x,t) = +Z_c i(x,t)$$

- ◇ L'énergie linéique s'écrit

$$\begin{aligned}
 e(x,t) &\stackrel{\text{TJS}}{=} \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma u^2(x,t) \\
 &\stackrel{\text{OPP}\rightarrow}{=} \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma (+Z_c i(x,t))^2 \\
 &= \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma Z_c^2}_{\Lambda} i^2(x,t)
 \end{aligned}$$

◇ Et finalement

$$e(x,t) = \Lambda i^2(x,t)$$

◇ Pour la puissance

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{TJS}}{=} u(x,t) i(x,t) \quad \text{et} \quad u(x,t) \stackrel{\text{OPP}\rightarrow}{=} +Z_c i(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P} = +Z_c i^2(x,t)$$

◇ Ce qui donne

$$\mathcal{P}(x,t) = +Z_c \frac{e(x,t)}{\Lambda} \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{P}(x,t) = c e(x,t) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

★ OPP vers les x décroissants

Pour une OPP \leftarrow , la densité d'énergie se déplace à la célérité $-c\vec{u}_x$.

◇ Le lecteur vérifiera que, pour une OPP \leftarrow

$$\mathcal{P}(x,t) = -Z_c i^2(x,t); \quad e(x,t) = +\Lambda i^2(x,t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(x,t) = -c e(x,t)$$

◇ La dernière relation permettant de conclure.

★ OPP quelconque

 La puissance est une grandeur non linéaire, il n'est donc pas possible de simplement sommer les deux résultats!

🔗 résultat fondamental

Lors d'une propagation unidimensionnelle, les puissances et les énergies associées aux OPP \rightarrow et OPP \leftarrow s'additionnent.

Il y a *interférence* lorsque les énergies transportées par deux phénomènes qui se superposent ne s'additionnent pas entre elles.

⚠ La notion d'interférence est une notion que nous verrons (☺) très en détail en optique.

Dans le cas de la propagation unidimensionnelle, il n'y a pas d'interférence entre les OPP \rightarrow et les OPP \leftarrow .

🔗 démonstration

- ◇ Nous allons faire la démonstration du résultat énoncé dans le cas particulier du câble coaxial.
- ◇ Pour alléger l'écriture, nous allons omettre les variables des fonctions. Ainsi

$$i(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \stackrel{\text{not}}{=} f + g$$

- ◇ Comme $u(x,t)$ est l'autre grandeur duale, nous pouvons écrire

$$u(x,t) = Z_c f(x-ct) - Z_c g(x+ct) \stackrel{\text{not}}{=} Z_c f - Z_c g$$

- ◇ Pour l'énergie linéique nous avons donc

$$\begin{aligned} e(x,t) &= \frac{1}{2} \Lambda i^2(x,t) + \frac{1}{2} \Gamma u^2(x,t) \\ &= \frac{1}{2} \Lambda (f+g)^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\Lambda Z_c^2}_{=\Lambda} (f-g)^2 \\ &= \frac{1}{2} \Lambda (f^2 + g^2 + \cancel{2fg}) + \frac{1}{2} \Lambda (f^2 + g^2 - \cancel{2fg}) \\ &= \Lambda f^2 + \Lambda g^2 = e_{\rightarrow}(x,t) + e_{\leftarrow}(x,t) \end{aligned}$$

- ◇ Ce qui prouve bien que l'énergie linéique, dans le cas de la superposition d'une OPP \rightarrow et d'une OPP \leftarrow est bien extensive, *i.e.* qu'il n'y a pas interférence.
- ◇ Pour la puissance transférée, cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x,t) &= u(x,t) \times i(x,t) \\ &= Z_c (f-g)(f+g) \\ &= Z_c f^2 - Z_c g^2 = \mathcal{P}_{\rightarrow}(x,t) + \mathcal{P}_{\leftarrow}(x,t) \end{aligned}$$

- ◇ Là aussi nous avons une extensivité de la puissance transférée car $\mathcal{P}_{\leftarrow}(x,t) = -Z_c g^2 < 0$ qui traduit le fait que la puissance est comptée positivement lorsque l'énergie se déplace suivant $+\vec{u}_x$.

IV.2 – Bilan énergétique pour une corde

IV.2.i – de nombreux résultats immédiats...

★ traduction locale de la conservation de l'énergie

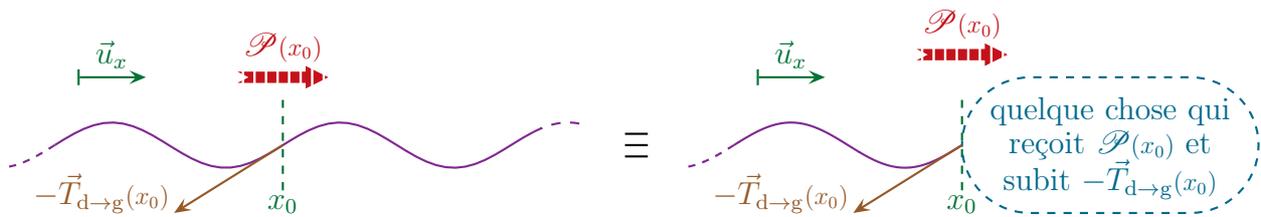
- ◇ Comme nous l'avons remarqué précédemment, nous pouvons écrire directement la loi de conservation de l'énergie pour une corde puisque, de façon générique nous avons

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0$$

- ◇ Rappelons que le second membre est nul parce que la corde est un milieu passif.

★ puissance transmise

- ◇ Cherchons l'expression de la puissance qui passe à l'abscisse x_0 dans le sens $+\vec{u}_x$.
- ◇ Pour ce faire, nous allons « oublier » ce qu'il y a au-delà de $x = x_0$.



◇ Comme n'importe quel système en mécanique, le système \mathcal{S}_0 représenté au dessus recoit la puissance

$$\mathcal{P} = \overbrace{\text{force exercée sur } \mathcal{S}_0} \cdot \overbrace{\text{vitesse du point qui subit } f}$$

◇ Ici :

- la force exercée sur \mathcal{S}_0 est la force exercée par une corde de la gauche sur la droite soit, avec les notations usuelles $\vec{T}_{g \rightarrow d} = -\vec{T}(x,t)$;
- la vitesse du point qui subit la force n'est autre que $\vec{v} = v_y(x,t) \vec{u}_y$ puisqu'il n'y a de mouvement que transversal.

◇ Finalement

$$\mathcal{P}(x,t) = T_y^+(x,t) v_y(x,t)$$

★ densité linéique d'énergie cinétique

◇ La densité linéique d'énergie cinétique ne pose pas de difficulté.

◇ L'énergie cinétique pour l'élément de longueur δx de corde s'écrit

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\mu \delta x) v_y^2(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad e_c(x,t) = \frac{1}{2} \mu v_y^2(x,t)$$

IV.2.ii – ... mais pas pour l'énergie potentielle linéique

★ expression

◇ Nous allons montrer que l'énergie linéique potentielle s'écrit

$$e_p(x,t) = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right)^2$$

◇ Comme nous allons le voir, il s'agit là d'une énergie potentielle de déformation élastique.

★ démonstration

🔗 idée

◇ Regardons une corde déformée et comparons-la à ce qu'elle est au repos.

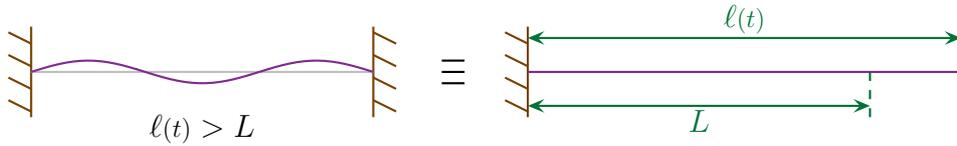


◇ L'évidence s'impose : la longueur totale de la corde a augmenté.

👉 Remarque. C'est bien parce que la corde s'allonge qu'il vaut mieux ne pas faire l'hypothèse d'inextensibilité de la corde, hypothèse superflue au demeurant car seul compte en fait l'hypothèse de non-longitudinalité des oscillations.

◇ Pour réaliser cette déformation de la corde, il a fallu dépenser de l'énergie.

- ◇ En fait nous avons besoin d'énergie pour *allonger* la corde tout comme nous avons besoin d'énergie pour allonger un ressort.
- ◇ En d'autres termes, nous allons voir la déformation de la manière suivante.



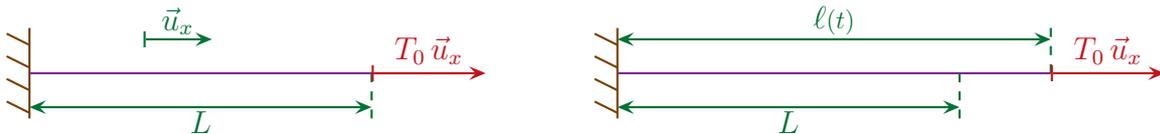
- ◇ Lorsqu'un opérateur réalise cette déformation, à la fin, l'énergie qu'il a fournie a été stockée sous forme potentielle et ainsi

$$W_{\text{op}} = \Delta E_p$$

- ◇ En trouvant l'expression de l'énergie nécessaire à l'allongement de la corde nous aurons accès à l'expression de l'énergie potentielle de déformation.

🔗 traduction

- ◇ Insistons : même si la déformation est quelconque, nous allons dire que la déformation se fait uniquement en élongation.



- ◇ Dans ces conditions la force exercée par l'opérateur n'est autre (en norme) que T_0 (loi des actions réciproque oblige).
- ◇ La force exercée par l'opérateur étant constante, le travail qu'il fournit s'écrit donc

$$W_{\text{op}} = T_0 \times (\ell - L) > 0$$

- ◇ Pour calculer ℓ , nous allons simplement sommer les petites longueurs de corde.

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^L \delta \ell \\ &= \int_0^L \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \\ &= \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2} \times \delta x \end{aligned}$$

- ◇ Comme le calcul de $\sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}$ se fait à x fixé, nous avons en fait

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

- ◇ De là nous pouvons faire un développement limité avec l'hypothèse déjà utilisée des petites oscillations

$$\alpha(x,t) \ll 1 \quad \rightsquigarrow \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

◇ Ainsi

$$\ell = \int_0^L 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \delta x = L + \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \delta x$$

◇ Le travail fourni par l'opérateur s'écrit donc

$$W_{\text{op}} = T_0 \times (\ell - L) \quad \rightsquigarrow \quad W_{\text{op}} = \int_0^L T_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \delta x$$

◇ Et en fixant l'énergie potentielle linéique nulle dans la position de repos nous avons

$$\Delta E_p = E_p(\ell) \triangleq \int_0^L e_p(x,t) \delta x$$

◇ En rapprochant les deux expressions nous avons

$$W_{\text{op}} = \Delta E_p \quad \rightsquigarrow \quad \int_0^L T_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \delta x = \int_0^L e_p(x,t) \delta x$$

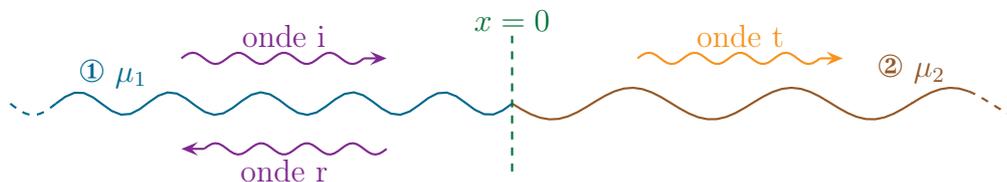
◇ Comme cette relation reste vraie quelle que soit le domaine d'intégration, nous obtenons bien

$$e_p(x,t) = T_0 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

IV.2.iii – bilan lors d'une réflexion – transmission

★ situation, rappels

◇ Reprenons la situation vue précédemment de la réflexion entre deux cordes de masses linéiques différentes.



◇ Nous allons chercher les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en puissance définis par

$$R \triangleq \frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i} \quad \text{et} \quad T \triangleq \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_i}$$

◇ Étant donné que \mathcal{P} est définie comme la puissance allant dans le sens de $+\vec{u}_x$, nous pouvons d'ores et déjà dire

$$\mathcal{P}_i > 0; \quad \mathcal{P}_r < 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_t > 0$$

- ◇ Dans la partie précédente nous avons cherché et trouvé les coefficients de transmission et réflexion en élongation.
- ◇ Pour trouver les coefficients de réflexion et de transmission, reprenons une solution en vision temporelle

$$\begin{cases} v_{y1}(x,t) = F(t - x/c_1) + G(t + x/c_1) \\ v_{y2}(x,t) = H(t - x/c_2) \end{cases}$$

- ◇ En ce qui concerne la grandeur duale $T_y^+(x,t)$ nous pouvons donc poser

$$\langle\langle T_y^+ = \pm Z_c v_y \rangle\rangle \rightsquigarrow \begin{cases} T_{y1}^+(x,t) = Z_1 F(t - x/c_1) - Z_1 G(t + x/c_1) \\ T_{y2}^+(x,t) = Z_2 H(t - x/c_2) \end{cases}$$

- ◇ Comme nous l'avons montré la première fois, il y a continuité de la position $y(x,t)$ en $x = 0$ et ici cela implique la continuité de la vitesse en $x = 0$ soit

$$v_{y1}(0,t) = v_{y2}(0,t) \rightsquigarrow F(t) + G(t) = H(t)$$

- ◇ De plus comme il n'y a pas de masse à la jonction des deux cordes la tension est continue en $x = 0$ ce qui donne

$$T_{y1}^+(0,t) = T_{y2}^+(0,t) \rightsquigarrow Z_1 F(t) - Z_1 G(t) = Z_2 H(t)$$

- ◇ Nous avons ainsi un système de deux équations dont les deux inconnues sont $G(t)$ et $H(t)$ et qui se résout en

$$\begin{cases} -G(t) + H(t) = F(t) \\ Z_1 G(t) + Z_2 H(t) = Z_1 F(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} G(t) = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \times F(t) \\ H(t) = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \times F(t) \end{cases}$$

★ coefficient de transmission – réflexion en vitesse

- ◇ Étant données les expressions de $v_{y1}(x,t)$ et $v_{y2}(x,t)$, nous pouvons dire que le coefficient de réflexion pour l'onde de vitesse s'écrit

$$r_v = \frac{G(t)}{F(t)} \rightsquigarrow r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

- ◇ De même le coefficient de transmission s'écrit

$$t_v = \frac{H(t)}{F(t)} \rightsquigarrow t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

★ coefficients de transmission – réflexion en tension

- ◇ En reprenant les expressions des tensions $-T_{y1}(x,t)$ et $-T_{y2}(x,t)$ nous pouvons les interpréter de la manière suivante :

- l'onde incidente en tension est $-T_{yi} = +Z_1 F(t)$;
- l'onde réfléchie en tension est $-T_{yr} = -Z_1 G(t)$;
- l'onde transmise en tension est $-T_{yt} = +Z_2 H(t)$.

◇ Ici il faut faire particulièrement attention à la traduction des coefficients de transmission et réflexion

$$r_T = \frac{T_{yr}^+}{T_{yi}^+} \rightsquigarrow r_T = -\frac{G(t)}{F(t)} \rightsquigarrow r_T = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

◇ De même

$$t_T = \frac{T_{yt}^+}{T_{yi}^+} \rightsquigarrow t_T = \frac{Z_2}{Z_1} \times \frac{H(t)}{F(t)} \rightsquigarrow t_T = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

★ coefficients de transmission – réflexion en puissance

◇ Nous pouvons donc maintenant trouver le coefficient de réflexion en puissance :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_i = v_{yi} T_{yi}^+ \\ \mathcal{P}_r = v_{yr} T_{yr}^+ \end{array} \right\} \rightsquigarrow R = r_v \times r_T \rightsquigarrow R = -\frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

◇ Sans surprise, nous trouvons un résultat négatif.

◇ De même pour le coefficient de transmission en puissance

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_i = v_{yi} T_{yi}^+ \\ \mathcal{P}_t = v_{yt} T_{yt}^+ \end{array} \right\} \rightsquigarrow T = t_v \times t_T \rightsquigarrow T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

◇ Nous pouvons aisément vérifier la conservation de l'énergie

$$|R| + T = 1$$

◇ En effet

$$\begin{aligned} |R| + T &= \frac{Z_1^2 + Z_2^2 - 2 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} + \frac{+4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ &= \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + 2 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ &= \frac{(Z_1 + Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ &= 1 \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

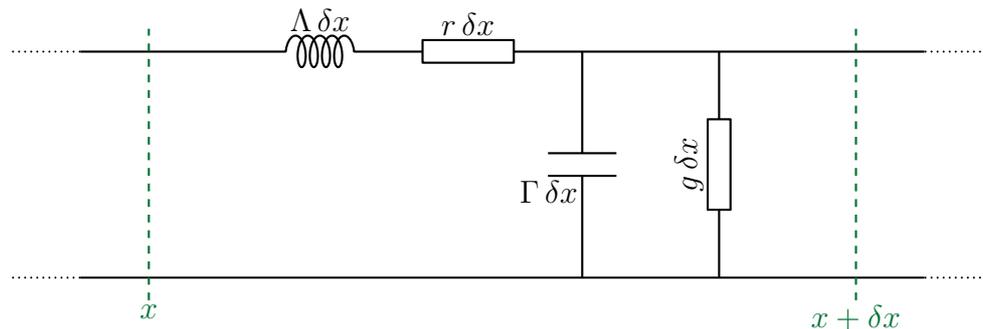
V – Dispersion, atténuation

- ◇ Dans cette partie nous allons voir ce qui se passe quand la propagation n'est pas parfaite, *i.e.* quand l'équation régissant l'évolution n'est pas une équation de D'ALEMBERT mais *presque*.

V.1 – Câble coaxial résistif

V.1.i – nouveau modèle mésoscopique

- ◇ Reprenons le câble coaxial mais en tenant compte cette fois des pertes énergétiques aussi bien en terme de résistances des câbles « en série » avec la bobine que des résistances de fuite « en parallèle » du condensateur.



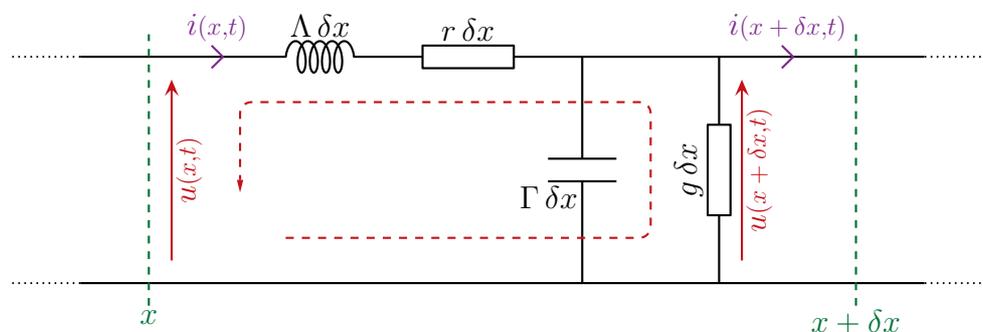
- ◇ Les phénomènes dissipatifs sont pris en compte avec l'existence :
- d'une résistance linéique r de valeur nulle dans le cas idéal ;
 - d'une conductance linéique g , elle aussi de valeur nulle dans le cas idéal.

V.1.ii – équations de couplage

- ◇ Pas de surprise ici, sur une portion mésoscopique de câble nous pouvons toujours utiliser l'ARQS et ainsi...

★ loi des mailles

- ◇ Comme à l'échelle mésoscopique nous sommes toujours dans l'ARQS, nous pouvons écrire la loi des mailles dans la maille représentée.



- ◇ Cela donne

$$u(x + \delta x, t) + r \delta x i(x, t) + \Lambda \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) - u(x, t) = 0$$

◇ Et avec un développement limité au premier ordre de $u(x + \delta x, t)$

$$u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \delta x - u(x, t) = -r \delta x i(x, t) - \Lambda \delta x \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$$

◇ Et ainsi la première équation de couplage est

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -r i(x, t) - \Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) \quad (\text{éq.maille.2})$$

★ loi des nœuds

◇ La loi des nœuds s'écrit (cf. schéma précédent)

$$i(x, t) = \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x + \delta x, t) + g \delta x u(x + \delta x, t) + i(x + \delta x, t)$$

◇ Faisons des développements limités des grandeurs évaluées en $x + \delta x$

$$\begin{aligned} i(x, t) &= \Gamma \delta x \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \right) + g \delta x \left(u(x, t) + \delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + i(x, t) + \delta x \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) \\ &= \Gamma \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \underbrace{(\delta x)^2 \Gamma}_{\cancel{(\delta x)^2 \Gamma}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + g \delta x u(x, t) + \underbrace{g (\delta x)^2}_{\cancel{g (\delta x)^2}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + i(x, t) + \delta x \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) \end{aligned}$$

◇ En simplifiant les termes d'ordre 2 ci-dessus puis les $i(x, t)$ de chaque côté, nous arrivons à l'équation de couplage après avoir divisé par δx

$$\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) = -g u(x, t) - \Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \quad (\text{éq.nœud.2})$$

◇ Pour trouver cette équation de couplage, il était aussi possible de faire apparaître des taux d'accroissement, comme précédemment dans le chapitre, et de faire tendre δx vers 0.

◇ Nous pouvons déjà remarquer que les équations de couplage

→ se ressemblent ;

→ ne sont pas identiques à celles obtenues conduisant à l'équation de D'ALEMBERT.

V.1.iii – équation de propagation

◇ La technique pour obtenir les équations « de propagation » est la même que précédemment : faire apparaître une dérivée croisée de deux manières différentes et les éгалer.

★ équation en $u(x, t)$

◇ Puisque nous cherchons une équation en $u(x, t)$, il faut éliminer $i(x, t)$.

◇ Calculons $\frac{\partial \text{éq.maille.2}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \text{éq.nœud.2}}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -r \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) - \Lambda \underbrace{\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}}(x, t) \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}}(x, t) = -g \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

◇ Le théorème de SCHWARZ nous assure que les deux termes dans les accolades sont les mêmes et ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = -r \frac{\partial i}{\partial x}(x, t) + \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \Lambda g \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$$

◇ Nous pouvons isoler $\frac{\partial i}{\partial x}(x,t)$ de (éq.nœud.2) et ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -r \left(-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - g u(x,t) \right) + \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \Lambda g \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$$

◇ Et finalement nous avons l'équation de « propagation »

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + r g u(x,t)$$

★ équation en $i(x,t)$

◇ Faisons de même pour l'équation en $u(x,t)$.

◇ La dérivée par rapport à t de (éq.maille.2) donne

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}}(x,t) = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) - r \frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$$

◇ La dérivée par rapport à x de (éq.nœud.2) donne

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = -\Gamma \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}}(x,t) - g \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

◇ Comme les dérivées croisées sont égales, cela conduit à

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) + \Lambda r \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) - g \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

◇ Puis en remplaçant $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ grâce à (éq.maille.2) nous obtenons l'équation de « propagation »

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,t) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial i}{\partial t}(x,t) + r g i(x,t)$$

★ interprétation

◇ La première chose à noter est que ni $u(x,t)$ ni $i(x,t)$ ne vérifient des équations de D'ALEMBERT.

◇ Dans ces conditions parler de propagation ne peut être qu'approximatif.

◇ Nous continuerons malgré tout à parler de propagation pour insister sur le fait que dans le cas idéal ($r = 0$ et $g = 0$) nous retrouvons une équation de D'ALEMBERT et c'est pourquoi nous noterons l'équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + r g u(x,t) \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\Lambda \Gamma}$$

◇ Insistons : $i(x,t)$ et $u(x,t)$ ne sont pas vraiment des ondes.

◇ Toutefois si l'équation à laquelle ils obéissent est *presque* une équation d'onde alors nous pouvons penser que la solution sera *presque* une onde.

◇ Remarquons aussi que $i(x,t)$ et $u(x,t)$ vérifient la même équation de « propagation » ce qui n'est en rien obligatoire.

V.2 – Solutions de l'équation de « propagation »

- ◇ Comme l'équation à laquelle nous sommes confronté n'est pas une équation d'onde nous ne pouvons pas utiliser les solutions que nous avons vu précédemment.
- ◇ Toutefois il s'agit là d'une équation aux dérivées partielles **linéaire** et en tant que telle il existe une méthode générale pour trouver des solutions : la notation complexe.
- ◇ C'est une méthode que nous réutiliserons même pour des équations qui ne sont pas des équations de propagation.
- ▲ Nous utiliserons la même technique pour l'équation de diffusion.

V.2.i – passage en complexe

★ méthode

- ◇ L'idée consiste, puisque l'équation aux dérivées partielles est linéaire, à n'étudier qu'une seule des composantes de FOURIER en ω pour pouvoir après, par superposition, étudier ou obtenir une solution complète.
- ◇ Nous allons donc chercher

$$u(x,t) = \text{Re}(\underline{u}(x,t)) \quad \text{avec} \quad \underline{u}(x,t) = \underline{U}(x,t) e^{j\omega t}$$

★ exemple pour $u(x,t)$

- ◇ Reprenons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $u(x,t)$ et « passons-la » en complexe.

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2}(x,t) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(x,t) + r g \underline{u}(x,t)$$

- ◇ Les dérivées partielles par rapport au temps font apparaître du $j\omega$ d'où

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2}(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{U}(x) + j\omega (\Lambda g + \Gamma r) \underline{U}(x) + r g \underline{U}(x)$$

- ◇ Et en réorganisant

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2}(x) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - j\omega (\Lambda g + \Gamma r) - r g \right) \underline{U}(x) = 0$$

- ◇ Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants.
- ◇ Nous allons chercher la solution sous la forme

$$\underline{U}(x) = \underline{\alpha} e^{-j\underline{k}x} \quad \text{avec} \quad \underline{k} \text{ complexe}$$

- ◇ La forme de l'exponentielle avec le « $-j$ » permet simplement d'obtenir une solution complète qui s'écrit sous une forme qui ressemble beaucoup à celle d'une OPPM

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

STOP Parce que, justement, \underline{k} est complexe, nous ne pouvons pas dire que cette onde est une OPPM!

Nous appellerons *Presque Onde Plane Progressive Monochromatique* (POPPM) une solution qui s'écrit formellement comme une OPPM mais avec un « vecteur d'onde » complexe.

- ◇ Rappelons qu'avec les définitions que nous avons adoptées pour « onde » et « OPPM » nous ne pouvons pas qualifier ces solutions ni d'onde ni d'OPPM ce qui fait qu'il n'est pas possible, en toute rigueur, de parler de vecteur d'onde.
- ◇ L'auteur tient aussi à faire remarquer que, à sa connaissance, le vocable POPPM ne se rencontre pas ailleurs dans la littérature.

★ bilan

- ◇ En fait, désormais, quand nous serons confronté à une équation aux dérivées partielles **linéaire** qui n'est pas une équation de D'ALEMBERT nous pourrons tout de suite chercher des solutions sous la forme de POPPM

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

- ◇ Il sera inutile de distinguer les cas POPPM \rightarrow et POPPM \leftarrow car le sens de propagation sera contenu dans le \underline{k} .

V.2.ii – relation de dispersion

- ◇ Comme pour les OPPM « classiques » nous appellerons *relation de dispersion* l'équation reliant les aspects spatiaux et temporels, *i.e.* l'équation en \underline{k} et ω .
- ◇ Reprenons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\underline{u}(x,t)$

$$\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}(x,t) + (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}(x,t) + r g \underline{u}(x,t)$$

- ◇ Les dérivées partielles par rapport à t et x donnent

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \times \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = -j\underline{k}$$

- ◇ Nous obtenons ainsi

$$-\underline{k}^2 \underline{u}(x,t) = -\frac{\omega^2}{c^2} \underline{u}(x,t) + j\omega (\Lambda g + \Gamma r) \underline{u}(x,t) + r g \underline{u}(x,t)$$

- ◇ Puis, en réorganisant

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + j\omega (\Lambda g + \Gamma r) + r g}$$

- ◇ La solution en \underline{k} à ω fixé est un nombre complexe à partie imaginaire non nulle.

V.2.iii – le vecteur d'onde complexe traduit l'atténuation et la dispersion

★ solution en notation réelle

- ◇ Sans résoudre explicitement l'équation en \underline{k} provenant de la relation de dispersion nous pouvons écrire la solution sous la forme

$$\underline{k} = k'(\omega) + j k''(\omega) \quad \text{avec} \quad k'(\omega) = \Re(\underline{k}) \quad \text{et} \quad k''(\omega) = \Im(\underline{k})$$

- ◇ L'intérêt de cette notation est que k' et k'' sont des nombres réels.
- ◇ Reprenons l'expression de $\underline{u}(x,t)$ et cherchons la solution réelle $u(x,t)$.
- ◇ Commençons par remplacer \underline{k}

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \quad \rightsquigarrow \quad \underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - k'x - j k''x)}$$

◇ En développant l'exponentielle nous obtenons

$$\underline{u}(x,t) = \underline{\alpha} e^{j(\omega t - k'x)} e^{k''x}$$

◇ Puis en notant $\underline{\alpha} = A e^{j\varphi}$ nous arrivons à

$$\underline{u}(x,t) = A e^{j(\omega t - k'x + \varphi)} e^{k''x}$$

◇ Il ne reste plus qu'à prendre la partie réelle

$$u(x,t) = A e^{k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi)$$

◇ Nous pouvons tout de suite constater qu'effectivement, ce n'est pas une OPPM puisque nous ne pouvons pas réécrire la solution sous la forme $f(\omega t - kx)$;

★ dispersion et atténuation

◇ Dans la solution nous voyons toutefois apparaître un terme en $\cos(\omega t - k'x + \varphi)$ qui est clairement un terme propagatif, *i.e.* un terme correspondant à « quelque chose » qui se propage à la célérité $\frac{\omega}{k'}$.

La vitesse de phase est la célérité associée au terme de phase, *i.e.* au terme en $\cos()$.

Dans le cas d'une POPPM en $e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k' + j k''$ la vitesse de phase s'écrit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{\text{Re}(\underline{k})}$$

La *dispersion* est associée à une propagation telle que la vitesse de phase v_φ dépende de la pulsation ω .

Il n'y a pas de dispersion dans un milieu obéissant à l'équation de D'ALEMBERT.

◇ En effet

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c = C^{\text{te}}$$

L'atténuation est le fait que l'amplitude d'une « onde » diminue avec la propagation.

L'absorption est le fait qu'une « onde » cède de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.

- ◇ Nous comprenons assez aisément pourquoi « absorption » implique atténuation mais ne faisons pas d'amalgame : il y a des cas pour lesquels il y a atténuation sans absorption comme par exemple la chaîne de pendules simples obéissant à l'équation de KLEIN - GORDON (cf. TD)
- ▲ C'est aussi le cas pour le guide d'onde pour lequel si la pulsation est trop faible, la propagation est impossible.

☆ milieu passif ou actif

Un milieu est dit :

- *passif* s'il ne peut **que** absorber de l'énergie à l'onde ;
- *actif* s'il a été conçu pour augmenter l'énergie d'une onde.

- ◇ La quasi-totalité des milieux naturels sont des milieux passifs.
- ◇ Un milieu actif très connu : le LASER.
- ◇ En pratique, lorsque nous serons confrontés à un milieu il sera aisé de voir s'il est actif ou passif. Pour être actif, il faut **obligatoirement** une source d'énergie « autre ».
- ◇ Ici le câble coaxial étudié est passif. Reprenons la solution en notation réelle.

$$u(x,t) = A e^{k''x} \cos(\omega t - k'x + \varphi)$$

- ◇ Il y a deux cas possibles :

→ soit il s'agit d'une POPPM \blacktriangleright qui va vers les $+\vec{u}_x$ ($k' > 0$) et alors nous **devons** avoir

$$u(x,t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \rightsquigarrow \quad k'' < 0$$

→ soit il s'agit d'une POPPM \blacktriangleleft qui va vers les $-\vec{u}_x$ ($k' < 0$) et alors nous **devons** avoir

$$u(x,t) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \rightsquigarrow \quad k'' > 0$$

- ◇ Finalement, **ici**, avec les conventions adoptées, la passivité et donc l'atténuation du milieu se traduit par $k' k'' < 0$.



Il ne faut surtout pas retenir ce résultat car il dépend de la manière dont la POPPM est écrite.

V.2.iv – câble peu résistif

☆ équation de dispersion – simplification

- ◇ Nous allons considérer que r et g sont suffisamment faibles pour pouvoir faire des développements limités.
- ◇ Reprenons l'équation de dispersion

$$\begin{aligned}
\underline{k}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega(r\Lambda + g\Gamma) - rg \\
&= \frac{\omega^2}{c^2} - j \underbrace{\Lambda\Gamma}_{=1/c^2} \left(\frac{r}{\Gamma} + \frac{g}{\Lambda} \right) \omega - \Lambda\Gamma \times \frac{rg}{\Lambda\Gamma} \\
&= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{r}{\Gamma} + \frac{g}{\Lambda} \right) - \underbrace{\frac{rg}{\Lambda\Gamma\omega^2}}_{\text{ordre 2}} \right) \\
&= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{r}{\Gamma} + \frac{g}{\Lambda} \right) \right)
\end{aligned}$$

◇ En prenant la puissance 1/2 nous pouvons trouver \underline{k}

$$\begin{aligned}
\underline{k} &= \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{r}{\Gamma} + \frac{g}{\Lambda} \right) \right)^{1/2} \\
&\stackrel{\text{DL}}{=} \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{r}{\Gamma} + \frac{g}{\Lambda} \right) \right)
\end{aligned}$$

◇ Nous obtenons ainsi

$$k' = \text{Re}(\underline{k}) \quad \rightsquigarrow \quad k' = \varepsilon \frac{\omega}{c} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

◇ Puis

$$k'' = \text{Im}(\underline{k}) \quad \rightsquigarrow \quad k'' = -\varepsilon \frac{1}{2c} \left(\frac{r}{\Gamma} + \frac{g}{\Lambda} \right)$$

★ interprétation

- ◇ Nous retrouvons bien le fait que $k' k'' < 0$ ce qui montre bien que le câble est un milieu atténuatif.
- ◇ Nous constatons aussi que

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c = C^{\text{te}}$$

◇ Autrement dit nous voyons que le câble coaxial peu résistif n'est *pas* dispersif.

V.2.v – câble coaxial bien choisi

◇ Reprenons l'équation de dispersion

$$\begin{aligned}\underline{k}^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \left(\frac{r}{\omega \Gamma} + \frac{g}{\omega \Lambda} \right) - \frac{r g}{\Lambda \Gamma \omega^2} \right) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{r}{\omega \Gamma} \right) \left(1 - j \frac{g}{\omega \Lambda} \right)\end{aligned}$$

◇ Faisons en sorte, en fabriquant le câble, d’avoir $\frac{r}{\Gamma} = \frac{g}{\Lambda}$. Alors

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - j \frac{r}{\omega \Gamma} \right)^2$$

◇ Ce qui nous amène immédiatement à

$$\underline{k} = \varepsilon \frac{\omega}{c} \left(1 - j \frac{r}{\omega \Gamma} \right) \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1$$

◇ Nous avons donc

$$k' = \Re(\underline{k}) = \varepsilon \frac{\omega}{c} \quad \rightsquigarrow \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = c$$

◇ Dans ce cas là aussi le câble coaxial n’est pas dispersif ! Et, cette fois, c’est plutôt une surprise puisque le câble peut être « très » atténuatif.

◇ Nous constatons aussi que nous avons toujours $k' k'' < 0$, typique des milieux atténuatif (avec nos conventions).

V.3 – Paquet d’ondes

◇ Nous allons maintenant regarder ce qui se passe lorsque plusieurs ondes type OPPM se superposent.

◇ Pour cela, nous allons considérer que le milieu est linéaire et que ce qui se propage sont des OPPM, *i.e.* que le milieu est non atténuatif ou suffisamment peu pour pouvoir négliger l’atténuation.

▲ Un paquet d’ondes n’est autre que ce que nous appelons « train d’ondes » en optique.

V.3.i – superposition discrète d’OPPM

★ 2 OPPM

◇ Commençons par le cas le plus simple de propagation qui ne soit pas *une* onde : la superposition de *deux* ondes.

🕒 superposition

◇ Considérons deux ondes de même amplitude avec des phases nulles à l’origine, histoire d’alléger les notations

$$u_1(x,t) = U_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{et} \quad u_2(x,t) = U_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

◇ La superposition de ces deux ondes donne

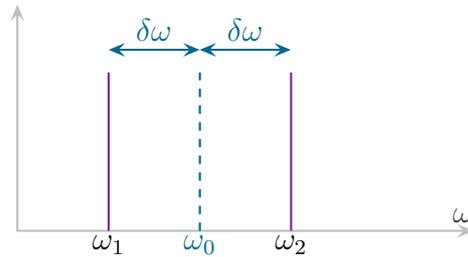
$$\begin{aligned}u(x,t) &= u_1(x,t) + u_2(x,t) \\ &= U_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + U_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2 U_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \times \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right)\end{aligned}$$

◇ Notons

$$\omega_0 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \delta\omega$$

◇ Nous avons ainsi

$$\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 - \delta\omega$$



◇ En ce qui concerne le vecteur d'onde

$$\begin{aligned} k_1 &= k(\omega_1) \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} k(\omega_0) + \delta\omega \times \frac{dk}{d\omega}(\omega_0) \\ &\stackrel{\text{not}}{=} k_0 + \delta k \end{aligned}$$

◇ De même nous trouvons

$$k_2 = k_0 - \delta k$$

◇ Finalement la superposition se réécrit

$$u(x,t) = 2U_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) \times \cos(\delta\omega t - \delta k x)$$

◇ En fixant $x = x_0$ nous obtenons

$$u(x_0,t) = 2U_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \times \cos(\delta\omega t - \psi_0) \quad \text{avec} \quad \varphi_0 = k_0 x_0 \quad \text{et} \quad \psi_0 = \delta k x_0$$

◇ Nous voyons alors deux termes :

- $\cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ est un terme d'évolution rapide, nous l'associerons aux oscillations de l'onde ;
- $\cos(\delta\omega t - \psi_0)$ est un terme d'évolution lente, nous l'associerons à l'amplitude.

◇ En chaque point quelconque de l'espace, nous avons donc une onde qui passe mais dont l'amplitude varie.

📍 enveloppe

◇ Compte-tenu de l'interprétation précédente, nous pouvons réécrire $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = U(x,t) \times \cos(\omega_0 t - k_0 x) \quad \text{avec} \quad U(x,t) = 2U_0 \cos(\delta\omega t - \delta k x)$$

◇ Nous avons donc affaire à une onde en $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ dont l'amplitude $U(x,t) = 2U_0 \cos(\delta\omega t - \delta k x)$ est elle-même propagative à la célérité

$$\frac{\delta\omega}{\delta k} \stackrel{\text{a priori}}{\neq} \frac{\omega_0}{k_0}$$

Montrer la simulation de la superposition de deux ondes.

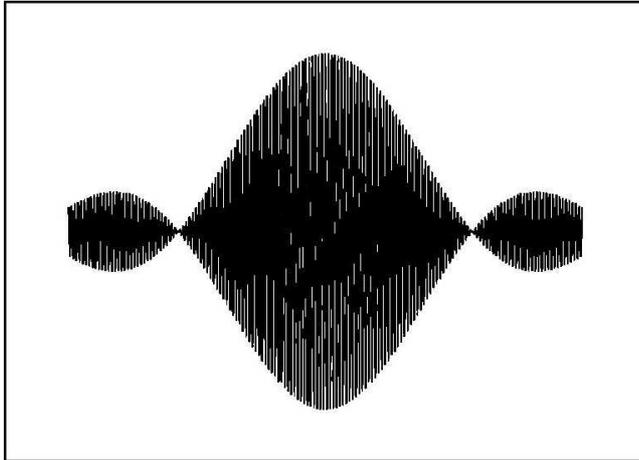
★ plein d'OPPM

◇ Considérons une « onde » formée par la superposition de n OPPM

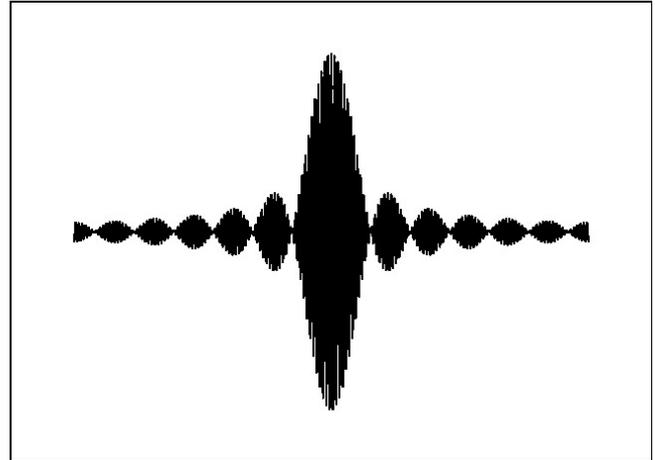
$$u(x,t) = \sum_n U_0 \cos(\omega_n t - k_n x) \quad \text{avec} \quad \omega_n = \omega_0 + n \delta\omega$$

◇ Regardons ce que cela donne pour $n = 5$ et $n = 20$ à t fixé

Graphique 23



Graphique 24



◇ Nous pouvons constater que plus il y a d'ondes qui se superposent, plus l'enveloppe centrale s'affine.

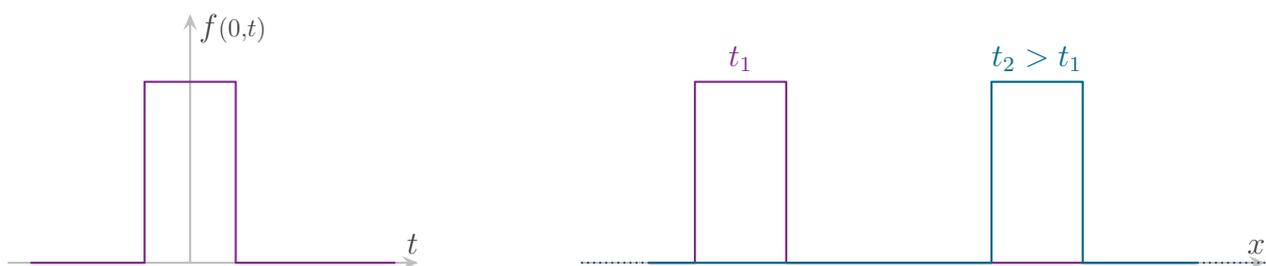
◇ Il s'agit là d'un résultat très fort et très important.

V.3·ii – superposition continue d'OPPM

★ onde carrée

🕒 description

◇ Imaginons une onde à profil carré.



◇ En généralisant à des pulsations négatives pour des raisons de praticité théorique, nous pouvons écrire que l'onde ci-dessus n'est autre que la superposition d'une infinité d'ondes

$$\underline{y}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{j(\omega t - k(\omega) x)} d\omega$$

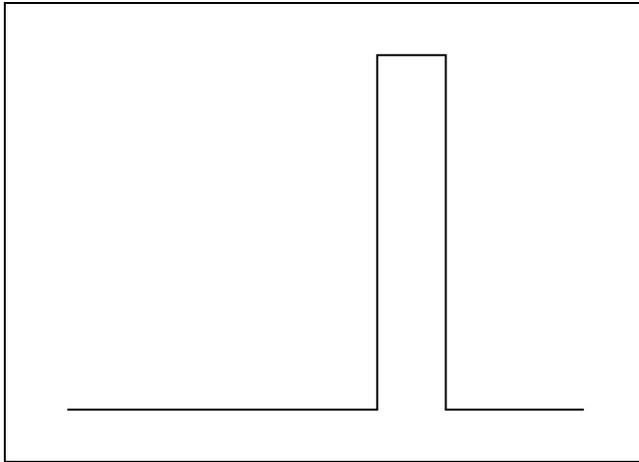
◇ L'amplitude complexe $\underline{A}(\omega)$ de chaque onde se calcule à l'aide de la *transformée de FOURIER*

$$\underline{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(0,t) e^{-j\omega t} dt$$

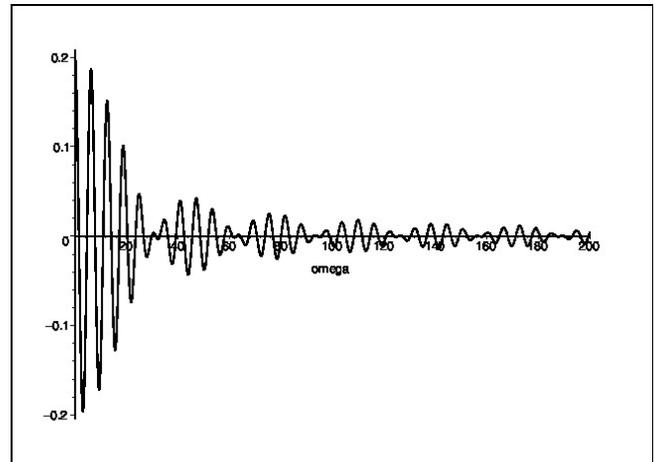
🌀 spectre

- ◇ Regardons une onde rectangulaire et son spectre associé limité à $\omega > 0$. Notons au passage qu’une amplitude négative signifie un déphasage de π .

Graphique 25

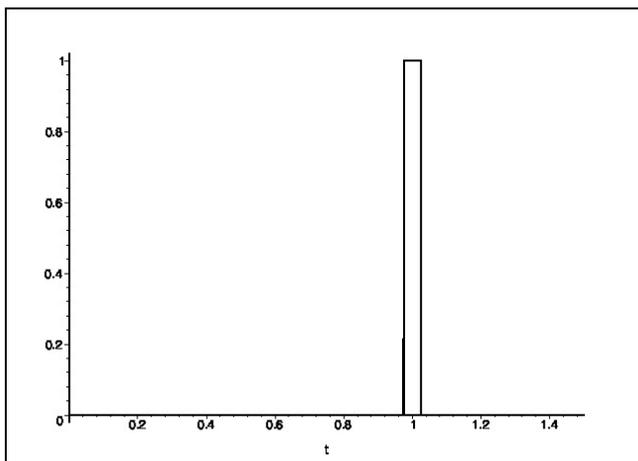


Graphique 26

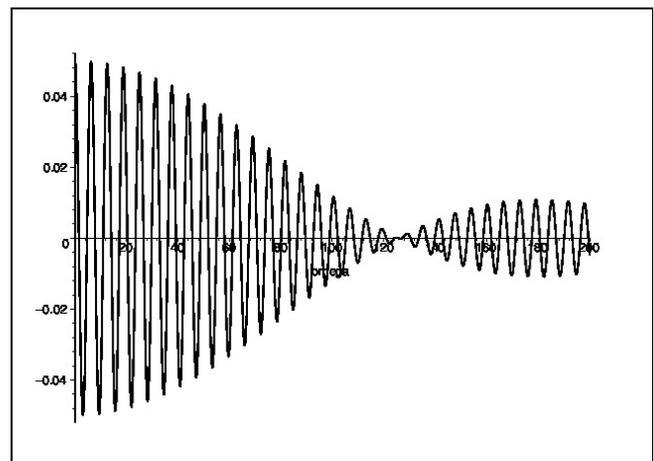


- ◇ Regardons maintenant une onde ayant le même profil mais plus « fine » temporellement.

Graphique 27



Graphique 28



- ◇ Nous pouvons constater que le spectre est plus riche puisque l’amplitude est non négligeable pour des pulsations plus élevées.

★ onde gaussienne

- ◇ Considérons maintenant une onde de profil gaussien.

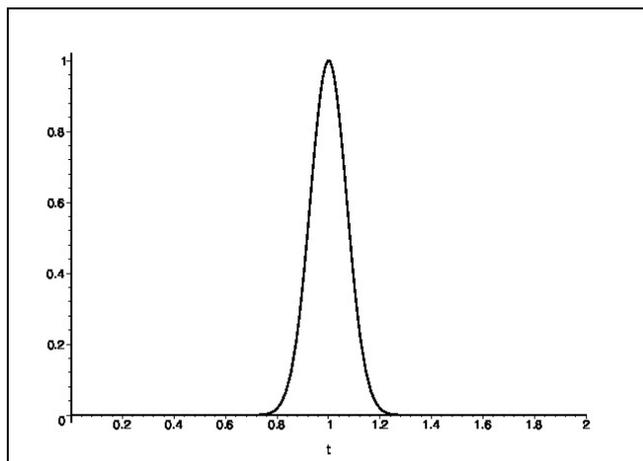
Une fonction est dite *gaussienne* si elle est de la forme

$$e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{où :}$$

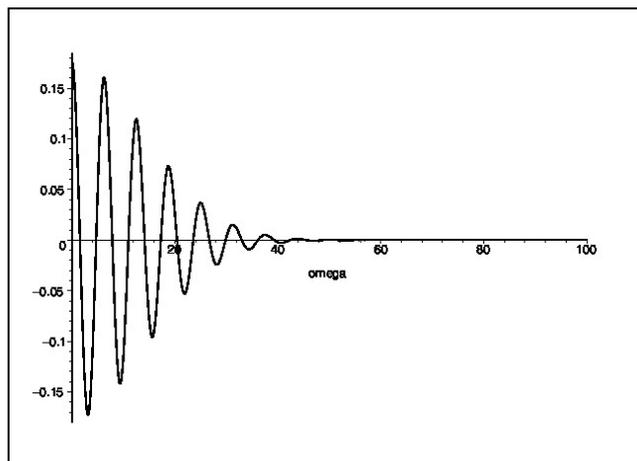
- x_0 est la valeur moyenne ;
- σ est l'écart-type.

- ◇ Sur les représentations qui suivent nous pouvons aussi constater que plus l’onde est tassée temporellement, plus son spectre est large.

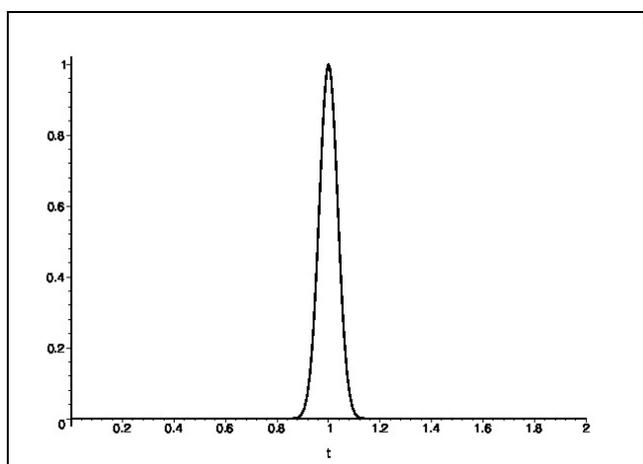
Graphique 29



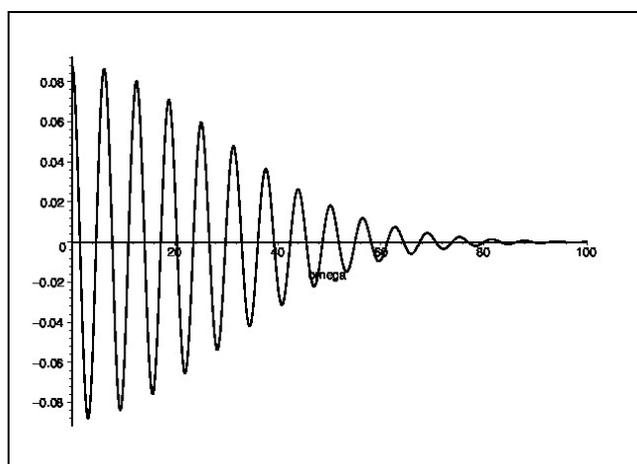
Graphique 30



Graphique 31



Graphique 32



◇ Nous admettrons le résultat général suivant,

Entre une onde d'extension temporelle δt et son spectre d'extension $\delta \omega$ nous pouvons écrire

$$\delta t \times \delta \omega \sim 1$$

V.3.iii – évolution temporelle

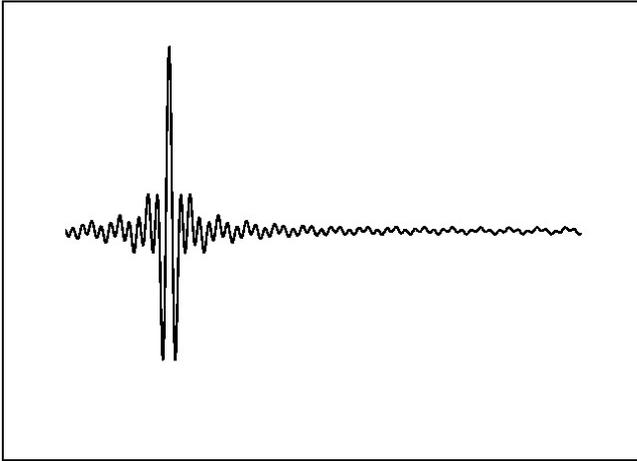
★ observation

◇ Regardons la manière dont évolue un paquet d'ondes dans un milieu non dispersif.

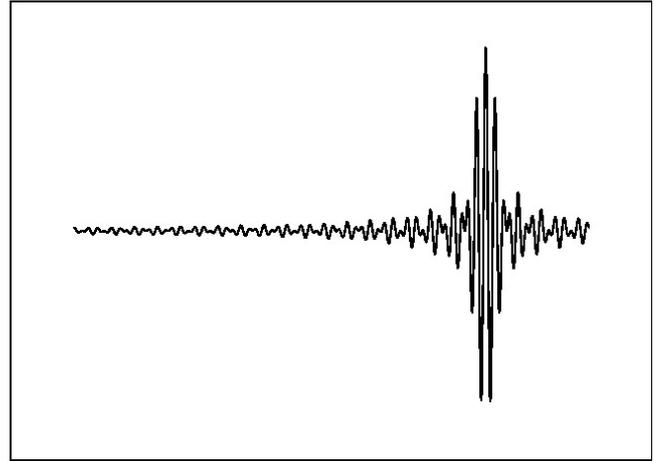
Montrer l'animations du paquet d'onde dans le milieu non dispersif.

◇ Comme chaque onde élémentaire a la même célérité, nous avons l'impression que tout se déplace d'un bloc.

Graphique 33



Graphique 34

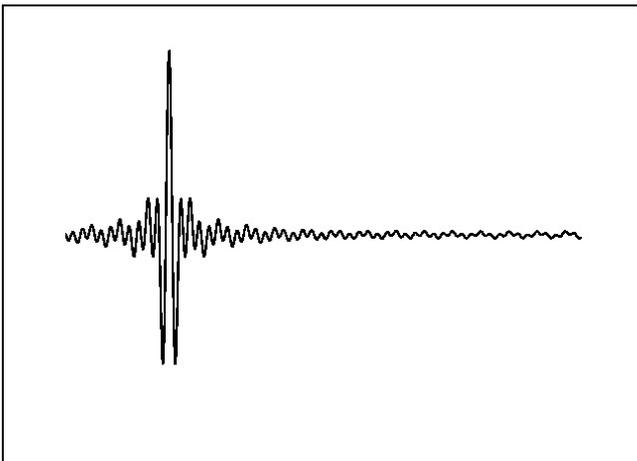


◇ Dans le cas dispersif, en revanche, c'est différent.

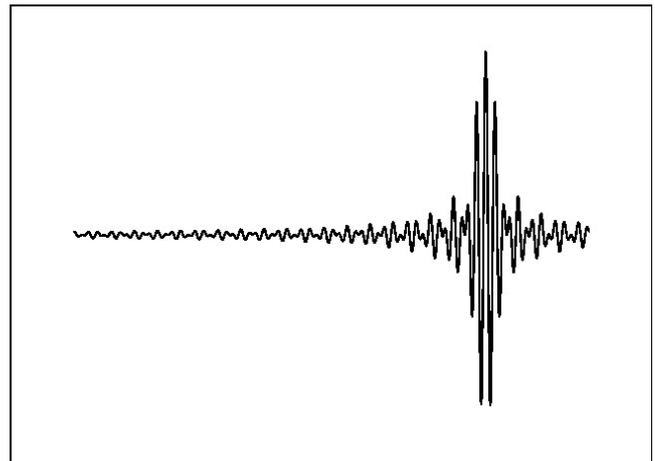
Montrer l'animations du paquet d'onde dans le milieu dispersif.

◇ Ici, alors que l'ensemble avance, nous voyons que le paquet se déforme et s'étale. Aucune énergie n'est perdue ! Il n'y a **pas** d'atténuation mais juste un « étalement » de l'onde.

Graphique 33



Graphique 34



★ vitesse de groupe

◇ En reprenant le résultat pour deux ondes, nous pouvons constater que l'enveloppe se déplace à la célérité

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

◇ Nous admettrons la généralisation.

Pour un paquet d'ondes, *la vitesse de groupe* est la vitesse de l'enveloppe et s'écrit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{ou} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk'}$$

◇ En pratique, nous calculerons :

→ $k'(\omega)$ avec la relation de dispersion ;

→ $\frac{dk'}{d\omega}$;

$$\rightarrow v_g = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}}$$

Premières ondes

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 1^{re} année :
 - III.B.1. Oscillations forcées dans les problèmes mécaniques à un seul paramètre
- ◇ Programme de 2^e année :
 - I.C.1. Phénomènes de propagation unidimensionnels non dispersifs – équation de d'Alembert
 - I.C.4. Phénomènes de propagation unidimensionnels dispersifs

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - oscillateur mécanique, oscillateurs mécaniques couplés
 - mode propre
 - module d'YOUNG
 - nombre d'onde, vecteur d'onde
 - relation de dispersion
 - OPP, OPP \rightarrow , OPP \leftarrow , OPPM, OPPH, OS
 - ventre / nœud de vibration
 - grandeurs duales, équations couplées, impédance caractéristique
 - dispersion, atténuation, absorption
 - vitesse de phase, vitesse de groupe
 - paquet d'ondes, spectre

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les unités de :
 -
- ◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leur interprétation :
 - module d'YOUNG (Pa)
 - module d'YOUNG du fer : 190 GPa
 - capacité linéique Γ (Fa.m⁻¹), inductance linéique Λ (H.m⁻¹)
- ◇ Connaître les valeurs de :
 - module d'YOUNG du fer : 190 GPa

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - équation de D'ALEMBERT unidimensionnelle
 - solutions de l'équation de D'ALEMBERT : ondes planes progressives, ondes planes progressives monochromatiques, ondes stationnaires
 - savoir passer d'un type de solution à une autre
 - savoir relier les grandeurs duales par l'impédance caractéristique
 - savoir interpréter formellement des conditions aux limites (excitation, court-circuit, corde libre, ...)
 - modes propres de la corde de MELDE

- énergie linéique
- loi de conservation de l’énergie
- puissance transférée pour une onde plane progressive

★ la phénoménologie

◇ Savoir :

- pour un oscillateur unidimensionnel, savoir décrire la résonance en élongation / en puissance (présence ou non de résonance, pulsation de résonance)
- connaître les effets d’un couplage de N oscillateurs
- savoir tracer la forme d’une onde à un instant donné connaissant la forme de l’onde à un instant précédent
- savoir qu’il n’y a pas d’onde réfléchie quand un milieu propagatif est fermé sur son impédance caractéristique
- savoir interpréter la dispersion et l’atténuation à partir de k
- savoir que $\Delta t \times \Delta \omega \simeq 1$ pour un paquet d’ondes et savoir l’interpréter

Au niveau de l’analyse

★ Analyse physique

◇ Savoir :

- compter le nombre de milieux propagatifs
- déterminer *a priori* les ondes présentes

★ Analyse technique

◇ Savoir :

- choisir la forme de solution la plus adapté aux problème
- choisir le repérage

Au niveau des savoir-faire

★ outils mathématiques

◇ Connaître parfaitement :

- les écritures des différents types de solutions

★ petits gestes

◇ Savoir :

- écrire les conditions aux limites pour un milieu propagatif (corde ou câble coaxial)

★ exercices classiques

◇ Savoir :

- retrouver la résonance en élongation / vitesse / puissance d’un oscillateur mécanique unidimensionnel
- savoir retrouver l’amplitude des oscillations en régime forcé de deux oscillateurs couplés
- savoir retrouver l’équation de propagation des ondes longitudinales dans une chaîne d’oscillateur avec l’approximation des milieux continus
- savoir relier le module d’YOUNG d’un solide à la vitesse de propagation des ondes longitudinales

- savoir retrouver l'équation de propagation sur une corde (en discutant des hypothèses)
- savoir retrouver l'équation de propagation dans un câble coaxial
- savoir retrouver les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude entre deux milieux propagatifs
- savoir trouver le régime libre d'une corde tendue et pincée à $t = 0$
- savoir retrouver les résonances de la corde de MELDE
- savoir retrouver la loi de conservation de l'énergie
- savoir faire un bilan énergétique lors d'une réflexion – transmission
- savoir montrer qu'une superposition de 2 OPPM \Rightarrow conduit à une vitesse de groupe $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$