Mécanique

Chapitre 4

Description de fluides en mouvement

Description de fluides en mouvement

Jusqu'à présent, en mécanique, nous nous étions intéressé aux corps non déformables, sauf éventuellement par des liaisons mécaniques. Or une simple observation du monde qui nous entoure montre que de nombreux corps, en particulier les fluides, sont très déformables lors de leurs mouvements. La mécanique des fluides va donc être, par nature, très différente de ce que nous connaissons. En effet, il importe peu de savoir si le centre de masse de l'eau d'une piscine est ici ou là. En revanche, il est bien plus intéressant de se demander si elle va déborder quand quelqu'un plonge dedans.

Le chapitre qui suit va donc être essentiellement consacré à une première approche de la mécanique des fluides. Dans une première partie, nous verrons comment décrire la cinématique d'un fluide, nous nous intéresserons ainsi de près à la *particule de fluide*. Dans une deuxième partie, plus rapide, nous verrons quelques caractéristiques que les fluides, lors de leurs mouvements, peuvent présenter. Dans la troisième partie, et alors même que nous n'aurons pas encore vu toutes les lois de la mécanique des fluides, nous pourrons *déjà* trouver et décrire des écoulements. Enfin, dans la dernière partie, nous ferrons une approche bien plus phénoménologique d'écoulements réels.

Table des matières

Biographies succintes

Leonhard Euler

(1707 Bâle – 1783 Saint-Pétersbourg)

Fils de pasteur, Leonhard ne rencontre que peu de difficulté scolaire puisqu'il rentre à l'université de Bâle à 14 ans et publie son premier article à 19 ans. Aidé par son professeur, Johann Bernoulli dont le fils n'est autre que Daniel, il rejoindra ce dernier à l'université de Saint-Pétersbourg pour y effectuer l'essentiel de sa carrière (il passera quelques années à Berlin aussi). Leonhard est à la fois un grand physicien et un des plus grands mathématiciens de l'histoire. Il travaillera entre autre sur l'optique, l'hydrodynamique et la mécanique.

Joseph Louis Lagrange

(1736 Turin – 1813 Paris)

D'origine française, Joseph était destiné à travailler au service administratif des ducs de Savoie mais il se détourne de ses études de droit au profit des mathématiques. Joseph écrit un premier article à 17 ans et enseigne dans une école militaire dès 19 ans. Il se fait connaître d'Euler et de d'Alembert et remplacera le premier à Berlin grâce à l'intervention du second. Il enseignera à l'école normale supérieure de Paris et à l'école Polytechnique à partir de 1795. Il est surtout connu pour son traité de *Mécanique analytique*.

George Stokes

(1819 Sligo, Islande – 1903 Cambridge)

George fait ses études à Cambridge où il obtient son diplôme en 1841 pour y devenir professeur de mathématique en 1849. Son activité de recherche se concentre d'abord sur l'hydrodynamique des fluides visqueux. Il s'intéresse après à la propagation du son et de la lumière. Il explique le phénomène de fluorescence vers 1852. Il est à noter que sa productivité de chercheur a notablement diminué à partir de 1857, année de son mariage.

Osborne Reynolds

(1842 Belfast – 1912 Watchet, Grande-Bretagne)

Le père d'Osborne fut, d'après ce dernier, son premier professeur. Directeur d'école et prêtre, il a déposé de nombreux brevets pour améliorer des machines agricoles. Osborne fait ses études à Cambridge et devient quelques temps après l'un des premiers « professeurs en ingénieurie » dans une nouvelle école qui deviendra l'université de Manchester. En parallèle de ses cours, il fait des recherches en mécaniques des fluides et c'est en 1883 qu'il publie un article dans lequel il introduit le nombre qui porte son nom.

Theodor VON KARMAN

(1881 Budapest – Aachen 1963)

Fils d'un professeur d'université, Theodor suit des études d'ingénieur à Budapest. Il s'intéresse particulièrement à l'aérodynamique et travaille avec PRADTL. Pendant la première guerre mondiale il travaille à Aachen sur des problème d'écoulement autour des ailes d'avion. Juif par sa mère, il fuit la seconde guerre et se réfugie aux États-Unis où il enseignera l'aéronautique, entre autre à Caltech. Après la fin de la guerre il servira d'expert pour l'aviation américaine puis pour l'OTAN.

I – Cinématique

I·1 – Modéliser un fluide

I·1·*i* – définition

> Un *fluide* est un milieu continu déformable qui peut s'écouler.

✧ Quelques exemples de fluides « classiques » :

- ➜ l'eau, l'huile, le savon, le miel ;
- ➜ l'air, la « fumée » ;
- ➜ …

✧ Mais il existe aussi tout un tas d'autres fluides, bien moins usuels :

- ➜ dentifrice (qui ne s'écoule que lorsqu'il est pressé) ;
- ➜ l'encre (qui doit s'écouler dans le stylo mais pas sur la feuille) ;
- ➜ le mélange eau maïzena (qui se rigidifie lorsqu'il est maltraité) ;
- ➜ la peinture (qui doit être liquide mais ne pas couler une fois au plafond) ;
- ➜ les sables mouvants ;
- ➜ …

✧ Et puis il y a aussi tous ces matériaux qui peuvent être considérés, ou non, comme des fluides suivant l'échelle spatiale ou temporelle utilisée :

- ➜ des petits graviers (considéré comme un fluide pour la manutention et comme un solide à l'échelle d'une fourmi) ;
- ➜ le manteau terrestre (indubitablement solide pour nous, liquide pour les géophysiciens).

✧ Dans toute la suite, et sauf précision contraire, nous parlerons uniquement des fluides usuels, ceux qui ont un comportement « normal » comme l'eau ou l'air.

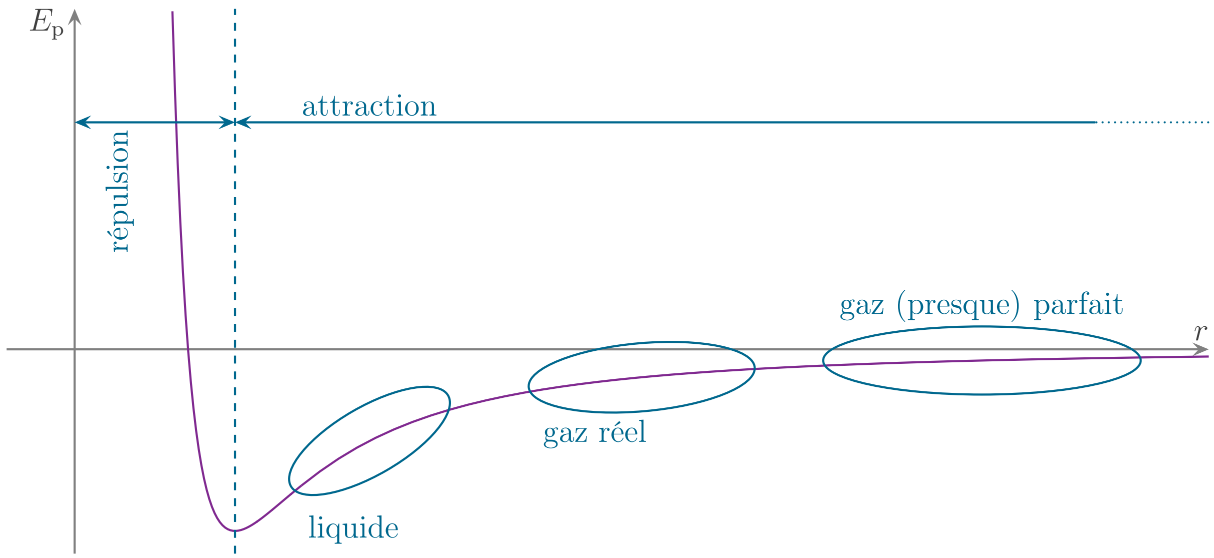
> Les fluides usuels sont appelés *fluides newtoniens*.

I·1·*ii* – un milieu continu

✧ Un phénomène remarquable est le suivant.

> À l'échelle atomique, les molécules s'attirent.

✧ En effet, si nous représentons l'allure de l'énergie potentielle d'interaction entre deux molécules en fonction de leur distance, cela donne quelque chose comme



✧ Nous pouvons voir que lorsque la distance moyenne est grande (cas des gaz), la force entre deux molécules est peu attractive.
✧ En revanche, pour les liquides, la force est très attractive.
✧ Une preuve de l'aspect « grégaire » des molécules au sein d'un liquide est le calcul de la pression cinétique.

$$P_{\text{cin}} = \frac{1}{3}\, m\, n^\star\, u^2 \qquad \text{avec}$$

➜ m la masse d'une molécule ;
➜ $n^\star$ la densité particulaire ;
➜ u la vitesse quadratique moyenne.

✧ Pour l'eau liquide ou l'eau gaz, m est le même.
✧ Pour l'eau liquide et l'eau gaz, la vitesse quadratique est la même car elle est liée à la température.
✧ En revanche, pour un liquide, nous avons environ $n^\star_{\text{liquide}} \sim 1000\, n^\star_{\text{gaz}}$. Cela implique, pour des températures et pressions usuelles

$$P_{\text{cin,gaz}} \sim 1 \text{ bar} \qquad \text{et} \qquad P_{\text{cin,liq}} \sim 1000 \text{ bar}$$

✧ Autrement dit, de l'eau dans un simple verre de cantine devrait exercer une pression de 1000 bar sur celui-ci… qui ne pourrait bien évidemment pas le supporter.
✧ Tel n'est en fait pas le cas car les molécules sont *freinées* par l'attraction de leurs congénères[1].

✫ libre parcours moyen

> Le *libre parcours moyen* (l.p.m.), noté $\overline{\ell}$, est la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux « chocs » (ou interaction) successifs.

✧ Rappelons que l'agitation thermique implique que toutes les molécules vont tout le temps dans tous les sens.
✧ Pour un électron dans un métal, le libre parcours moyen est donné par la relation $\overline{\ell} = u\,\tau$ où τ est la durée entre deux « chocs » successifs (cf. modèle de DRÜDE) et u la vitesse quadratique moyenne donnée par la définition de la température.
✧ Nous trouvons, pour cet électron

1. Voir à ce propos, le chapitre 1 de thermodynamique de première année.

$$\overline{\ell} \sim 10^{-9}\ \text{m}$$

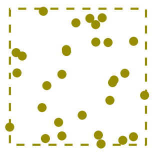
✧ Pour un fluide, le libre parcours moyen sera assimilé à la distance moyenne entre les particules.
✧ Ainsi, à 1 bar et 300 K

$$\overline{\ell}_{\text{gaz}} = \left(\frac{R\,T}{P\,\mathcal{N}_{\text{A}}}\right)^{1/3} \sim 3.10^{-9}\ \text{m}$$

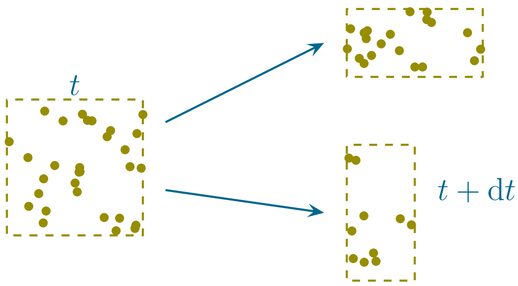
✯ propriété d'un milieu continu

> Un milieu est dit *continu* si toutes les particules du plus petit système définissable ont toutes un comportement similaire.

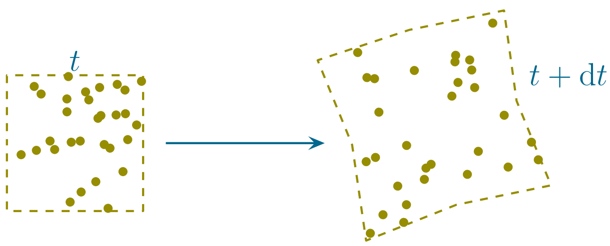
✧ Considérons ainsi un ensemble de particules initialement réparties dans un cube.



✧ Si, un instant après les particules se sont « séparées », nous ne pourrons pas qualifier de « continu » ce que nous étudions.



✧ En revanche, si les particules restent relativement groupées, le milieu sera dit « continu ».



✧ Comme nous savons que les particules évoluent à des échelles de l'ordre de $\overline{\ell}$, si nous regardons à cette échelle, nous constaterons de grandes différences entre les particules. En revanche, en regardant à des échelles plus grandes, les particules auront réalisé plusieurs (voire de très nombreuses) interactions et, donc, auront adopté un comportement *moyen*.

> Pour pouvoir étudier un ensemble de particule comme un milieu continu, il faut le regarder à des échelles bien supérieures à $\overline{\ell}$.

I·2 – Particule de fluide

Une *particule de fluide* n'est **pas** une des particules qui constituent le fluide.

✧ Souvent, dans la littérature, le vocable « particule fluide », plus ambigu, est utilisé en lieu et place de « particule de fluide ».

I·2·*i* – échelle d'observation

✯ échelle microscopique

✧ À cette échelle, chaque molécule qui constitue le fluide, est étudiée individuellement dans son mouvement.

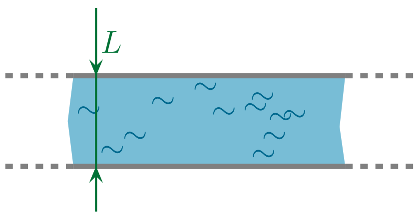
✧ Physiquement, à cette échelle, interviennent deux grands phénomènes :
- ➜ l'agitation thermique ;
- ➜ l'interaction de Van der Waals entre particules.

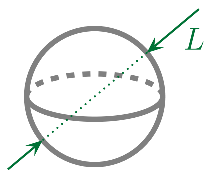
✧ La distance caractéristique de cette échelle est $\overline{\ell}$.

✧ Bien sûr, il n'est pas concevable d'étudier plus que quelques centaines voire quelques miliers de molécules, ce qui ne représente même pas une particule de fluide.

✯ échelle macroscopique

✧ À cette échelle, la distance caractéristique L est le diamètre d'une canalisation, le diamètre d'une sphère...





✧ L'évolution globale du fluide, à cette échelle est, pour ainsi dire, impossible à décrire, sauf dans quelques cas très particuliers.

✧ En revanche, il est possible de caractériser de manière globale des écoulements, comme nous le verrons dans la 2[e] partie.

✯ échelle mésoscopique

✧ C'est à cette échelle que se situe la particule de fluide.

✧ Typiquement, en notant d la distance caractéristique à l'échelle mésoscopique, nous avons

$$d \sim 10^{-6} \text{ m}$$

✧ De la sorte, nous avons

$$\overline{\ell} \ll d \ll L \qquad \text{avec} \qquad \ell \sim 10^{-9} \text{ m} \quad \text{et} \quad L \sim 10^{-3} \text{ m}$$

✧ Bien sûr, $L \sim 1$ mm représente une sorte de minimum pour l'échelle macroscopique pour les situations usuelles[2].

2. Quand il s'agit de modéliser les gaz dans l'espace interstellaire voire intergalactique, les distances de l'ordre du mètre sont considérées comme microscopiques puisqu'il n'y a que quelques unités à quelques miliers de molécules par mètre cube.

I·2·*ii* – objet d'étude

✯ la particule de fluide

> La *particule de fluide* est l'ensemble des molécules contenues dans un volume $\mathrm{d}\tau$ isolé par la pensée du reste du fluide.

✧ Cette notion a déjà été utilisée en 1re année lors de l'établissement de la relation fondamentale de la statique des fluides.

✧ Considérons une particule de fluide de 1 μm de côté, et déterminons le nombre de particules contenues à l'intérieur pour un gaz dans des conditions usuelles (donc se comportant comme un gaz parfait).

✧ Nous avons

$$N = n \times \mathscr{N}_{\mathrm{A}} = \frac{P\,V}{R\,T} \times \mathscr{N}_{\mathrm{A}} \qquad \rightsquigarrow \qquad N = \frac{10^5 \times (10^{-6})^3}{8{,}314 \times 300} \times 6{,}02.10^{23} \sim 3.10^7$$

✧ Nous pouvons donc constater que même un volume de 1 μm de côté contient suffisamment de molécules pour pouvoir faire des statistiques et, donc, pouvoir en parler comme d'une entité sans avoir besoin de regarder chaque molécule individuellement.

✯ caractéristique fondamentale

✧ Il existe deux différences fondamentales entre un simple point matériel et une particule de fluide :
- ➜ une particule de fluide peut se déformer ;
- ➜ une particule de fluide peut se dilater.

✧ Visuellement, la déformation correspond à

✧ Et pour la dilatation

✧ Bien entendu, une particule de fluide peut *à la fois* se déformer et se dilater.

I·2·*iii* – équilibre thermodynamique local

✯ une hypothèse systématique

> Des les situations usuelles, chaque particule de fluide peut être considérée comme étant à l'équilibre thermodynamique en tant que système thermodynamique. C'est *l'équilibre thermodynamique local*.

✧ L'équilibre thermodynamique local sous-entend quelque chose d'extrêmement intuitif, à savoir qu'il est possible de définir température et pression pour chaque particule de fluide, *i.e.* en chaque « point » du fluide.

✧ Nous avions *déjà* fait cette hypothèse, sans la nommer, dans le chapitre sur la diffusion. En effet, dans le cas du barreau dont les extrémités sont maintenues à des températures différentes :

- ➜ le système { barreau } n'est pas à l'équilibre ;
- ➜ chaque tranche (infinitésimale) est suffisamment à l'équilibre interne pour pouvoir se voir associer une température définie.

✫ conséquences concrètes

✧ Concrètement, en parlant de la i-ème particule de fluide, il est possible de lui associer :
- ➜ une température $T_i(t)$;
- ➜ une pression $P_i(t)$.

✧ En première année, lors de l'établissement de la relation fondamentale de la statique des fluides, c'est l'équilibre thermodynamique local qui avait permis d'écrire, pour une particule de fluide,

$$P \times \mathrm{d}\mathscr{V} = \mathrm{d}n \times R\,T$$

✧ Notons, enfin, que, sauf dans les cas extrêmes comme les explosions [3], l'équilibre thermodynamique local est toujours vérifié.

I·3 – Différentes lignes

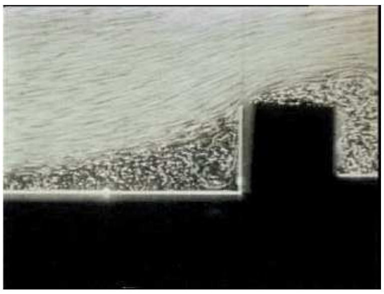
I·3·i – lignes de courant

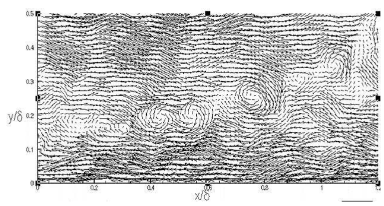
> Une *ligne de courant* est une ligne qui, à t fixé, est tangente en chacun de ses points, à la vitesse des particules de fluide.

✧ Il s'agit bien là d'une vision **instantanée**.

✧ Une manière expérimentale pour visualiser les lignes de courant consiste à :
- ➜ mettre « plein » de particules dans un fluide ;
- ➜ lors de l'écoulement, faire une photo avec une durée de pose courte.

✧ La photo qui suit et toutes les autres sont extraites du superbe CDRom Fluids Mechanic [4].





Montrer des lignes de courants.

Cinématique – ligne d'écoulement, visualisation – l'ONERA et la visualisation – 3^{e} onglet

Cinématique – ligne d'écoulement, visualisation – visualisation des écoulements – 2^{e} onglet

3. Et uniquement à « l'instant » de l'explosion.

4. Pour ceux qui possèderaient ce CDRom (ou qui le trouveraient dans une BU), il est possible de retrouver les vidéos ou les photos décrites avec le chemin indiqué.

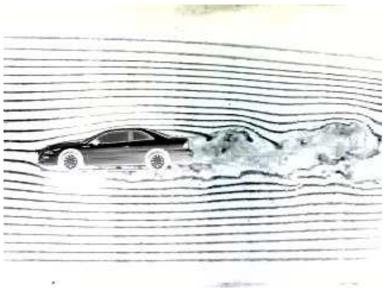
I·3·*ii* – lignes d'émission

> Une *ligne d'émission* est l'ensemble des particules de fluide qui sont passées (voire qui passeront) par un endroit précis.

✧ Si la ligne d'émission est intéressante, c'est parce qu'elle est très facile à faire expérimentalement. Il suffit, en effet, d'injecter dans le fluide un marqueur.
✧ La fumée qui sort d'une cheminée n'est autre qu'une ligne d'émission.

Montrer quelques lignes d'émission.
Cinématique – ligne d'émission – ligne d'écoulement en écoulement instationnaire

✧ L'exemple le plus classique est celui du canal à fumée.



Montrer quelques exemples dans le canal à fumée.
Cinématique – ligne d'écoulement et visualisation – visualisation dans un canal à fumée

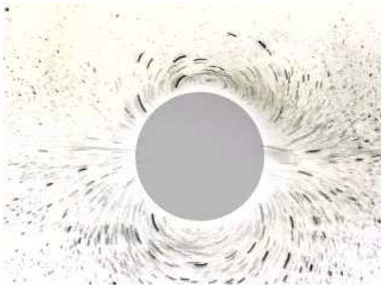
✧ Le problème, avec ces lignes d'émission, est d'ordre technique, car il est difficile de les relier aux phénomènes physiques.

I·3·*iii* – trajectoires

> La *trajectoire* n'est autre que la trajectoire, en tant que point matériel, d'une particule de fluide.

✧ Visualiser les trajectoires est difficile à faire car il y a *beaucoup* de particules de fluide.
✧ Expérimentalement, il est possible de procéder de la manière suivante :
- ➜ mettre peu de particules dans un fluide ;
- ➜ lors de l'écoulement, faire une photo avec une durée de pose long.

✧ L'exemple typique des trajectoires est celui des photos faites de nuit avec les « traces » des phares des voitures. Ces traces ne sont autres que les trajectoires.



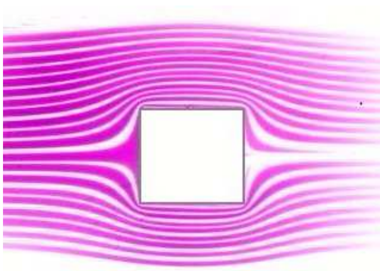
Montrer le film permettant d'obtenir les trajectoires.
Cinématique – trajectoire particulaire – trajectoire particulaire dans un écoulement stationnaire ou instationnaire – 2e onglet

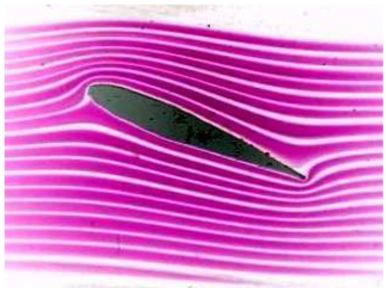
I·3·*iv* – cas stationnaire

✧ C'est un cas intéressant pour la raison suivante.

> Pour un écoulement stationnaire, les lignes de courants, les trajectoires et les lignes d'émissions sont identiques.

✧ En visualisant la situation ci-dessous, il n'est pas très difficile de voir que les lignes en rose (qui sont, techniquement, des lignes d'émission) sont aussi :
- ➜ des trajectoires puisque les particules de fluide « marquées » vont passer au même endroit que les autres ;
- ➜ des lignes de courant puisqu'en tant que trajectoire, en chaque point la vitesse est tangente à la ligne.





Montrer des écoulements stationnaires.
Cinématique – ligne d'écoulement et visualisation – cellule Hele - Shaw et écoulement potentiel – 3e onglet

I·3·*v* – exemple simple de cas non stationnaire

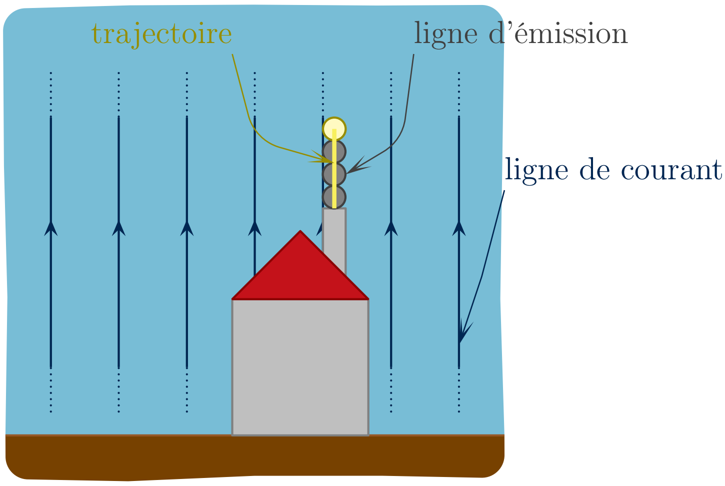
✯ situation

✧ Imaginons la situation (simplifiée) suivante :
- ➜ une cheminée crache de la fumée et provoque ainsi une ligne d'émission ;
- ➜ entre l'instant initial t_0 et t_1, l'ensemble de l'air a un mouvement vertical vers le haut ;
- ➜ entre t_1 et t_2, l'ensemble de l'air a un mouvement horizontal vers la droite.

✧ Quelles sont les lignes de courant à chaque instant ? Quelle est la ligne d'émission créée par la cheminée ? Quelle est la trajectoire du bout de la fumée ?

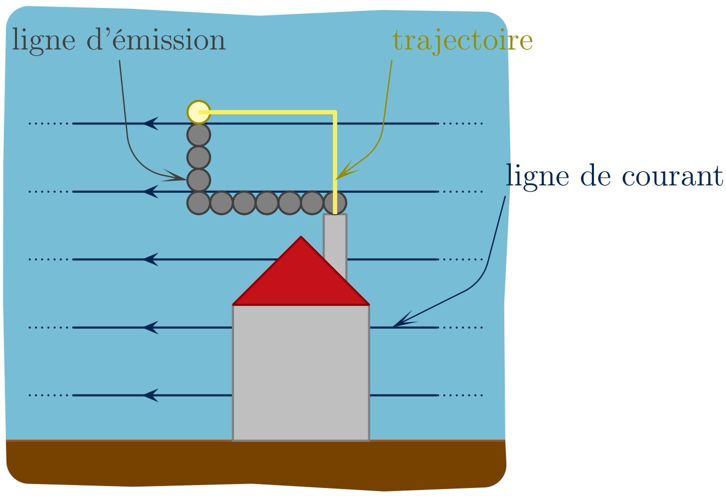
✯ première phase

- Entre t_0 et t_1, toutes les particules vont vers le haut donc les lignes de courant sont des lignes verticales, parallèles entre elles, vers le haut.
- Pendant ce temps la fumée monte tranquillement créant une ligne d'émission verticale.
- Et le bout de la fumée (particularisé en jaune) trace tranquillement son début de trajectoire vertical aussi.



✯ deuxième phase

- À partir de t_1, toutes les particules de fluide vont vers la gauche.
- Donc nous pouvons dire immédiatement que les lignes de courant sont des lignes horizontales parallèles entre elles et vers la gauche.
- La portion de fumée verticale est, comme un seul bloc, translatée vers la gauche, ce qui fait une ligne d'émission en L.
- En revanche, le bout de la fumée va mainteant, lui-aussi, vers la gauche et trace donc la fin de sa trajectoire à partir du haut qui forme, maintenant, un L tourné de 180 degrés.



- Nous voyons sur cet exemple simple que :
  - ➜ pendant la phase stationnaire (entre t_0 et t_1), ligne de courant, ligne d'émission et trajectoire se superposent ;
  - ➜ dès que l'écoulement n'est plus stationnaire, ces trois tracés diffèrent notablement.

I·4 – Deux visions distinctes

✧ La particularité de la mécanique des fluides est qu'il existe deux approches distinctes : l'approche lagrangienne et l'approche eulérienne.

✧ Ces deux approches sont complémentaires : l'une est plus du côté physique, l'autre du côté technique.

✧ Même si tout un chacun peut se concentrer sur l'un des deux aspects seulement, au détriment de l'autre, il est important de se rendre compte que les deux visions peuvent s'aider l'une l'autre.

✧ Toutefois, en cas de difficultés de mise en cohérence des deux approches (ce qui arrive très fréquemment, notamment au début), l'auteur conseille au lecteur de se concentrer sur l'aspect le plus facile et d'attendre de le maîtriser pour y inclure l'autre.

I·4·*i* – lagrangienne

✯ regarder une particule

> La *vision lagrangienne* consiste à étudier un fluide comme un ensemble de particules de fluide.

✧ Cela revient à particulariser chaque particule de fluide et à associer à chacune une vitesse, une position, une température...

✧ En notant, naïvement, les particules de fluides par un numéro i, cela reviendrait à associer à *chaque* particule de fluide des grandeurs telles que

$$\widetilde{\vec{r}}_i(t)\ ; \qquad \widetilde{\vec{v}}_i(t) \qquad \text{ou} \qquad \widetilde{T}_i(t)$$

✧ Dans la suite nous noterons par un $\widetilde{\ }$ toute grandeur lagrangienne, *i.e.* toute grandeur associée à une particule de fluide.

✧ De manière un peu moins naïve, nous savons que nous ne pouvons pas numéroter les particules de fluides par un nombre entier [5]. C'est pourquoi nous allons plutôt repérer – c'est-à-dire *distinguer* – les particules de fluide par leurs positions initiales.

✧ Ainsi, en notant $\vec{r}_0 = \widetilde{\vec{r}}_i(t_0)$, nous avons

$$\widetilde{\vec{v}}_{\vec{r}_0}(t) \overset{\text{not}}{=} \widetilde{\vec{v}}_i(t)$$

✧ Comme le montre la notation précédente il s'agit bien là d'une fonction **à une seule variable**, la variable t.

✧ Nous pouvons donc parler, sans vergogne, de la dérivée temporelle et ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\vec{v}}_{\vec{r}_0}}{\mathrm{d}t}(t) = \widetilde{\vec{a}}_{\vec{r}_0}(t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}\widetilde{\vec{r}}_{\vec{r}_0}}{\mathrm{d}t}(t) = \widetilde{\vec{v}}_{\vec{r}_0}(t)$$

✯ le pour et le contre

✧ L'avantage de cette approche est énorme puisque c'est elle qui permet de faire de la physique.

✧ En effet, comme chaque particule de fluide est vue individuellement, il est possible de lui appliquer *toutes* les lois physiques, qu'elles proviennent de la mécanique ou de la thermodynamique.

✧ L'inconvénient est, qu'en pratique, cette approche est peu intéressante. En effet la mécanique des fluides s'intéresse aux écoulements à un endroit donné, comme, par exemple, l'écoulement autour d'une aile d'avion ou d'une pile d'un pont.

5. L'auteur ne cherche pas à rentrer dans la polémique s'il est possible, ou non (à cause de la mécanique quantique), de voir un fluide comme un espace continu.

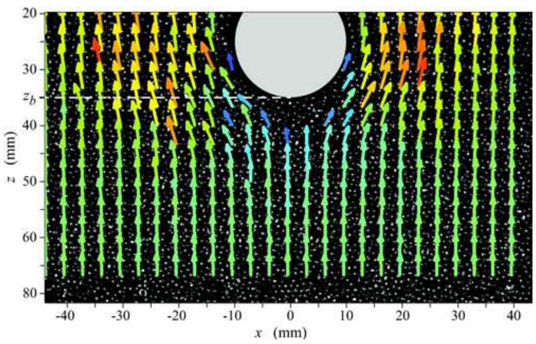
- ✧ Or, en se fixant *un endroit précis*, de multiples particules de fluide passent et celle qui est intéressante à un instant sera oubliée un petit peu plus tard quand elle sera partie et loin.
- ✧ C'est la raison pour laquelle a été développée l'autre vision, la vision eulérienne.

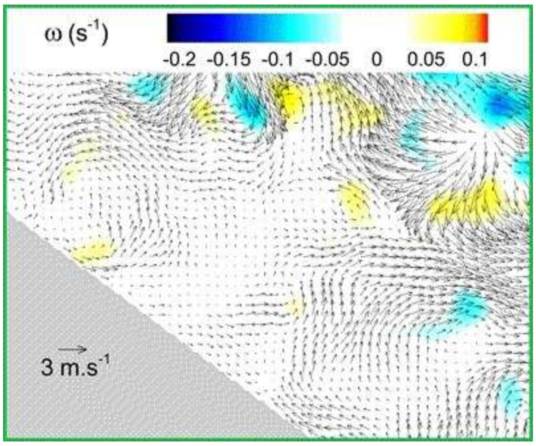
I·4·*ii* – eulérienne

✯ voir un champ

> La *vision eulérienne* consiste à voir le fluide comme un champ de vitesse.

- ✧ En d'autre termes, à chaque instant, le fluide est représenté par un champ de vecteurs, les particules de fluide étant complètement oubliées.





- ✧ Voici deux exemples trouvés sur internet de calculs de champs de vitesses[6]
- ✧ En chaque endroit, à chaque instant, la vitesse représentée est, bien évidemment, celle de la particule de fluide qui s'y trouve. Mais, insistons : ce que devient cette particule de fluide là, tout le monde en général, et la vision eulérienne en particulier, s'en moque !

✯ le pour et le contre

- ✧ Cette approche est vraiment utile pour la mécanique des fluides puisqu'elle permet de regarder en un endroit précis ce qui s'y passe.
- ✧ L'inconvénient est énorme puisque regarder un endroit précis revient à considérer un système ouvert, *i.e.* un système sur lequel il n'est pas possible de faire de la physique[7].

I·4·*iii* – précaution, passage d'une vision à une autre

- ✧ Les notations vont jouer un rôle important dans la suite, il convient donc d'y apporter un soin particulier.
- ✧ Comme, au fond, vision lagrangienne et vision eulérienne ont pour but, toutes les deux, de décrire l'ensemble des caractéristiques du fluide partout et à tout instant, il est possible d'écrire (trop) rapidement, par exemple pour la température

6. Sources :
   - `www.cnrs.fr/insis/recherche/docs-actualites/2011/Deplacement-sable1.jpg`
   - `www.onera.fr/sites/default/files/actualites/breves/2011-0516-s19_folki-spiv_cu_border-1.gif`

7. L'auteur a bien conscience qu'il existe des lois pour les systèmes ouverts *mais* ces lois sont trouvées à partir de lois sur des systèmes fermés. En fait, toutes les lois de base de la physique sont pour des systèmes fermés.

$$\widetilde{T} = T$$

✧ La relation précédente explique que, quelle que soit la manière dont les choses sont vues, cela revient au même.

✧ En revanche, d'un point de vue mathématique, la relation précédente est une aberration puisque $\widetilde{T}$ est une fonction d'une seule variable (le temps) alors que T est un champ de température, *i.e.* est une fonction de 4 variables (les 3 d'espace et celle de temps).

✧ Pour faire proprement la conversion entre grandeur eulérienne et grandeur lagrangienne, il faut penser de la manière suivante.

> La température d'une particule de fluide à un instant t est la température de l'endroit où elle se trouve à cet instant.
> Il en est de même pour sa vitesse, son accélération ou toute autre grandeur.

✧ Considérons la particule de fluide initialement à la position $\vec{r}_0$.

✧ Parce qu'il s'agit de la définition de la température lagrangiennne, cette particule de fluide a, à l'instant t, la température

$$\widetilde{T}_{\vec{r}_0}(t)$$

✧ Mais cette particule se trouve à l'instant t à la position

$$\widetilde{\vec{r}}_{\vec{r}_0}(t)$$

✧ Or, à cet endroit, à cet instant, la température n'est autre que

$$T(\text{cet endroit là},t) = T(\widetilde{\vec{r}}_{\vec{r}_0}(t),t)$$

✧ Et parce que la température de la particule de fluide n'est autre que celle de là où elle est, nous pouvons donc conclure

$$\widetilde{T}_{\vec{r}_0}(t) = T(\widetilde{\vec{r}}_{\vec{r}_0}(t),t)$$

✧ Nous sommes loin du

$$\widetilde{T} = T$$

✧ C'est bien cette relation qui nous permettra de passer de la vision lagrangienne (qui nous permet de faire de la physique) à la vision eulérienne (qui est utilisée en pratique).

I·4·*iv* – description analytique des lignes

✯ trajectoire

✧ Chaque particule de fluide, en tant que point matériel, a une trajectoire, c'est indéniable.

✧ Pour cela, il faut d'abord trouver sa vitesse $\widetilde{\vec{v}}(t)$ puis sa position (en général nous nous contenterons de $\widetilde{x}(t)$ et $\widetilde{y}(t)$.

✧ Enfin, en éliminant le paramètre t entre les deux, nous aurons une relation du type

$$\widetilde{x}(\widetilde{y}) \qquad \text{ou} \qquad \widetilde{y}(\widetilde{x})$$

✧ C'est bien là la trajectoire.

✯ ligne d'émission

✧ C'est assez pénible à exprimer et, en plus, c'est très peu intéressant dans le cas non stationnaire.
✧ Et comme dans le cas stationnaire, les lignes d'émissions se superposent aux lignes de courant, autant chercher ces dernières directement.

✯ lignes de courant

✧ Ce ne sont ni plus ni moins que des lignes de champ de vitesse, tout comme il existe les lignes de champ électrique ou magnétique.
✧ Nous devons traduire le fait qu'en chaque point de la ligne le vecteur vitesse eulérienne $\vec{v}$ est tangent à un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}$ sur cette ligne.
✧ Techniquement cela se traduit par

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \lambda\,\vec{v} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{v} = 0$$

✧ Dans les deux cas, nous avons une équation vectorielle à projecter sur les trois axes et à manipuler ensuite.
✧ Pour un écoulement plan, cela donne, par exemple

$$\vec{v} = v_x\,\vec{u}_x + v_y\,\vec{u}_y \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y$$

✧ Nous avons ainsi (première méthode)

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \lambda\,\vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}x = \lambda\,v_x \\ \mathrm{d}y = \lambda\,vy \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{v_x}{v_y}$$

✧ Il faut, en effet, éliminer λ qui est un paramètre inconnu (et variable). Nous obtenons alors une équation différentielle plus ou moins facile à résoudre.
✧ L'autre méthode donne

$$\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}x\,v_y - \mathrm{d}y\,v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}x\,v_y - \mathrm{d}y\,v_x = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{v_x}{v_y}$$

✧ Bien évidemment, nous arrivons à la même équation différentielle à résoudre.

I·4·v – dérivée particulaire

✯ résultat, notation

> La *dérivée particulaire* est la dérivée d'une grandeur pour une particule de fluide choisie.

✧ En fait, c'est simplement la dérivée de la grandeur lagrangienne !
✧ Cette dérivée est intéressante puisque, comme la particule de fluide est choisie, elle représente quelque chose de physiquement pertinent.
✧ Le seul soucis, c'est que la dérivée de la grandeur lagrangienne n'est pas intéressante puisqu'en mécanique des fluides, la vision lagrangienne ne l'est pas. . .
✧ C'est pourquoi il faut pouvoir exprimer en grandeurs eulériennes une grandeur associée à une vision lagrangienne. Cela se fait de la manière suivante.

En grandeur eulérienne, la dérivée particulaire s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T \overset{\text{not}}{=} \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}$$

✧ Remarquons que (très) souvent, dans la littérature qui ne distingue pas ou mal les grandeurs lagrangiennes des grandeurs eulériennes, les dérivées particulaires sont écrites avec des grands d droits.

✧ Dans ce cours, comme les grandeurs lagrangiennes sont facilement repérables par la présence d'un tilde, nous n'avons pas besoin de cette distinction et c'est pourquoi, sans aucune ambiguité ni aucun risque de se tromper, nous pouvons utiliser les d droits usuels.

✯ interprétation

✧ Nous constatons que, dans l'expression de la dérivée particulaire, il y a deux termes.

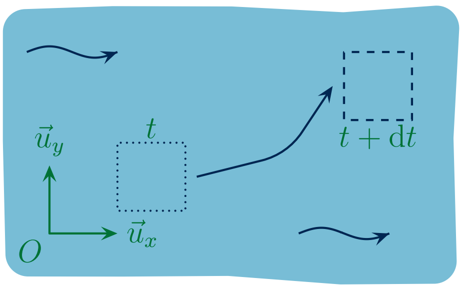
La partie en $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ de la dérivée particulaire s'appelle la *dérivée locale* et correspond aux variations locales (à position fixée) de la température.

La partie en $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$ de la dérivée particulaire s'appelle la *dérivée convective* et correspond aux changements de température dus au mouvement de la particule de fluide.

✧ Cette dernière variation est importante.

✧ Quand nous voulons voir comment varie la température d'une particule de fluide (définition de la variation particulaire), il faut regarder sa température à t et à $t + \mathrm{d}t$.

✧ Or cette particule de fluide bouge (sinon, c'est beaucoup moins drôle). Et comme elle bouge, cela nous impose de la chercher à t et à $t + \mathrm{d}t$ à des endroits différents.



✧ La variation convective, c'est ça, c'est le fait de devoir chercher ici puis ailleurs la particule de fluide qui nous intéresse. Et cela dépend, bien évidemment de sa vitesse. L'expression $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$ en témoigne.

✯ démonstration

✧ Cherchons la dérivée, à particule de fluide fixée, de la température.

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}_{\vec{r}_0}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\widetilde{T}_{\vec{r}_0}(t+\mathrm{d}t) - \widetilde{T}_{\vec{r}_0}(t)}{\mathrm{d}t}$$

✧ Allons-y en utilisant la vision eulérienne

$$\mathrm{d}\widetilde{T} = \widetilde{T}_{\vec{r}_0}(t+\mathrm{d}t) - \widetilde{T}_{\vec{r}_0}(t) = T(\widetilde{r}_{\vec{r}_0}(t+\mathrm{d}t),t+\mathrm{d}t) - T(\widetilde{r}_{\vec{r}_0}(t),t)$$

◇ Et ainsi en ajoutant et retirant le même terme

$$\mathrm{d}\widetilde{T} = T(\widetilde{r}_{\vec{r}0}(t+\mathrm{d}t),t+\mathrm{d}t) - T(\widetilde{r}_{\vec{r}0}(t+\mathrm{d}t),t) + T(\widetilde{r}_{\vec{r}0}(t+\mathrm{d}t),t) - T(\widetilde{r}_{\vec{r}0}(t),t)$$

◇ Les deux premiers termes font apparaître une variation à *position fixée*. Il s'agit donc d'une variation dans le temps, *i.e.* une variation temporelle.

◇ De manière analogue, les deux derniers termes font apparaître une variation à *instant fixé*, c'est une variation spatiale.

◇ Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{d}\widetilde{T} = \mathrm{d}T_{\text{temporel}} + \mathrm{d}T_{\text{spatial}}$$

◇ Or, comme T est un champ eulérien, la variation temporelle s'écrit simplement

$$\mathrm{d}T_{\text{temporel}} = \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

◇ En ce qui concerne la variation spatiale, cela dépend, évidement, de l'écart entre les deux points entre lesquels nous cherchons, justement, cette variation.

◇ Quels sont ces deux points ? Il s'agit des positions $\widetilde{r}_{\vec{r}0}(t+\mathrm{d}t)$ et $\widetilde{r}_{\vec{r}0}(t)$. Autrement dit, il s'agit du petit déplacement $\mathrm{d}\widetilde{\vec{r}}$ de la particule de fluide.

◇ Nous pouvons alors écrire, d'après la définition du gradient,

$$\mathrm{d}T_{\text{spatial}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T \cdot \mathrm{d}\widetilde{\vec{r}}$$

◇ Nous arrivons ainsi à

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T \cdot \frac{\mathrm{d}\widetilde{\vec{r}}}{\mathrm{d}t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\widetilde{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T \cdot \widetilde{\vec{v}}$$

◇ Et si, maintenant, nous arrêtons de mélanger grandeurs eulériennes et lagrangiennes, en écrivant tout en eulérien, cela nous conduit au résultat énoncé

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$$

✯ dérivée particulaire d'une grandeur vectorielle

◇ Nous admettrons le résultat suivant [8].

> Pour une grandeur vectorielle $\vec{A}$ quelconque, la dérivée particulaire s'écrit
> $$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\,\vec{A}$$

◇ Nous reconnaissons là aussi une dérivée locale et une dérivée convective.

STOP Attention à la place des parenthèses dans le terme de variation convective. $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\,\vec{A}$ signifie quelque chose alors que $\vec{v} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{A}\right)$ n'a aucune signification puisqu'il n'est pas possible de prendre le gradient d'une grandeur vectorielle.

◇ En plus de cela, la grandeur vectorielle dont nous chercherons la dérivée le plus souvent est la vitesse et c'est un cas particulier.

8. Le lecteur curieux pourra aisément le démontrer en coordonnées cartésiennes.

> La dérivée particulaire d'un champ de vitesse s'écrit, au choix,
> $$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$$
> $$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$$

✧ La 2[e] version nous sera très utile dans le dernier chapitre.

✧ Rappelons la méthode pour calculer, en pratique, $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$ **en coordonnées cartésiennes** :

① écrire les composantes de $\vec{v}$ et les simplifier tout de suite (car il y a souvent des composantes nulles) ;

② écrire les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ et les simplifier tout de suite aussi (car il y a souvent aussi des composantes nulles pour cause d'invariance) ;

③ faire le produit scalaire $\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ **dans cet ordre** (la vitesse à gauche, le gradient à droite) ;

④ appliquer l'opérateur obtenu à chacune des composantes de $\vec{v}$.

✧ Faisons le, par exemple, pour un champ de vitesse du type $\vec{v} = v(x,y)\,\vec{u}_x$.

✧ Étape ①

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✧ Étape ②

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}$$

✧ Étape ③

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}} = v_x\,\frac{\partial}{\partial x}$$

✧ Étape ④

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\,\vec{v} = v_x\,\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_x\,\frac{\partial v_x}{\partial x}\,\vec{u}_x$$

✯ la dérivée particulaire et la physique

- La dérivée particulaire étant la dérivée d'une grandeur pour une particule de fluide, ce n'est autre que la dérivée pour un système *fermé*.
- Toute la physique va donc s'écrire avec des dérivée particulaire.
- Par exemple, le PFD, pour une particule de fluide va s'écrire

$$m_{\text{part}}\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{f}_{\text{distance}} + \sum \vec{f}_{\text{contact}} \quad \rightsquigarrow \quad m_{\text{part}}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\,\vec{v}\right) = \sum \vec{f}_{\text{distance}} + \sum \vec{f}_{\text{contact}}$$

En fait, les équations d'Euler et de Navier – Stokes ne sont que des PFD...

II – Décrire des écoulements

II·1 – Conservation de la masse

II·1·i – vecteur densité de courant de masse

✯ expression

✧ Comment décrire, par quelle grandeur décrire, que de la masse est en mouvement ?

✧ Comme « d'habitude », par un champ de vecteur de type « courant de masse ».

Le vecteur *densité surfacique de courant de masse en volume* $\vec{\jmath}_m$ s'écrit, avec μ la masse volumique

$$\vec{\jmath}_m = \mu\,\vec{v}$$

✧ Nous avons donc immédiatement

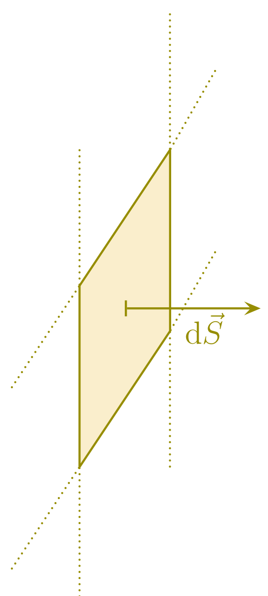
Durant $\mathrm{d}t$, la masse $\mathrm{d}m$ qui traverse la surface $\mathrm{d}\vec{S}$ s'écrit

$$\mathrm{d}m = \vec{\jmath}_m \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

✯ démonstration

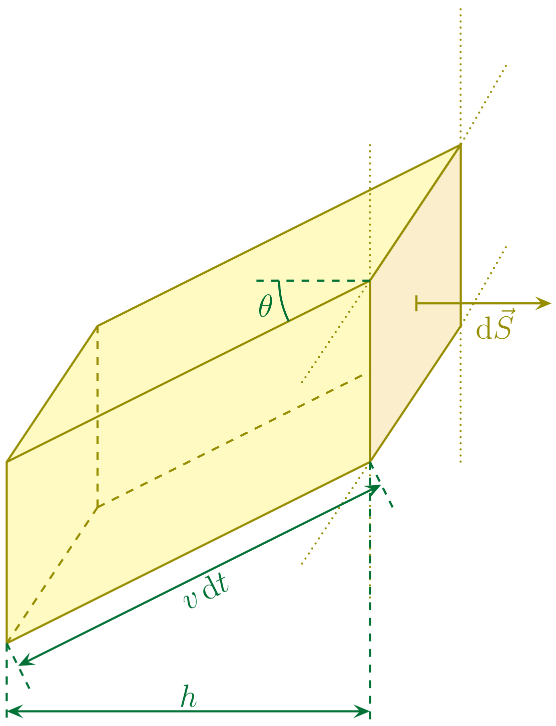
✧ La démonstration est classique.

✧ Considérons une surface $\mathrm{d}S$ caractérisé par le vecteur surface $\mathrm{d}\vec{S}$



✧ Déterminons la masse $\mathrm{d}m$ du fluide qui traverse $\mathrm{d}S$ durant $\mathrm{d}t$.

✧ Comme, localement, le fluide a la vitesse $\vec{v}$, la situation est la suivante.



✧ Seul le fluide contenu dans le volume représenté passera à travers dS et ce volume s'écrit

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S \times h \quad \text{et} \quad h = v\,dt\,\cos\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}S \times v\,dt\,\cos\theta$$

✧ Dans ce volume, la masse s'écrit

$$\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}\tau \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}S\,v\,dt\,\cos\theta$$

✧ Soit, en notation vectorielle

$$\mathrm{d}m = \mu\,\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

✧ Et par identification avec la définition de $\vec{\jmath}_m$ nous avons

$$\mathrm{d}m = \vec{\jmath}_m\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{\jmath}_m = \mu\,\vec{v}$$

II·1·*ii* – débits

✯ il en existe plusieurs

Le *débit massique* à travers une surface est la masse totale qui passe, par unité de temps, à travers cette surface.

Le débit massique s'exprime en kg.s^{-1}.

✧ Par simple extensivité de la relation précédente, nous avons

Le débit massique à travers une surface $\mathcal{S}$ s'écrit

$$D_m = \iint_{P\in\mathcal{S}} \vec{\jmath}_m(P)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_P$$

✧ Nous pouvons faire de même pour le débit volumique.

Le *débit volumique* à travers une surface est le volume totale qui passe, par unité de temps, à travers cette surface.

Le débit volumique s'exprime en $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$.

✧ Par analogie, nous avons

Le débit volumique à travers une surface $\mathcal{S}$ s'écrit

$$D_v = \iint_{P\in\mathcal{S}} \vec{\jmath}_v(P)\cdot \text{d}\vec{S}_P$$

✧ Reste à déterminer $\vec{\jmath}_v$. Le lecteur pourra s'inspirer de la démonstration précédente pour montrer que

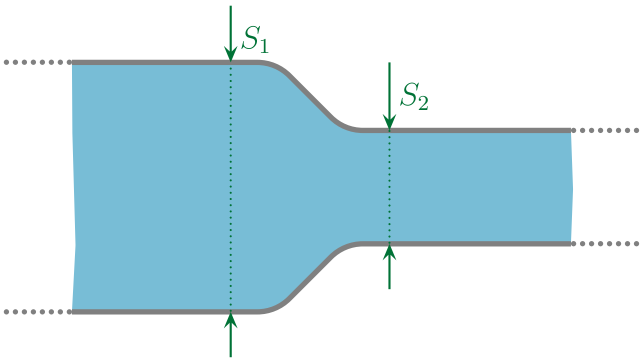
La *densité surfacique de courant de volume en volume* $\vec{\jmath}_v$ s'écrit

$$\vec{\jmath}_v = \vec{v}$$

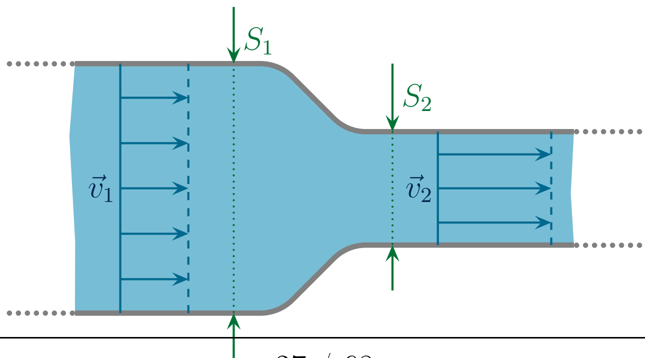
✧ Oui, « densité surfacique de courant de volume en volume » est un nom plus qu'étrange. Mais, tout comme la nomenclature en chimie, la rigueur nécessaire entraîne parfois, à la marge, quelques situations cocasses.

✯ exemples à utiliser directement

✧ Imaginons un cas classique d'une canalisation pour laquelle la section diminue.



✧ Imaginons aussi que sur chaque section la vitesse du fluide soit uniforme, ce que nous représenterons ainsi



✧ Alors, quand il s'agira d'écrire les débits massique et volumique en ① et ②, nous ne la calculerons pas par sommation (avec « l'intégrale »), mais écrirons simplement

$$D_{v1} = v_1\,S_1\ ; \qquad D_{m1} = \mu_1\,v_1\,S_1\ ; \qquad D_{v2} = v_2\,S_2 \qquad \text{et} \qquad D_{m2} = \mu_2\,v_2\,S_2$$

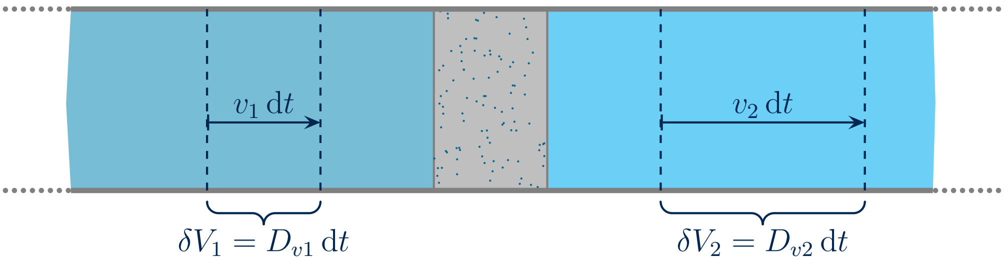
✧ De plus, nous pourrons écrire très très souvent (à chaque fois que le régime sera stationnaire) la conservation du débit massique

$$D_{m1} = D_{m2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu_1\,v_1\,S_1 = \mu_2\,v_2\,S_2$$

✧ Enfin, nous aurons très souvent aussi la conservation du débit volumique

$$D_{v1} = D_{v2} \qquad \rightsquigarrow \qquad v_1\,S_1 = v_2\,S_2$$

✧ Exception notable à la conservation du débit volumique, la détente de Joule – Thomson



✧ Dans cette détente, le débit massique est le même avant et après la détente, mais le débit volumique est plus grand après.

✧ Cela tient au fait que les gaz sont compressibles, *i.e.* que leurs masses volumiques changent avec la pression.

✯ fluide incompressible

> Un fluide est dit *incompressible* lorsque sa masse volumique est la même partout et tout le temps.

Il ne faudra pas confondre *écoulement* incompressible et *fluide* incompressible, comme nous le verons plus tard.

✧ En pratique, nous ferons la simplification (justifiée) suivante.

> En première et bonne approximation, tous les liquides sont considérés comme des fluides incompressibles.

✧ De plus, il y a une propriété simple pour les fluides incompressibles.

> Pour un fluide incompressible, nous avons
> $$D_m = \mu\,D_v$$

II·1·*iii* – équation locale de conservation de la masse

✯ énoncé

La loi locale de conservation de la masse s'écrit, en notant σ le taux de production volumique

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\jmath}_m = \sigma \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\mu \vec{v}\right) = \sigma$$

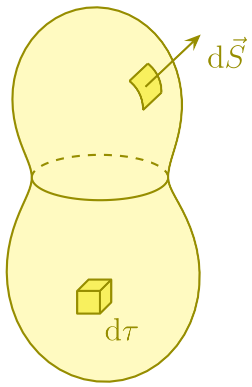
✧ Il s'agit là, somme toute, de la forme usuelle d'une loi de conservation.

✯ démonstration

✧ La démonstration de la loi usuelle est usuelle elle aussi.

☯ situation

✧ Considérons un volume $\mathcal{V}$ quelconque mais fixe dans le temps.



✧ Faisons un bilan de masse pour ce volume $\mathcal{V}$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.

VARIATION DANS LE TEMPS = ÉCHANGE À TRAVERS LA SURFACE + CRÉATION EN VOLUME

☯ variation dans le temps

✧ À un instant t quelconque, la masse totale $m(t)$ contenue dans le volume $\mathcal{V}$ s'écrit, par extensivité

$$m(t) = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \mathrm{d}m_P \qquad \rightsquigarrow \qquad m(t) = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \mu(P,t)\,\mathrm{d}\tau_P$$

✧ La variation de la masse s'écrit donc, en utilisant un développement limité

$$\delta m_{\text{var}} = m(t+\mathrm{d}t) - m(t) \quad \text{et} \quad m(t+\mathrm{d}t) = m(t) + \mathrm{d}t \times \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta m_{\text{var}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$$

✧ Avec l'expression de $m(t)$ cela donne

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iiint_{P\in\mathcal{V}} \mu(P,t)\,\mathrm{d}\tau_P\right)$$

✧ Et comme le domaine d'intégration $\mathcal{V}$ ne dépend pas du temps, il est possible de « rentrer » la dérivée sous le signe somme ce qui donne

$$\delta m_{\text{var}} = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}(P,t)\,\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t$$

✧ Et finalement

$$\text{VARIATION dans le temps} = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t}(P,t)\,\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t$$

☯ échange à travers la surface

✧ Comme d'habitude, par extensité, la masse totale qui passe à travers la surface est la somme des masses élémentaires qui passent à travers les surfaces élémentaires.

$$\delta m_{\text{éch}} = \oiint_{P\in\mathcal{S}} \delta^2 m_{\text{éch},P}$$

✧ En faisant attention au sens conventionnel du vecteur surface, nous avons

$$\delta^2 m_{\text{éch},P} = -\vec{\jmath}_m(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta m_{\text{éch}} = -\oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{\jmath}_m(P,t)\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t$$

✧ Au tour de Green – Ostrogradski de rentrer dans la danse

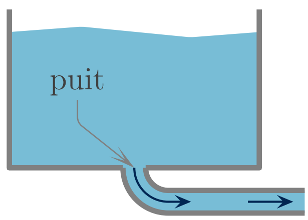
$$\delta m_{\text{éch}} = -\iiint_{P\in\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{\jmath}_m(P,t)\,\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t$$

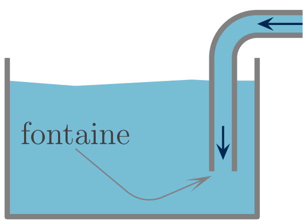
✧ Ce qui donne, sans surprise

$$\text{ÉCHANGE à travers la surface} = -\iiint_{P\in\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{\jmath}_m(P,t)\,\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t$$

☯ production en volume

✧ Peut-on produire de la masse ? Oui et non.
✧ Non car, en mettant de côté les effets (négligeables) de la radioactivité, la masse est une grandeur qui, intrinsèquement, se conserve. Il n'est pas possible de la produire.
✧ Mais en fait, dans un domaine restreint de l'espace, il est possible d'imaginer des dispositifs qui absorbent du fluide (un « puit ») ou qui en injectent (une « fontaine »).
✧ Par exemple, si nous cherchons l'écoulement dans un lac, et uniquement dans ce cas, le ou les lieux où arrivent les rivières représentent des fontaines, un *apport* de masse, alors que le trop plein, ou l'ouverture dans le barrage, représente un puit, là où de la masse est perdue (et ne reviendra pas).
✧ De manière plus simple, en TP, une « bonde » est un puit et un tuyau qui apporte de l'eau est une fontaine.





✧ Une fois les sources (fontaines et puits) connues, en utilisant l'extensivité de la production, nous avons

$$\delta m_{\text{créé}} = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \delta^2 m_{\text{créé},P} \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta m_{\text{créé}} = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \sigma(P,t)\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t$$

✧ Ce qui conduit à

$$\text{CRÉATION EN VOLUME} = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \sigma(P,t)\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t$$

rassemblement

✧ Nous avons d'abord

$$\iiint_{P\in\mathcal{V}} \frac{\partial\mu}{\partial t}(P,t)\,\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t = -\iiint_{P\in\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{\jmath}_m(P,t)\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t + \iiint_{P\in\mathcal{V}} \sigma(P,t)\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t$$

✧ Comme le volume $\mathcal{V}$ est le même pour les trois sommes, nous pouvons les regrouper en une seule

$$\iiint_{P\in\mathcal{V}} \left(\frac{\partial\mu}{\partial t}(P,t) + \mathrm{div}\,\vec{\jmath}_m(P,t) - \sigma(P,t)\right)\mathrm{d}\tau_P\,\mathrm{d}t = 0$$

✧ Et comme ce résultat est nul **quel que soit** le volume $\mathcal{V}$ c'est que l'intégrande est nul donc

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\jmath}_m - \sigma = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\jmath}_m = \sigma$$

✧ Ce qui est bien le résultat attendu.

✯ autre version

énoncé

✧ La grosse particularité de la mécanique des fluides est que la loi de conservation de la masse s'écrit d'une autre manière.

> La loi locale de conservation de la masse s'écrit
> $$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \sigma$$

✧ Ici, le $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$ est bien la dérivée particulaire, ce qui en fait une grandeur totalement différente de $\dfrac{\partial\mu}{\partial t}$.

✧ Cette version sera plus pratique pour tout ce qui concerne l'interprétation physique des phénomènes puisqu'elle parle de la dérivée *particulaire*.

démonstration

✧ La démonstration est immédiate et ne comporte aucune subtilité.

✧ Les lois de composition des opérateurs vectoriels nous dit que

$$\mathrm{div}\,(\mu\,\vec{v}) = \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v}$$

✧ En remplaçant dans la loi de conservation de la masse nous avons donc

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \sigma$$

✧ Et nous reconnaissons alors la dérivée particulaire

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\,\mu = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = \sigma$$

II·2 – Compressibilité

II·2·*i* – fluide incompressible

✧ Rappelons que nous avons défini un fluide incompressible comme un fluide dont la masse volumique est la même partout et tout le temps et que les liquides, sauf indication explicite contraire, seront considérés comme incompressibles.

✧ Il s'agit là, certes, d'une approximation, mais d'une approximation tout à fait valable car ils sont, environ, 10^5 fois moins compressibles que les gaz.

✧ Rappelons la différence entre compressibilité et dilatabilité.

> La *compression* est le phénomène qui relie la variation de volume à la variation de pression. Le *coefficient de compressibilité isotherme* χ_T est défini par
> $$\chi_T = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_T$$

> La *dilatation* est le phénomène qui relie la variation de volume à la variation de température. Le *coefficient de dilatation isobare* α est défini par
> $$\alpha = \frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial T}\Big|_P$$

✧ En toute rigueur, nous admettrons le résultat suivant

> Un corps est dilatable si et seulement s'il est compressible.

✧ En revanche, dans les cas usuels que nous rencontrerons :

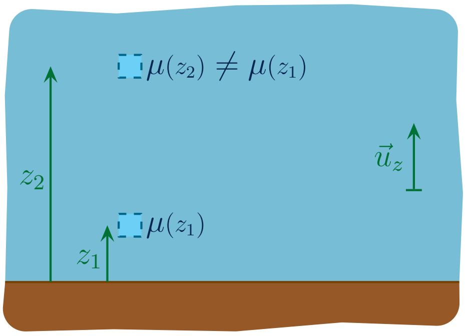
- ➜ nous négligerons la compressibilité ;
- ➜ le fluide sera à une température homogène donc la dilatabilité ne jouera aucun rôle, il sera inutile de la négliger.

II·2·*ii* – particule de fluide incompressible

> Une particule de fluide est *incompressible* si sa masse volumique reste constante
> $$\frac{\mathrm{d}\mu_{\vec{r}_0}}{\mathrm{d}t} = 0$$

✧ Et c'est là toute la différence avec *fluide* incompressible : rien n'oblige les particules de fluide à avoir la même masse volumique.

✧ L'exemple canonique de mécanique des fluide avec des particules de fluide qui n'ont pas la même masse volumique est l'atmosphère isotherme.



✧ Nous voyons bien, sur l'exemple ci-dessus, qu'une particule de fluide au sol et une particule de fluide en l'air n'ont pas la même masse volumique.

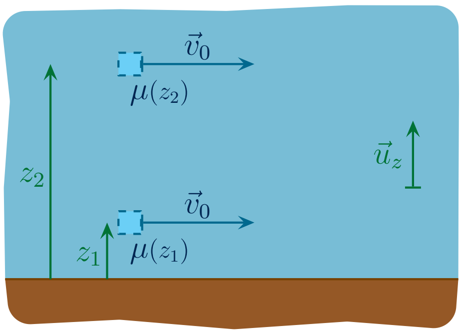
✧ Et même si, dans le cas présent, chaque particule est immobile, il n'en demeure pas moins que c'est de la *mécanique* des fluides.

II·2·*iii* – écoulement incompressible

✯ définition

> Un écoulement est dit *incompressible* lorsque toutes les particules de fluide de cet écoulement sont incompressibles.

✧ Comme nous pouvons le voir dans le cas de l'atmosphère isotherme avec un vent horizontal (toutes les particules de fluide ont la même vitesse $\vec{v}_0$), cela n'implique *pas* que le fluide soit incompressible.



> Un écoulement incompressible, en dehors des sources, se traduit par
> $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

✧ C'est immédiat à partir de la 2e forme de la loi de conservation de la masse

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \sigma$$

✧ Si l'écoulement est incompressible, cela signifie que, quelle que soit la particule de fluide nous avons $\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = 0$ (c'est la dérivée particulaire, rappelons-le) et, en dehors des sources, nous pouvons naturellement écrire $\sigma = 0$. Cela conduit à

$$\mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

✧ Nous avons, de manière presque évidente

Un fluide incompressible donne lieu à des écoulements incompressibles.

✯ une approximation fréquente

✧ Nous montrerons plus tard la loi suivante.

Un écoulement peut être considéré comme incompressible lorsque la vitesse des particules de fluide est très inférieure à celle du son dans ce fluide.

$$v \ll c_{\text{son}}$$

✧ C'est la raison pour laquelle, en première approximation, tant que nous n'étudions pas des mouvements d'air autour d'une aile d'avion supersonique, nous pouvons raisonnablement considérer l'écoulement comme incompressible.

✯ loin des sources

Dans un écoulement incompressible, en dehors des zones de sources, quand les lignes de courant se ressèrent, la vitesse augmente.

✧ C'est un résultat analogue à celui utilisé pour interpréter les cartes de lignes de champ en électromagnétisme.
✧ La démonstration est la même dans les deux cas et tient à la conservation du flux de vitesse, *i.e.* du flux de *volume*.
✧ L'expérience usuelle, que tout le monde a déjà faite, est celle qui consiste à boucher en partie la sortie d'un tuyau d'arrosage. Comme le débit est fixé par le robinet, celui-ci reste constant mais la section de sortie diminue d'où une vitesse qui augmente.
✧ La conséquence est bien celle recherchée : l'eau sortant du tuyau va plus vite, plus loin et permet ainsi d'arroser celui qui a eu la malchance de passer par là, un bel après-midi d'été.

II·3 – Interprétation physique d'opérateurs vectoriels

II·3·*i* – le rotationnel

✯ exemple

✧ Imaginons un écoulement dans lequel le champ de vitesse est tel que

$$\vec{v}(M) = r\,\Omega\,\vec{u}_\theta$$

✧ Vérifions tout d'abord qu'il s'agit là d'un écoulement rotationnel.
✧ Pour cela, commençons par écrire ce champ de vitesse en coordonnées cartésiennes.
✧ En remarquant que $r\,\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge r\,\vec{u}_r$, nous trouvons rapidement

$$\vec{v}(M) = \Omega\,x\,\vec{u}_y - \Omega\,y\,\vec{u}_x$$

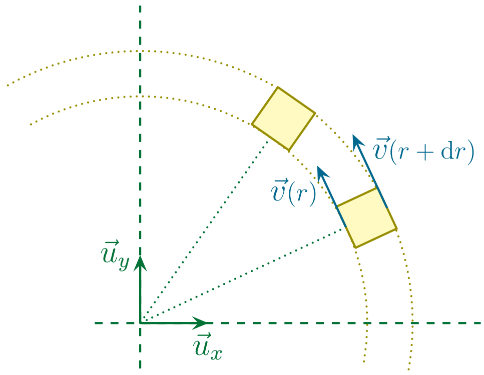
✧ Nous avons alors

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\,\Omega\,y \\ \Omega\,x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 2\,\Omega\,\vec{u}_z$$

✧ De plus, nous pouvons aisément vérifier que $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ car

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + 0 = 0$$

✧ Regardons ce qu'il advient d'une particule de fluide située entre r et $r + \mathrm{d}r$.

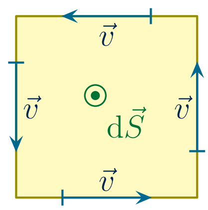


✧ Nous voyons que, durant $\mathrm{d}t$, le côté intérieur de la particule de fluide avance mais que, du fait de son éloignement, le côté extérieur a une vitesse plus grande pour, finalement, rester à la même distance du côté intérieur.

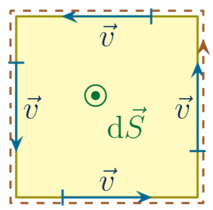
✧ La particule avance en tournant sur elle-même.

✯ de manière générale au niveau de la particule de fluide

✧ Zoomons sur une particule de fluide pour laquelle $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \neq \vec{0}$



✧ Calculons la circulation de la vitesse sur un contour qui entoure la particule de fluide.



✧ Nous avons, par définition

$$C_v = \oint_{P \in \mathcal{C}} \vec{v}(P) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_P$$

✧ Avec STOKES, cela donne

$$C_v = \iint_{P \in \mathcal{C}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_P$$

✧ Et comme nous avons choisi $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \neq \vec{0}$, nous obtenons

$$C_v \neq 0$$

✧ Il y a donc de la vitesse qui « suit » le contour ; la particule de fluide tourne sur elle-même.

✯ à retenir

Dans une zone de l'espace où $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \neq \vec{0}$, les particules de fluide tournent sur elles-même (en plus d'avancer).

✯ vecteur tourbillon

Le *vecteur tourbillon*, noté $\vec{\Omega}$, est défini par

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}$$

Si le vecteur tourbillon n'est pas nul partout, *i.e.* s'il y a au moins une zone (même très petite) dans laquelle $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} \neq \vec{0}$, l'écoulement est dit *tourbillonnaire* ou *rotationnel*.

Un écoulement qui n'est pas tourbillonnaire est dit *irrotationnel*.

Dans un écoulement irrotationnel, en tout point de l'écoulement, nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$$

✯ écoulement potentiel

Un écoulement irrotationnel est un écoulement dit *potentiel* car il existe un *potentiel vitesse* Φ tel que

$$\vec{v} = \pm \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \Phi$$

✧ L'existence même du potentiel de vitesse découle de la relation $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v} = \vec{0}$.

Remarque. Suivant les habitudes, il est possible de trouver, pour le potentiel de vitesse Φ, les deux conventions

$$\vec{v} = +\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \qquad \text{ou} \qquad \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$$

✧ Bien sûr, cela ne change rien à la physique de l'écoulement.

II·3·*ii* – la divergence

✯ exemple

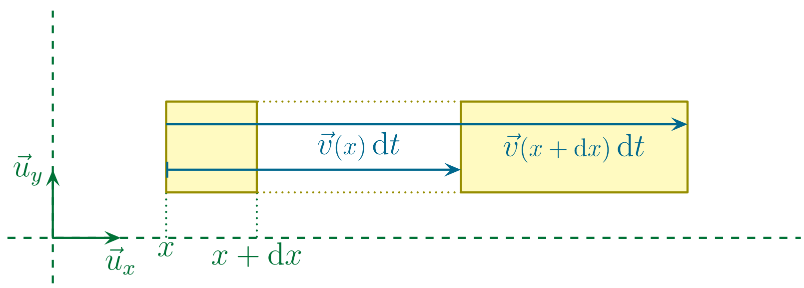
✧ Considérons le champ de vitesse suivant

$$\vec{v}(M) = \big(a + b\,x\big)\,\vec{u}_x \qquad \text{avec} \qquad a = \text{C}^{\text{te}} \quad \text{et} \quad b = \text{C}^{\text{te}}$$

✧ Nous pouvons vérifier rapidement que

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \text{div}\,\vec{v} = b \neq 0$$

✧ Représentons ce qu'il advient d'une particule de fluide située entre x et $x + \text{d}x$ durant $\text{d}t$.



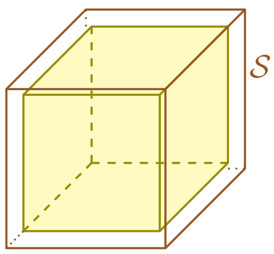
✧ Comme nous pouvons le voir, le côté gauche avance un peu, mais le côté droit, initialement en $x + \text{d}x$ va aller plus vite donc plus loin.
✧ La « nouvelle » particule de fluide est plus grande, elle s'est *dilatée*.

✯ à retenir

Dans une zone de l'espace vide de source où il y a $\text{div}\,\vec{v} \neq 0$, les particules de fluide changent de volume.

✯ de manière générale au niveau de la particule de fluide

✧ Zoomons sur une particule de fluide située en un point tel que $\text{div}\,\vec{v} \neq 0$.



- ✧ Choisissons, comme surface de contrôle, la surface **fixe** qui, à l'instant t, entoure exactement la particule de fluide.
- ✧ Le volume qui passe à travers cette surface s'écrit

$$\delta\mathscr{V} = \oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{\jmath}_v(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P$$

- ✧ Or le courant de volume s'écrit $\vec{\jmath}_v = \vec{v}$, ce qui donne, avec Green – Ostrogradski

$$\delta\mathscr{V} = \oiint_{P\in\mathcal{S}} \vec{v}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta\mathscr{V} = \iiint_{P\in\mathcal{V}} \mathrm{div}\,\vec{v}(P)\,\mathrm{d}\tau_P$$

- ✧ Et comme ici nous avons $\mathrm{div}\,\vec{v} \neq 0$, cela prouve que $\delta\mathscr{V} \neq 0$, donc que la particule de fluide a changé de volume.

✯ avec la conservation de la masse

- ✧ La seconde forme de la loi de conservation de la masse s'écrit, en dehors des sources,

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

- ✧ Ce qui conduit naturellement à

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{div}\,\vec{v}$$

- ✧ Dans ces conditions, pour $\mathrm{div}\,\vec{v} \neq 0$, nous avons, puisque la dérivée représente la dérivée particulaire,

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\mu}}{\mathrm{d}t} \neq 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \widetilde{\mu} \neq \mathrm{C^{te}}$$

- ✧ Mais comme une particule de fluide possède une masse constante (c'est un système fermé), cela ne peut qu'impliquer sa variation de volume.
- ✧ Nous retrouvons bien là le fait que les particules de fluide se dilatent (ou se contractent) lorsque $\mathrm{div}\,\vec{v} \neq 0$.

III – Premiers écoulements

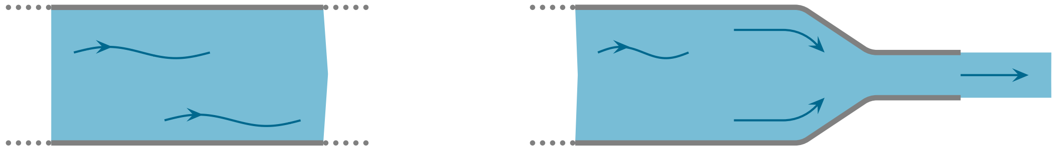
III·1 – Conditions aux limites naturelles

✧ Il existe d'autres limites que naturelles, nous verrons cela plus tard, dans le chapitre 6, avec les fluides newtoniens.

III·1·*i* – où sont les limites ?

✯ milieux confinés

✧ Nous apprellerons « milieux confinés » tout ce qui est tuyau, canalisation, etc.



✧ Il y a deux types de limites : sur les bords et « au loin ».
✧ Les conditions aux limites sur les bords sont non contrôlables par l'expérimentateur [9].
✧ En revanche, les conditions « au loin » sont souvent imposées par l'opérateur, d'une manière ou d'une autre (débit, pression. . .)

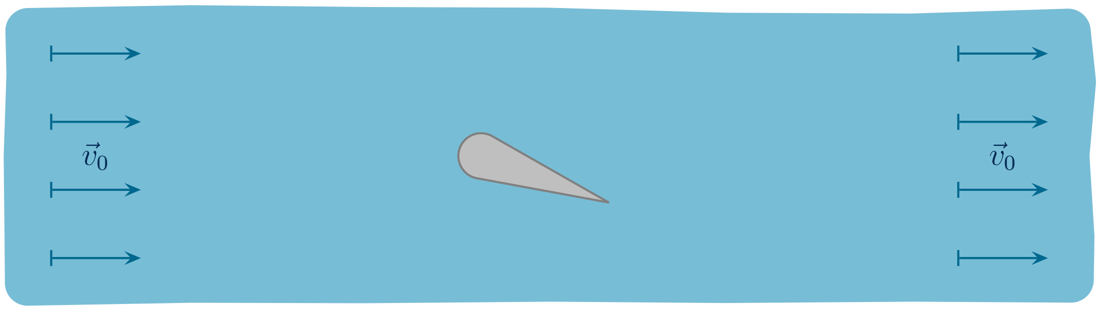
✯ milieux non confinés

✧ Les milieux non confinés regroupent tout ce qui est obstacle (ballon, aile d'avion. . .)
✧ Là aussi, il y a deux types de limites : au contact de l'obstacle et « au loin ».

III·1·*ii* – loin d'un obstacle

✧ Loin d'un obstable (aile d'avion, ballon. . .), nous ferons l'hypothèse suivante.

Loin d'un obstacle, l'écoulement n'est pas perturbé.



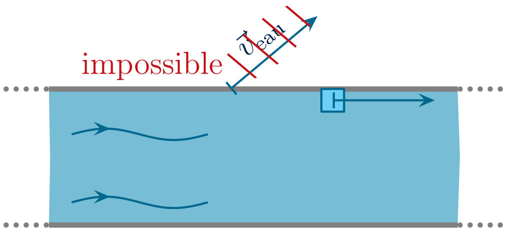
✧ Concrètement, cela signifie que nous traduirons le fait que le champ de vitesse est uniforme à l'infini.
✧ Expérimentalement, cela se conçoit assez bien :
- ➜ tant qu'une voiture n'est pas passée, une personne sur le bord de la route ne ressent pas son souffle ;
- ➜ une fois passée, quelques secondes après, le passage de la voiture n'est plus perceptible.

9. Sauf cas particuliers de tuyau avec aspiration ou refoulement de fluide.

III·1·*iii* – à la surface d'une paroi, d'un obstacle

La surface d'un obstacle, d'une paroi est *imperméable*.

- Sauf pour quelques parois très particulières, l'immense majorité des parois (tuyau, carlingue d'avion, habitacle de voiture, maison, ballon...) sont imperméables, *i.e.* sont fabriquées de telle sorte que l'air (ou l'eau de pluie) ne rentre pas de manière incontrôlée dans l'appareil ou l'objet.
- Autrement dit, les particules de fluides ne peuvent pas traverser les parois.



- Nous sommes en train de dire que la vitesse des particules de fluide est tangente à la paroi.

$$\vec{v}(\text{P.F. qui touche la paroi par rapport à la surface}) /\!\!/ \text{ surface} \qquad \text{ou} \qquad \vec{v}(\text{P.F. qui touche la paroi}) \cdot \vec{n} = 0$$

- Nous retiendrons

Au niveau d'une surface imperméable, les particules de fluide ont une vitesse, par rapport à la surface, tangentielle à celle-ci.

$$\Big(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(I \in \text{fluide}) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(I \in \text{paroi})\Big) \cdot \vec{n} = 0$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi au point I considéré.

- Ceci étant, pour d'évidente raison de praticité, nous nous placerons très souvent dans le référentiel lié à la paroi, *i.e.* dans un référentiel où la paroi est immobile.
- La condition précédente se réécrit donc

Au niveau d'une surface imperméable immobile, les particules de fluide ont une vitesse tangentielle à celle-ci.

$$\vec{v}_{|\mathscr{R}}(I \in \text{fluide}) \cdot \vec{n} = 0$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la paroi au point I considéré.

Remarque. Dans le cas, rare, d'une paroi non imperméable, le lecteur curieux pourra s'imaginer à quoi peut ressembler une condition aux limites, sachant qu'elle s'exprime en terme de flux.

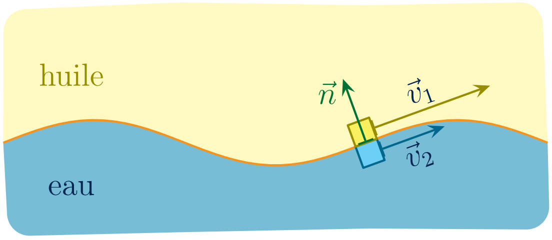
III·1·*iv* – fluides non miscibles

- Parfois, nous serons amenés à traduire des conditions aux limites entre deux fluides non miscibles.
- En écrivant cela le lecteur peut penser spontanément au célèbre mélange eau-huile, mais il existe deux autres fluides non miscibles ô combien plus fréquents : l'eau et l'air.
- C'est ainsi qu'il nous faudra parfois décrire ce qui se passe à la surface d'un lac, de la mer...
- En fait deux fluides non miscibles peuvent être vus comme deux fluides séparées par une membrane infiniment fine, mobile et... imperméable.

✧ Dès lors, la condition à la limite tombe d'elle-même.

Au niveau de la surface de deux fluides non miscibles en écoulement, nous avons

$$\left(\vec{v}_{|\mathscr{R}}(I \in ①) - \vec{v}_{|\mathscr{R}}(I \in ②)\right) \cdot \vec{n} = 0$$



✧ Ceci étant, lorsque nous ne nous intéresserons pas à l'écoulement d'un des deux fluides, nous pourrons nous contenter de traduire la continuité de la pression.

III·2 – Écoulements tourbillonaires

III·2·*i* – origine physique

✧ Supposons qu'un écoulement soit tourbillonaire.

✧ Alors cela signifie qu'il existe une zone de l'espace (éventuellement finie voire très petite) dans laquelle nous avons $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \neq \vec{0}$.

✧ Autrement dit, il y a quelque part dans l'espace des particules de fluide qui tournent sur elles-mêmes.

✧ Il faut alors savoir que, pour que des particules de fluides puissent se mettre à tourner sur elles-mêmes, il est impératif qu'il y ait un peu de frottement au sein du fluide, *i.e.* que le fluide soit un tout petit peu *visqueux*.

✧ Nous reviendrons à la fin de ce chapitre sur la notion de viscosité et nous verrons dans le chapitre 6 pourquoi un fluide sans viscosité ne peut ni faire tourner des particules de fluide sur elles-mêmes ni arrêter leurs rotations si elles sont en train de tourner sur elles-mêmes.

III·2·*ii* – base de l'analogie

✧ Imaginons un fluide en écoulement incompressible et tourbillonaire.

✧ Alors son champ de vitesse obéit aux deux équations locales

$$\text{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 2\,\vec{\Omega}$$

✧ Cela nous rappelle un autre champ vectoriel…

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{\jmath}$$

✧ Puisque ces deux champs, le champ de vitesse d'un écoulement incompressible et tourbillonaire d'une part et le champ magnétostatique d'autre part, obéissent **rigoureusement** aux *mêmes équations physiques*, nous allons pouvoir, pour calculer l'un, utiliser des techniques apprises pour l'autre.

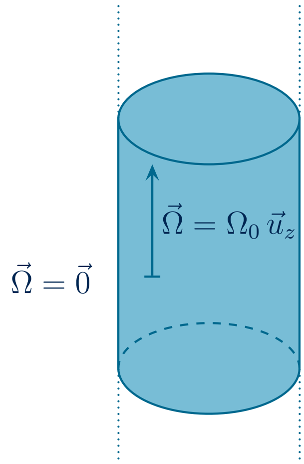
✧ Nous voyons donc arriver des techniques « à la Ampère ».

III·2·*iii* – modèle de la tornade

✯ présentation

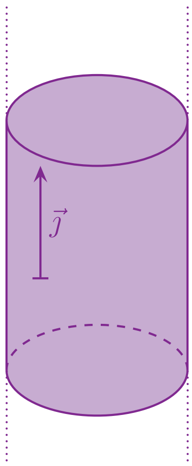
✧ Nous allons chercher le champ de vitesse dans tout l'espace pour un écoulement incompressible et tourbillonaire tel que

$$\begin{cases} \vec{\Omega} = \Omega_0\,\vec{u}_z & \text{dans un cylindre infini} \\ \vec{\Omega} = \vec{0} & \text{ailleurs} \end{cases}$$



✯ analogie et résultats

✧ Étant donné que le vecteur tourbillon est analogue au vecteur densité de courant en volume, nous pouvons facilement voir que le champ de vitesse créé par la tornade est équivalent au champ magnétostatique créé par un fil infini cylindrique parcouru par un courant uniforme.



✧ Les lois précédemment évoquées nous permettent de faire l'analogie suivante

$$\vec{v} \longleftrightarrow \vec{B} \qquad \text{et} \qquad 2\,\Omega \longleftrightarrow \mu_0\,j$$

✧ Rappelons les résultats trouvés pour le fil infini [10]

$$\begin{cases} \vec{B} = \dfrac{\mu_0\,j\,r}{2}\,\vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0\,j\,R^2}{2\,r}\,\vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \end{cases}$$

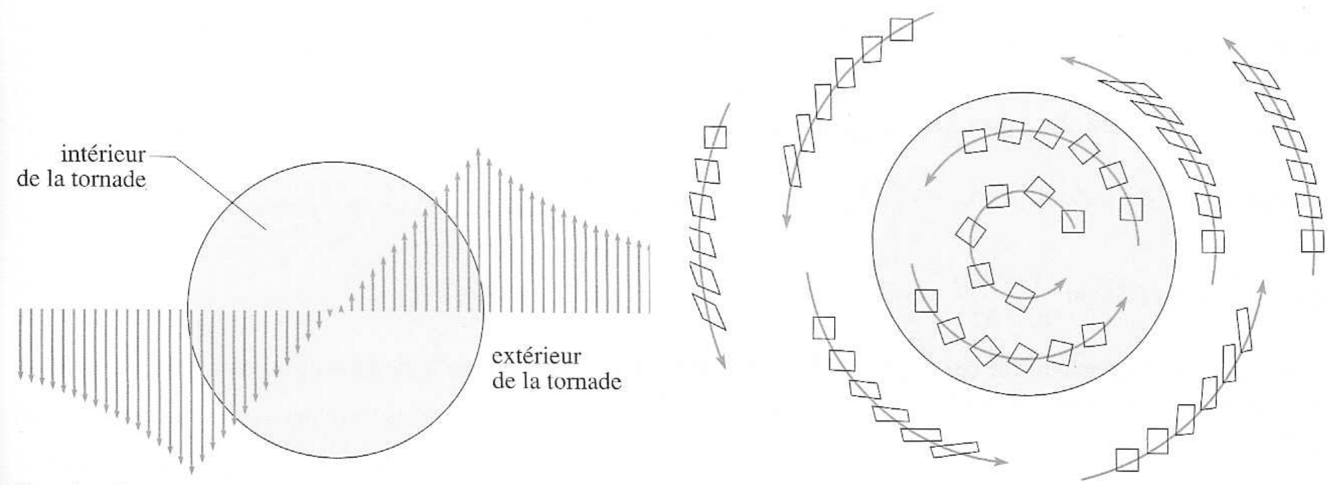
10. Résultats trouvés notamment en première année avec une modélisation en terme de fils tels que $n\,i \leftrightarrow j$ où n est le nombre de fils par unité de surface.

✯ transposition et vision graphique

✧ En remplaçant $\mu_0\, j$ par $2\,\Omega_0$, nous obtenons immédiatement

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{v} = \Omega_0\, r\, \vec{u}_\theta & \text{pour } r < R \\ \vec{v} = \dfrac{\Omega_0\, R^2}{r}\, \vec{u}_\theta & \text{pour } r > R \end{array}\right.$$

✧ Graphiquement, cela donne [11]



Doc. 6 a. *Champ des vitesses d'un écoulement à l'intérieur et à l'extérieur d'une tornade.*

Doc. 6 b. *Mise en évidence des transformations d'une cellule lors de cet écoulement.*

✧ C'est au cœur de la tornade que les vents sont les moins forts et plus la distance à la tornade est grande, plus les vitesses sont faibles. Deux constatations qui semblent bien correspondre aux situations réelles.

✧ En ce qui concerne les particules de fluide, nous voyons bien que :
- ➜ celles à l'intérieur de la tornade tournent sur elles-mêmes ;
- ➜ celles à l'extérieur de la tornade ont une trajectoire circulaire mais ne tournent pas sur elles-mêmes.

III·3 – Écoulements potentiels

III·3·*i* – condition d'obtention

✯ une autre analogie

✧ Considérons un écoulement irrotationnel et incompressible.

✧ Cela se traduit par, respectivement,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \text{div}\,\vec{v} = 0$$

✧ Comme le rotationnel est nul, nous pouvons écrire

$$\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$$

✧ Et ainsi

11. Source : H-Prépa, mécanique des fluides.

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \triangle \Phi = 0$$

✧ Il s'agit là d'une équation dite de LAPLACE[12].

✧ L'analogie se fait, cette fois, avec le champ électrostatique car, *en dehors des sources*,

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}} \, \vec{E} = \vec{0}$$

✧ Ce qui implique, là aussi

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \, V \qquad \rightsquigarrow \qquad \triangle V = 0$$

Remarque. Rappelons qu'en présence de source, le potentiel obéit à l'équation de POISSON

$$\triangle V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

✯ méthodes de résolution

✧ En électrostatique, nous résolvons rarement l'équation locale pour le potentiel (équation de LAPLACE ou de POISSON).

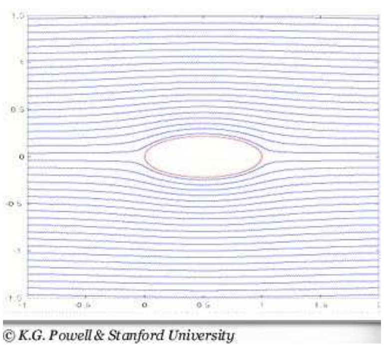
✧ Il en sera de même en mécanique des fluides, même si nous verrons un exemple illustratif de la difficulté de la méthode.

✧ En pratique, nous utiliserons plutôt la superposition de solutions déjà connue et déterminerons, avec l'aide des conditions aux limites, les coefficients adaptés.

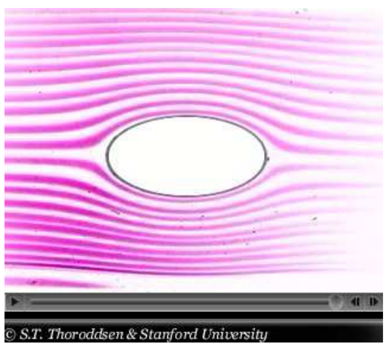
III·3·*ii* – quelques exemples expérimentaux

✧ Sur les illustrations qui suivent, nous pouvons voir :

- ➜ à gauche, la résolution numérique des lignes de champs obtenues en présence d'un objet ;
- ➜ à droite, l'écoulement expérimental avec un objet de même forme.



© K.G. Powell & Stanford University



© S.T. Thoroddsen & Stanford University

✧ Nous pouvons constater l'extrême ressemblance des résultats, ce qui montre l'efficacité de la méthode. Celle-ci est avantageuse car il est beaucoup plus simple de calculer numériquement quelques lignes de champ plutôt que de fabriquer expérimentalement un écoulement.

Remarque. Ceci étant, la plupart des écoulements sont tourbillonaires, ce qui limite grandement le champ d'application de cette méthode.

12. D'où le nom *laplacien* donné à l'opérateur $\triangle$.

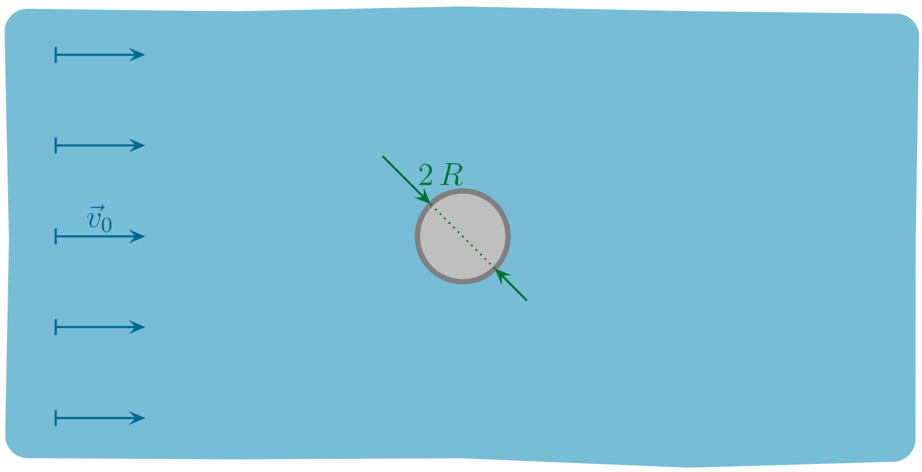
III·3·*iii* – un exemple détaillé

✯ situation

✧ Nous allons modéliser de manière simple l'écoulement autour d'une balle ou d'un ballon qui ne tourne pas sur lui-même.

✧ Pour cela, nous allons rechercher le champ de vitesse d'un écoulement incompressible, irrotationnel et stationnaire autour d'une sphère.

✧ Pour que l'écouleemnt soit stationnaire, il est indispensable de se placer dans le référentiel lié à la sphère.



✧ Comme discuté un peu plus haut, l'écoulement, loin de la sphère, est non perturbé, *i.e.* uniforme $\vec{v}_0$.

✧ Ici, tout est fait pour pouvoir utiliser l'analogie entre électrostatique et champ de vitesse. Nous allons donc rechercher le potentiel Φ dont dérive la vitesse tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$$

✧ Rappelons que le signe devant le gradient importe peu puisqu'il s'agit d'un signe *conventionel*.

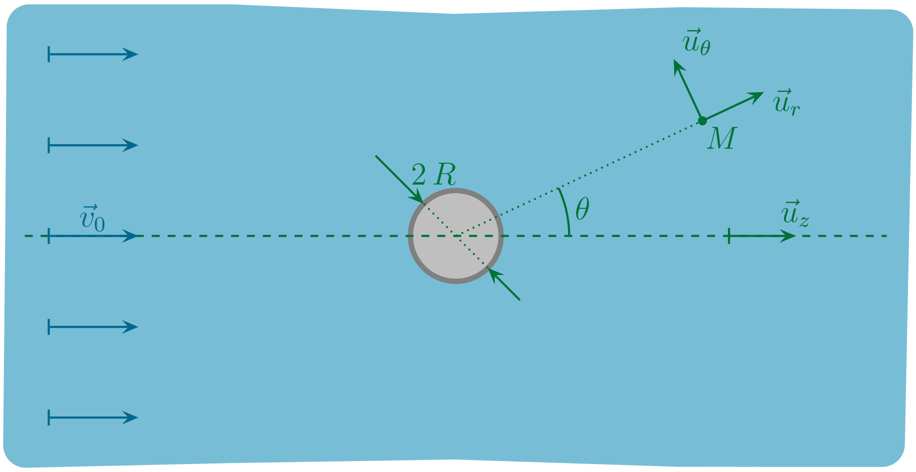
✧ De plus ici nous n'allons pas résoudre directement l'équation de LAPLACE mais allons chercher une superposition de solutions de types connus.

✯ analyse du problème

✧ De manière générale, l'écoulement doit traduire deux choses :
- ➜ l'uniformité à grande distance ;
- ➜ la « perturbation » près de l'obstacle.

✧ C'est la raison pour laquelle nous allons superposer des potentiels tels que :
- ➜ l'un représente le champ uniforme ;
- ➜ l'autre obéisse à l'invariance sphérique de l'obstacle.

✧ Commençons par poser le repérage. Étant donné la symétrie sphérique du problème, celui-ci est évident



✧ Nous avons donc un champ de vitesse uniforme à l'infini auquel est associé le potentiel

$$\vec{v}_0 = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi_1 \qquad \leadsto \qquad \Phi_1 = v_0\,z$$

✧ En ce qui concerne les potentiels obéissants à la symétrie sphérique, nous en connaissons deux : celui créé par une charge ponctuelle et celui créé par un dipôle électrostatique.

✧ Ces deux potentiels s'écrivent, respectivement

$$\frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} \qquad \text{et} \qquad \frac{p\,\cos\theta}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$$

✧ En enlevant les constantes et en ne gardant que la fonctionnalité, nous pouvons dire que les potentiels Φ_2 et Φ_3 suivant obéissent à l'équation de Laplace et, donc, sont aptes à correspondre à un champ de vitesse

$$\Phi_2 = \frac{1}{r} \qquad \text{et} \qquad \Phi_3 = \frac{\cos\theta}{r^2}$$

✧ Finalement, nous allons chercher le potentiel des vitesses comme une combinaison linéaire des potentiels Φ_1, Φ_2 et Φ_3

$$\Phi = \alpha\,v_0\,z + \frac{\beta}{r} + \gamma\,\frac{\cos\theta}{r^2}$$

✭ conditions aux limites

☯ expression de la vitesse

✧ Commençons par chercher l'expression de la vitesse.

✧ Pour cela, réécrivons la vitesse en coordonnées polaires

$$\Phi = \alpha\,v_0\,r\,\cos\theta + \frac{\beta}{r} + \gamma\,\frac{\cos\theta}{r^2}$$

✧ Nous avons ensuite

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \quad \leadsto \quad \vec{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta$$

✧ Ce qui donne

$$\vec{v} = \left(\alpha\,v_0\,\cos\theta - \frac{\beta}{r^2} - 2\,\gamma\,\frac{\cos\theta}{r^3}\right)\,\vec{u}_r + \left(-\alpha\,v_0\,\sin\theta - \gamma\,\frac{\sin\theta}{r^3}\right)\,\vec{u}_\theta$$

condition au loin

✧ Lorsque $r \longrightarrow \infty$, le potentiel tend vers $\Phi \longrightarrow \alpha\,v_0\,r\,\cos\theta = \alpha\,v_0\,z$ dont le champ de vitesse associé est $\alpha\,\vec{v}_0$.

✧ Nous en déduisons que $\alpha = 1$.

Remarque. Nous aurions aussi pu prendre l'expression générale de la vitesse et constater que pour $r \longrightarrow \infty$ nous avons $\vec{v} \longrightarrow \alpha\,v_0\,\cos\theta\,\vec{u}_r - \alpha\,v_0\,\sin\theta\,\vec{u}_\theta = \alpha\,\vec{v}_0$. Cela revient au même.

condition sur la sphère

✧ Au niveau de la sphère, comme elle est imperméable, nous pouvons dire que la vitesse n'est *que* tangentielle, *i.e.* que la vitesse est portée par $\vec{u}_\theta$ en tout point de la sphère.

✧ Techniquement

$$\vec{v}(r=R,\theta) /\!\!/ \vec{u}_\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{v}(r=R,\theta)\cdot\vec{u}_r = 0$$

✧ Cela impose, pour tout θ,

$$v_0\,\cos\theta - \frac{\beta}{R^2} - 2\,\gamma\,\frac{\cos\theta}{R^3} = 0$$

✧ Le cas particulier $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ permet de déduire

$$\beta = 0$$

✧ Puis, pour (par exemple) $\theta = 0$

$$\gamma = -\frac{v_0\,R^3}{2}$$

rassemblement

✧ Finalement, le potentiel des vitesses s'écrit

$$\Phi = v_0\,r\,\cos\theta + \frac{v_0\,R^3\,\cos\theta}{2\,r^2}$$

✧ Et le champ de vitesse associé

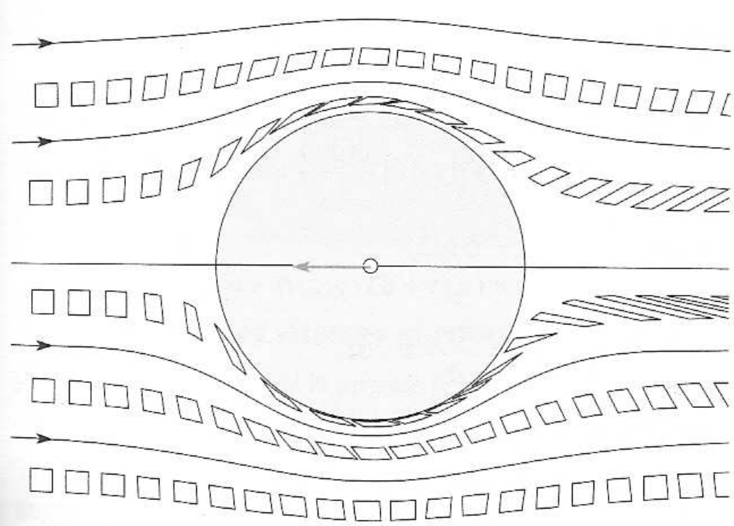
$$\vec{v} = v_0\,\cos\theta\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\vec{u}_r - v_0\,\sin\theta\left(1 + \frac{R^3}{2\,r^3}\right)\vec{u}_\theta$$

✯ interprétation

le champ de vitesse

✧ Représentons les lignes de courant et la déformation des particules de fluide [13]

13. Source : `H-Prépa, mécanique des fluides`.



Doc. 7. *Écoulement d'un fluide autour d'une sphère dans un plan méridien : visualisation des déformations de diverses cellules.*

✧ Nous pouvons voir deux points particuliers, les points A et B, tels que $\vec{v}(A) = \vec{v}(B) = \vec{0}$.
✧ Ces points A et B sont appelés « points d'arrêt ».
✧ D'un point de vue symétrie, nous voyons qu'en deux points symétriques $M(r,\theta)$ et $M'(r,\pi - \theta)$

$$v_\theta(M) = v_\theta(M') \qquad \text{et} \qquad v_r(M) = -v_r(M')$$

✧ Regardons enfin le point C tel que $C(R,\pi/2)$.
✧ La vitesse en C s'écrit, après simplification,

$$\vec{v}(C) = \frac{3}{2}\,\vec{v}_0$$

✧ Autrement dit le fluide a été accéléré ! Accéléré par la présence d'un obstacle, voilà ce qui pourrait heurter le sens commun. . .
✧ En réalité, c'est tout à fait normal : la balle, par sa présence, diminue l'espace disponible pour l'écoulement de l'air. Or il s'agit d'un écoulement incompressible. Et donc, si la section d'écoulement est plus petite, la norme de la vitesse doit augmenter, tout est normal.
✧ Du point de vue de la particule de fluide, l'augmentation de vitesse ne peut venir que des forces exercées **par les autres** particules de fluide.

retour *a posteriori* sur la solution *a priori*

✧ Lors de la recherche des solutions, nous avons trouvé $\beta = 0$, pouvions-nous nous en douter dès le début ?
✧ La réponse est oui !
✧ En fait la solution en Φ_2 correspond à une charge ponctuelle qui « injecte » des lignes de champ. Elle est donc analogue à une source qui injecterait du fluide.
✧ Comme ici la sphère n'injecte ni n'absorbe de fluide, cette solution ne pouvait pas convenir.
✧ Question subsidiaire : et qu'aurions-nous fait si nous étions arrivé à une contradiction ? Par exemple une équation aurait donné $\beta = 0$ et l'autre $\beta = v_0\,R$.
✧ La réponse est simple : une contradiction aurait signifié que la solution recherchée ne pouvait pas s'écrire sous la forme de cette superposition.
✧ Il audrait donc fallu soit chercher d'autres potentiels à superposer, soit résoudre l'équation de Laplace directement, comme nous allons le faire maintenant.

III·3·*iv* – écoulement dans un trièdre

✧ L'auteur tient à signaler que la résolution suivante, bien que faisable analytiquement, est loin de représenter la méthode usuelle de recherche de solution de potentiel de vitesse et de champ de vitesse.

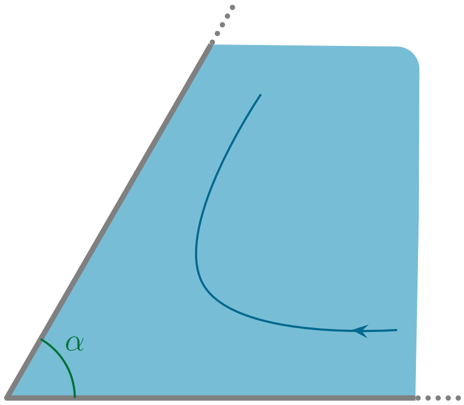
✧ À l'heure actuelle nous utilisons bien plus l'outil numérique.

✧ Toutefois la résolution qui suit est intéressante par le fait que des arguments physiques sont **obligés** d'intervenir *en cours* de résolution afin d'éliminer des solutions impossibles.

✧ Il est à noter, d'ailleurs, que ces solutions inintéressantes auraient peut-être pu perturber la rechercher de « la bonne » solution en cas d'algorithme trop « mathématique » et pas assez « physique ».

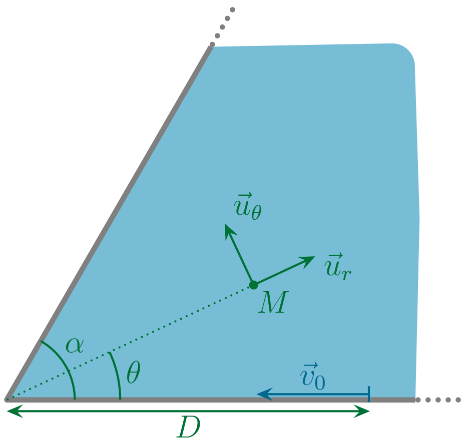
✯ situation, analyse

✧ Considérons un écoulement limité par deux plans infinis formant entre eux un angle α.



✧ La situation étant invariante par translation suivant la normale au dessin, nous allons naturellement utiliser le repérage cylindro-polaire.

✧ Comme il va être difficile de discuter de ce qui se passe à l'infini, nous prendrons comme « contrainte » que la vitesse de la particule de fluide sur le bord à la distance D de l'arrête vaut v_0.



✧ L'écoulement, comme sa position dans ce chapitre l'indique, est considéré incompressible, irrotationnel et stationnaire.

✯ résolution

☯ choix stratégique

✧ Comme la situation possède une géométrie très particulière, nous n'allons même pas essayer de trouver une superposition de potentiels connus mais allons résoudre directement l'équation de Laplace.

◇ Rappelons qu'en notant Φ le potentiel des vitesses tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$, l'équation à laquelle obéit Φ est l'équation, dite de Laplace

$$\text{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \triangle\,\Phi = 0$$

◇ Le formulaire nous donne

$$\triangle\,\Phi(r,\theta) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$$

◇ Étant donnée l'expression fort peu sympathique du laplacien, nous allons chercher une solution sous la forme « stationnaire », *i.e.* du type

$$\Phi(r,\theta) = f(r) \times g(\theta)$$

◇ Si nous trouvons une solution de ce type, c'est bon, nous aurons ce que nous cherchions.
◇ Sinon, il faudra chercher une solution avec une autre forme.

manipulations

◇ Commençons par injecter la solution dans le laplacien.

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r \times f'(r) \times g(\theta)\Big) + \frac{1}{r^2} \times f(r) \times g''(\theta) = 0$$

◇ Puis, en dérivant le premier terme

$$\frac{1}{r} \times f'(r) \times g(\theta) + f''(r) \times g(\theta) + \frac{1}{r^2} \times f(r) \times g''(\theta) = 0$$

◇ Isolons les parties « en r » et « en θ » en multipliant, notamment, par r^2

$$\Big(r\,f'(r) + r^2\,f''(r)\Big) \times g(\theta) + f(r) \times g''(\theta) = 0$$

◇ Et ainsi

$$\frac{r\,f'(r) + r^2\,f''(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

◇ Comme r et θ sont deux variables **indépendantes**, nous pouvons dire que les deux côtés de l'égalités sont en fait des constantes.
◇ Notons la K. Cela donne

$$\frac{r\,f'(r) + r^2\,f''(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = K \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{r\,f'(r) + r^2\,f''(r)}{f(r)} = K \quad \text{et} \quad \frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -K$$

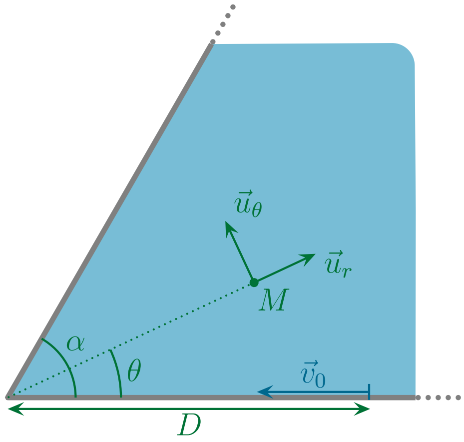
équation en $g(\theta)$

◇ Elle se réécrit sous la forme classique suivante

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = -K \qquad \rightsquigarrow \qquad g''(\theta) + K\,g(\theta) = 0$$

◇ Nous savons alors que
- ➜ si $K < 0$, les solutions sont en $\cosh\left(\sqrt{K}\,\theta\right)$ et $\sinh\left(\sqrt{K}\,\theta\right)$;
- ➜ si $K > 0$, les solutions sont en $\cos\left(\sqrt{K}\,\theta\right)$ et $\sin\left(\sqrt{K}\,\theta\right)$.

✧ Pour trancher, regardons les conditions aux limites.



✧ Les limites sont, ici, les deux plans situés en $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$.

✧ La vitesse des particules de fluide au niveau de ces plans doit être parallèle aux plans, *i.e.* portée uniquement par $\vec{u}_r$.

✧ En d'autre termes, pour tout point des plans $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$, $v_\theta = 0$.

✧ Comme la vitesse suivant $\vec{u}_\theta$ a pour composante $v_\theta = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}\,f(r)\,g'(\theta)$, les conditions aux limites impliquent que la dérivée de $g'(\theta)$ doit être nulle pour tout r en $\theta = 0$ et $\theta = \alpha$.

✧ Revenons aux deux types de solutions possibles à savoir soit des fonctions trigonométriques hyperboliques, soit des fonctions trigonométriques usuelles.

✧ La nullité imposée en deux points différents *exclut* la forme hyperbolique, car celle-ci s'annule au maximum une fois.

✧ Reste donc la seule possibilité : les fonctions trigonométriques standards.

✧ La solution en $g(\theta)$ s'écrit donc

$$g(\theta) = A\,\cos\left(\sqrt{K}\,\theta\right) + B\,\sin\left(\sqrt{K}\,\theta\right)$$

✧ Pour traduire les conditions aux limites, calculons $g'(\theta)$

$$g'(\theta) = -A\,\sqrt{K}\,\sin\left(\sqrt{K}\,\theta\right) + B\,\sqrt{K}\,\cos\left(\sqrt{K}\,\theta\right)$$

✧ La première condition impose

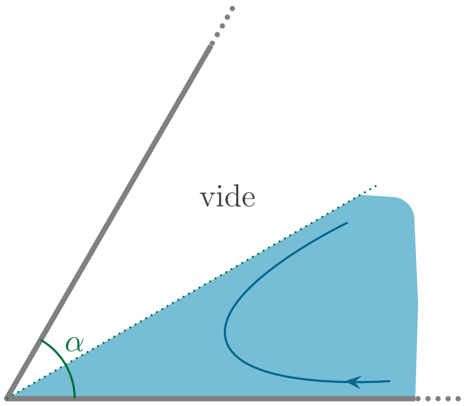
$$g'(0) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad B = 0$$

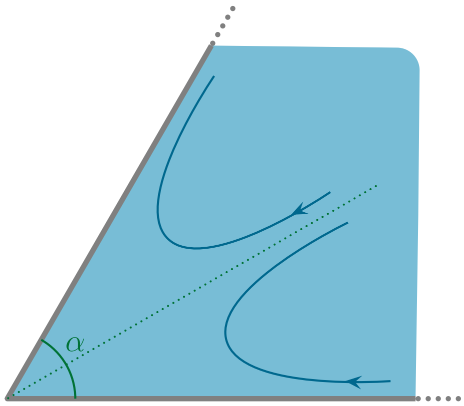
✧ La deuxième condition donne

$$g'(\alpha) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -A\,\sqrt{K}\,\sin\left(\sqrt{K}\,\alpha\right) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \sqrt{K} = \frac{n\,\pi}{\alpha}$$

✧ Toutefois, en y regardant bien, seul le cas $n = 1$ est plausible donc possible.

✧ En effet, pour $n = 2$, nous voyons aisément que $g'(\alpha/2) = 0$ ce qui implique que lorsque $n = 2$, le fluide ne peut pas passer la frontière fictive $\theta = \alpha/2$. Le dièdre aurait alors, au choix, soit une moitié complètement vide (!), soit deux moitiés se cotoyant et glissant l'un sur l'autre au niveau d'un plan.





- Les deux solutions sont impossibles. La première pour des raison évidente, la deuxième parce que les forces entre particules de fluide au niveau de la frontière, des forces tangentielles, déstabiliseraientt le tout et provoquerait un mélange des deux zones.
- Finalement il reste

$$g(\theta) = A \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\,\theta\right) \qquad \text{et} \qquad K = \frac{\pi^2}{\alpha^2}$$

équation en $f(r)$

- Reprenons l'équation en $f(r)$ trouvée précédemment.

$$\frac{r\,f'(r) + r^2\,f''(r)}{f(r)} = K \qquad \leadsto \qquad \frac{r\,f'(r) + r^2\,f''(r)}{f(r)} = \frac{\pi^2}{\alpha^2}$$

- L'équation différentielle en $f(r)$ s'écrit donc

$$r^2\,f''(r) + r\,f'(r) - \frac{\pi^2}{\alpha^2}\,f(r) = 0$$

- Il s'agit là d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants. Il n'y a donc pas de méthode miracle ni de catalogue de solutions. Il faut en trouver.
- Cherchons la plus simple possible, un polynôme.

$$f(r) = \lambda\,r^{\beta}$$

- En remplaçant dans l'équation cela donne

$$r^2 \times \lambda \times \beta \times (\beta - 1) \times r^{\beta-2} + r \times \lambda \times \beta \times r^{\beta-1} + \lambda \times \frac{\pi^2}{\alpha^2} \times r^{\beta} = 0$$

- En simplifiant nous arrivons à

$$\beta\,(\beta-1)\,r^{\beta} + \beta\,r^{\beta} - \frac{\pi^2}{\alpha^2} \times r^{\beta} = 0$$

- Et en resimplifiant encore

$$\beta\,(\beta-1) + \beta - \frac{\pi^2}{\alpha^2} = 0 \qquad \leadsto \qquad \beta^2 = \frac{\pi^2}{\alpha^2} \qquad \leadsto \qquad \beta = \pm\frac{\pi}{\alpha}$$

- Nous voilà face à deux solutions possibles

$$f(r) = \lambda\,r^{\pi/\alpha} \qquad \text{où} \qquad f(r) = \lambda\,r^{-\pi/\alpha}$$

✧ Sont-elles toutes les deux possibles ? En fait non. Pour le comprendre, repartons dans l'analogie électrostatique et considérons que le potentiel trouvé est un potentiel électrostatique.

✧ Dans le cas $f(r) = \lambda\, r^{-\pi/\alpha}$, nous voyons que le potentiel diverge pour $r \to 0$.

✧ Or, qui dit potentiel divergent dit présence de charges soit, ici, par analogie, présence d'un puit ou d'une fontaine en $r = 0$.

✧ Sauf qu'il n'y a ni puit ni fontaine en $r = 0$.

✧ La seule solution plausible est donc

$$f(r) = \lambda\, r^{\pi/\alpha}$$

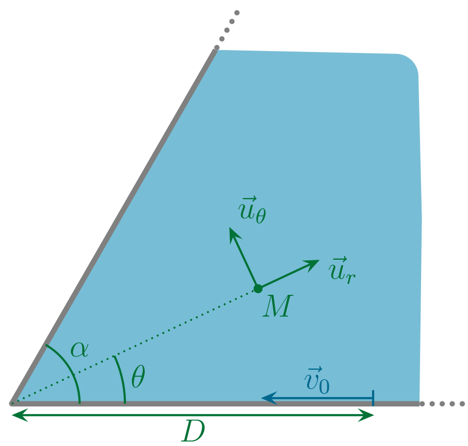
finalisation

✧ Nous avons donc, pour l'instant

$$\Phi(r,\theta) = \lambda\, r^{\pi/\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\,\theta\right)$$

✧ Il ne reste plus qu'à déterminer la constante λ à l'aide de la condition

$$\vec{v}(D,0) = -v_0\,\vec{u}_r$$



✧ Exprimons tout d'abord la vitesse

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{v} = \lambda\,\frac{\pi}{\alpha}\,r^{\pi/\alpha-1}\,\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\,\theta\right)\,\vec{u}_r - \lambda\,\frac{\pi}{\alpha}\,r^{\pi/\alpha-1}\,\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\,\theta\right)\,\vec{u}_\theta$$

✧ Et traduisons la condition imposée

$$\vec{v}(D,0) = \lambda\,\frac{\pi}{\alpha}\,D^{\pi/\alpha-1}\,\vec{u}_r - 0\,\vec{u}_\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad \lambda = -\frac{v_0\,\alpha}{\pi\,D^{\alpha-1}}$$

✧ Et ainsi

$$\Phi(r,\theta) = -D\,v_0\,\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{r}{D}\right)^{\pi/\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\,\theta\right)$$

interprétation

- Étant donné l'écriture peu digeste du potentiel trouvé, s'arrêter là aurait fait faire beaucoup de travail pour pas grand chose.
- Heureusement qu'il reste la physique derrière !
- Regardons ce qui se passe dans le cas d'un angle aigu qui peut représenter, par exemple, un virage serré d'une rivière [14]

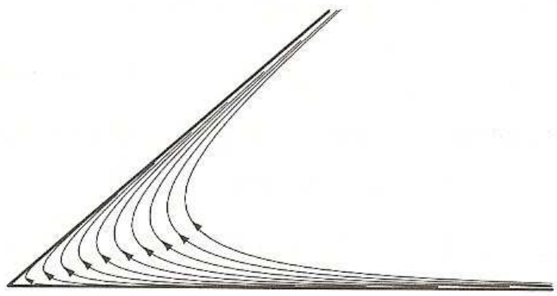


Figure 9.16 – Allure des lignes de courant.
$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

- Nous constatons que les lignes de courant, au niveau du virage s'écartent, ce qui signifie que la vitesse diminue.
- Si la vitesse diminue, pour une rivière, cela va laisser plus de temps aux sédiments de se déposer.
- En revanche, avec un angle obtu, nous avons des lignes de courant telles que le représente le document ci-dessous [15].

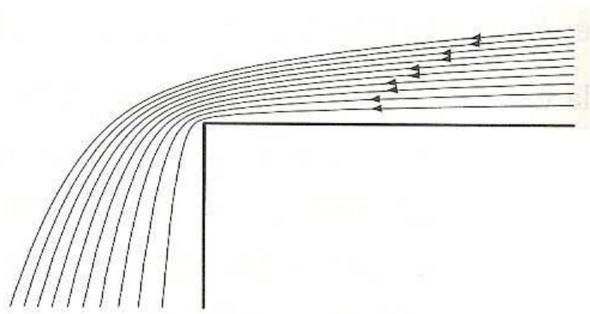


Figure 9.17 – Allure des lignes de courant.
$\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$.

- En regroupant les deux résultats, nous voyons donc que ce résultat explique pourquoi :
  - ➜ la sédimentation se fait à l'extérieur des virages des rivière ;
  - ➜ l'érosion est plus importante au niveau de la corde intérieure des rivières.

III·4 – Morale

- Pour les trois exemples précédents, nous avons pu trouver l'ensemble de l'écoulement **sans aucune** notion de force.

14. Source : `H-Prépa, mécanique des fluides`
15. Source : `Ibidem`

- ✧ Cela signifie que sans savoir ce qui se passe dans le fluide, sans connaître les interactions entre particules de fluide, nous pouvons quand même trouver et étudier des écoulements réels !
- ✧ Pour un peu, nous pourrions presqu'avoir l'impression de n'avoir fait que du calcul. . .
- ✧ En réalité, la physique est belle est bien présente mais se cache dans de toutes petites lois utilisées très vite au début ou à la fin. Il s'agit de :
  - ➜ l'incompressibilité de l'écoulement qui se traduit par $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$;
  - ➜ l'aspect rotationnel ou non de l'écoulement ;
  - ➜ l'imperméabilité des parois.
- ✧ Tous ces aspects, indéniablement physiques, imposent, comme nous venons de le voir, suffisamment de contraintes pour pourvoir déterminer, dans certaines conditions, quels écoulement sont possibles ou non.
- ✧ Bien sûr, ce n'est qu'une étape, car si nous voulons savoir exactement la force que le fluide exerce sur l'objet (comme une aile d'avion), il va être indispensable de modéliser les interactions au niveau de la particule de fluide.
- ✧ Cela fera l'objet du chapitre 6.

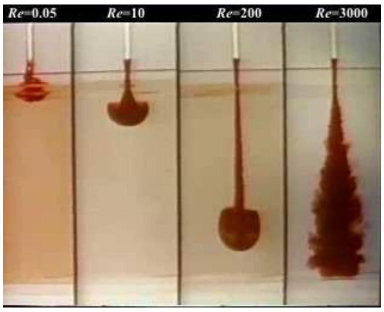
IV – Approche phénoménologique des écoulements

IV·1 – Constatations expérimentales

IV·1·*i* – mélanger des liquides

✧ Faisons l'expérience suivante. Prenons un récipient contenant un liquide et versons-y ce même liquide, mais coloré pour voir comment se passe le mélange. Et faisons-le 4 fois avec 4 liquides différents, les 4 jets étant « lancé » au même instant.

✧ Nous obtenons quelque chose comme la photo qui suit.



Montrer le mélange des fluides.

Dynamique – Nombre de REYNOLDS : inertie et viscosité – jets liquides

✧ Que constatons-nous ? Il y a 4 phénoménologies différentes :
- ➜ dans le récipient de gauche, c'est tout juste si le mélange se fait ;
- ➜ dans le 2e récipient, le jet et le liquide déjà présent se mélangent de manière géométrique, symétrique, « proprement » nous pourrions presque dire ;
- ➜ dans le 3e récipient, le mélange commence à se faire proprement mais à partir d'une certaine distance, des « ondulations » commencent à apparaître ;
- ➜ dans le dernier récipient, nous pouvons constater que le mélange est presque déjà une réalité, c'est un mélange complètement chaotique et dont la meilleure description serait « un nuage ».

✧ En fait ces écoulements peuvent être caractérisés par un nombre, le nombre de REYNOLDS, qui est ici croissant de gauche à droite.

✧ Nous constatons que ce nombre de REYNOLDS influence grandement la phénoménologie :
- ➜ plus le nombre de REYNOLDS est grand, plus le liquide se freine lui-même (dans le 1er récipient le freinage est tel que le jet n'arrive même pas à « rentrer ») ;
- ➜ plus le nombre de REYNOLDS est grand, plus, au contraire, le fluide a un mouvement *inertiel*, *i.e.* garde son mouvement et est très peu freiné par le reste du fluide.

✧ Ces constatations sont en fait très générales : dans les écoulements simplifiés (mais réels) que nous étudierons, la connaissance *a priori* du nombre de REYNOLDS permettra de se faire une idée du comportement du fluide et, donc, de pouvoir faire éventuellement des approximations appropriées.

IV·1·*ii* – nombre de REYNOLDS

✧ La question reste : comment déterminer *a priori* le nombre de REYNOLDS ?

✯ viscosité

✧ Comme l'expérience courante le montre, il y a des liquides plus ou moins « visqueux », le mot existe dans le langage commun même s'il n'a pas exactement la même signification qu'en physique.

✧ Nous savons tous que l'huile ne s'écoule pas de la même manière que l'eau ou que le miel d'acacia.
✧ Pour les distinguer, nous allons introduire une grandeur, la viscosité.

> La *viscosité* (ou *viscosité dynamique*) η d'un fluide est la grandeur qui caractérise l'intensité des interactions internes au fluide.
>
> La viscosité s'exprime en *poiseuille* (Pl) ou en *pascal seconde* (Pa.s)

Remarque. La viscosité est appelée, parfois, viscosité dynamique pour ne pas la confondre avec une autre viscosité, la viscosité cinématique, que nous définirons au chapitre 6.

✧ C'est ainsi que

> Plus la viscosité d'un fluide est grande, plus il a du mal à s'écouler.

✧ En d'autres termes, l'huile est plus visqueuse que l'eau.
✧ Quelques exemples numériques.

fluide	air	eau	lait	huile	glycérine
viscosité (Pl)	2.10^{-5}	10^{-3}	2.10^{-3}	$\sim 0{,}1$	~ 1

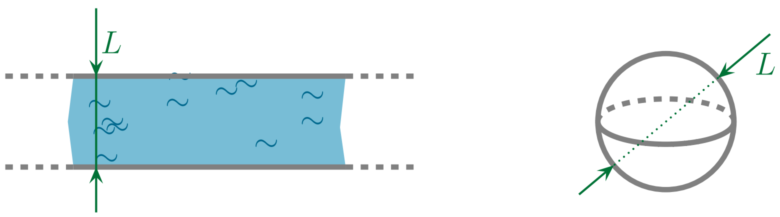
✧ Nous pouvons constater que, à l'instar du henry, le poiseuille est une « grande » unité.
✧ Nous verrons dans le chapitre 6 une définition mécanique de la viscosité, définition qui ouvre la voie à des mesures précises de cette grandeur.

✯ calcul du nombre de Reynolds

✧ Nous pouvons maintenant définir le nombre de Reynolds

> Le *nombre de* Reynolds est défini par
>
> $$\mathrm{Re} \triangleq \frac{\rho\, V\, L}{\eta} \qquad \text{où :}$$
>
> ➜ ρ est la masse volumique du fluide ;
> ➜ V est la vitesse caractéristique de l'écoulement ;
> ➜ L est la longueur caractéristique de l'écoulement ;
> ➜ η est la viscosité (dynamique) du fluide.

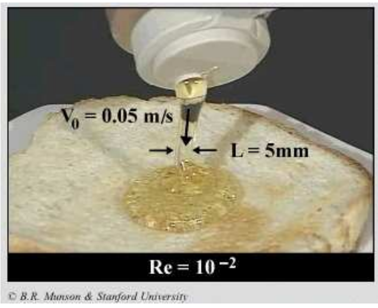
✧ La longueur caractéristique est la longueur caractéristique soit de l'obstable soit de la canalisation.
✧ Dans le cas d'un objet sphérique ou cylindrique, la longueur caractéristique est le diamètre [16].

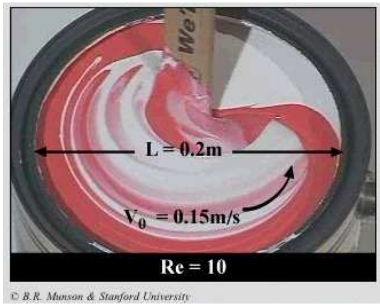


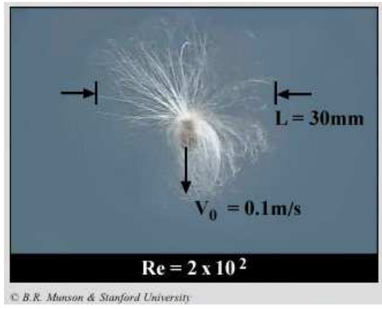
16. N'importe quel bricoleur, qu'il soit professionnel ou « du dimanche », achète des tuyaux d'un certain diamètre (12 mm, 8 mm. . .) et *jamais* des tuyaux d'un certain rayon. La raison est extrêmement simple : il est bien plus facile de mesurer le diamètre que le rayon. Le fait de définir un cercle, une sphère ou un cylindre par un rayon nous vient de l'apprentissage de la construction au compas où là, effectivement, le rayon est important.

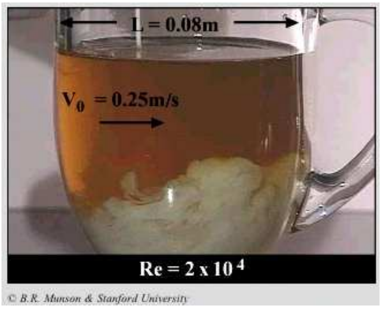
⋆ exemples numériques

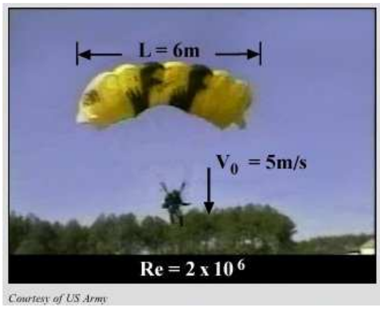
✧ Regardons quelques situations, plus ou moins classiques, d'écoulement. Dans l'ordre :
- ➜ le versement de miel sur une tartine ;
- ➜ le mélange de deux peintures ;
- ➜ le vol d'une graine de pissenlit ;
- ➜ un nuage de lait dans un mug de thé ;
- ➜ une descente en parachute ;
- ➜ le décollage d'une navette spatiale.

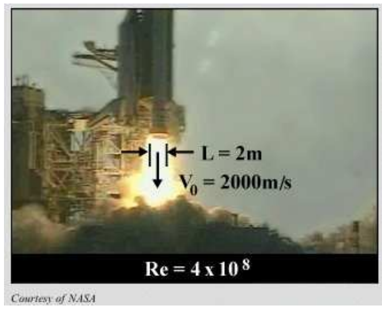












Montrer les exemples.

Dynamique – Nombre de Reynolds : inertie et viscosité – galerie

✧ Nous pouvons constater que le nombre de Reynolds peut facilement varier sur 10 ordres de grandeurs et même plus !

✧ Pour notre part, nous retiendrons les limites (arbitraires) suivantes.

> Pour $\text{Re} \leqslant 10$, l'écoulement est dit *laminaire*, la viscosité prédomine.
> Pour $\text{Re} \geqslant 10^3$, l'écoulement est dit *turbulent*, les effets inertiels prédominent.

✧ Notons que la valeur « exacte » du nombre de Reynolds n'a aucune importance, c'est essentiellement son ordre de grandeur qui compte.

IV·2 – Force exercée par un fluide

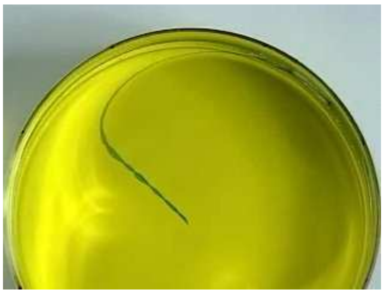
IV·2·*i* – ça dépend du nombre de Reynolds

⋆ le fluide s'entraîne lui-même

✧ Comme la définition même de la viscosité le laisse imaginer (c'est la grandeur qui caractérise l'intensité des interactions au sein du fluide), suivant que la viscosité va être grande ou non, le fludie va pouvoir se mettre en mouvement lui-même… ou non.

◇ Mettons dans un grand cristalisoir deux fluides au repos, un visqueux et l'autre moins. Injectons une ligne d'encre pour repérer une position initiale et plaçons le tout sur un plateau tournant que nous mettons en route.

◇ Au bout de quelques instant, alors même que le cristalisoir est en train de tourner, une photo donne ceci



Montrer les vidéos.

dynamique – Re : inertie et viscosité – écoulement simple avec et sans viscosité – 3e onglet puis 2e

◇ Sans trop de surprise :

- ➜ le liquide faiblement visqueux (en jaune) s'entraîne peu lui-même, le bord est en train de bouger alors que le centre est encore immobile ;
- ➜ le liquide visqueux (en rouge-orange) s'entraîne lui-même au point qu'il agit presque comme un solide, tout se met en mouvement d'un coup et l'ensemble ne se déforme que peu ou pas.

✯ le fluide exerce des forces sur les objets

◇ Faisons la même expérience mais, cette fois, en mettant un petit flotteur dans les deux liquides.

Montrer les deux vidéos.

dynamique – écoulement à petit Re – écoulement avec et sans viscosité

◇ Aucune surprise là non plus :

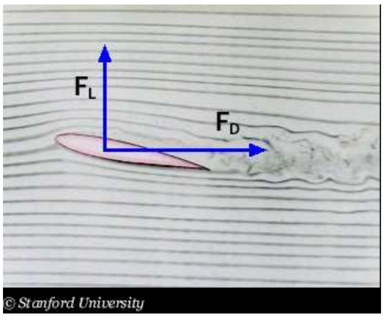
- ➜ dans le cas d'une faible viscosité, il faut « un certain temps » entre le moment où le cristalisoir se met à tourner et le moment où le flotteur commence à bouger ;
- ➜ en revanche, avec une viscosité plus élevée, le flotteur démarre et s'arrête en même temps que le fluide, les forces exercées par ce dernier sont donc bien plus intenses.

IV·2·*ii* – portance et traînée

✯ deux forces de même nature

◇ Considérons un obstable, quel qu'il soit, plongé dans un écoulement uniforme $\vec{v}_0$.

◇ Nous pouvons décomposer la force qu'il subit en deux : une composante dans la direction de la vitesse de l'écoulement et une composante normale à cette direction.



Montrer la décomposition de la force exercée par un fluide sur une aile.

Dynamique – variation de force avec Re et la géométrie – force de portance et de traînée

La *traînée* est la force exercée par un fluide dans la direction de la vitesse de l'écoulement.

La *portance* est la force exercée par un fluide dans la direction normale à la direction de la vitesse de l'écoulement.

✧ Remarquons que si la traînée est toujours orientée dans le sens de la vitesse de l'écoulement, la portance, elle, peut être vers le haut ou vers le bas :

- ➜ comme nous pouvons nous en douter, les avions sont conçus de telle sorte que la portance soit vers le haut de manière à soulever l'avion ;
- ➜ les voitures de courses, au contraire, par l'adjonction d'ailerons sont plaquées au sol, c'est une portance dite « négative »[17].

✯ coefficients de traînée et de portance

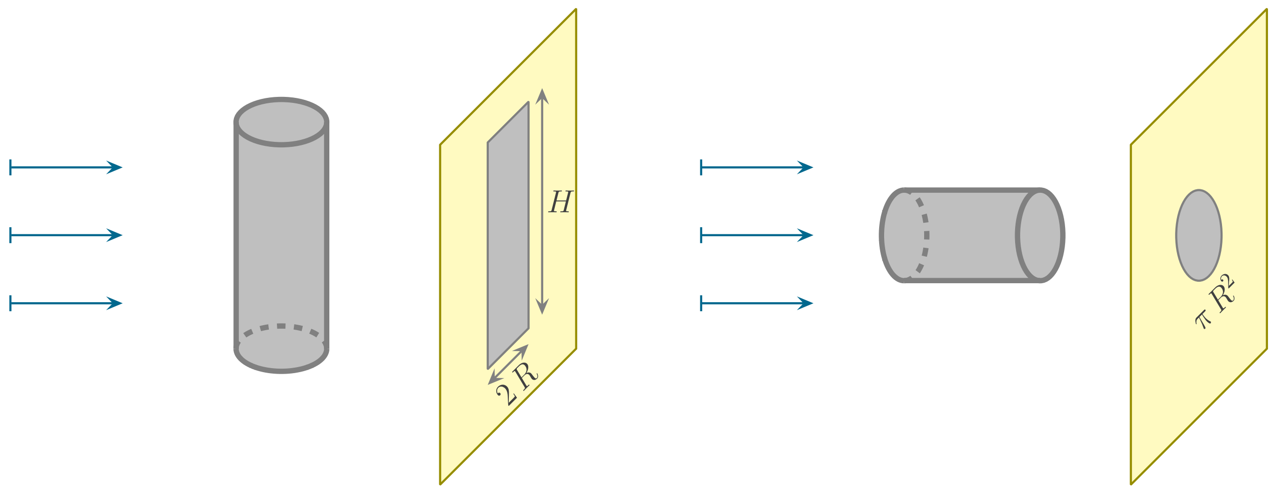
Le *coefficient de traînée*, noté C_x est le le nombre tel que

$$f_{\text{traînée}} \triangleq \frac{1}{2}\,C_x\,\rho\,S\,v^2 \qquad \text{où :}$$

- ➜ ρ est la masse volumique du fluide ;
- ➜ S est l'ombre projetée de l'objet dans la direction de l'écoulement ;
- ➜ v est la vitesse au loin du fluide.

✧ L'ombre projetée est la surface de l'ombre que crée l'objet lorsqu'il est éclairé par de la lumière parallèle dans la direction de l'écoulement.

17. Cette portance négative peut être si intense qu'elle peut dépasser le poids, ce qui fait que, en théorie, une F1 lancée à pleine vitesse pourrait rouler au plafond. Tant qu'elle ne s'arrête pas.



✧ La définition n'est pas si étrange qu'il n'y paraît.
✧ En effet, à l'instar de la pression cinétique[18], la force qu'un fluide exerce est « naturellement » fonction de sa masse volumique, de la surface qu'il « heurte » et du carré de sa vitesse.
✧ Le C_x représente donc le caractère aérodynamique de l'objet : plus celui-ci est petit, mieux il pénètre dans le fluide alors que plus le C_x est grand, plus l'objet a de difficulté pour se frayer un chemin dans le fluide.
✧ Comme nous le verrons juste après, le C_x dépend évidemment de la géométrie de l'objet et du fluide mais dépend aussi énormément de la vitesse ! C'est très très loin d'être une constante.

Le *coefficient de portance*, noté C_z est le le nombre tel que

$$f_{\text{portance}} \triangleq \frac{1}{2}\,C_z\,\rho\,S\,v^2 \qquad \text{où :}$$

➜ ρ est la masse volumique du fluide ;
➜ S est la surface caractéristique de l'objet ;
➜ v est la vitesse au loin du fluide.

✧ S n'est pas, ici, l'ombre projetée, mais plutôt la surface caractéristique qui est, souvent, la surface de l'objet « vue de dessus au repos ». Elle représente la surface sur laquelle peut « s'appuyer » l'objet.

IV·3 – Force de traînée

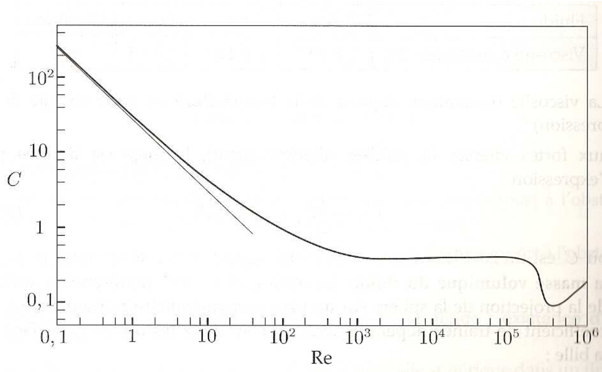
IV·3·*i* – expérience type

✧ Considérons une bille, ou tout autre objet sphérique de rayon R, dans une soufflerie.
✧ L'ombre projetée vaut, ici, sans ambiguité $S = \pi\,R^2$.
✧ De plus, au niveau du nombre de Reynolds, L, η et ρ sont intrinsèquement fixés. Seule V est variable et est directement proportionnel à Re.
✧ En mesurant la force nécessaire à exercer sur la sphère pour la maintenir immobile, nous pouvons en déduire la force exercée par le fluide sur celle-ci et tracer le tout en fonction du nombre de Reynolds.

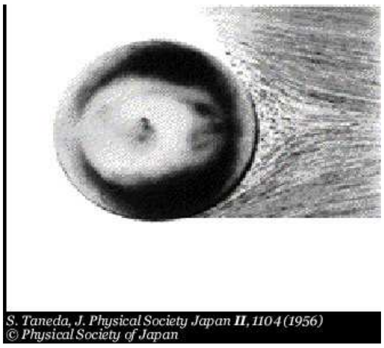
IV·3·*ii* – résultat

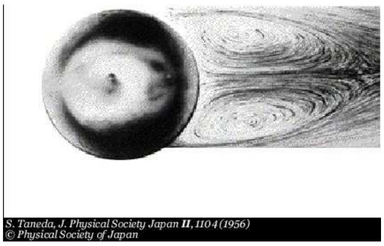
✧ Commençons par regarder la courbe obtenue[19].

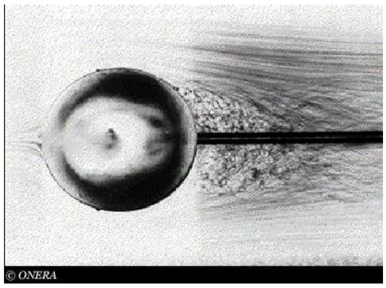
18. Voir cours de première année.
19. Source : oubliée. . .



✧ Nous pouvons constater qu'effectivement le C_x est une grandeur très variable puisqu'il varie sur un peu plus que 3 ordres de grandeurs (attention, les échelles sont logarithmiques).
✧ De plus, nous pouvons constater que, suivant la vitesse de l'écoulement, *i.e.* suivant le Re, l'allure de l'écoulement est très différent.
✧ Ci-dessous nous pouvons voir les photos associées à trois écoulements de nombre de Reynolds croissant.







Montrer le mélange des fluides.
Dynamique – variation des forces avec le nombre de Reynolds et la géométrie – coefficients de traînée pour les sphères et les cylindres

✧ Nous pouvons aisément constater que la taille du sillage, de la perturbation, que crée la sphère derrière elle est, certes, fonction de la vitesse de l'écoulement, mais pas de manière simple.
✧ En effet, si dans un premier temps quand la vitesse augmente, le sillage augmente aussi, il arrive un moment où, étrangement, celui-ci rediminue brutalement provoquant ainsi la chute du C_x.
✧ Le fait que cette chute brutale intervienne à nombre de Reynolds élevé explique pourquoi les balles de golf n'ont pas une surface lisse mais trouée. En effet la présence de ces irrégularités va augmenter le nombre de Reynolds et ainsi provoquer une baisse notable du C_x et donc un meilleur aérodynamisme.

IV·3·*iii* – frottements fluides

✯ à faible vitesse

✧ À faible vitesse, nous pouvons constater que la courbe décroît linéairement avec une pente d'environ -1.
✧ Or cette courbe, de par la présence de l'échelle logarithmique représente $\log C_x$ en fonction de $\log \mathrm{Re}$.
✧ Nous avons donc

$$\log C_x = a - \log \mathrm{Re} \qquad \rightsquigarrow \qquad C_x = \frac{\mathrm{C^{te}}}{\mathrm{Re}}$$

✧ Et comme le nombre de REYNOLDS est proportionnel à la vitesse, nous pouvons dire

$$C_x = \frac{\mathrm{C^{te}}'}{v}$$

✧ En reportant dans l'expression de la force de traînée, nous trouvons

$$f_{\text{traînée}} = \frac{1}{2}\,\rho\,S\,v^2\,C_x \qquad \rightsquigarrow \qquad f_{\text{traînée}} \propto v$$

✧ Nous retrouvons une loi bien connue

> À vitesse faible, *i.e.* à nombre de REYNOLDS petit, la force de traînée est proportionnelle à la vitesse.

✧ Dans le cas d'une sphère, il existe même la loi de STOKES, avec r le rayon de la sphère

$$\vec{f}_{\text{traînée}} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$$

✯ à grande vitesse

> Pour une sphère, à nombre de REYNOLDS élevé, le C_x est presque constant et vaut environ 0,5.

✧ Nous en déduisons immédiatement que

$$f_{\text{traînée}} = \frac{1}{2}\,\rho\,S\,v^2\,C_x \qquad \rightsquigarrow \qquad f_{\text{traînée}} \propto v^2$$

✧ Et donc

> À vitesse élevée, *i.e.* à nombre de REYNOLDS grand, la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse.

IV·4 – Couche limite

✧ En mécanique des fluides, s'il y a une chose qui s'oublie facilement, c'est que **toute** la physique des forces que le fluide exerce sur l'objet se passe au niveau du *contact* fluide – objet, pour la simple et néanmoins excellente raison qu'il s'agit de forces de contact.

✧ Autrement dit, il est *fondamental* de s'intéresser à ce qui se passe tout près de l'objet.

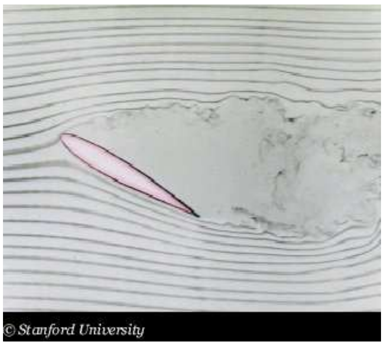
IV·4·*i* – kesako ?

✧ De manière un peu simplifiée, nous pouvons tenter de donner la définition suivante.

> La *couche limite* est la zone près de l'objet où l'écoulement est perturbée en terme de valeur de vitesse ou de ligne de courant.

✧ C'est un peu ce que nous avons appelé « sillage » dans le paragraphe précédent.

✧ Comme nous pouvons le voir sur la photo ci-dessous, il y a des situations où la « couche limite » peut envahir une zone notablement grande de l'espace.



Montrer le décollement.

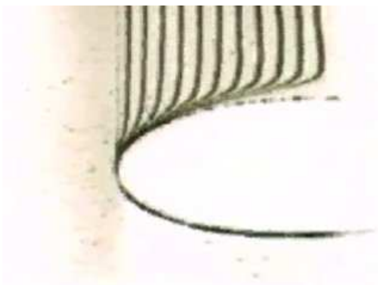
Couche limite – décollement – décollement sur une aile

✧ Dans le cas précédent, nous dirons que la couche limite *se décolle*.

✧ Si la couche limite se décolle pour une aile d'avion, la portance chute brutalement ce qui entraîne le « décrochage » de l'avion.

IV·4·*ii* – couche limite laminaire

✧ Dans l'expérience ci-dessous, un dispositif injecte à intervalle régulier de l'encre suivant une ligne droite et orthogonale à la vitesse d'arrivée du fluide sur l'obstacle.



Montrer le décollement.

Couche limite – Couche limite laminaire – calcul de couche limite

✧ Nous pouvons constater que les particules de fluide « loin » de l'obstacle avancent régulièrement : elles sont en dehors de la couche limite.

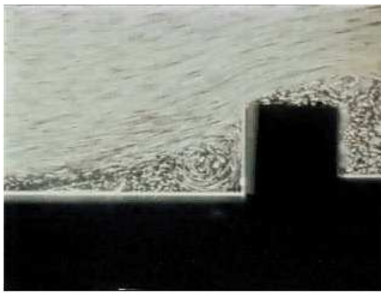
✧ En revanche, près de l'obstacle les particules de fluide vont moins vite et que la zone, la couche limite, dans laquelle les particules de fluide sont perturbées augmente avec la distance parcourue sur l'obstacle.

✧ Cette couche limite est dite *laminaire* car elle est associée à un écoulement laminaire.

✧ Nous montrerons dans le chapitre 6 que l'épaisseur δ est proportionnelle à $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$.

IV·4·*iii* – couche limite turbulente

✧ Comme nous l'avons vu avec l'aile d'avion, dans le cas d'écoulement turbulent (*i.e.* à grand nombre de Reynolds), la couche limite peut occuper une grande zone de l'espace, elle se décolle.

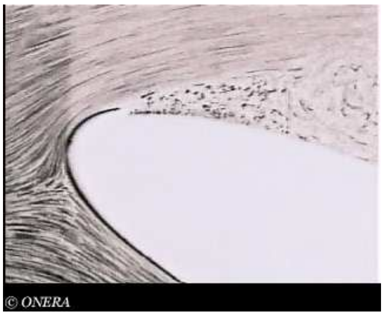


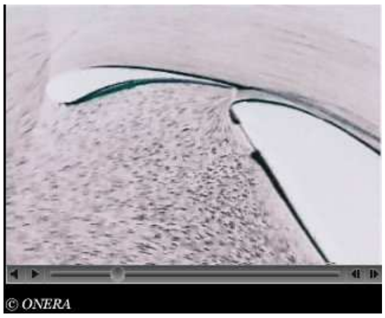
© ONERA

Montrer le décollement.

Couche limite – Décollement – Écoulement autour d'arrêtes ou d'objets mal profilés

✧ Ceci étant, le décollement d'une couche limite est généralement néfaste, c'est pourquoi il existe plusieurs techniques pour la recoller comme l'aspiration de fluide, l'éjection de fluide ou, comme ci-dessous, l'adjonction d'un bord d'attaque.





Montrer le décollement.

Couche limite – Décollement – Décollement bord d'attaque (onglets 1 puis 2)

Couche limite – Décollement – Effet des conditions aux limites sur le décollement (onglets 1 puis 3)

IV·5 – Effets célèbres

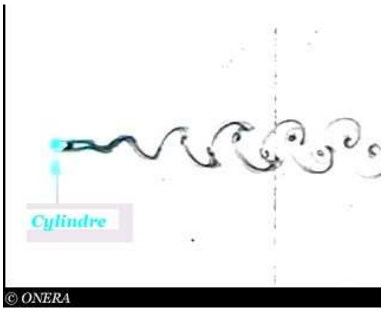
✧ La mécanique des fluides est une science très vaste, très complexe aux phénomènes d'une variété considérable (de la pâte dentifrice aux voitures de sport, en passant par les avalanches, il y a de quoi faire).

✧ Voici deux effets complexes et célèbres.

IV·5·*i* – allées de Bénard – von Karman

✧ Considérons un cylindre infini plongé dans un écoulement uniforme à nombre de Reynolds modéré, ni trop lentement pour ne pas provoquer un écoulement laminaire, ni trop rapide pour ne pas que l'écoulement soit turbulent.

✧ Très rapidement nous voyons apparaître une structure périodique dans le sillage du cylindre.



Montrer le décollement.

Couche limite – Décollement – Écoulement autour d'un cylindre

- Ce sillage est appelée « les allées de VON KARMAN ».
- Si l'objet n'est pas cylindrique mais sphérique, les tourbilons partent un peu dans toutes les directions et pas forcément dans un plan.
- La conséquence de ces allées est bien connue des sportifs : en tapant dans une balle fort, mais pas trop, et sans la faire tourner sur elle même, la balle « flotte » et a des mouvements assez irréguliers autour de la trajectoire prévue.
- Pourquoi ? Parce que, comme nous pouvons le constater, l'existence même de ces allées « envoie » du fluide d'un côté ou de l'autre. Pour cela il faut une force, d'un côté ou de l'autre. Mais, la loi des actions réciproque implique que le fluide exerce en retour une force sur l'objet, tantôt d'un côté, tantôt de l'autre. D'où le flottement…

IV·5·*ii* – pont de Takoma

- S'il est un pont connu, c'est le pont de Takoma, aux États-Unis, qui s'est écroulé un jour de vent.

Montrer la vidéo.

- Que s'est-il passé ?
- Lors de la construction du pont, seule une étude mécanique de résistance avait été menée, l'aspect « couplage avec le vent » n'avait pas été pris en compte.
- Sauf qu'un jour, la météo fut telle que les caractéristiques du vent (vitesse, durée) firent entrer le pont en résonance et, à force, celui-ci s'écroula.
- La légende, forcément invérifiable, raconte qu'il n'y eu qu'un seul mort… un chien oublié dans une voiture.

Description de fluides en mouvement

Au niveau du cours

✯ Programme concerné

✧ Programme de 2e année :
- ➜ I.A.1. Étude phénoménologique des fluides
- ➜ I.A.2. Cinématique des fluides

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ fluide, fluide visqueux ;
- ➜ échelle microscopique, mésoscopique, macroscopique ;
- ➜ pression cinétique, libre parcours moyen ;
- ➜ particule de fluide, cisaillement ;
- ➜ ligne de courant, ligne d'émission, trajectoire ;
- ➜ description lagrangienne, description eulérienne ;
- ➜ dérivée particulaire, variation locale, variation convective ;
- ➜ vecteur densité de courant de masse, vecteur densité de courant de volume ;
- ➜ débit massique, débit volumique ;
- ➜ source, puit et fontaine de matière ;
- ➜ compressibilité d'un fluide, d'une particule de fluide, d'un écoulement ;
- ➜ écoulement tourbillonaire, écoulement potentiel, point d'arrêt ;
- ➜ nombre de REYNOLDS ;
- ➜ viscosité d'un fluide ;
- ➜ traînée, portance, couche limite, décollement de la couche limite ;
- ➜ coefficient de portance, de traînée.

✯ Les grandeurs

✧ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leurs interprétations :
- ➜ $\text{Re} = \dfrac{\rho\, V\, L}{\eta}$ sans dimension ;
- ➜ formule de STOKES : $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v}$ pour une sphère.

✯ Les lois

✧ Sont à connaître :
- ➜ la loi locale de conservation de la masse ;
- ➜ connaître les conditions aux limites naturelles.

✯ la phénoménologie

✧ Connaître / savoir :
- ➜ expliquer à quoi correspondent les termes sources de masse ;
- ➜ la différence entre fluide et écoulement incompressible ;
- ➜ interpréter le rotationnel et la divergence de la vitesse eulérienne d'un fluide au niveau particulaire ;

- ➜ déterminer des vitesses à partir d'une analogie avec l'électromagnétostatique ;
- ➜ interpréter le nombre de Reynolds à partir des effets de viscosité et des effets inertiels ;
- ➜ comment évolue la traînée et la forme de l'écoulement lorsque Re augmente ;
- ➜ les limites des forces de frottement fluide linéaire et quadratique ;
- ➜ la forme des allées de BÉNARD – VON KARMAN ;
- ➜ ce qui est passé pour le pont de Tacoma.

Au niveau des savoir-faire

✧ Connaître parfaitement :
- ➜ connaître l'expression de la dérivée particulaire de grandeurs scalaire et vectorielle.

✯ petits gestes

✧ Savoir :
- ➜ traduire analytiquement les lignes de courants et les trajectoires ;
- ➜ lien entre les débits massique et volumique.

✯ exercices classiques

✧ Savoir refaire / retrouver :
- ➜ l'équation locale de conservation de la masse ;
- ➜ le champ des vitesse dans une tornade ;
- ➜ le potentiel des vitesses d'un écoulement autour d'une sphère.