Mécanique

Chapitre 5

Mouvements de fluides

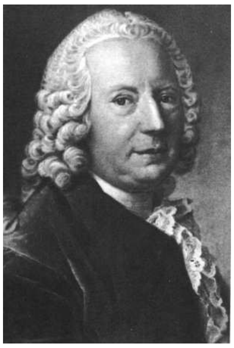
Mouvements de fluides

Après avoir vu, dans le chapitre précédent, quelques généralités sur la mécanique des fluides, nous allons pouvoir désormais nous intéresser à des évolutions particulières.

Nous commencerons par revoir la *statique* des fluides qui, il ne faut pas l'oublier, fait partie de la mécanique des fluides même si cela reste un mouvement très particulier. Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons aux ondes sonores en général et à leur propagation dans un tuyau de section constante en particulier. Enfin, dans la dernière partie, nous verrons qu'à l'aide de bilans, nous pourrons prévoir et discuter de nombreuses situations.

Table des matières

Biographies succintes



Daniel Bernoulli

(1700 Groninge – 1782 Bâle)

La famille Bernoulli compte 8 scientifiques de renom, essentiellement en mathématiques. Johann, le père de Daniel, est professeur à l'université de Groninge quand ce dernier né. Daniel fera des études en philosophie et mathématiques avant de continuer en médecine et de présenter une thèse sur la physique de la respiration. Il obtient un poste à Saint-Pétersbourg et y écrit *Hydronamica* qui paraît en 1738, ouvrage qui fait de Daniel le fondateur de l'hydrodynamique. Hormis cela, Daniel travaillera avec Euler sur la déformation des solides.

I – Statique des fluides

I·1 – Relation fondamentale de la statique des fluides

✧ Dans cette partie, nous allons revoir (afin d'approfondir) des notions vues en première année.

I·1·*i* – forces au sein d'un fluide

✧ En considérant une particule de fluide, qui n'est autre qu'un système tout ce qu'il y a de plus usuel en mécanique, nous savons qu'il ne peut y avoir que deux types de force qui s'exercent sur elle :
- ➜ les forces à distance ;
- ➜ les forces de contact.

✧ Regardons d'un peu plus près comment nous pouvons les modéliser à l'échelle du système envisagé, *i.e.* de la particule de fluide.

✯ forces à distances

☯ vision volumique

✧ Ce sont des forces qui s'exercent « en volume », *i.e.* directement « à l'intérieur » de la particule de fluide et, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire qu'il s'agisse de forces à distance.

✧ Comme ces forces sont volumiques et que, comme toute force, elles sont extensives, nous pouvons d'ores et déjà dire que leurs intensités seront proportionnelles au volume $\mathrm{d}\tau$ de la particule de fluide.

✧ Dans les forces à distance, nous avons :
- ➜ le poids [1] dont la résultante s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{P} = \mu\,\vec{g}\,\mathrm{d}\tau$$

- ➜ la force de LAPLACE que nous n'utiliserons que rarement – voire jamais – dont l'expression volumique est la même pour une particule de fluide que pour une portion de circuit, à savoir

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{L}} = \vec{\jmath}\,\mathrm{d}\tau \wedge \vec{B}$$

- ➜ par extension, toutes les forces d'inertie.

✧ Pour chacune des forces, nous définirons une densité volumique de force.

> La *densité volumique de force* $\vec{f}_{\mathrm{v}0}$ de la force $\vec{F}_0$ est telle que la résultante $\mathrm{d}\vec{F}_0$ de la force $\vec{F}_0$ sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ s'écrive
> $$\mathrm{d}\vec{F}_0 \triangleq \vec{f}_{\mathrm{v}0}\,\mathrm{d}\tau$$

☯ poids

> La densité volumique de force de pesanteur s'écrit, pour une particule de fluide de masse volumique μ,
> $$\vec{f}_{\mathrm{v,pes}} = \mu\,\vec{g}$$

1. Nous ne ferons pas, *a priori*, de mécanique des fluides dans l'espace interplanétaire ou interstellaire. Mais si cela devait arriver, l'auteur ne doute pas que le lecteur sera capable de trouver, par lui-même, l'expression des forces gravitationnelles qui s'exercent sur une particule de fluide.

✧ La preuve est immédiate.

✧ Le poids d'une particule de fluide s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{P} = \mathrm{d}m\,\vec{g}$$

✧ Or la masse $\mathrm{d}m$ s'écrit, par définition de la masse volumique, $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}\tau$.

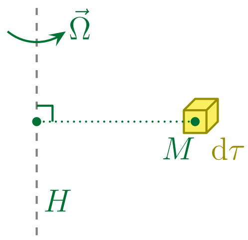
✧ Et en identifiant avec la définition de la densité volumique de force, nous avons bien

$$\mathrm{d}\vec{P} = \mu\,\vec{g}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\vec{P} = \vec{f}_{\text{v,pes}}\,\mathrm{d}\tau \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{f}_{\text{v,pes}} = \mu\,\vec{g}$$

force d'inertie d'entraînement

Dans un référentiel en rotation pure et uniforme à la vitesse angulaire Ω, la densité volumique de force d'inertie d'entraînement s'écrit, pour une particule de fluide située en M, de masse volumique μ et en notant H le projeté de M sur l'axe de rotation

$$\vec{f}_{\text{v,pes}} = +\mu\,\Omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

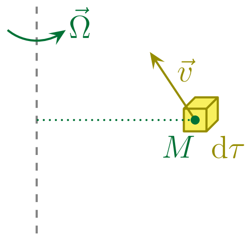


✧ La démonstration est laissée au lecteur.

force d'inertie de Coriolis

Dans un référentiel en rotation pure à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, la densité volumique de force d'inertie de Coriolis s'écrit, pour une particule de fluide située en M, de masse volumique μ et en notant $\vec{v}$ sa vitesse par rapport au référentiel non galiléen,

$$\vec{f}_{\text{v,pes}} = -2\,\mu\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$



✧ La démonstration est, là aussi, laissée au lecteur.

✫ forces de contact

deux directions possibles

✧ Au niveau d'une surface, les forces qui s'exercent peuvent être soit normales soit tangentes à la surface, ces deux directions correspondant à des natures de force très différentes.

✧ Au niveau d'une particule de fluide :

➜ les forces normales sont les forces *pressantes* ;

➜ les forces tangentielles sont associées aux frottements, *i.e.* à la viscosité.

Dans le cas d'un fluide usuel, les forces de viscosité sont nulles au repos.

✧ Insistons : **même dans un fluide visqueux**, lorsque celui-ci est au repos, les forces de viscosité sont nulles.

✧ Ainsi, dans un cas statique, une particule de fluide ne subit que des forces pressantes.

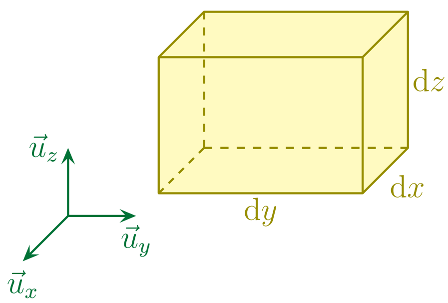
◔ équivalent volumique des forces pressantes

✧ Nous allons chercher à écrire la *résultante* des forces de contact sous la forme d'une densité volumique de force.

La densité volumique $\vec{f}_{\text{press}}$ des forces pressantes s'écrit

$$\vec{f}_{\text{press}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P$$

✧ Pour le montrer, prenons une particule de fluide quelconque, avec un repérage quelconque.



✧ Il y a 6 forces qui s'exercent (une force par face). Concentrons-nous sur les deux faces de normale $\vec{u}_z$.

✧ La résultante de ces deux forces s'écrit, en projection sur $\vec{u}_z$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_z &= \mathrm{d}f_{z,\text{haut}} + \mathrm{d}f_{z,\text{bas}} \\
&= \mathrm{d}f_z(x_0,y_0,z+\mathrm{d}z) + \mathrm{d}f_z(x_0,y_0,z) \\
&= -P(x_0,y_0,z+\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + P(x_0,y_0,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\big(P(x_0,y_0,z+\mathrm{d}z) - P(x_0,y_0,z)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\left(\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z)\,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

✧ Par analogie, nous pouvons écrire

$$\mathrm{d}f_y = -\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}\tau \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}f_x = -\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\,\mathrm{d}\tau$$

✧ Finalement, cela donne

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{press}} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\,\vec{u}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\,\vec{u}_y - \frac{\partial P}{\partial z}\,\vec{u}_z\right)\,\mathrm{d}\tau$$

✧ Ce qui s'écrit bien sous la forme

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{press}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P \,\mathrm{d}\tau \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{f}_{\text{v,press}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P$$

✧ Il est possible de démontrer $\vec{f}_{\text{v,press}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P$ avec la relation vue dans le cours d'électromagnétisme

$$\oiint \xi \,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint \overrightarrow{\text{grad}}\, \xi \,\mathrm{d}\tau$$

✧ Pour la résultante des forces de pression, nous avons, ici, $\xi = -P$.

I·1·*ii* – relation

✯ énoncé

Relation Fondamentale de la Statique des Fluides

Dans un fluide au repos, le champ de pression est tel que

$\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \vec{f}_{\text{v,tot}}$ où

$\vec{f}_{\text{v,tot}}$ est la densité volumique de résultante de toutes les autres forces autres que celles de pression.

La pression qui vérifie l'équation $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \vec{f}_{\text{v,tot}}$ est appelée *pression hydrostatique*.

✯ démonstration

✧ Considérons une particule de fluide dans un fluide au repos.

✧ Celle-ci subit :

- ➜ des forces à distance :
  - ➜ le poids qui s'écrit $\mathrm{d}\vec{P} = \vec{f}_{\text{v,pes}} \,\mathrm{d}\tau$;
  - ➜ d'autres forces éventuelles que nous écrirons de manière générale $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{autre}} = \vec{f}_{\text{v,autre}} \,\mathrm{d}\tau$;
- ➜ des forces de contact :
  - ➜ les forces pressantes de résultante $\mathrm{d}\vec{F}_{\text{pres}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P \,\mathrm{d}\tau$;
  - ➜ les forces de viscosité, nulles au repos.

✧ L'équilibre de la particule de fluide s'écrit

$$\vec{0} = \sum \vec{F} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{0} = \vec{f}_{\text{v,pes}} \,\mathrm{d}\tau + \vec{f}_{\text{v,autre}} \,\mathrm{d}\tau - \overrightarrow{\text{grad}}\, P \,\mathrm{d}\tau$$

✧ Ce qui donne, en simplifiant par $\mathrm{d}\tau$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \vec{f}_{\text{v,pes}} + \vec{f}_{\text{v,autre}}$$

✧ Ce qui n'est autre que le résultat en adoptant la notation

$$\vec{f}_{\text{v,tot}} \overset{\text{not}}{=} \vec{f}_{\text{v,pes}} + \vec{f}_{\text{v,autre}}$$

Remarque. Il est à noter que si, au lieu d'écrire l'équilibre de la particule de fluide, nous avions écrit le PFD avec le terme en « masse fois l'accélération » nous aurions trouvé, après division par $\mathrm{d}\tau$, soit l'équation d'Euler, soit l'équation de Navier – Stokes suivant l'absence (ou non) du terme de viscosité. Mais n'anticipons pas, nous verrons cela dans le chapitre 6.

I·1·*iii* – conditions aux limites

Dans le vide, la pression est nulle.

La pression au sein d'un fluide est une fonction continue de l'espace.

Entre deux fluides non miscibles, la pression est continue.

✧ Pour qu'il y ait *discontinuité* de la pression lors du passage d'une interface, il faut qu'il y ait des phénomènes de surface. Ces phénomènes sont caractérisés par la *tension de surface.*

✧ Sans entrer dans les détails qui dépasseraient, de loin, le cadre de ce cours, la tension de surface est le phénomène qui explique, entre autre :
- ➜ le fait que les gouttes d'eau forment des gouttes bien rondes sur une plaque anti-adhésive ;
- ➜ le fait que l'eau monte « toute seule » dans un capillaire ;
- ➜ qu'il est très difficile de gonfler à la bouche un ballon de sculpture (voir ci-dessous une photo de sculture originale[2]) ;
- ➜ le fait que des insectes peuvent marcher sur l'eau, mais pas un humain ;
- ➜ le ménisque que forme l'eau dans les burettes de chimiste ;
- ➜ plein d'autres choses.

I·2 – Exemples

I·2·*i* – fluide incompressible

2. Source : `http://www.asso123soleil.fr/blog/wp-content/uploads/2009/05/ballon-sculpte-poussin.jpg`

✫ relation à connaître

Dans un fluide incompressible au repos, soumis uniquement à la pesanteur, le champ de pression est tel que

$$P + \mu\, g\, h = \text{C}^{\text{te}} \qquad \text{où}$$

h est la hauteur algébrique comptée à partir d'une référence arbitraire.

✧ Rappelons que tous les liquides sont, en première approximation, des fluides incompressibles.

✫ résultat à connaitre

☯ pression dans l'eau

Dans de l'eau au repos, la pression augmente d'un bar tous les 10 mètres de profondeur.

✧ En effet, en prenant le sol comme référence $h_{\text{sol}} = 0$, nous avons, pour de l'eau à l'air libre

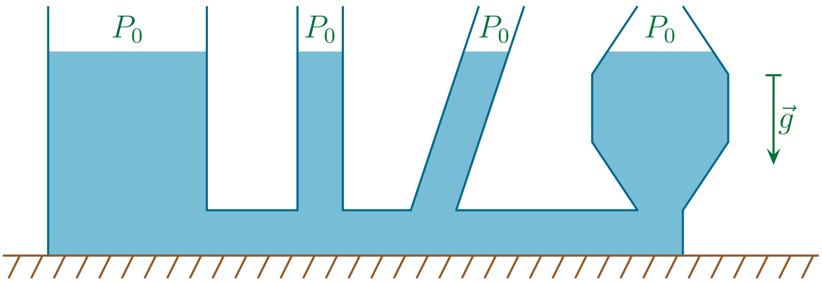
$$P + \mu\, g\, h = P(sol) + 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P = P(sol) - \mu\, g\, h$$

✧ À une *profondeur* de 10 mètres, *i.e.* à une hauteur $h = -10$ m, nous avons

$$P(-10 \text{ m}) \simeq P(sol) + 1000 \times 10 \times 10 \sim P(sol) + 10^5 \text{ Pa}$$

☯ vases communiquants

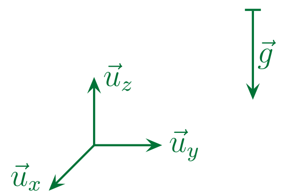
Lorsque deux récipients ouverts et remplis d'un même liquide communiquent, leurs niveaux, au repos, est le même.



✧ La démonstration est immédiate.
✧ Puisque les deux récipients communiquent, l'ensemble du liquide contenu dans les deux récipients obéissent au même champ de pression tel que $P + \mu\, g\, h = \text{C}^{\text{te}}$.
✧ Or les deux surfaces sont ouvertes sur le même atmosphère, *donc* ont la même pression puisque la pression est continue à travers l'interface.
✧ Donc les deux surfaces sont à la même hauteur.

✫ démonstration de la relation fondamentale de la statique des fluides

✧ La démonstration est rapide. Considérons un fluide et prenons $\vec{u}_z$ comme axe vertical ascendant.



✧ Pour un fluide au repos soumis uniquement à la pesanteur, la relation fondamentale de la statique des fluide s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = \mu\, \vec{g}$$

✧ Les projections sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ donnent

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P(\cancel{x},y,z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad P(\cancel{y},z)$$

✧ Il reste $P(z)$ et, en projetant sur $\vec{u}_z$,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu\, g$$

✧ Comme $\mu = \mathrm{C^{te}}$ (fluide incompressible), l'intégration est immédiate

$$P(z) = -\mu\, g\, z + \mathrm{C^{te}} \qquad \rightsquigarrow \qquad P + \mu\, g\, z = \mathrm{C^{te}}$$

✧ Il ne reste plus qu'à écrire cette relation sous forme intrinsèque (*i.e.* indépendamment du système de coordonnées choisi) en remarquant que z n'est autre que la hauteur h.

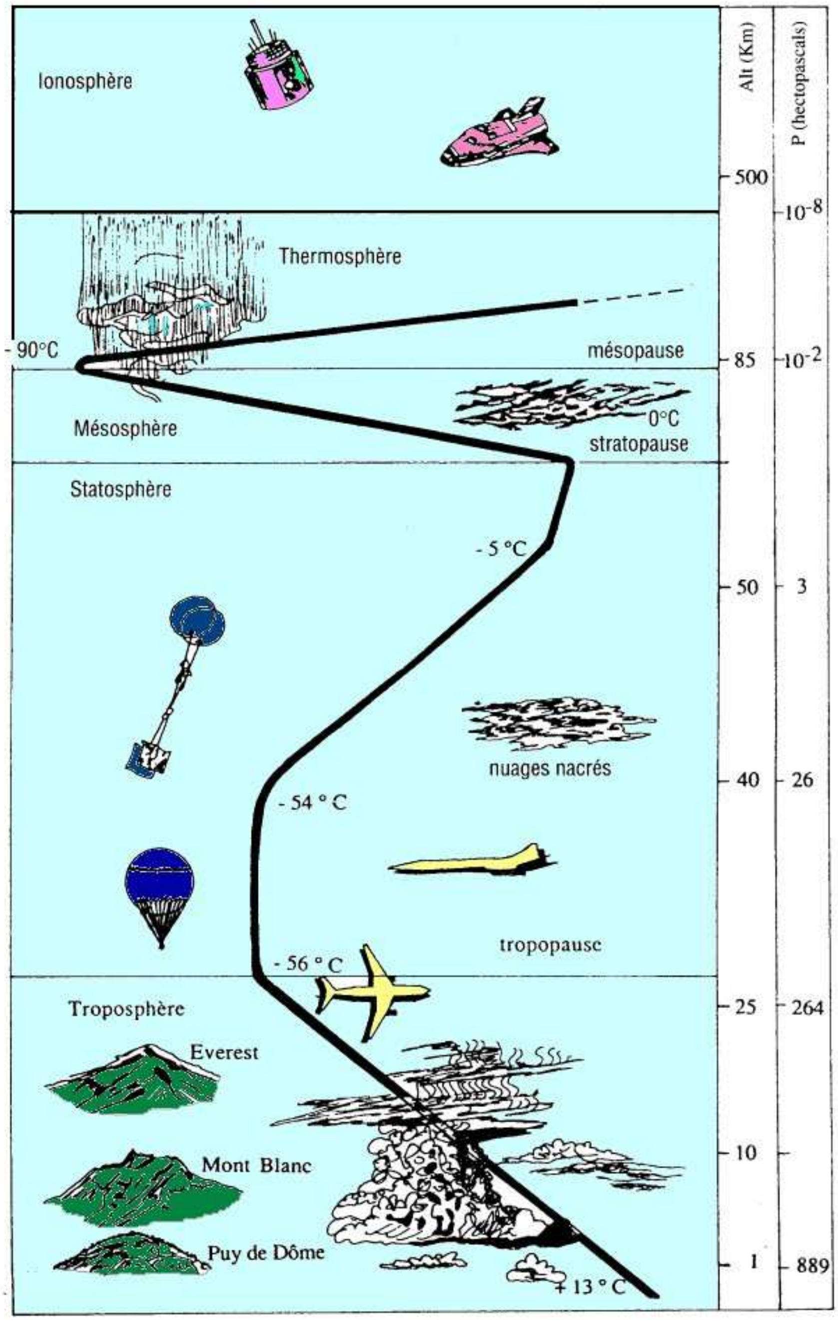
I·2·*ii* – atmosphère isotherme

✯ modèle utilisé

✧ Nous allons rechercher le champ de pression dans l'atmosphère, considérée comme un gaz parfait, et de température uniforme[3].

✧ Comme le montre le graphique ci-dessous[4], il n'y a guère que sur quelques kilomètres de stratosphère que la température est uniforme dans l'atmosphère.

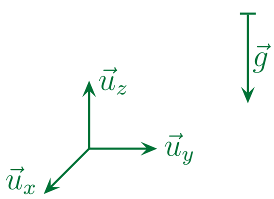
3. Le lecteur attentif aura remarqué que, dans la littérature, le modèle est toujours appelé « atmosphère isotherme » évoquant ainsi une transformation, alors qu'il audrait mieux parler d'« atmosphère à température uniforme ».
4. Source : `http://pages.usherbrooke.ca/jfpepin/wp-content/uploads/17.gif`



✧ Ceci étant, si les résultats analytiques ne peuvent pas être utilisables dans les autres couches de l'atmosphère, qualitativement les résultats restent similaires.

✯ expression

✧ Considérons l'atmophère au repos par rapport au référentiel terrestre et posons $\vec{u}_z$ l'axe vertical ascendant.



✧ Comme dans l'exemple précédent, les projections de la relation fondamentale de la statique des fluides sur les trois axes conduisent à

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu\,g$$

✧ Cette fois $\mu \neq \mathrm{C^{te}}$ car le fluide est un gaz et que, dans ces conditions, la masse volumique dépend de la pression et de la température. Nous pouvons donc écrire, puisqu'il s'agit d'un gaz parfait,

$$\mu = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = M \times \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu = \frac{M\,P}{R\,T}$$

✧ La relation fondamentale de la statique des fluide s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{M\,P\,g}{R\,T} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \frac{M\,g}{R\,T}\,P = 0$$

✧ Il s'agit là d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants dont la solution s'écrit

$$P(z) = P(0) \times \mathrm{e}^{-z/H} \qquad \text{avec} \qquad H = \frac{R\,T}{M\,g}$$

✧ Numériquement

$$H \sim \frac{8{,}314 \times 300}{28.10^{-3} \times 10} \sim 8.10^3 \qquad \rightsquigarrow \qquad H \sim 8 \text{ km}$$

✧ Ainsi, qualitativement, la pression varie sur des échelles de l'ordre de 8 km.

✯ approximation usuelle

> Lorsqu'un gaz occupe un espace de taille très petite devant $H \sim 8$ km, sa pression peut être considérée comme uniforme.

✧ C'est une approximation si courante qu'il est fréquent d'oublier ses limites.
✧ En effet, considérer la pression parfaitement uniforme revient à *négliger* la poussée d'Archimède.

✯ facteur de Boltzmann

> Dans un système de température uniforme, la densité de particules possédant l'énergie e_0 est proportionnel au facteur de Boltzmann $\mathrm{e}^{-e_0/(k_\mathrm{B}\,T)}$.

✧ C'est cette loi qui est à la base de la loi d'Arrhénius en chimie.
✧ Nous n'allons pas *prouver* cette loi qui est une des lois fondamentales de la physique statistique, mais nous allons vérifier sa cohérence avec l'atmosphère isotherme.
✧ Cherchons la densité de molécules $n^\star(z)$ situées à la cote z dans l'atmosphère.
✧ En regardant une particule de fluide à la cote z, nous trouvons aisément que

$$n^\star(z) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} \times \mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau} \quad \rightsquigarrow \quad n^\star(z) = \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} \times P(z)}{R\,T} \quad \rightsquigarrow \quad n^\star(z) = \frac{\mathcal{N}_\mathrm{A} \times P(0)}{R\,T}\,\mathrm{e}^{-z/H} \overset{\text{not}}{=} n_0^\star\,\mathrm{e}^{-z/H}$$

✧ Réécrivons le terme dans l'exponentielle

$$\frac{z}{H} = \frac{M\,g\,z}{R\,T} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{z}{H} = \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{A}} \times m\,g\,z}{\mathcal{N}_{\mathrm{A}} \times k_{\mathrm{B}}\,T} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{z}{H} = \frac{e_{\mathrm{p,pes}}}{k_{\mathrm{B}}\,T}$$

✧ Et, comme toutes les molécules ont la même énergie cinétique (cf. définition de la température), nous pouvons en conclure que nous avons bien

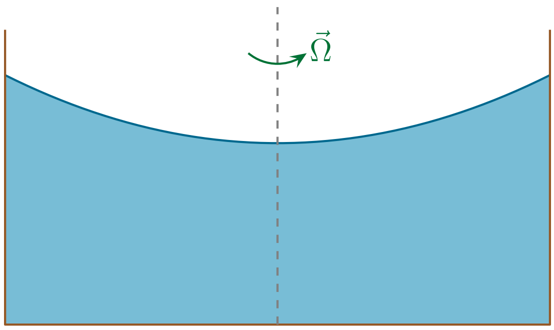
$$n^\star(z) = n_0^\star\,\mathrm{e}^{-e_{\mathrm{tot}}/(k_{\mathrm{B}}\,T)}$$

Remarque. En considérant la différence de masse entre le diazote et le dioxygène, il est possible de comprendre pourquoi la concentration d'oxygène diminue en haute altitude.

I·2·*iii* – vase tournant

✫ situation

✧ Tout le monde a déjà pu constater que lorsqu'un liquide tourne dans un récipient, la surface a tendance à se creuser au centre.
✧ Nous allons chercher, dans ce paragraphe, à décrire précisément la situation.
✧ Considérons pour cela un récipient qui est mis en rotation (par un dispositif non représenté) afin d'entraîner le fluide.



✧ Au bout d'un certain temps, la situation est stationnaire.
✧ Cherchons alors à répondre aux questions :
- ➜ quelle est la pression au sein du liquide ?
- ➜ quelle est la forme de la surface ?

✫ analyse

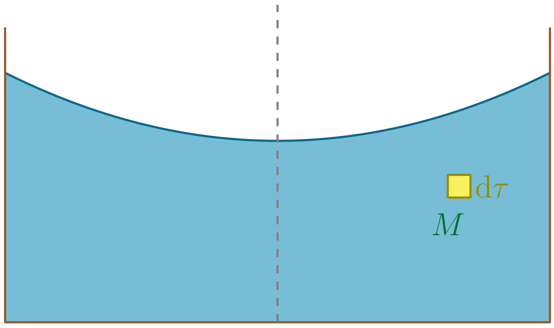
✧ Ici nous avons le choix :
- ➜ soit nous étudions le dispositif dans le référentiel du laboratoire, et alors le récipient, ainsi que le liquide, sont en mouvement ;
- ➜ soit nous nous plaçons « dans » le référentiel tournant et alors l'ensemble est *immobile*.

✧ Compte-tenu du paragraphe actuel, nous allons bien évidemment utiliser la 2$^{\text{e}}$ approche.
✧ Toutefois la première approche, celle qui consiste à se placer dans le référentiel du laboratoire, n'est pas, techniquement, plus compliquée. En revanche elle demande, peut-être, d'un peu mieux « voir » les choses car tout bouge et **il n'y a pas de forces centrifuges**.

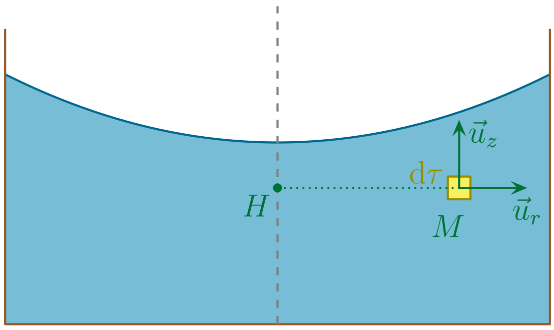
✫ champ de pression

☯ lois

✧ Plaçons-nous dans le référentiel tournant. Dans ces conditions, le liquide est **immobile**.



- Clairement, c'est le repérage cylindro-polaire qui va être le mieux adapté à la situation.
- De plus nous voyons bien que la situation est invariante par rotation [5] autour de l'axe (Oz), nous pouvons dire que la pression est indépendante de θ.
- Les forces qui s'exercent sur une particule de fluide sont :
  - force à distance : uniquement le poids de densité volumique $\vec{f}_{\text{v,pes}} = \mu\,\vec{g}$;
  - forces d'inertie :
    - la force d'inertie d'entraînement dont la densité volumique s'écrit ici (puisque le référentiel choisi est en rotation pure et uniforme par rapport à un référentiel galiléen) $\vec{f}_{\text{v,ie}} = +\mu\,\Omega^2\,\overrightarrow{HM}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation ;
    - la force d'inertie de Coriolis qui est nulle ici puisque toutes les particules de fluide sont au repos.



- La relation fondamentale de la statique des fluide s'écrit

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \vec{f}_{\text{v,pes}} + \vec{f}_{\text{v,ie}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\,P = \mu\,\vec{g} + \mu\,\Omega^2\,\overrightarrow{HM}$$

- La projection sur $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$ donnent respectivement

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\mu\,g \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial r} = +\mu\,\Omega^2\,r$$

résolution

- Comme ces deux équations aux dérivées partielles concernent la même fonction $P(r,z)$, nous ne pouvons pas les résoudre séparément.
- Nous allons, comme c'est souvent le cas dans les situations simples, les résoudre successivement.
- En intégrant la première (la projection sur $\vec{u}_z$), cela donne

$$P(r,z) = -\mu\,g\,z + f(r)$$

5. Attention de ne pas confondre cette invariance par rotation, qui n'est que géométrique, avec la rotation du liquide autour de cet axe dans le référentiel du laboratoire, qui est une rotation physique.

✧ En effet, ici, la « constante » d'intégration n'est constante que *par rapport* à z, *i.e.* c'est une fonction de r.

✧ Maintenant que nous connaissons la forme que *doit* avoir $P(r,z)$ pour obéir à la première projection, utilisons-la dans la deuxième équation

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\mu\,g\,z+f(r)\right)=+\mu\,\Omega^2\,r \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=+\mu\,\Omega^2\,r \quad\rightsquigarrow\quad f(r)=+\frac{1}{2}\,\mu\,\Omega^2\,r^2+\mathrm{C^{te}}$$

✧ Cette fois la constante est vraiment constante.

✧ Finalement, la pression au sein du liquide s'écrit

$$P(r,z)=-\mu\,g\,z+\frac{1}{2}\,\mu\,\Omega^2\,r^2+\mathrm{C^{te}}$$

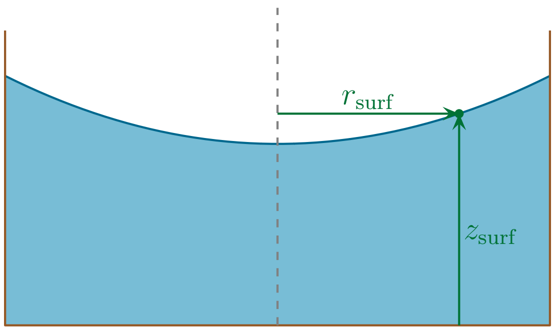
✧ Pour déterminer la constante, nous pouvons utiliser la conservation du volume. Mais, pour cela, il faut d'abord connaître la forme de la surface.

✯ forme de la surface

✧ La surface, par définition, est au contact de l'atmosphère.

✧ Donc, par continuité de la pression, nous pouvons écrire, en un point de la surface repéré par $(r_{\text{surf}},z_{\text{surf}})$

$$P(r_{\text{surf}},z_{\text{surf}})=P_0$$



✧ Compte-tenu de l'expression précédemment trouvée pour la pression, cela donne

$$P_0=-\mu\,g\,z_{\text{surf}}+\frac{1}{2}\,\mu\,\Omega^2\,{r_{\text{surf}}}^2+\mathrm{C^{te}} \qquad\rightsquigarrow\qquad z_{\text{surf}}=\frac{\Omega^2}{2\,g}\times {r_{\text{surf}}}^2+\kappa \quad \text{avec} \quad \kappa=\mathrm{C^{te}}$$

✧ Pour déterminer la constante, il faudrait, comme nous l'avons dit juste au-dessus, calculer le volume de liquide et l'identifier au volume initial. C'est long et peu intéressant, nous n'allons pas le faire.

✧ En revanche, en ce qui concerne les résultats, nous voyons que la surface forme un *paraboloïde de révolution*.

✧ Ce genre de dispositif est intéressant en astronomie car il permet de réaliser un miroir parabolique de bonne qualité et de focale variable. Pour cela il « suffit » de faire tourner une cuve de mercure et le tour est joué (voir ci-dessous un exemple de miroir de 3,7 m de diamètre[6])

6. Source : `http://l.douek.free.fr/banquimage/astro_telescope/source/image/1998020055.jpg`

✧ L'inconvénient d'un tel dispositif est que l'axe du télescope ainsi créé ne peut être que vertical, ce qui empêche de pointer dans la direction de son choix et de faire une observation suivie d'un astre durant toute une nuit.

I·3 – Poussée d'ARCHIMÈDE

I·3·*i* – origine

La poussée d'ARCHIMÈDE que subit un corps de la part d'un fluide est la résultante des forces pressantes que le fluide exerce sur ce corps.

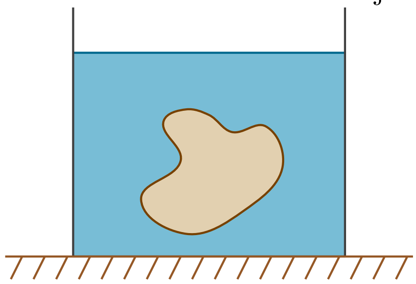
Autrement dit, dans la liste des forces de contact, il faut :
- ➜ *soit* compter la poussée d'ARCHIMÈDE ;
- ➜ *soit* prendre en compte les forces pressantes.

I·3·*ii* – expression

✫ une loi célèbre mais mal connue

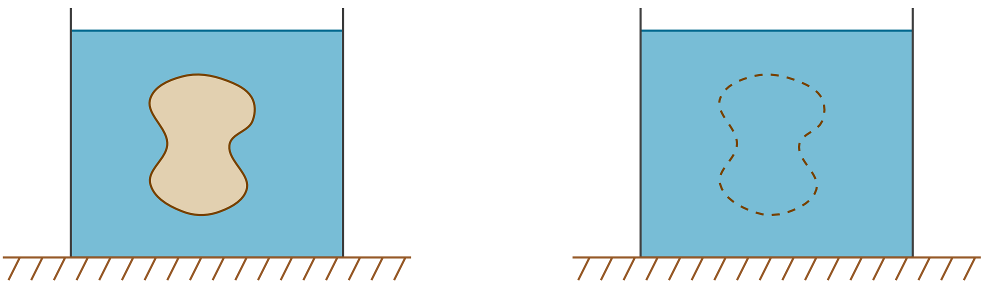
Tout corps entièrement immergé dans un fluide au repos subit de la part de celui-ci une force verticale dirigée vers le haut d'intensité égale au poids du fluide remplacé.
Cette force est appelée *poussée d'*ARCHIMÈDE.

Le *fluide remplacé* est le fluide dont un objet a pris la place.



⋆ démonstration

- Considérons un objet entièrement immergé et immobile et notons $\vec{\Pi}$ la résultantes des forces pressantes exercées par le fluide.

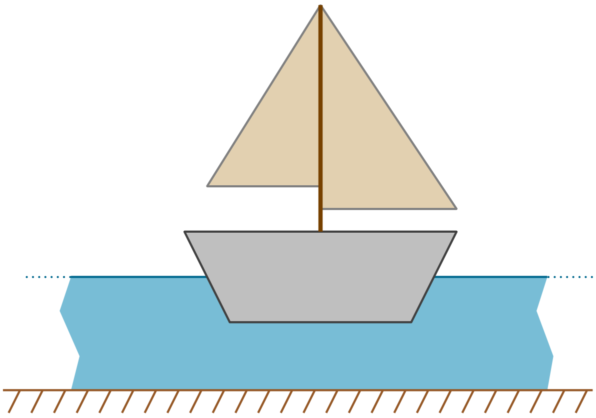


- Faisons l'hypothèse que la force que le fluide exerce ne dépend pas de l'objet.
- C'est une hypothèse « naturelle » car la force exercée par un fluide immobile sur une surface $\mathrm{d}S$ vaut $\mathrm{d}\vec{f} = P\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$ avec $\vec{n}$ un vecteur normal à la surface. Supposer que la force change suivant l'objet qui subit la force reviendrait à supposer que ce qui subit la force est capable de changer le champ de pression.
- Donc si la force ne dépend pas de l'objet, nous pouvons remplacer ce dernier par du fluide, le même que celui dans lequel il est plongé.
- Nous obtenons alors une portion de fluide :
  - ➜ subissant uniquement son poids $\vec{P}_{\text{fr}}$ et la résultante $\vec{\Pi}$;
  - ➜ immobile.
- Nous avons alors $\vec{\Pi} + \vec{P}_{\text{fr}} = \vec{0}$ soit $\vec{\Pi} = -P_{\text{fr}}$.
- Ce qui démontre l'expression de la poussée d'Archimède.

I·3·*iii* – limites

⋆ la moins restrictive

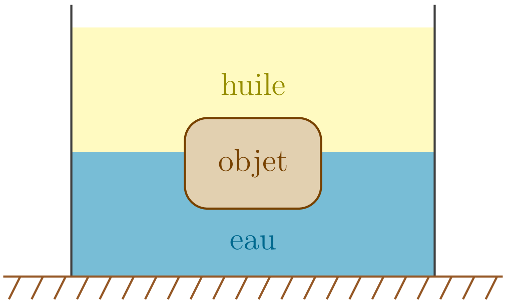
- En toute rigueur, un corps flottant en général et un bateau en particulier ne subit pas la poussée d'Archimède car il n'est pas entièrement immergé.



✧ Toutefois, en utilisant la même démonstration que ci-dessus, nous pouvons dire que le bateau subit effectivement la poussée d'Archimède à condition de compter, comme fluide remplacé, non seulement l'eau **mais aussi** l'air.
✧ Dans ces condition, la « bonne » poussée d'Archimède que subit un bateau vaut :

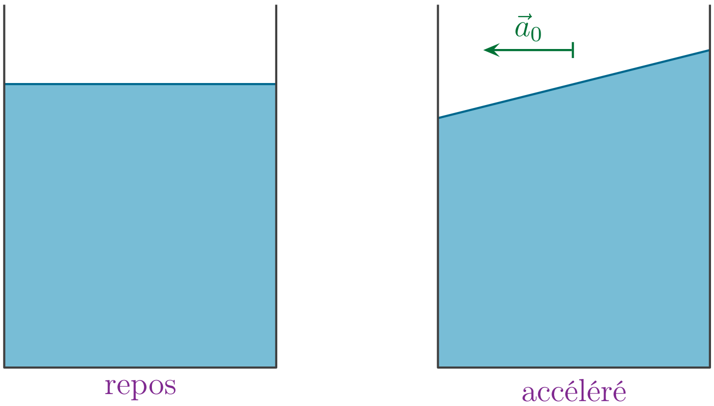
$$\vec{\Pi} = -\vec{P}_{\text{air,remp}} - \vec{P}_{\text{eau,remp}} \simeq -\vec{P}_{\text{eau,remp}}$$

✧ Dans le cas d'un corps flottant entre deux fluides de densités différentes, il faudrait prendre en compte les poids des deux liquides remplacés.

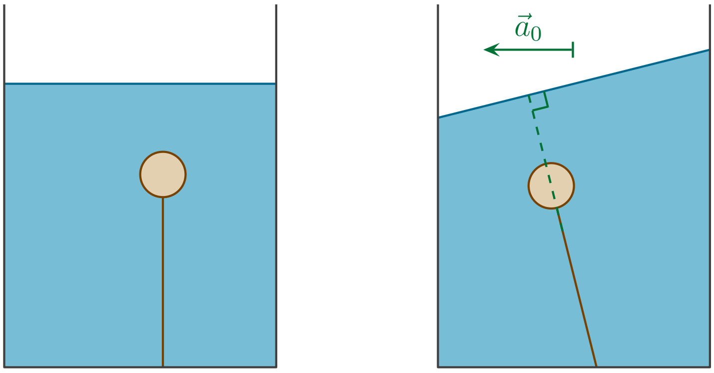


✩ restriction oubliée

✧ Pour pouvoir utiliser la poussée d'Archimède il est nécessaire de se placer dans un référentiel **galiléen**.
✧ En cas de référentiel non galiléen, il faut reprendre tout le raisonnement.
✧ Considérons, par exemple, un récipient uniformément accéléré vers la gauche. S'il n'y a que du liquide, le niveau ressemble à



✧ Maintenant, en mettant un flotteur, cela donne

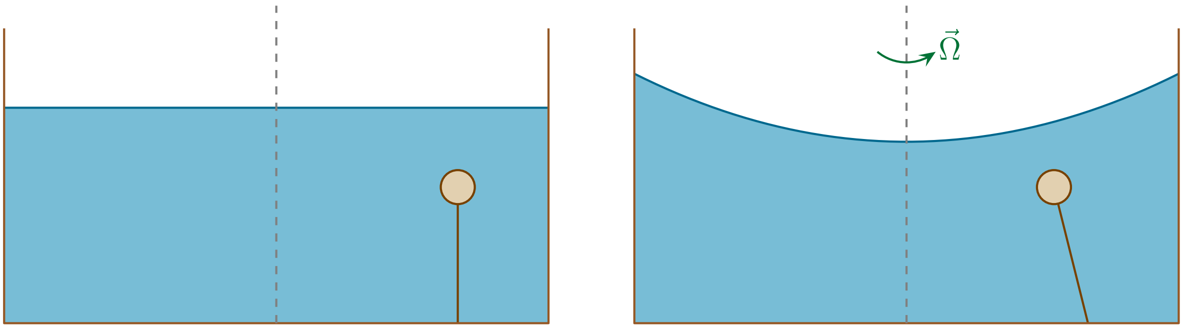


repos accéléré

✧ L'explication est simple. Dans le référentiel non galiléen, tout point matériel voit une « pesanteur effective » qui est la somme de $\vec{g}$ et $-\vec{a}_0$.

✧ Il est normal, alors, que dans une situation stationnaire, la tension du fil s'oppose à cette pesanteur effective, *i.e.* soit incliné vers le haut à gauche.

✧ C'est la même raison (le lecteur y réfléchira) qui fait que le même flotteur, dans le récipient tournant évoqué précedemment, se déplace vers le centre.



au repos en rotation

⋆ limite la plus usuelle

✧ L'expression de la poussée d'Archimède n'est valable que pour les fluides au repos **donc** lorsque les objets immergés sont immobiles.

✧ Or les bateaux avancent et nous disons malgré tout qu'ils flottent grâce à la poussée d'Archimède.

✧ En fait, tant que la vitesse de l'objet par rapport au fluide n'est pas trop grande, nous pouvons décomposer la force qu'un fluide exerce sur un objet en :
  ➜ une poussée d'Archimède ;
  ➜ une force de frottement linéaire.

✧ Lorsque la vitesse de l'objet par rapport au fluide devient trop grande, nous dirons plutôt que l'objet subit [7] :
  ➜ une force de traînée (frottement) opposée à la vitesse de l'objet par rapport au fluide ;
  ➜ une portance, force orthogonale à la traînée.

✧ Rappelons que nous avons vu dans le chapitre précédent que c'est le nombre de Reynolds qui permet de choisir entre ces deux modélisations.

✧ C'est la portance qui est responsable :
  ➜ du vol des avions ;
  ➜ du ski nautique ;
  ➜ de l'hydroptère (le bateau qui se soulève quand il va vite, voir photos ci-dessous [8]).

7. En réalité nous pouvons toujours introduire la poussée d'Archimède comme résultante de la pression hydrostatique. En pratique, pour les objets ayant une grande vitesse, cette poussée est souvent négligeable.
8. Sources :

➜ http://www.meretmarine.com/objets/12869.jpg
➜ http://journal.tdg.ch/files/imagecache/468x312/story/p13_24.jpg

II – Ondes sonores

II·1 – Base de l'étude

II·1·*i* – phénoménologie

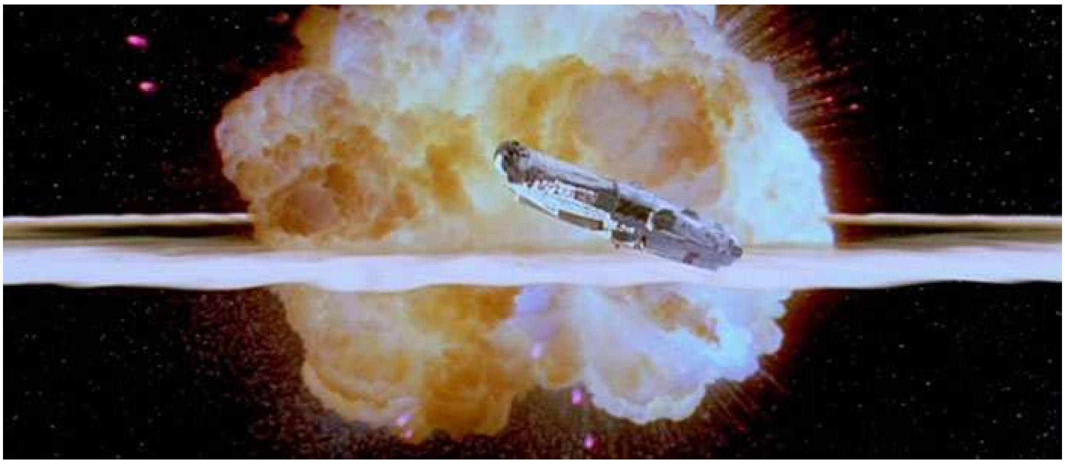
✧ Tout le monde connaît le son et sa phénoménologie. Rappelons la :
- ➜ le son est un phénomène propagatif (tout le monde a appris à compter le nombre de secondes séparant l'éclair du tonnerre pour déterminer la distance de l'orage) ;
- ➜ le son se propage dans toutes les directions ;
- ➜ le son se propage à environ 300 m.s^{-1} dans l'air.

✧ Il est assez facile de « sentir » les vibrations sonores. En effet, perfectionné comme l'est la machine humaine, nous ne nous rendons pas compte que le son est une vibration de l'air, mais en tenant à la main un ballon de baudruche bien gonflé devant une enceinte de chaîne passant votre morceau préféré (de préférence assez fort) vous pourrez constater sans aucune difficulté que le ballon vibre au même rythme que la musique [9].

✧ En revanche, il est fréquent d'oublier que

> Pour pouvoir se propager, le son a besoin d'un support matériel.

✧ Une des conséquences c'est que lorsque vous *voyez* ça [10], vous ne devriez rien entendre. Mais, cinématographiquement, ça serait moins bien.



✧ Ajoutons quelques aspects qualitatifs à garder en tête.

> Le son est une onde longitudinale.

✧ « Longitudinal » signifie que la déformation se fait dans le sens de la propagation, un peu à l'image des déformations d'un ver de terre qui avance.

✧ En terme de célérité de propagation, plus le matériau est « rigide », plus elle sera grande. Cela explique que :
- ➜ la vitesse du son dans l'eau est d'environ 1 km.s^{-1} ;
- ➜ la vitesse du son dans l'acier est d'environ 4 km.s^{-1}.

9. Il est possible de simplement poser la main sur l'enceinte, mais c'est moins drôle et ne permet pas trop de se rendre compte de l'aspect propagatif.

10. Source : `http://christophecollins.files.wordpress.com/2013/01/death-star-explosion.jpg`

II·1·*ii* – approximation acoustique

✧ Dans la suite, hormis la toute petite parenthèse dans le paragraphe II·2·*iv*, nous nous intéresserons uniquement aux ondes dans les fluides.

✧ Pour simplifier, nous allons considérer un fluide tel :
- ➜ qu'il soit immobile au repos, donc qu'en chaque point la vitesse soit nulle $\vec{v}_{\text{repos}}(M) = \vec{0}$;
- ➜ qu'il n'y ait pas de viscosité dans le fluide, donc pas de forces tangentielles entre particules de fluide ;
- ➜ la pression soit uniforme dans le fluide au repos, ce qui implique :
  - ➜ de considérer des distances très petites devant 8 km pour les gaz ;
  - ➜ de se placer à des altitudes à peu près constante pour les liquides.

✧ La première conséquence de ces premières hypothèses est

> La masse volumique du fluide est uniforme au repos.

✧ Et le corollaire

> Dans le cas des ondes sonores, la pesanteur est négligée.

✧ En effet, si elle ne l'était pas, la relation fondamentale de la statique des fluides impliquerait immédiatement une variation de pression en fonction de l'altitude.

✧ Ensuite, nous allons faire une approximation usuelle.

> L'*approximation acoustique* consiste à dire que le son n'est qu'une petite perturbation de l'état de repos.

✧ Techniquement, cela implique que nous pouvons écrire

$$\begin{array}{rcccc} P(M,t) & = & \boxed{P_0} & + & \boxed{p_1(M,t)} \\ \mu(M,t) & = & \boxed{\mu_0} & + & \boxed{\mu_1(M,t)} \\ \vec{v}(M,t) & = & \boxed{\vec{0}} & + & \boxed{\vec{v}_1(M,t)} \\ & & \text{repos} & & \text{perturbation} \end{array}$$

✧ Ainsi, l'approximation acoustique consiste à (im)poser

$$|p_1(M,t)| \ll P_0 \qquad \text{et} \qquad |\mu_1(M,t)| \ll \mu_0$$

> $p_1(M,t)$ est appelée *la surpression* ou, ici, la *surpression acoustique*.

✧ En revanche, il n'est pas possible de négliger la vitesse des particules de fluide devant la vitesse au repos puisque celle-ci est nulle. C'est pourquoi l'approximation se traduit autrement et, comme nous le montrerons dans la suite, cela donne

$$\|\vec{v}_1(M,t)\| \ll c \qquad \text{avec} \qquad c \text{ la célérité du son dans le milieu}$$

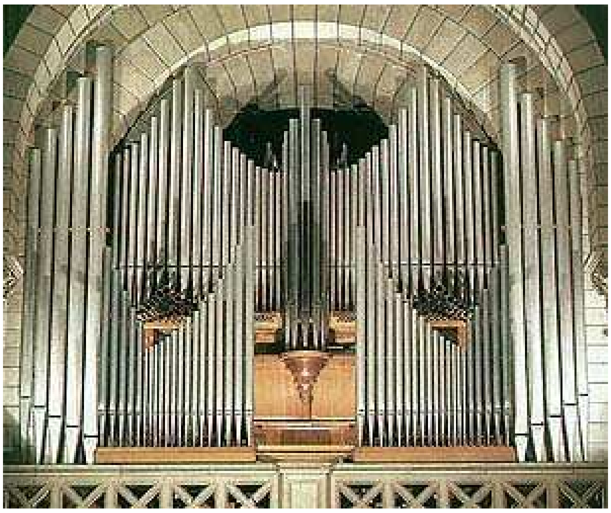
✧ Nous sommes prêts, maintenant, à mettre en équation.

II·2 – Propagation dans un tuyau de section constante

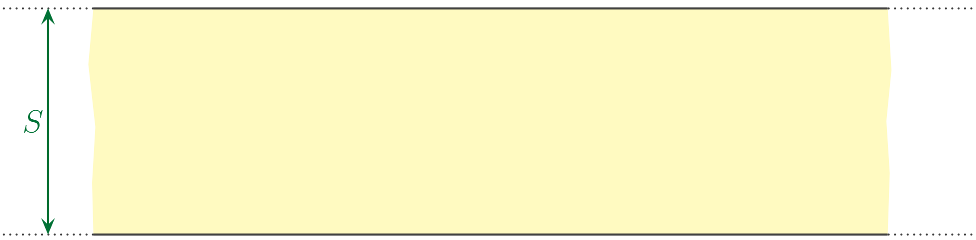
II·2·i – présentation

✯ dispositif

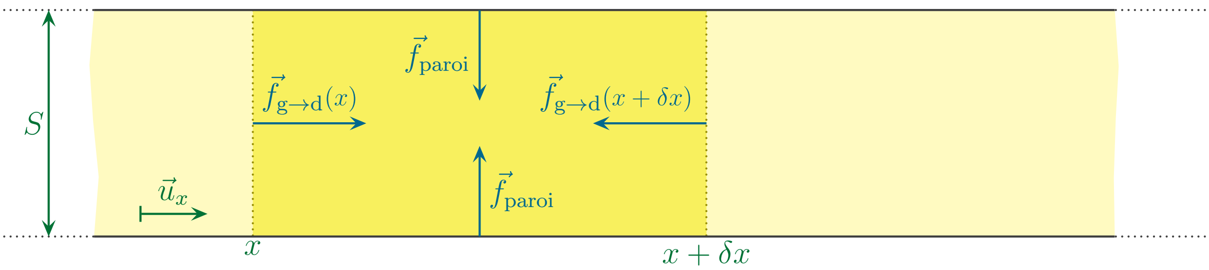
✧ Considérons un tube de section constante dans lequel se propage une onde sonore.
✧ Cette modélisation reflète très bien ce qui se passe dans un tuyau d'orgue [11]



✧ Nous n'allons pas nous intéresser à la *création* de l'onde, *i.e.* à la partie rétrécie et trouée du tuyau, mais uniquement à sa *propagation*. C'est pourquoi nous allons le modéliser de la manière suivante.

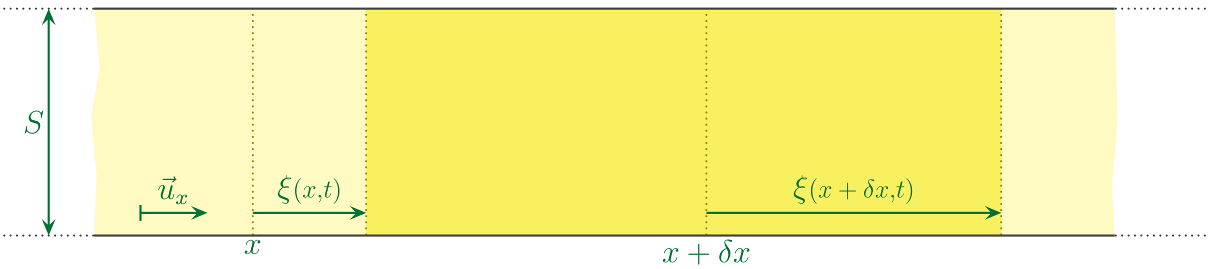


✧ Comme nous allons chercher une équation de propagation, nous allons naturellement faire une approche mésoscopique.
✧ C'est ainsi qu'au repos, si nous nous intéressons au système **fermé** $\mathscr{S}$ situé entre x et $x+\delta x$, nous voyons que les forces exercées sont toutes normales



11. Sources :
➜ http://wakamba.voila.net/OBCMC.jpg
➜ http://orgue.evolutive.org/images/Albator/08-09-13/IMG_2494.JPG

✧ Une fois en mouvement, la tranche initialement entre x et $x+\delta x$ se déplace, ce qui donne la situation suivante.



✧ Nous allons noter $\xi(x,t)$ le déplacement, à l'instant t, de la paroi fictive initialement en x.

✯ plan de bataille

✧ Nous allons travailler avec trois grandeurs variables : p_1, μ_1 et $\vec{v}_1$:
- ➜ nous allons chercher *trois* équations de couplage ;
- ➜ nous allons les réduire à *deux* équations en éliminant l'une des grandeur ;
- ➜ ce n'est qu'après que nous chercherons les équations de propagation.

II·2·*ii* – équations de couplage

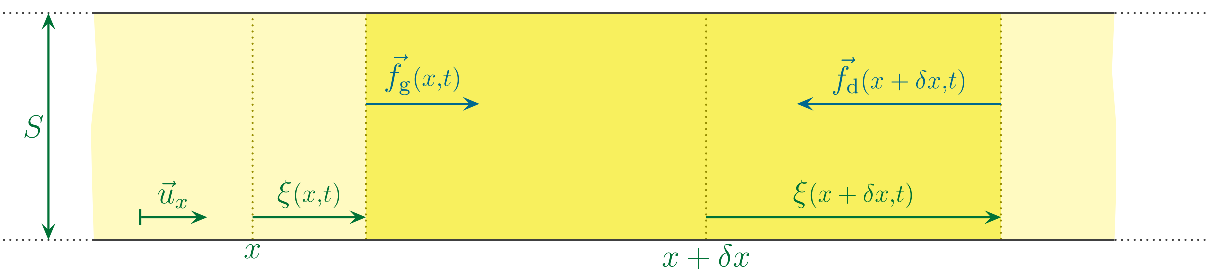
✯ le PFD

la loi

✧ La première loi à laquelle nous pouvons (voire *devons*) penser lorsqu'il s'agit d'évolutions mécaniques et la loi du mouvement de Newton.

Remarque. Nous l'appelons ici « Principe Fondamental de la Dynamique » parce que le système étudié est infiniment petit (échelle mésoscopique) mais comme il est composé de nombreuses particules, nous devrions plutôt dire « Théorème du centre d'inertie ».

✧ Faisons un schéma et regardons les forces qui s'exercent.



✧ Liste des forces :
- ➜ force à distance : le poids, négligé dans l'approximation acoustique ;
- ➜ forces de contact :
  - ➜ forces pressantes avec la force $\vec{f}_{\mathrm{d}}$ exercée par la droite sur le système et la force f_{g} exercée par la gauche ;
  - ➜ la force tangentielle exercée par la paroi sur le système, cette force est nulle car la viscosité est négligée ;
  - ➜ les forces normales exercées par la paroi sur le système, forces inintéressantes compte-tenu de l'aspect *longitudinal* du mouvement.

✧ Le PFD s'écrit donc

$$\mathrm{d}m\,\tilde{\vec{a}} = \vec{f}_{\mathrm{d}} + \vec{f}_{\mathrm{g}} + \overrightarrow{\text{autres forces verticales}}$$

✧ La dérivée particulaire s'écrit

$$\tilde{\vec{a}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$$

la simplification

✧ Comparons dérivée locale et dérivée convective en notant L la distance caractéristique sur laquelle varie la vitesse (typiquement une longueur d'onde pour les phénomènes propagatifs) et T la durée caractéristique (voire la période).

✧ Cela donne

$$\frac{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right\|}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right\|} \sim \frac{V_1 \times \dfrac{1}{L} \times V_1}{\dfrac{V_1}{T}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right\|}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right\|} \sim \frac{V_1}{L/T}$$

✧ Et ainsi

$$\frac{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right\|}{\left\|\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right\|} \sim \frac{V_1}{c} \ll 1$$

✧ En effet nous pouvons dire que $V_1 \ll c$ grâce à l'approximation acoustique.

✧ Physiquement cela signifie :
- ➜ que les particules de fluide ne bougent que très très peu par rapport à la longueur d'onde ;
- ➜ que les phénomènes risquent d'être linéaires puisque le terme non linéaire qu'est la dérivée convective est négligeable.

✧ De manière un peu plus générale, nous avons le résultat suivant.

> Dans le cadre de l'approximation acoustique, la dérivée convective est négligeable devant la dérivée locale, *i.e.*
>
> $$\left|\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right| \ll \left|\frac{\partial}{\partial t}\right|$$

✧ La démonstration est laissée au lecteur pour le cas général.

l'équation de couplage

✧ Le PFd, en projection sur $\vec{u}_x$ donne

$$\mathrm{d}m\,\frac{\partial v_1}{\partial t}(x+\alpha\,\delta x,t) = +P(x,t)\,S - P(x+\delta x,t)\,S$$

✧ Nous avons noté $x+\alpha\,\delta x$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, la position du centre de masse.

✧ La masse dm étant constante (système fermé), nous pouvons la déterminer en considérant la position au repos. Cela donne

$$\mathrm{d}m = \mu_0\, S\, \delta x$$

✧ En simplifiant par S et en divisant par δx, nous arrivons à

$$\mu_0\, \frac{\partial v_1}{\partial t}(x+\alpha\,\delta x,t) = \frac{P(x,t) - P(x+\delta x,t)}{\delta x}$$

✧ En faisant tendre δx vers 0 **des deux côtés** de l'équation, nous obtenons

$$\mu_0\, \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial P}{\partial x}(x,t)$$

✧ Or, comme la pression s'écrit $P(x,t) = P_0 + p_1(x,t)$ nous obtenons finalement

$$\mu_0\, \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)$$

✯ la conservation de la masse

✧ Il s'agit là de la deuxième équation de couplage.

☯ première méthode : à partir de la loi générale

✧ Reprenons l'équation de conservation de la masse écrite avec la dérivée particulaire.

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \leadsto \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

✧ Comme nous l'avons vu, dans le cadre de l'approximation acoustique, la dérivée convective est négligeable. Il reste donc

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

✧ Or

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(x,t) = v_1(x,t)\,\vec{u}_x$$

✧ Ce qui compte, compte-tenu de l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes, donne

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + (\mu_0 + \mu_1)\,\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

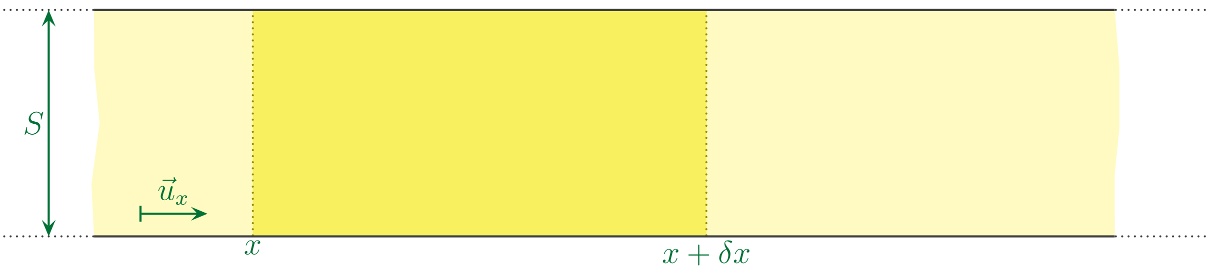
✧ En négligeant le terme $\mu_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial x}$ d'ordre 2 qui apparaît, nous obtenons finalement la deuxième équation de couplage

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \qquad \leadsto \qquad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

◕ deuxième méthode : sur l'exemple

✧ Une autre façon de faire est de traduire directement la conservation de la masse entre la situation au repos et la situation à un instant quelconque.

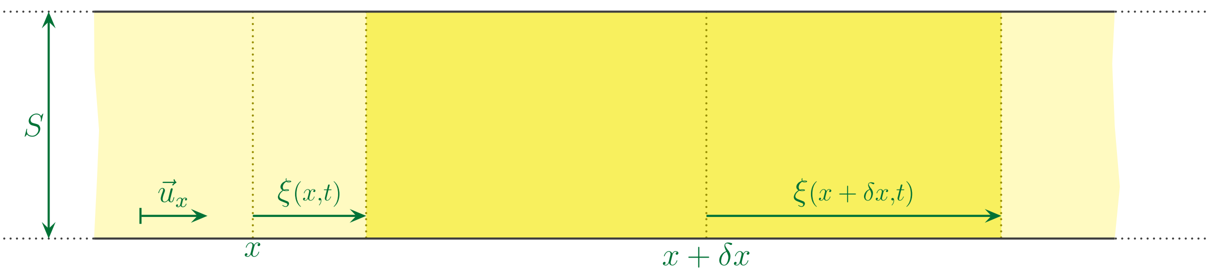
✧ Au repos, nous avons



✧ La masse s'écrit alors

$$\mathrm{d}m = \mu_0\,\delta\tau \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}m = \mu_0\,S\,\delta x$$

✧ À un instant quelconque



✧ Le volume s'écrit alors

$$\delta\mathscr{V}(x,t) = S \times \Big(\big(x + \delta x + \xi(x+\delta x,t)\big) - \big(x + \xi(x,t)\big)\Big)$$

✧ Commençons par simplifier

$$\delta\mathscr{V}(x,t) = S \times \big(\delta x + \xi(x+\delta x,t) - \xi(x,t)\big)$$

✧ Et faisons un développement limité au premier ordre

$$\delta\mathscr{V}(x,t) = S \times \left(\delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) \times \delta x\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta\mathscr{V}(x,t) = S\,\delta x \times \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\right)$$

✧ Maintenant nous pouvons calculer la masse volumique

$$\mu(x,t) = \frac{\mathrm{d}m}{\delta\mathscr{V}(x,t)} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu(x,t) = \frac{\mu_0\,\delta x\,S}{S\,\delta x \times \left(1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\right)}$$

✧ Simplifions et faisons un nouveau développement limité

$$\mu(x,t) = \frac{\mu_0}{1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu(x,t) = \mu_0\left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\right)$$

✧ Et par identification

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu_1(x,t) = -\mu_0\,\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)$$

✧ Pour finir, dérivons par rapport au temps de manière à faire apparaître $v_1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(x,t) = -\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,t)$$

✧ Cette méthode est un peu plus pédestre, mais elle permet de comprendre et, surtout, de ne pas avoir à se souvenir de l'équation de conservation de la masse.

✯ l'équation de comportement phénoménologique

✧ À ces deux équations de couplage, qui seront vraies tout le temps puisqu'elles font appel à des lois générales, il faut ajouter une troisième loi.

✧ Cette loi est doublement nécessaire :

➜ d'un point de vue technique, parce qu'il y a trois grandeurs inconnues ;

➜ d'un point de vue physique car, pour l'instant, rien ne permet de distinguer la propagation dans l'eau de la propagation dans l'air. Il manque une loin *phénoménologique*.

✧ La loi qui manque est la loi qui va traduire la manière dont le fluide se comprime.

✧ Nous allons supposer que le fluide se comprime de manière *isentropique* et non de manière isotherme comme, parfois, il est possible de le croire.

✧ Cette compression isentropique est caractérisée par le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}_{|S}$$

✧ Comme $V = \dfrac{m}{\mu}$, nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\frac{1}{\mu^2}\,\frac{\partial \mu}{\partial P} \qquad \rightsquigarrow \qquad \chi_S = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial P}$$

✧ Nous aurons le choix entre les deux expressions.

☯ première méthode : à partir de la loi générale

✧ Utilisons l'expression $\chi_S = \dfrac{1}{\mu}\,\dfrac{\partial \mu}{\partial P}$.

✧ Assimilons le calcul de la dérivée partielle au rapport des petites variations

$$\chi_S = \frac{1}{\mu}\,\frac{\delta \mu}{\delta P}$$

✧ Étant données nos notations, les petites variations ne sont autres que μ_1 et p_1, soit

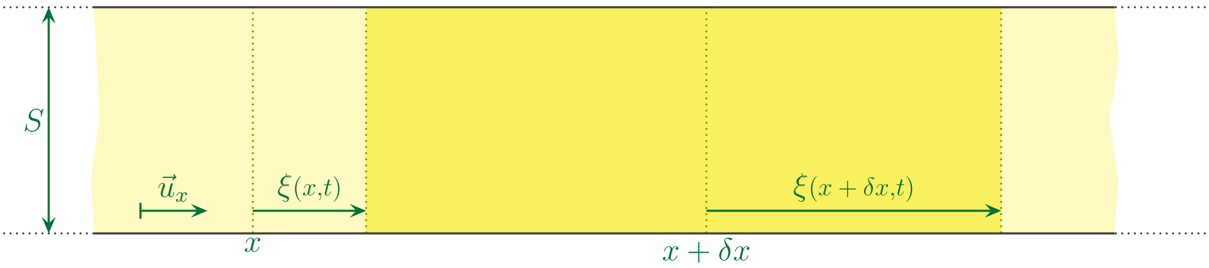
$$\chi_S = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \times \frac{\mu_1}{p_1} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu_1 = \chi_S\,(\mu_0 + \mu_1)\,p_1$$

✧ Négligeons le terme $\mu_1\,p_1$ d'ordre deux qui apparaît. Il reste

$$\mu_1 = \chi_S\,\mu_0\,p_1$$

◕ deuxième méthode : sur l'exemple

✧ Reprenons la situation à un instant quelconque



✧ Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit, en notant $\delta\tau = S\,\delta x$ le volume initial et $\delta\mathscr{V}$ le volume du système à un instant quelconque

$$\chi_S = -\frac{1}{\delta\tau} \times \frac{\delta\mathscr{V} - \delta\tau}{P(x,t) - P_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \chi_S = -\frac{1}{\delta\tau} \times \frac{\delta\mathscr{V} - \delta\tau}{p_1}$$

✧ Dans le paragraphe précédent, nous avons trouvé l'expression de $\delta\mathscr{V}$

$$\delta\mathscr{V} = \delta\tau \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \chi_S = -\frac{1}{p_1} \times \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

✧ De plus, l'équation de la conservation de la masse implique

$$\mu_1 = -\mu_0\,\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\mu_1}{\mu_0}$$

✧ En rassemblant

$$\chi_S = \frac{1}{p_1} \times \frac{\mu_1}{\mu_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu_1 = \chi_S\,\mu_0\,p_1$$

✧ Cette méthode est assez rapide quand la deuxième équation de couplage (celle concernant la conservation de la masse) a été, elle aussi, retrouvée dans le cas particulier du tuyau de section constante. Si tel n'est pas le cas, mieux vaut préférer la première méthode.

✯ de trois à deux équations de couplage

✧ Nous allons éliminer μ_1 des équations de couplage de manière à conserver les grandeurs v_1 et p_1.

✧ La raison de ce choix est simple. C'est parce que les capteurs de son (*i.e.* les micros) sont soit sensibles au mouvement (et donc à v_1) soit sensibles à la force qu'ils subissent (proportionnelle à p_1).

✧ Pour procéder à cette réduction du nombre de grandeurs inconnues, nous allons utiliser la dernière relation

$$\mu_1 = \chi_S\,\mu_0\,p_1$$

✧ Injectée dans l'équation de conservation de la masse, cela donne

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x} \qquad \rightsquigarrow \qquad \chi_S\,\cancel{\mu_0}\,\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\cancel{\mu_0}\,\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

✧ Finalement les deux équations de couplage sont

$$\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

II·2·*iii* – équations de propagation

✧ Aucune surprise dans la méthode.

✯ équation vérifiée par la surpression

Dans un tuyau de section constante, le champ de surpression vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t) \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}}$$

✧ Partons de la deuxième équation de couplage et dérivons par rapport au temps

$$\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)$$

✧ Le théorème de Schwarz nous permet d'intervertir les dérivées partielles. Ainsi

$$\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)$$

✧ Injectons la première équation de couplage

$$\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial p_1}{\partial x}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

✧ Ce qui donne bien l'équation attendue.

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \mu_0\,\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$$

✯ équation vérifiée par la vitesse particulaire

Dans un tuyau de section constante, le champ de vitesse vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}(x,t) \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}}$$

✧ Appliquons la même technique.
✧ Dérivons la première équation de couplage par rapport au temps

$$\mu_0\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu_0\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)$$

✧ Injectons la 2ᵉ équation de couplage

$$\mu_0\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\chi_S}\,\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)$$

✧ Ce qui donne

$$\mu_0\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S}\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \mu_0\,\chi_S\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$$

II·2·*iv* – son dans un gaz parfait

✯ célérité

> Dans un gaz parfait, la célérité c du son s'écrit
>
> $$c = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T}{M}} \qquad \text{avec}$$
>
> ➜ γ le coefficient isentropique ;
> ➜ R la constante des gaz parfaits ;
> ➜ T la température ;
> ➜ M la masse molaire.

✧ Nous pouvons constater que cette célérité ne dépend pas de la pression mais, à gaz fixé, uniquement de la température.

✧ Pour le montrer, nous allons partir de l'expression trouvée $c = \dfrac{1}{\sqrt{\chi_S\,\mu_0}}$ et remplacer χ_S et μ_0 par leurs expressions.

✧ Commençons par μ_0. Sachant qu'il s'agit d'un gaz parfait, nous avons, pour une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ et de masse $\mathrm{d}m$

$$\mu_0 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \frac{M\,\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\tau} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu_0 = \frac{M\,P_0}{R\,T}$$

✧ Déterminons χ_S à présent. Pour cela, partons de la définition

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}\Big|_S$$

✧ La principale difficulté reste de dériver **à entropie constante**. Pour ce faire, nous allons utiliser une loi caractérisant une évolution *isentropique* d'un gaz parfait. Cette loi, c'est la loi de Laplace.

$$P\,V^\gamma = \mathrm{C^{te}}$$

✧ Prenons le logarithme et différençions [12]

$$\ln P + \gamma\,\ln V = \kappa \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

✧ En assimilant les $\mathrm{d}P$ et $\mathrm{d}V$ à des petites variations, nous avons

$$-\frac{1}{V}\,\frac{\delta V}{\delta P} = \frac{1}{\gamma\,P}$$

12. Ceux qui ne savent pas différencier peuvent faire *comme si* P et V dépendaient d'une variable inventée α puis dériver par rapport à α. Cela donne

$$\frac{1}{P}\times\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\alpha} + \gamma\,\frac{1}{V}\times\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

Ensuite, il suffit de multiplier par $\mathrm{d}\alpha$ pour retrouver le résultat.

✧ Or, pour des variations faible, nous pouvons dire que le rapport des petites variations tend vers la dérivée, sauf qu'ici ces variations sont réalisées **à entropie constante**. Nous avons donc bien une dérivée partielle à entropie constante.

$$-\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_S = \frac{1}{\gamma\,P} \qquad \rightsquigarrow \qquad \chi_S = \frac{1}{\gamma\,P}$$

✧ Il n'y a plus qu'à ajouter le fait que, par respect pour l'approximation acoustique, $P \simeq P_0$. Cela donne

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma\,P_0}$$

✧ Et ainsi

$$\mu_0 = \frac{M\,P_0}{R\,T} \quad \text{et} \quad \chi_S = \frac{1}{\gamma\,P_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\chi_S\,\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T}{M}}$$

✯ vérification du caractère isentropique

✧ Lorsque nous nous sommes intéressés à la loi phénoménologique du gaz, nous aurions pu choisir :
- ➜ soit le coefficient de compressibilité isotherme χ_T ;
- ➜ soit le coefficient de compressibilité isentropique χ_S.

✧ C'est ce dernier que nous avons choisi mais qu'est-ce qui le justifie ?

✧ En fait, en choisissant χ_T, la célérité se serait écrite $c = \sqrt{\dfrac{R\,T}{M}}$ soit $\sqrt{\gamma} = 1{,}18$ fois plus faible pour l'air. Quelques mesures expérimentales suffisent pour trancher.

✧ Toutefois, *a posteriori*, pouvons-nous le justifier ?

✧ Que faudrait-il pour que la transformation soit isotherme ?

✧ Rappelons un résultat du cours de thermodynamique de première année

> En pratique, pour conserver une température constante, il est nécessaire de réaliser des transferts thermiques :
> $$\Delta T = 0 \Longrightarrow Q \neq 0$$

✧ La question est donc de savoir s'il y a des transferts thermiques au sein du fluide lors de la propagation du son.

✧ Comparons la durée de propagation du son τ_{propag} sur une longueur d'onde avec la durée de diffusion thermique τ_{diff} sur cette même longueur.

✧ Étant donné que le son est un phénomène propagatif (!), la durée caractérisque s'écrit naturellement

$$\tau_{\text{propag}} = \frac{\lambda}{c}$$

✧ Pour la diffusion sur cette même longueur, nous savons que, en ordre de grandeur, nous avons

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{T}{\lambda^2} = \frac{T}{a\,\tau_{\text{diff}}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \tau_{\text{diff}} = \frac{\lambda^2}{a}$$

✧ Le rapport vaut donc, en notant f la fréquence,

$$\frac{\tau_{\text{propag}}}{\tau_{\text{diff}}} = \frac{a}{c\,\lambda} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\tau_{\text{propag}}}{\tau_{\text{diff}}} = \frac{f\,a}{c^2}$$

✧ Numériquement, nous avons

$$f \sim 1\ \text{kHz}\ ; \quad a = 2.10^{-5}\ \text{m}^2.\text{s}^{-1}\ ; \quad c = 3.10^2\ \text{m.s}^{-1} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\tau_{\text{propag}}}{\tau_{\text{diff}}} \sim 2.10^{-7}$$

✧ Cela signifie que la durée de propagation est beaucoup plus petite que la durée de diffusion, ce qui revient à dire que la propagation est plus rapide ou encore que, pendant la durée de propagation, la diffusion n'a pas le temps de se faire.

✧ Et s'il n'y a pas eu de diffusion, il n'y a pas pas y avoir d'échange thermique et donc l'évolution n'a pas pu être isotherme.

✯ lien avec la vitesse du son dans un solide

Remarque. Ceci est le seul paragraphe où nous allons parler du son ailleurs que dans un fluide.

✧ Rappelons l'expression de la célérité du son dans un solide avec E le module d'Youg et ρ la masse volumique

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

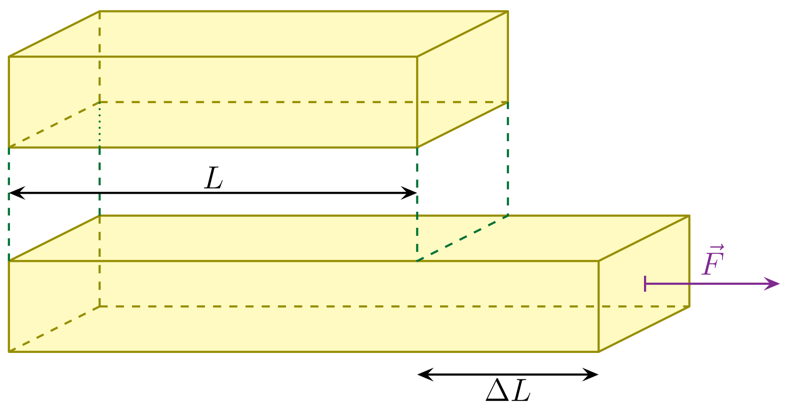
✧ En fait cette expression est la même que celle pour le son $c = \sqrt{\dfrac{1}{\chi_S\,\mu_0}}$.

✧ Pour le prouver, comme nous avons naturellement $\mu_0 = \rho$ (ce sont des masses volumiques dans les deux cas), il ne reste qu'à prouver que

$$E = \frac{1}{\chi_S}$$

✧ Partons de la définition du module d'Young

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \times \frac{F}{S}$$



✧ Or $\dfrac{F}{S}$ (en valeur absolue), est la pression supplémentaire (par rapport à l'état de repos) exercée sur le solide. En notation « onde acoustiques » cela se note p_1.

✧ De plus, la variation relative de longueur, pour un solide de section constante, n'est autre que la variation relative de volume soit $\dfrac{\delta V}{V}$.

✧ Cela nous donne

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{V} \times \frac{\delta V}{p_1} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{1}{E} = \frac{1}{V} \times \frac{\partial V}{\partial p} \equiv \chi_S$$

✧ La différence du signe provient de la notion de pression :

➜ dans le cas des ondes sonores une augmentation de la pression fait diminuer le volume considéré ;
➜ dans le cas des solides, une augmentation de « p_1 » correspond à une augmentation de F, force de traction. La longueur (et donc le volume) augmente.

II·3 – Onde plane progressive

II·3·*i* – expression

✧ Aucune surprise ici.
✧ Considérons l'équation de propagation de la surpression

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t)$$

✧ Nous savons que les solutions peuvent s'écrire de deux manières différentes sous forme d'OPP :
➜ soit avec une vision spatiale

$$p_1(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$$

➜ soit avec une vision temporelle

$$p_1(x,t) = F(t - x/c) + G(t + x/c)$$

II·3·*ii* – impédance acoustique

L'impédance acoustique est définie par

$$Z_{\text{ac}}(x,t) = \frac{p_1(x,t)}{v_1(x,t)}$$

Attention, il peut exister d'autres définitions de l'impédance acoustique, notamment une où, au numérateur, c'est une grandeur homogène à une force (et non à une pression) est qui choisie.
✧ Rappelons que l'impédance acoustique dépend *a priori* de la position et du temps.

✯ pour une OPP vers les x croissants

Dans le cas d'une OPP➟, l'impédance acoustique vaut l'impédance caractéristique, à savoir

$$Z_{\text{ac}} = +Z_{\text{c}} \qquad \text{avec} \qquad Z_{\text{c}} = \mu_0\,c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

✧ Pour le prouver, commençons par choisir une OPP➟ quelconque pour la pression.

$$p_1(x,t) = F(t - x/c)$$

✧ Injectons cette solution dans l'équation de couplage issue du PFD

$$\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t)$$

✧ Cela conduit à

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = +\frac{1}{c}\,F'(t-x/c)$$

✧ En primitivant par rapport à t

$$\mu_0\,v_1(x,t) = +\frac{1}{c}\,F(t-x/c) + \cancel{\text{fonction}(x)}$$

✧ Parce que la fonction de x issue de l'intégration est une solution *non propagative* et parce que les équations sont linéaires, nous pouvons ne pas prendre en compte celle-ci.

✧ Il reste donc

$$\mu_0\,v_1(x,t) = +\frac{1}{c}\,F(t-x/c) \quad \rightsquigarrow \quad \mu_0\,v_1(x,t) = +\frac{1}{c}\,p_1(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad Z_{\text{ac}} = \frac{p_1(x,t)}{v_1(x,t)} = \mu_0\,c = \text{C}^{\text{te}}$$

✯ pour une OPP vers les x décroissants

> Dans le cas d'une OPP⬅, l'impédance acoustique vaut l'opposé de l'impédance caractéristique, à savoir
>
> $$Z_{\text{ac}} = -Z_{\text{c}} \qquad \text{avec} \qquad Z_{\text{c}} = \mu_0\,c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

✧ La démonstration est la même à un signe près.

✧ Il faut d'avord commencer par choisir une OPP⬅ quelconque pour la pression.

$$p_1(x,t) = G(t+x/c)$$

✧ Puis nous l'injectons dans l'équation de couplage issue du PFD

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{c}\,G'(t-x/c)$$

✧ Primitivons

$$\mu_0\,v_1(x,t) = -\frac{1}{c}\,G(t-x/c) + \cancel{\text{fonction}(x)}$$

✧ Pour les mêmes raisons que précédemment, nous pouvons ne pas prendre en compte la fonction de x qui apparaît.

✧ Il reste donc

$$\mu_0\,v_1(x,t) = -\frac{1}{c}\,G(t-x/c) \quad \rightsquigarrow \quad \mu_0\,v_1(x,t) = -\frac{1}{c}\,p_1(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad Z_{\text{ac}} = \frac{p_1(x,t)}{v_1(x,t)} = -\mu_0\,c = -Z_{\text{c}}$$

✯ pour une OPP quelconque

> Dans le cas général d'une propagation acoustique dans un tuyau de section constante, nous pouvons écrire la solution en vitesse sous la forme
>
> $$v_1(x,t) = F(t-x/c) + G(t+x/c)$$
>
> Dans ces conditions, la solution en surpression va s'écrire
>
> $$p_1(x,t) = Z_{\text{c}}\,F(t-x/c) - Z_{\text{c}}\,G(t+x/c) \qquad \text{avec} \qquad Z_{\text{c}} = \mu_0\,c$$

✧ Remarquons une fois de plus que la notion d'impédance (ici acoustique) n'est pas exclusive aux OPPM.

II·3·*iii* – OPPM

La relation de dispersion pour une onde acoustique dans un tuyau de section constante s'écrit

$$\omega^2 = k^2\,c^2$$

✧ Il n'y a aucune surprise ici !

✧ La solution en OPPM de l'équation de d'Alembert pour la surpression s'écrit, en notation réelle,

$$p_1(x,t) = p_{10}\,\cos\left(\omega\,t - k\,x + \varphi\right)$$

✧ Et en notation complexe

$$\underline{p_1}(x,t) = \underline{p_{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - k\,x)} \qquad \text{avec} \qquad \underline{p_{10}} = P_{10}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$$

✧ En remplaçant dans l'équtaion de propagation, cela donne

$$\frac{\partial^2 \underline{p_1}}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \underline{p_1}}{\partial t^2}(x,t) \qquad \rightsquigarrow \qquad -k^2\,\underline{p_{10}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\,\underline{p_{10}}$$

✧ Et le résultat.

II·4 – Aspect énergétique

✧ Dans le cas des ondes sonores, l'aspect énergétique présente quelques particularités.

II·4·*i* – densité volumique d'énergie

✧ Cherchons les formes énergétiques présentes lors de la propagation.

✧ Nous savons qu'il doit y en avoir deux, sinon il n'y aurait pas d'oscillations et (donc) de propagation.

✯ densité d'énergie cinétique

✧ Comme, lors de la propagation, nous avons des particules de fluide en mouvement, nous pouvons tout de suite penser à la première forme d'énergie : l'énergie cinétique.

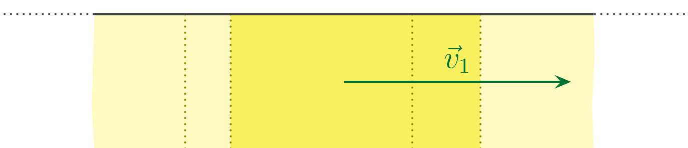
La *densité volumique d'énergie cinétique* e_{c} est définie par

$$e_{\mathrm{c}} = \frac{\delta \mathscr{E}_{\mathrm{c}}}{\delta \mathscr{V}} \qquad \text{où :}$$

➜ $\delta\mathscr{V}$ est un volume mésoscopique ;

➜ $\delta\mathscr{E}_{\mathrm{c}}$ est l'énergie cinétique contenue dans le volume $\delta\mathscr{V}$.

✧ Considérons une particule de fluide en mouvement à l'instant t



✧ Son volume vaut [13] $\delta\mathscr{V}_0$ et sa vitesse vaut v_1 donc

$$\delta\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}\,\delta m\,{v_1}^2 \qquad \text{et} \qquad \delta m = \mu_0\,\delta\mathscr{V}_0 \qquad \leadsto \qquad e_{\mathrm{c}} = \frac{\delta\mathscr{E}_{\mathrm{c}}}{\delta\mathscr{V}_0} = \frac{1}{2}\,\mu_0\,{v_1}^2$$

✯ densité d'énergie potentielle de compression

☯ problème

✧ Il *faut* une autre forme d'énergie pour qu'il y ait propagation.

✧ Dans le cas de propagation mécanique, cette autre forme ne peut être que potentielle car, lorsque la particule de fluide est immobile à un extrema de position, il faut que l'énergie qu'elle va récupérer pour se mettre en mouvement soit disponible quelque part.

✧ Et avec la définition que nous avons donnée, dans le cours de première année, cela ne peut être que de l'énergie potentielle.

✧ Reste à déterminer l'expression de cette énergie potentielle.

☯ expression, interprétation

> La densité volumique d'énergie potentielle dans le cas de la propagation sonore dans un tuyau de section constante s'écrit
>
> $$e_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\,\chi_S\,{p_1}^2 + \chi_S\,p_1\,P_0$$

✧ C'est là la principale différence entre la propagation acoustique et les autres phénomènes de propagation que nous avons rencontrés jusqu'à présent : il y a deux termes.

✧ Le premier terme « $\dfrac{1}{2}\,\chi_S\,{p_1}^2$ » a une forme tout ce qu'il y a de plus classique en « un demi de constante fois grandeur au carré ». Nous pouvons imaginer (et nous aurons raison) que c'est le plus intéressant des deux.

✧ Le deuxième terme est linéaire puisque $\chi_S\,P_0$ est une constante. C'est un terme dont nous n'avons pas l'habitude et qui n'est pas vraiment lié à la propagation. Nous verrons que nous pourrons nous en débarasser.

☯ démonstration

✧ Pour trouver l'expression de l'énergie potentielle contenue dans une particule de fluide (et, de là, pour en déduire l'expression de l'énergie potentielle linéique), nous allons devoir revenir aux bonnes vieilles méthodes de mécanique car nous ne connaissons pas l'expression de l'énergie potentielle associée aux forces pressantes.

✧ Notons, au passage, que, de manière générale, les forces pressantes **ne dérivent pas** d'une énergie potentielle. Ce n'est que dans le cas très particulier de la propagation acoustique (et grâce à l'approximation éponyme) que nous allons pouvoir leur associer une telle énergie.

✧ Commençons par considérer une particule de fluide entre **deux états de repos** dont le premier est l'état initial.

13. En réalité, lors de la propagation, la particule de fluide change très légèrement de volume et elle n'est plus vraiment de volume $\delta\mathscr{V}$. Toutefois, la prise en compte de ce phénomène ferait apparaître des termes d'ordre supérieur et, donc, négligeables.

✧ Entre ces deux états, nous pouvons écrire, pour la particule de fluide *qui est un système de points*, le théorème de l'énergie cinétique. Celui-ci donne, sans oublier le travail fourni par les interactions intérieures

$$\Delta E_\mathrm{c} = W_\mathrm{int} + W_\mathrm{ext}$$

✧ Nous avons, pour ces trois termes :
- ➜ $\Delta E_\mathrm{c} = 0$ car nous l'avons imposé (les deux états sont des états où la particule de fluide ne bouge pas) ;
- ➜ W_ext est le travail fourni par l'extérieur, *i.e.* par les forces pressantes ;
- ➜ $W_\mathrm{int} = -\Delta E_\mathrm{p}$ car nous voulons, justement, que la particule de fluide « contienne » de l'énergie potentielle.

✧ Cela nous conduit rapidement à

$$\Delta E_\mathrm{p} = W_\mathrm{ext}$$

✧ Or, comme l'évolution **à l'échelle de la particule de fluide** est quasi-statique (pas d'explosion) ou, pour ceux qui préfèrent, comme la pression est une fonction continue de l'espace, nous avons

$$P_\mathrm{ext} = P_\text{part fluide} \qquad \text{et} \qquad W_\mathrm{ext} = -\int P_\mathrm{ext}\,\mathrm{d}V \qquad \rightsquigarrow \qquad W_\mathrm{ext} = -\int P\,\mathrm{d}V$$

✧ Le lien entre la pression et la variation de volume est donné par le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}$$

✧ Et comme ici les *seules* variations envisagées sont *toujours* sous la contrainte « isentropique », nous pouvons écrire, en faisant la même approximation sur le volume que pour l'énergie cinétique,

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \qquad \text{et} \qquad V = \delta\mathcal{V}_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}V = -\chi_S\,\delta\mathcal{V}_0\,\mathrm{d}P$$

✧ En remplaçant cela donne

$$\Delta E_\mathrm{p} = \int_{P_0}^{P_0+p_1} \chi_S\,\delta\mathcal{V}_0\,P\,\mathrm{d}P \qquad \rightsquigarrow \qquad \Delta E_\mathrm{p} = \chi_S\,\delta\mathcal{V}_0\,\left[\frac{P^2}{2}\right]_{P_0}^{P_0+p_1}$$

✧ Il reste donc

$$\Delta E_\mathrm{p} = \chi_S\,\delta\mathcal{V}_0\,\left(\frac{{p_1}^2}{2} + p_1\,P_0\right)$$

✧ En choisissant l'énergie potentielle nulle au repos, nous avons donc

$$E_\mathrm{p} = \chi_S\,\delta\mathcal{V}_0\,\left(\frac{{p_1}^2}{2} + p_1\,P_0\right) \qquad \text{et} \qquad e_\mathrm{p} = \frac{E_\mathrm{p}}{\delta\mathcal{V}_0} \qquad \rightsquigarrow \qquad e_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\,\chi_S\,{p_1}^2 + \chi_S\,p_1\,P_0$$

✧ Il s'agit bien là de l'expression attendue.

✯ densité totale d'énergie

✧ En faisant la somme des densités des énergies cinétique et potnentielle, nous obtenons la densité totale d'énergie :

$$e = \frac{1}{2}\,\mu_0\,{v_1}^2 + \frac{1}{2}\,\chi_S\,{p_1}^2 + \chi_S\,p_1\,P_0$$

✧ Nous pouvons écrire cette énergie sous la forme d'une somme de deux énergies

$$e = e_2 + e_1 \qquad \text{avec} \qquad \left\{\begin{array}{l} e_2 = \dfrac{1}{2}\,\mu_0\,{v_1}^2 + \dfrac{1}{2}\,\chi_S\,{p_1}^2 \\ e_1 = \chi_S\,p_1\,P_0 \end{array}\right.$$

✧ La notation a été choisie pour être cohérente avec les notations précédentes :

- ➜ e_1 est une énergie d'ordre 1 car proportionnelle à p_1 ;
- ➜ e_2 est une énergie d'ordre 2 car somme de deux termes quadratiques d'ordre 1 ${v_1}^2$ et ${p_1}^2$.

II·4·*ii* – équation de propagation de l'énergie

> La densité volumique d'énergie e d'une onde sonore dans un tuyau de section constante obéit à l'équation de propagation
> $$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}(x,t)$$

✧ Pour le montrer, nous allons montrer que

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2}(x,t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 e_2}{\partial t^2}(x,t)$$

✧ Car si tel est le cas, par linéarité des équations, nous pouvons affirmer que $e = e_1 + e_2$ obéit aussi à l'équation de propagation.

✧ Commençons par le plus simple : e_1. Comme $e_1 = \chi_S\,P_0 \times p_1$ est directement proportionnelle à p_1 et que p_1 vérifie l'équation de propagation, nous pouvons dire que e_1 aussi.

✧ Pour e_2, allons-y doucement et commençons par dériver une fois par rapport à x

$$\frac{\partial e_2}{\partial x} = \mu_0\,v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial x} + \chi_S\,p_1\,\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

✧ Rappelons les deux équations de couplage

$$\mu_0\,\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

✧ Utilisons-les dans la dérivée précédente

$$\frac{\partial e_2}{\partial x} = -\chi_S\,\mu_0\,v_1\,\frac{\partial p_1}{\partial t} - \chi_S\,\mu_0\,p_1\,\frac{\partial v_1}{\partial t}$$

✧ Et en simplifiant

$$\frac{\partial e_2}{\partial x} = -\chi_S\,\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(v_1\,p_1\right) \qquad \leadsto \qquad \frac{\partial e_2}{\partial x} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(v_1\,p_1\right)$$

✧ Dans ces conditions, la dérivée seconde se calcule facilement

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\left(v_1\,p_1\right)$$

✧ Faisons de même pour les dérivées par rapport à t.
✧ Nous avons ainsi tout d'abord

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} = \mu_0\,v_1\,\frac{\partial v_1}{\partial t} + \chi_S\,p_1\,\frac{\partial p_1}{\partial t}$$

✧ Et en utilisant les relations de couplage rappelées plus haut

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} = -v_1\,\frac{\partial p_1}{\partial x} - p_1\,\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

✧ Et en simplifiant

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(v_1\,p_1\right)$$

✧ Là aussi la dérivée seconde se calcule facilement

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\left(v_1\,p_1\right)$$

✧ Et grâce au théorème de Schwarz, nous avons bien

$$\frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 e_2}{\partial t^2}$$

II·4·*iii* – vecteur de Poynting sonore

✯ expression

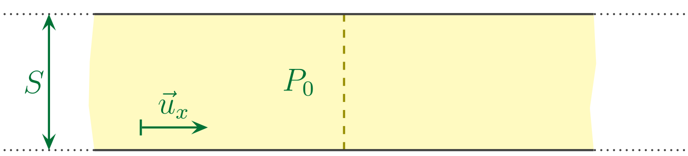
Le *vecteur de* Poynting sonore est défini par
$$\vec{\Pi} = (P_0 + p_1)\,\vec{v}_1$$

✧ Comme pour l'énergie, nous pouvons décomposer le vecteur de Poynting sonore en deux termes.

Le vecteur de Poynting sonore est la somme de deux termes d'ordres différents
$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 \qquad \text{où :}$$
➜ $\vec{\Pi}_1 = P_0\,\vec{v}_1$ est d'ordre 1 ;
➜ $\vec{\Pi}_2 = p_1\,\vec{v}_1$ est d'ordre 2.

✯ justification

✧ Pour faire l'analogie avec l'électromagnétisme, le vecteur de Poynting est la puissance surfacique transférée. Le sens et la direction du vecteur indiquant le sens et la direction du transfert.
✧ Considérons une surface (fictive) dans le tuyau de section constante.



✧ La puissance qui passe de gauche à droite s'écrit, comme pour tout problème de mécanique,

$$\mathscr{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

✧ Or il s'agit ici de la force pressante $\vec{f} = P\,\vec{S}$ où le vecteur surface $\vec{S}$ est orienté de gauche à droite.
✧ Et comme la vitesse correspond à la vitesse de la particule de fluide qui subit la force, nous avons $\vec{v} = \vec{v_1}$.
✧ Ainsi, en identifiant

$$\mathscr{P} = P\,\vec{S} \cdot \vec{v}_1 \quad \text{et} \quad \mathscr{P} = \vec{\Pi} \cdot \vec{S} \qquad \rightsquigarrow \qquad \vec{\Pi} = P\,\vec{v}_1 = (P_0 + p_1)\,\vec{v}_1$$

II·4·*iv* – équation de conservation de l'énergie

✯ un résultat connu

✧ Nous n'allons pas refaire la démonstration ici, mais la loi de conservation de l'énergie impose, ici, dans un tuyau de section constante et sans source énergétique

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0$$

✧ Comme, ici, tout se passe suivant l'axe $\vec{u}_x$, nous avons

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$$

✧ Insistons : il n'y a, ici, aucune approximation. Il s'agit bien de l'énergie volumique totale et du vecteur de Poynting sonore.

✯ un résultat intéressant

✧ Nous allons montrer que l'énergie volumique d'ordre 1 et le vecteur de Poynting d'ordre 1 obéissent à une équation de conservation

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0$$

✧ Partons de l'expression de l'énergie d'ordre 1 (qui ne comporte qu'un seul terme issu de l'énergie potentielle)

$$e_1 = \chi_S\,P_0\,p_1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial e_1}{\partial t} = \chi_S\,P_0\,\frac{\partial p_1}{\partial t}$$

✧ Avec la relation de couplage idoine, nous avons

$$\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} \qquad \rightsquigarrow \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial e_1}{\partial t} = -P_0\,\frac{\partial v_1}{\partial x}$$

✧ Et comme P_0 est une constante

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(P_0\,v_1\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial e_1}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}$$

✧ Ce qui est bien ce que nous voulions.

✯ une simplification qui n'est pas une approximation

✧ Comme les couples (e,Π) et (e_1,Π_1) vérifient des équations de conservation, par linéarité, nous pouvons dire que (e_2,Π_2) vérifie aussi une équation de conservation.

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = 0$$

✧ De plus, le vecteur de Poynting sonore d'ordre 1 est, en moyenne, nul car

$$\langle \Pi_1 \rangle = \langle P_0\, v_1 \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \langle \Pi_1 \rangle \propto \langle v_1 \rangle \qquad \rightsquigarrow \qquad \langle \Pi_1 \rangle = 0$$

✧ Cela implique que

> L'énergie sonore d'ordre 1 est globalement stationnaire, elle ne se propage **jamais**.

✧ Puisqu'elle ne se propage pas, même dans le cas d'une propagation, elle devient, de fait, inintéressante.
✧ Ce couple (e_1,Π_1) étant inintéressant et ayant montré qu'il était indépendant du couple (e_2,Π_2) (ce qui n'était pas acquis, à cause du caractère quadratique de l'énergie), nous pouvons l'oublier.
✧ Désormais et jusqu'à la fin, quand nous parlerons d'aspects énergétiques, nous ne ferons référence qu'aux termes d'ordre 2.

> Dans l'étude de la propagation acoustique dans un tuyau de section constante, nous pouvons réduire l'énergie au seuls termes d'ordre 2.

✧ Insistons : ce n'est absolument pas une approximation ! Nous avons $e_1 \gg e_2$ et $\Pi_1 \gg \Pi_2$. Grâce à la linéarité (prouvée) des termes énergétiques, nous ne faisons qu'*oublier* les termes d'ordre 1 car ils ne sont pas associés à de la propagation. Nous les oublions, mais ils existent et ils prédominent en valeur !

II·4·*v* – OPP

✯ cas d'une OPP vers les x croissants

✧ Pour une OPP➠, nous allons vérifier que l'énergie volumique se déplace vers les x croissant à la célérité c. Pour cela, nous allons prouver que, dans le cas d'une OPP➠, nous avons

$$\Pi_2 = +c \times e_2$$

✧ Commençons par rappeler que, pour une OPP➠, nous avons

$$Z_{\text{ac}} = \frac{p_1}{v_1} = Z_{\text{c}} \qquad \text{avec} \qquad Z_{\text{c}} = \mu_0\, c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}}$$

✧ Commençons par déterminer l'expression de l'énergie volumique totale

$$e_2 = \frac{1}{2}\,\mu_0\, {v_1}^2 + \frac{1}{2}\,\chi_S\, {p_1}^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad e_2 = \frac{1}{2}\,\mu_0\, {v_1}^2 + \frac{1}{2}\,\chi_S\, \left(Z_{\text{c}}\, v_1\right)^2$$

✧ Ce qui donne, en remplaçant

$$e_2 = \frac{1}{2}\,\mu_0\, {v_1}^2 + \frac{1}{2}\,\chi_S \times \frac{\mu_0}{\chi_S} \times {v_1}^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad e_2 = \mu_0\, {v_1}^2$$

✧ Déterminons le vecteur de Poynting sonore

$$\Pi_2 = v_1\,p_1 \quad\rightsquigarrow\quad \Pi_2 = Z_c\,{v_1}^2 \quad\rightsquigarrow\quad \Pi_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_S}} \times {v_1}^2$$

✧ Et avec l'expression de la célérité, nous pouvons aisément vérifier le résultat

$$c = \frac{1}{\sqrt{\chi_S\,\mu_0}} \quad\rightsquigarrow\quad \Pi_2 = +c \times e_2$$

✯ cas général

✧ Le lecteur pourra vérifier que, pour une OPP⇐

$$\Pi_2 = -c \times e_2$$

✧ Et dans le cas général, en développant tous les termes, en notant $v_1 = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$

$$e_2 = \mu_0\,\left(f^2 + g^2\right) \qquad \text{et} \qquad \Pi_2 = c\,\mu_0\,\left(f^2 - g^2\right)$$

II·4·*vi* – intensité sonore

✯ une notion utilisée quotidiennement

L'*intensité sonore* est la puissance surfacique qui se propage (en $\mathrm{W.m^{-2}}$).

✧ C'est l'équivalent, en optique, de l'éclairement.

L'intensité sonore se mesure en bel (B) défini par

$$I_{\mathrm{B}} = \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{avec}$$

$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W.m^{-2}}$ est l'intensité sonore de référence correspondant au seuil d'audibilité humain.

✧ En pratique, comme le bel est une « grande » unité, nous utiliserons plus souvent le décibel.

L'intensité sonore en décibel (dB) se calcule par

$$I_{\mathrm{dB}} = 10\,\log \frac{I}{I_0} \qquad \text{avec}$$

$I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W.m^{-2}}$ est l'intensité sonore de référence.

✯ cas d'une OPPM au seuil de l'audibilité

✧ Quelle est l'amplitude de surpression correspondant à une onde sonore au seuil d'audibilité ?

✧ Cherchons d'abord, pour une OPPM, le lien entre amplitude en pression et intensité.

$$I = \langle \Pi_2 \rangle \quad\rightsquigarrow\quad I = \langle p_1\,v_1 \rangle \quad\rightsquigarrow\quad I = \left\langle \frac{{p_1}^2}{Z_c} \right\rangle$$

✧ Comme il s'agit d'une OPPM, la valeur moyenne s'écrit

$$I = \frac{1}{2} \times \frac{{p_{1\text{m}}}^2}{Z_\text{c}} \quad \rightsquigarrow \quad I = \frac{{p_{1\text{m}}}^2}{2\,\mu_0\,c} \qquad \rightsquigarrow \qquad {p_{1\text{m}}}^2 = 2\,\mu_0\,c \times I$$

✧ Numériquement, cela donne

$${p_{1\text{m}}}^2 \sim 2 \times 1{,}2 \times 300 \times 10^{-12} \sim 6.10^{-10} \qquad \rightsquigarrow \qquad p_{1\text{m}} \sim 2.10^{-5}\ \text{Pa}$$

✧ Cette valeur étonnemment faible montre à quel point l'oreille est un détecteur très sensible.

✯ intensité sonore et audition humaine

✧ Rappelons une règle « de base » pour tout ce qui est mesuré en décibel.

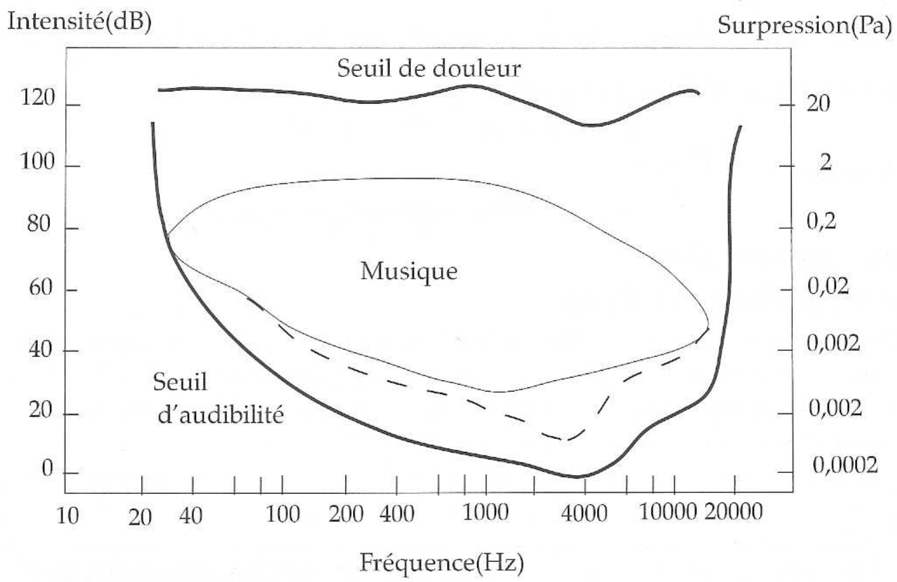
> 3 dB d'augmentation correspond à un doublement de la puissance.

✧ Écrit autrement

$$42\ \text{dB} + 42\ \text{dB} = 45\ \text{dB}$$

✧ Anecdote. Alors que l'auteur cherchait un lave-vaisselle à acheter et demandait conseil à un vendeur, ce dernier lui a répondu « Prenez plutôt celui-ci, il est moins cher et il ne fait que 4 dB en plus, ce n'est rien 4 dB. » Étrangement, l'affaire n'a pas été conclue.

✧ En réalité, le seuil d'audibilité dépend de la fréquence comme le montre ce graphique[14]



II·5 – Coefficients de réflexion et transmission

II·5·i – conditions aux limites pour un tuyau de section constante

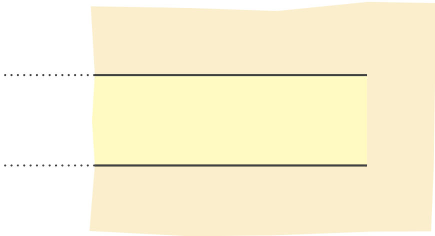
✯ tuyau ouvert

> La surpression est une fonction continue de l'espace.

14. Source : H-Prépa sur les ondes.

✧ Ça, nous le savions déjà mais il vaut mieux le rappeler.

À l'extrémité d'un tuyau ouvert, la surpression est nulle.



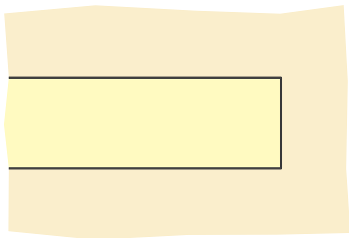
✧ Cela se comprend aisément : dans l'atmosphère, considérée à pression constante, la surpression est nulle et comme il y a continuité de la pression...

✧ Ceci étant, cette condition à la limite ne peut être qu'une approximation car une surpression nulle dans l'atmosphère signifie que l'onde qui se propage dans le tuyau *ne se propage pas dans l'atmosphère.*

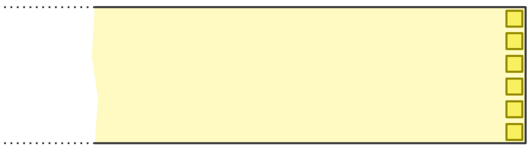
✧ Ce dernier point est absurde : tout le monde s'est déjà amusé à parler dans un tuyau et sait que, dans ces condition, le son « sort » du tuyau [15].

✯ tuyau fermé

À l'extrémité d'un tuyau fermé, la vitesse des particules de fluide est nulle.



✧ Pour nous en convaincre, regardons les particules de fluides au bord de la paroi.



✧ Nous constatons tout d'abord qu'elle ne peuvent pas aller à droite.

✧ Mais elles ne peuvent pas non plus aller à gauche car si elles y allaient, que resterait-il à leur place ? Rien. Du vide. C'est impossible.

✧ Conclusion : elles ne peuvent pas bouger.

✯ membrane

✧ Exemple de « membrane » : un mur entre deux pièces. L'expérience courante montre alors que le son peu fort bien se propager à tavers les murs, surtout les basses d'ailleurs.

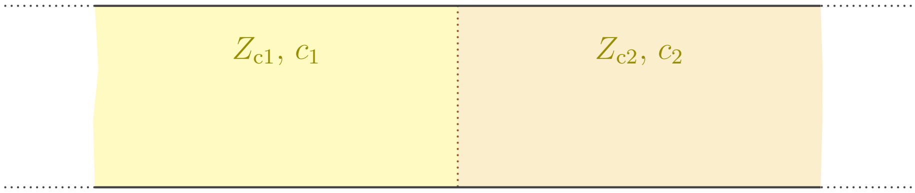
✧ Dans ce cas, il n'y a pas véritablement de conditions au limites. En revanche, systèmatiquement :
- ➜ nous écrirons la continuité de l'onde en vitesse de part et d'autre de la membrane ;
- ➜ nous ferons un PFD sur la membrane.

15. L'expérience est amusante car avec un grand tuyau, comme par exemple les gaines électriques avant installation, le dispositif constitue un guide d'onde sonore et il suffit de chuchoter à un bout pour que le son soit entendu à l'autre, même après une dizaine de mètres.

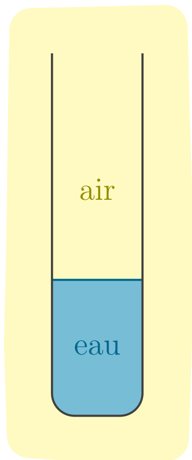
II·5·*ii* – réflexion et transmission au niveau d'une interface

✫ la situation

✧ Envisageons une situation où, dans un tuyau de section constante, il y a deux milieux propagatifs différents. Nous allons caractériser ces milieux par leurs impédances caractéristiques et la célérité du son qui s'y propage.



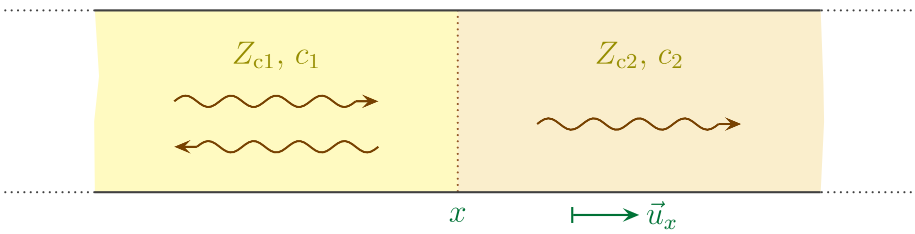
✧ Techniquement il est possible de réaliser une tel dispositif :
- ➜ soit en séparant les deux gaz par une paroi étanche, très souple et très légère (un film plastique fin par exemple) de manière à ce que son influence soit négligeable ;
- ➜ soit avec un tuyau vertical et deux fluides de densité différentes (cf. schéma ci dessous avec de l'eau et de l'air).



✧ La situation, après, est d'un classique bien connu : une onde arrive de la gauche et, au niveau de l'interface, engendre une onde réfléchie et une onde transmise.

✧ Le but va être de déterminer les coefficients de réflexion tant en amplitude (vitesse et surpression) qu'en énergie.

✧ Commençons par écrire les ondes sous forme d'OPP.



✧ Pour l'onde à gauche (milieu 1), nous pouvons écrire, pour la vitesse

$$v_{①}(x,t) = F(t - x/c_1) + G(t + x/c_1)$$

✧ En tant que grandeur duale, la surpression s'écrit (attention au signe)

$$p_{①}(x,t) = Z_{c1}\,F(t - x/c_1) - Z_{c1}\,G(t + x/c_1)$$

✧ Pour le milieu ②, il n'y a qu'une onde vers les x croissants donc

$$\left\{\begin{array}{ll} v_{②}\,(x,t) & = H(t - x/c_2) \\ p_{②}\,(x,t) & = H(t - x/c_2) \end{array}\right.$$

✯ traduction des conditions aux limites

✧ La limite est en $x = 0$ et nous allons y traduire :
- ➜ la continuité de la vitesse ;
- ➜ la continuité de la surpression (vu qu'il n'y a pas de membrane entre les deux fluides).

✧ La continuité de la vitesse s'écrit

$$v_{①}\,(0,t) = v_{②}\,(0,t) \qquad \rightsquigarrow \qquad F(t) + G(t) = H(t)$$

✧ La continuité de la surpression s'écrit

$$p_{①}\,(0,t) = p_{②}\,(0,t) \qquad \rightsquigarrow \qquad Z_{c1}\,F(t) - Z_{c1}\,G(t) = Z_{c2}\,H(t)$$

✧ En considérant $F(t)$ connue, nous avons donc deux équations à deux inconnues

$$-G(t) + H(t) = F(t) \qquad \text{et} \qquad Z_{c1}\,G(t) + Z_{c2}\,H(t) = Z_{c1}\,F(t)$$

✧ Ce système admet, pour solutions

$$G(t) = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \times F(t) \qquad \text{et} \qquad H(t) = \frac{2\,Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \times F(t)$$

✯ coefficients de réflexion et transmission en vitesse

✧ Comme l'onde incidente en vitesse correspond à $F(t - x/c_1)$ et l'onde réfléchie à $G(t + x/c_1)$, le coefficient de réflexion en vitesse en $x = 0$ se définit par

$$r_v = \frac{G(t)}{F(t)} \qquad \rightsquigarrow \qquad r_v = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$

✧ De même, l'onde transmise en vitese correspond à $H(t - x/c_1)$ ce qui donne, pour le coefficient en transmission

$$t_v = \frac{H(t)}{F(t)} \qquad \rightsquigarrow \qquad t_v = \frac{2\,Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$

✯ coefficients de réflexion et transmission en surpression

✧ Faisons de même pour la surpression.

✧ L'onde incidente en surpression correspond à $+Z_{c1}\,F(t - x/c_1)$ et l'onde réfléchie à $-Z_{c1}\,G(t + x/c_1)$, donc le coefficient de réflexion en surpression en $x = 0$ se définit par

$$r_p = -\frac{Z_{c1}\,G(t)}{Z_{c1}\,F(t)} = -\frac{G(t)}{F(t)} \qquad \rightsquigarrow \qquad r_p = -r_v = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$

✧ L'onde transmise en surpression correspond à $Z_{c2}\,H(t - x/c_1)$ ce qui donne, pour le coefficient en transmission

$$t_p = \frac{Z_{c2}\,H(t)}{Z_{c1}\,F(t)} \qquad \rightsquigarrow \qquad t_v = \frac{2\,Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$

⋆ coefficients de réflexion et transmission en puissance

✧ La puissance surfacique incidente s'écrit, en $x = 0$,

$$\Pi_\mathrm{i} = F(t) \times Z_{\mathrm{c}1}\,F(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \Pi_\mathrm{i} = Z_{\mathrm{c}1}\,F^2(t)$$

✧ La puissance réfléchie s'écrit, toujours en $x = 0$,

$$\Pi_\mathrm{r} = G(t) \times \big(-Z_{\mathrm{c}1}\,G(t)\big) \qquad \rightsquigarrow \qquad \Pi_\mathrm{r} = -Z_{\mathrm{c}1}\,G^2(t)$$

✧ Le fait que cette puissance soit négative traduit le fait qu'elle se déplace vers la gauche.

✧ Enfin, pour la puissance transmise en $x = 0$

$$\Pi_\mathrm{t} = H(t) \times Z_{\mathrm{c}2}\,H(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \Pi_\mathrm{t} = Z_{\mathrm{c}2}\,H^2(t)$$

✧ Les coefficients de réflexion et de transmission en puissance s'écrivent donc

$$R = \frac{\Pi_\mathrm{r}}{\Pi_\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{\Pi_\mathrm{t}}{\Pi_\mathrm{t}}$$

✧ Après calculs, nous trouvons

$$R = -\left(\frac{Z_{\mathrm{c}1} - Z_{\mathrm{c}2}}{Z_{\mathrm{c}1} + Z_{\mathrm{c}2}}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad T = \frac{4\,Z_{\mathrm{c}1}\,Z_{\mathrm{c}2}}{(Z_{\mathrm{c}1} + Z_{\mathrm{c}2})^2}$$

✧ Le lecteur pourra ainsi vérifier la loi de conservation de l'énergie à l'interface

$$|R| + T = 1$$

⋆ cas de deux milieux d'impédances très différentes

✧ Considérons l'air (milieu ①) et l'eau (milieu ②).

✧ Comme l'impédance caractéristique s'écrit $\mu_0\,c$, nous pouvons dire que $Z_\mathrm{eau} \gg Z_\mathrm{air}$ car

$$\mu_\mathrm{eau} \gg \mu_\mathrm{air} \qquad \text{et} \qquad c_\mathrm{eau} \sim 3\,c_\mathrm{air}$$

✧ Nous avons alors

$$|R| \sim 1 \qquad \text{et} \qquad T \sim 0$$

✧ Une des application de ce résultat est l'échographie (cf. photo ci-dessous[16]) qui permet, grâce à l'analyse de l'écho des ultrasons envoyés dans le corps, d'en déduire ce qu'il y a « à l'intérieur».

16. Source : `sante.lefigaro.fr/sites/default/files/styles/450_x_190/public/media/field_visuel/echographie.jpg?itok=DdK1NNV5`

- ✧ Le problème c'est que les ultrasons sont créés dans l'air et que le corps humain est à 80 % de l'eau. Les ultrasons ne peuvent y « entrer » (cf. $T \sim 0$). C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'utiliser un gel qui permet une « adaptation d'impédance ».
- ✧ Rappelons que si l'échograhie est essentiellement associée aux examens de la femme enceinte, cette technique est aussi très employées pour l'observation des articulations, du cœur, pour mesurer un débit sanguin (par effet Doppler)…
- ✧ Voici, ci-dessous, des exemples d'échographie usuelle et 3D[17].

17. Sources :
   ➜ images.doctissimo.fr/1/famille/echographie-aout-2012/photo/hd/0454496045/193027643e3/echographie-aout-2012-2012-echographie-bebe-big.jpg
   ➜ http://www.bebeartecho.be/ressources/common/LE_CALIN.jpg

III – Bilans macroscopiques

III·1 – Bilans énergétiques

III·1·i – idées

✧ Il y a deux grandes approches possibles en terme de bilan énergétique :
- ➜ soit le bilan d'énergie mécanique, essentiellement utilisé en mécanique (!) ;
- ➜ soit le bilan thermodynamique, qui permet une vision un peu plus générale de l'énergie puisqu'utilisant l'énergie interne.

✧ Il y a une grande différence entre les deux :
- ➜ pour l'aspect mécanique, le théroème utilisé (théorème de l'énergie mécanique) fait apparaître le travail fourni par les interactions intérieures

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{m}} = \delta W_{\mathrm{nc,ext}} + \delta W_{\mathrm{int}}$$

- ➜ en revanche, pour l'aspect thermodynamique, d'une part il ne faut plus tenir compte de ces efforts internes et, d'autre part, compter le transfert thermique

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{m}} + \mathrm{d}U = \delta W_{\mathrm{nc,ext}} + \delta Q$$

✧ Il sera donc nécessaire d'être rigoureux dans l'approche et de ne pas les mélanger.

✧ En revanche, il y des points communs entre les deux :
- ➜ l'étude se fera **toujours** sur un système fermé ;
- ➜ l'étude se fera entre deux instants, soit entre t et $t+\mathrm{d}t$ dans le cas de la recherche d'une équation différentielle, soit entre « le début » et « la fin » dans le cas d'un bilan global.

✧ Dans la suite de ce chapitre, nous n'allons voir, à proprement parler, qu'une seule loi nouvelle. Seule l'approche des situations sera différente.

✧ C'est la raison pour laquelle, dans ce qui suit, il n'y a que des exemples.

III·1·ii – une nouvelle loi : pression dans un jet libre

✧ Avec des fluides en mouvement, nous aurons souvent l'occasion de rencontrer des *jets libres* et la pression qui y règne nous intéressera.

✧ Même si la définition qui suit semble alambiquée, la notion est simple.

> Un *jet libre* est un jet de fluide dans un autre aux lignes de courant parallèles.

✧ En gros, pour « voir » un jet libre, il suffit d'imaginer un jet d'eau dans l'atmosphère. La seule contrainte c'est que ce jet doit être parallèle.

✧ Par exemple sur les photos ci-dessous[18], la sortie peut-être considérée comme un jet libre. Mais une fois que celui-ci s'incline, ce n'est plus possible.

18. Photo de l'auteur, pour une fois.


✧ Il en est de même pour les fontaines ci-dessous [19].

✧ La définition donnée pour le jet libre permet de généraliser la notion à un gaz s'écoulant dans un autre gaz ou d'un liquide s'écoulant dans un autre liquide.
✧ Ce dont il faut bien se souvenir c'est que lorsque l'écoulement se fait dans un tuyau, il n'y a **pas** de jet libre.
✧ Dans un jet libre, la pression est facile à connaître, en effet :

> Dans un jet libre, la pression est égale à la pression du fluide environnant.

✧ Pour ceux qui préfère

> La pression à l'intérieur un jet libre qui s'écoule dans l'atmosphère est uniforme et vaut la pression atmosphérique.

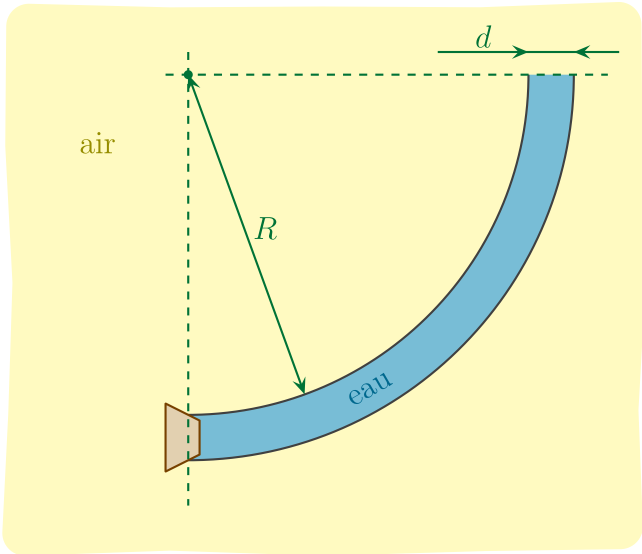
Remarque. Nous démontrerons le résultat dans le dernier chapitre.

III·1·*iii* – vidange d'un tuyau

✯ dispositif

✧ Considérons un tuyau en forme de quart d'arc de cercle initialement plein.

19. Source : `http://www.saferain.com/images/stories/saferain/catalogo/fr/ajutages/ajutage-fontaine_jet-de-lance-II.jpg`



✧ À l'instant initial, le bouchon est ôté. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'eau ?

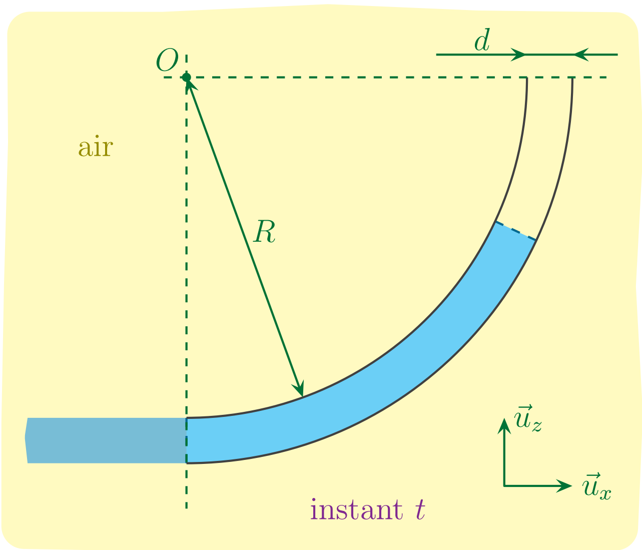
✧ Comme hypothèse, nous ferons, dans un soucis de simplification :
- ➜ aucun frottement (donc, en particulier, pas de viscosité) ;
- ➜ un diamètre de tuyau d très inférieur au rayon.

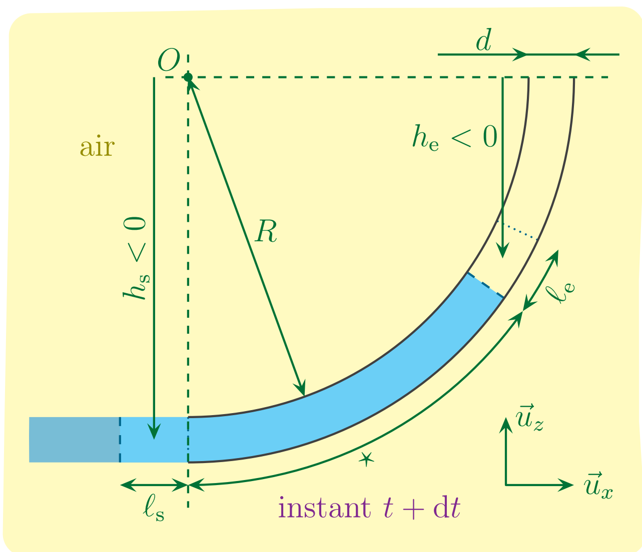
✧ Étant donné qu'il n'y a pas de pièce mécanique mobile et que seul un fluide est en mouvement, nous allons plutôt utiliser une approche énergétique.

✯ le théorème de l'énergie mécanique

☯ tout d'abord bien découper

✧ Commençons par représenter la situation entre deux instants t et $t+\mathrm{d}t$ en choisissant, comme système, l'eau contenue, à l'instant t dans le tuyau.





✧ Nous pouvons constater que :
- ➜ à t tout le système est dans le tuyau (le système a été choisi pour !) mais une petite partie ne sera plus là à $t + \mathrm{d}t$;
- ➜ à $t + \mathrm{d}t$, il y a encore deux partie avec l'eau qui est toujours dans le tuyau et l'eau qui en est sortie.

✧ Notons $m(t)$ la masse contenue dans le tuyau.

◕ et après bien compter

✧ Commençons par remarquer que l'incompressibilité de l'eau implique qu'à chaque instant la vitesse de l'eau est uniforme dans le tuyau.

✧ En effet l'incompressibilité impose la conservation du débit volumique soit $D_v = v\,s = \text{C}^{\text{te}}$ où s est la section de l'écoulement.

✧ Mais comme la section de l'écoulement (*i.e.* celle du tube et du jet) sont identiques, nous pouvons en déduire qu'à tout instant chaque particule de fluide – y compris à la sortie du tuyau – possède la même norme de vitesse $v(t)$.

✧ Ainsi, à l'instant t :

➜ l'énergie cinétique s'écrit

$$E_{\text{c}}(t) = \frac{1}{2}\,m(t)\,v^2(t)$$

➜ l'énergie potentielle peut se séparer en deux termes, celui de la partie commune et celle de la partie qui va s'écouler

$$E_{\text{p}}(t) = E_{\text{p}}^\star(t) + \text{d}m_{\text{e}}\,g\,h_{\text{e}}$$

✧ Et, à $t + \text{d}t$:

➜ l'énergie cinétique s'écrit

$$E_{\text{c}}(t) = \frac{1}{2}\,m(t+\text{d}t)\,v^2(t+\text{d}t) + \frac{1}{2}\,\text{d}m_{\text{s}}\,v^2(t+\text{d}t)$$

➜ l'énergie potentielle peut encore se séparer en deux termes, celui de la partie commune et celle de la partie qui est sortie

$$E_{\text{p}}(t+\text{d}t) = E_{\text{p}}^\star(t+\text{d}t) + \text{d}m_{\text{s}}\,g\,h_{\text{s}}$$

✯ réécrire la variation d'énergie en tenant compte de la conservation de la masse

✧ La conservation de la masse du système impose

$$\text{d}m_{\text{e}} + m^\star(t) = \text{d}m_{\text{s}} + m^\star(t+\text{d}t)$$

✧ Comme la masse dans la partie commune est évidemment la même, nous avons

$$m^\star(t) = m^\star(t+\text{d}t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{d}m_{\text{e}} = \text{d}m_{\text{s}}$$

✧ De plus

$$m(t+\text{d}t) + \text{d}m_{\text{s}} = m(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{d}m_{\text{s}} = m(t) - m(t+\text{d}t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \text{d}m_{\text{s}} \overset{\text{DL}}{=} -\frac{\text{d}m}{\text{d}t}\,\text{d}t$$

✧ Enfin, remarquons que, comme la partie commune est au même endroit à t et à $t+\text{d}t$, nous avons

$$E_{\text{p}}^\star(t) = E_{\text{p}}^\star(t+\text{d}t)$$

✧ Avec tout cela, nous pouvons simplifier la variation d'énergie mécanique

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}E_{\mathrm{m}} &= E_{\mathrm{m}}(t+\mathrm{d}t) - E_{\mathrm{m}}(t)\\
&= \frac{1}{2}\,m(t+\mathrm{d}t)\,v^2(t+\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m_{\mathrm{s}}\,v^2(t+\mathrm{d}t) + \cancel{E_{\mathrm{p}}^\star(t+\mathrm{d}t)} + \mathrm{d}m_{\mathrm{s}}\,g\,h_{\mathrm{s}} \quad (\cdots)\\
&\qquad (\cdots) - \left(\frac{1}{2}\,m(t)\,v^2(t) + \cancel{E_{\mathrm{p}}^\star(t)} + \mathrm{d}m_{\mathrm{e}}\,g\,h_{\mathrm{e}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,\big(m(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_{\mathrm{s}}\big)\,v^2(t+\mathrm{d}t) - \frac{1}{2}\,m(t)\,v^2(t) + \mathrm{d}m_{\mathrm{s}}\,g\,\big(h_{\mathrm{s}} - h_{\mathrm{e}}\big)\\
&= \frac{1}{2}\,m(t)\,v^2(t+\mathrm{d}t) - \frac{1}{2}\,m(t)\,v^2(t) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\,g\,\big(h_{\mathrm{s}} - h_{\mathrm{e}}\big)\\
&= \frac{1}{2}\,m(t)\,\Big(v^2(t+\mathrm{d}t) - v^2(t)\Big) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\,g\,\big(h_{\mathrm{s}} - h_{\mathrm{e}}\big)\\
&= \frac{1}{2}\,m(t)\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\,g\,\big(h_{\mathrm{s}} - h_{\mathrm{e}}\big)\\
&= m(t)\,v(t)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t\,g\,\big(h_{\mathrm{s}} - h_{\mathrm{e}}\big)
\end{aligned}
$$

✯ travail fourni

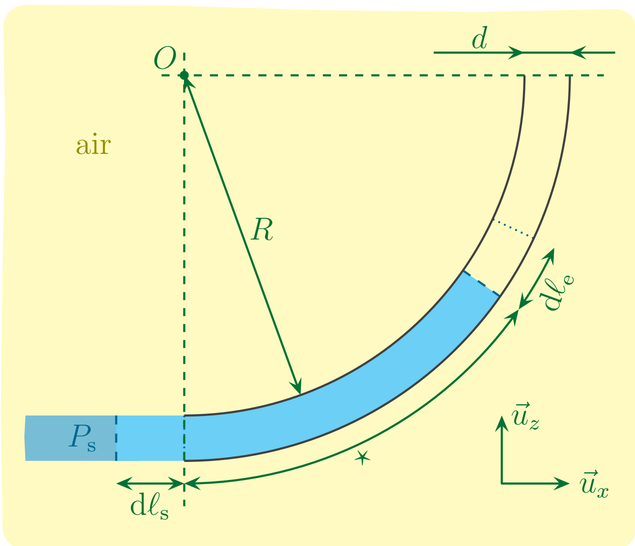
◕ par les forces extérieures non conservatives

✧ Dans les forces extérieures non conservatives nous avons :
- ➜ les forces pressantes exercées par le tuyau sur l'eau ;
- ➜ les forces pressantes exercées par l'atmosphère sur l'eau « en haut » ;
- ➜ les forces pressantes exercées par l'eau sortie du tuyau avant t sur l'eau en train de sortir.

✧ Pour les forces pressantes exercées par le tuyau sur l'eau, le travail est nul car les forces sont orthogonale à la paroi et que la vitesse des particules de fluide qui subissent ces forces est tangente à la paroi.

✧ Pour les forces pressantes exercées par l'atmosphère sur l'eau « en haut », en notant $\mathrm{d}\ell_{\mathrm{e}}$ la petite longueur qui s'écoule

$$\delta W_{\mathrm{e}} = +P_{\mathrm{atm}}\,s\,\mathrm{d}\ell_{\mathrm{e}}$$



✧ Pour les forces pressantes exercées par l'eau sortie du tuyau avant t sur l'eau en train de sortir, en notant $\mathrm{d}\ell_{\mathrm{s}}$ la petite longueur qui s'écoule (cf. ci-dessus)

$$\delta W_{\text{e}} = -P_{\text{s}}\, s\, \mathrm{d}\ell_{\text{s}}$$

✧ Or, puisqu'il s'agit d'un jet libre, nous avons $P_{\text{s}} = P_{\text{atm}}$.
✧ De plus, l'eau étant incompressible, nous avons $\mathrm{d}\ell_{\text{e}} = \mathrm{d}\ell_{\text{s}}$.
✧ Il reste

$$\delta W_{\text{ext}} = 0 + P_{\text{atm}}\, s\, \mathrm{d}\ell_{\text{e}} - P_{\text{atm}}\, s\, \mathrm{d}\ell_{\text{e}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta W_{\text{ext}} = 0$$

par les interactions intérieures non conservatives

✧ Il ne faut surtout pas oublier, ici, le travail fourni par les interactions intérieures.
✧ Or, comme celles-ci sont nulles (frottements négligés), nous avons

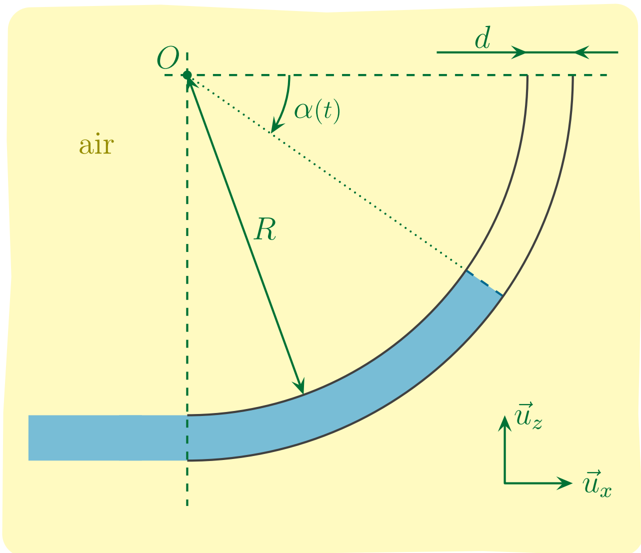
$$\delta W_{\text{int}} = 0$$

✯ rassemblement

✧ Il reste donc

$$\mathrm{d}E_{\text{m}} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad m(t)\, v(t)\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\, g\, \big(h_{\text{s}} - h_{\text{e}}\big) = 0$$

✧ Il ne nous reste plus qu'à traduire cela en terme de repérage $\alpha(t)$.



✧ Nous avons ainsi :
- ➜ $v(t) = R\,\dot{\alpha}(t)$;
- ➜ $m(t) = \mu\, s\, R\, \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
- ➜ $h_{\text{e}} = -R\, \sin\alpha$ et $h_{\text{s}} = -R$.

✧ En remplaçant, cela donne

$$\mu\, s\, R\, \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\, R\,\dot{\alpha}(t)\, R\,\ddot{\alpha}(t) + \mu\, s\, R\,\dot{\alpha}(t)\, g\, \big(-R + R\, \sin\alpha(t)\big) = 0$$

✧ En simplifiant par $R^2\, s\, \mu\, \dot{\alpha}(t)$

$$R\, \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\, \ddot{\alpha}(t) - g\, \big(1 - \sin\alpha(t)\big) = 0$$

✧ Ce qui donne

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\ddot{\alpha}(t) - \frac{g}{R}\big(1 - \sin\alpha(t)\big) = 0$$

✧ Nous pouvons constater que l'équation différentielle trouvée est bien homogène, ce qui est toujours rassurant.

✯ interprétation

✧ Nous pouvons constater que, comme souvent lorsque seul le poids agit, il n'y a pas de notion de masse dans le résultat. En fait la masse inertielle (associée à l'énergie cinétique) s'est simplifiée avec la masse grave (associée à l'énergie potentielle de pesanteur).

✧ Cette équation, non linéaire, n'est pas soluble analytiquement. Toutefois, nous pouvons aisément vérifier qu'à $t = 0$, elle est cohérente.

✧ En effet, nous avons, pour l'instant initial

$$\alpha(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\alpha}(0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\pi}{2}\ddot{\alpha}(0) - \frac{g}{R} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \ddot{\alpha} = \frac{2\,g}{\pi\,R} > 0$$

✧ Le fait que l'accélération angulaire soit positive, *i.e.* que α va avoir tendance à augmenter est plutôt cohérent : cela prouve que le tuyau se vide.

III·1·*iv* – puissance d'une pompe de fontaine

✯ dispositif

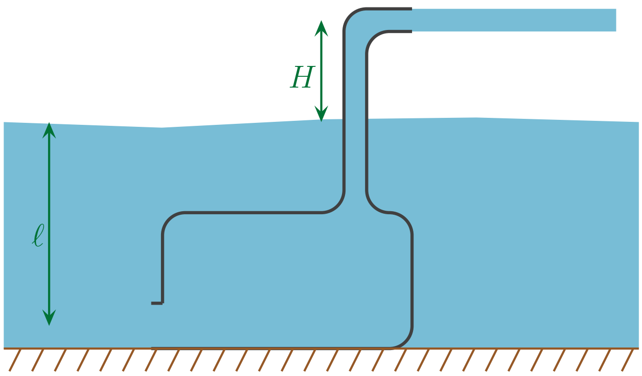
✧ Considérons une pompe de fontaine comme celle ci-dessous [20].

✧ Lors d'un fonctionnement usuel, une telle pompe :
- ➜ a un débit de 36 L/min ;
- ➜ est plongée à une profondeur de $\ell = 70$ cm sous l'eau ;
- ➜ éjecte l'eau à une hauteur $H = 1{,}5$ m au dessus du niveau de l'eau ;
- ➜ possède une embouchure de section totale $s = 0{,}50$ cm^2.

✧ Quelle puissance minimale doit posséder la pompe ?

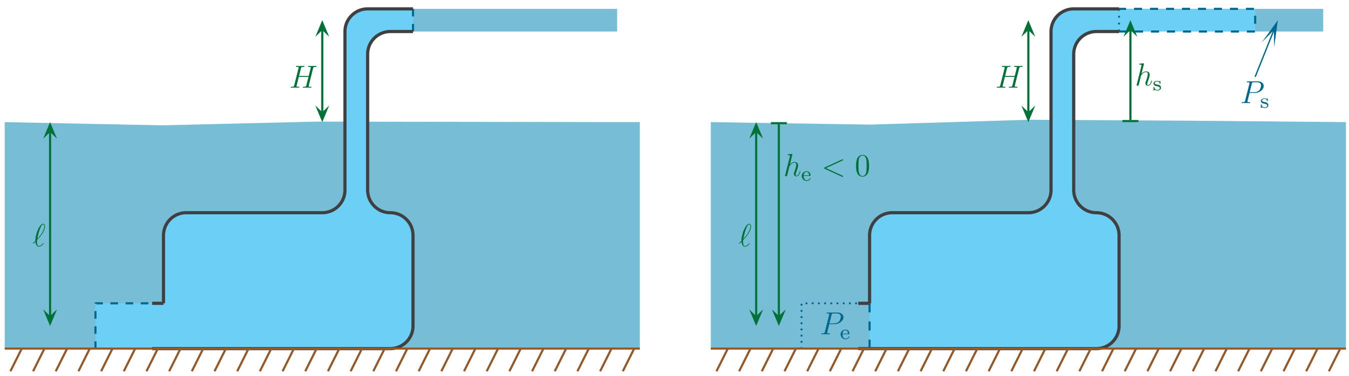
✧ Commençons par représenter schématiquement la pompe.

20. Source : `http://i2.cdscdn.com/pdt2/5/9/0/1/700x700/auc3700194400590/rw/pompe-fontaine-85w.jpg`



✯ découpage

✧ Regardons ce qui se passe entre t et $t + \mathrm{d}t$ en choisissant comme système :
- ➜ à t toute la pompe, l'eau qui est dedans ainsi que celle qui va entrer ;
- ➜ à $t + \mathrm{d}t$ toute la pompe, l'eau qui est dedans ainsi que celle qui est sortie.



✧ Ici, nous allons naturellement choisir une approche énergétique et supposer que le régime est permanent stationnaire.

✯ variation d'énergie

◔ énergie cinétique

✧ À t, l'énergie cinétique s'écrit

$$E_c(t) = E_c^\star(t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m_e\,{v_e}^2$$

✧ À $t + \mathrm{d}t$

$$E_c(t+\mathrm{d}t) = E_c^\star(t+\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m_s\,{v_s}^2$$

✧ Parce que le régime est stationnaire, nous avons

$$E_c^\star(t) = E_c^\star(t+\mathrm{d}t) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}m_s = \mathrm{d}m_e \overset{\text{not}}{=} \mathrm{d}m$$

✧ Ce qui fait que la variation d'énergie cinétique s'écrit

$$\mathrm{d}E_c = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,\left({v_s}^2 - {v_e}^2\right)$$

✧ En supposant la section d'aspiration très large, la vitesse y est quasiment nulle (conservation du débit volumique oblige) et alors

$$v_s{}^2 \gg v_e{}^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}E_c = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,v_s{}^2$$

☯ énergie potentielle

✧ À t l'énergie potentielle s'écrit

$$E_p(t) = E_p^\star(t) + \mathrm{d}m\,g\,h_e$$

✧ Et à $t + \mathrm{d}t$

$$E_p(t+\mathrm{d}t) = E_p^\star(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}m\,g\,h_s$$

✧ Comme le dispositif est en régime stationnaire nous avons

$$E_p^\star(t) = E_p^\star(t+\mathrm{d}t)$$

✧ De plus, en choisissant la hauteur nulle au niveau de la surface de l'eau, cela donne

$$h_e = -\ell \qquad \text{et} \qquad h_s = H$$

✧ Soit, finalement

$$\mathrm{d}E_p = E_p(t+\mathrm{d}t) - E_p(t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}E_p = \mathrm{d}m\,g\,\big(\ell + H\big)$$

✯ travail fourni

☯ par les forces extérieures non conservatives

✧ Les forces à prendre en compte sont les forces de pression sur la pompe et sur l'eau qui y entre ou en sort.
✧ Au niveau de la pompe, comme elle est immobile, le travail fourni par les forces pressantes est nul.
✧ Au niveau de l'entrée, nous avons

$$\delta W_e = +P_e\,S_e\,\mathrm{d}\ell_e$$

✧ Or $S_e\,\mathrm{d}\ell_e$ représente le volume qui est rentré. Et ce volume s'écrit aussi

$$\mathrm{d}V_e = \frac{\mathrm{d}m}{\mu} \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta W_e = +P_e\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu}$$

✧ De même, au niveau de la sortie, nous avons

$$\delta W_s = -P_s\,s\,\mathrm{d}\ell_s \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta W_s = -P_s\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu}$$

✧ Comme à la sortie nous avons un jet libre, nous pouvons dire que $P_s = P_{atm}$.
✧ De plus, la relation de la statique des fluides (valable ici dans le bassin puisque l'eau y est quasiment stagnante) nous dit qu'au fond la pression est telle que

$$P_e = P_{atm} + \mu\,g\,\ell$$

✧ En rassemblant, il reste

$$\delta W_{pression} = 0 + \big(P_{atm} + \mu\,g\,\ell\big)\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu} - P_{atm}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu} \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta W_{pression} = \mathrm{d}m\,g\,\ell$$

✧ Au delà des forces de pression, il faut prendre en compte l'énergie (électrique) apportée par l'extérieur à la pompe.

✧ Nous avons ainsi

$$\delta W_{\text{élec}} = +\mathscr{P}\,\mathrm{d}t$$

par les interactions intérieures non conservatives

✧ Comme le système est supposé globalement idéal (pas de frottement mécanique, pas de viscosité, pas de « perte »), nous pouvons dire que les interactions interieures fournissent un travail nul.

$$\delta W_{\text{int}} = 0$$

✯ rassemblement

✧ Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit

$$\mathrm{d}E_{\text{m}} = \delta W_{\text{pression}} + \delta W_{\text{élec}} + \delta W_{\text{int}}$$

✧ Ce qui donne, en remplaçant

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,{v_{\text{s}}}^2 + \mathrm{d}m\,g\,\big(\ell + H\big) = \mathrm{d}m\,g\,\ell + \mathscr{P}\,\mathrm{d}t + 0$$

✧ Soit

$$\mathscr{P} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \times \left(\frac{{v_{\text{s}}}^2}{2} + g\,H\right)$$

✧ Notons D_v le débit volumique. Nous avons alors

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \mu\,D_v \qquad \text{et} \qquad v_{\text{s}} = \frac{D_v}{s} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathscr{P} = \mu\,D_v \times \left(\frac{{D_v}^2}{2\,s^2} + g\,H\right)$$

✧ Numériquement, nous trouvons

$$\mathscr{P} = 52\ \text{W}$$

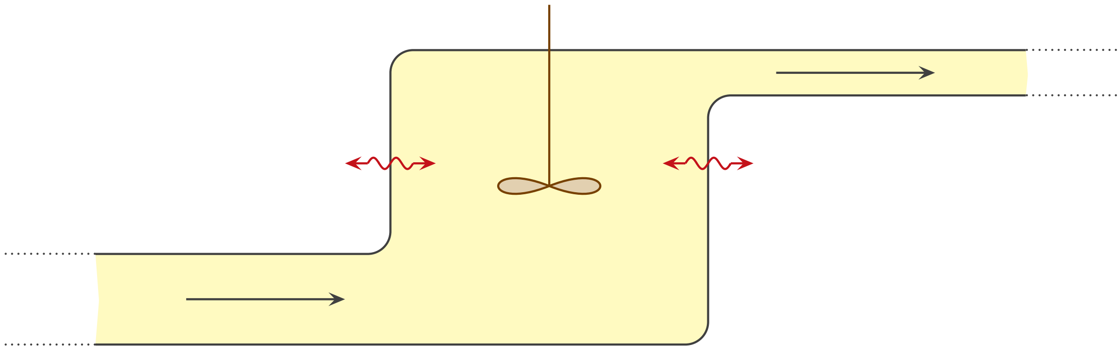
✧ Ce résultat est cohérent avec les valeurs des puissances de fontaine de bassin.

III·1·v – machine thermique

✯ dispositif similaire à celui de la détente de Joule – Thomson

✧ Considérons une machine thermique la plus générale possible, *i.e.* une machine thermique :
- ➜ peut fournir du travail à un fluide ;
- ➜ peut fournir un transfert thermique à un fluide ;
- ➜ peut faire varier la hauteur du fluide ;
- ➜ peut faire varier la vitesse du fluide ;
- ➜ peut fonctionner avec un fluide compressible.

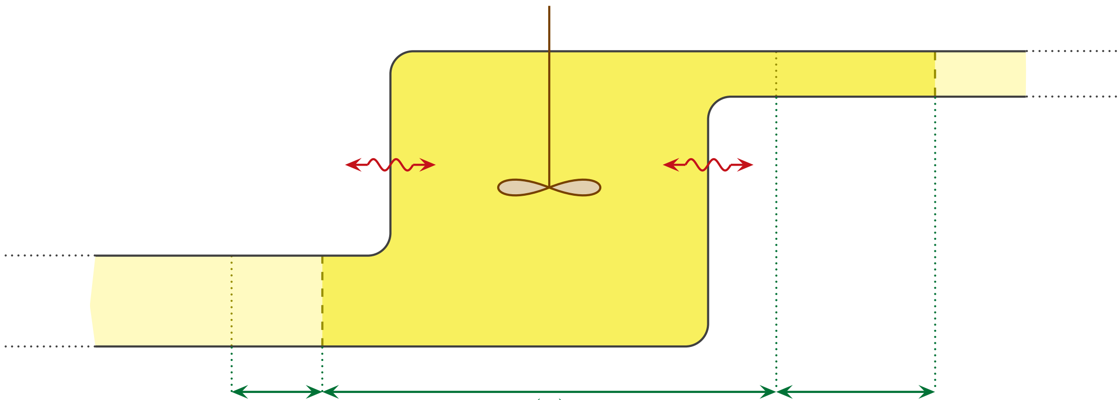
✧ Schématiquement, nous la représenterons comme ceci



✧ Nous allons supposer qu'elle fonctionne en régime stationnaire et nous allons chercher une relation entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs de sortie.

✯ découpage

✧ Prenons, comme système :
- ➜ à l'instant t la machine, le fluide qui est dedans et le fluide qui va rentrer durant $\mathrm{d}t$;
- ➜ à l'instant $t+\mathrm{d}t$ la machine, le fluide qui est dedans et le fluide qui est sorti pendant $\mathrm{d}t$.



✧ Comme d'habitude, la stationnarité du dispositif nous permet de dire :
- ➜ que les masses qui entre et sorte sont les mêmes soit $\mathrm{d}m_1 = \mathrm{d}m_2 \overset{\text{not}}{=} \mathrm{d}m$;
- ➜ que les grandeurs associées à la partie commune du système sont constante.

✯ variation d'énergie

énergie cinétique

✧ Nous avons, de manière usuelle :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_\mathrm{c} &= \left(E_\mathrm{c}^\star + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m_2\,{v_2}^2\right) - \left(E_\mathrm{c}^\star + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m_1\,{v_1}^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,\left({v_2}^2 - {v_1}^2\right)\end{aligned}$$

énergie potentielle

✧ Pour l'énergie potentielle, nous avons de même

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_\mathrm{p} &= \left(E_\mathrm{p}^\star + \mathrm{d}m_2\,g\,h_2\right) - \left(E_\mathrm{p}^\star + \mathrm{d}m_1\,g\,h_1\right)\\ &= \mathrm{d}m\,g\,\left(h_2 - h_1\right)\end{aligned}$$

énergie interne

✧ Pour l'énergie interne, même démarche en introduisant l'énergie interne massique u

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= \left(U^\star + \mathrm{d}m_2\, u_2\right) - \left(U^\star + \mathrm{d}m_1\, u_1\right) \\ &= \mathrm{d}m\,\left(u_2 - u_1\right) \end{aligned}$$

✯ énergie reçue

transfert thermique

✧ En notant q le transfert thermique massique reçu par le fluide, nous avons tout de suite

$$\delta Q = q\,\mathrm{d}m$$

par les forces pneumatiques

✧ Il faut compter les forces pressantes uniquement à l'entrée et à la sortie de la machine. Ailleurs tout est immobile, il n'y a pas donc pas de travail échangé.

✧ À l'entrée, nous avons, de manière usuelle

$$\delta W_1 = +P_1\,S_1\,\mathrm{d}\ell_1 \quad \rightsquigarrow \quad \delta W_1 = +P_1\,\mathrm{d}V_1$$

✧ De manière à préparer la simplification ultérieure, exprimons le volume $\mathrm{d}V_1$ qui rentre dans la machine en fonction de la masse volumique μ_1 et de la masse $\mathrm{d}m$ qui transite.

$$\delta W_1 = +P_1\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu_1}$$

✧ Pour le travail fourni par les forces pressantes à la sortie, comme elles sont résistantes, nous avons

$$\delta W_2 = -P_2\,S_2\,\mathrm{d}\ell_2 \quad \rightsquigarrow \quad \delta W_2 = -P_2\,\mathrm{d}V_2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta W_2 = -P_2\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu_2}$$

par les autres forces

✧ Le système, et surtout le corps de la machine, peut recevoir de l'énergie par l'intermédiaire de l'électricité (ou d'un moteur thermique).

✧ En notant w le travail (algébrique) massique reçu, nous avons

$$\delta W = w\,\mathrm{d}m$$

✯ rassemblement

✧ Le premier principe appliqué au système choisit entre t et $t+\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c} + \mathrm{d}E_\mathrm{p} + \mathrm{d}U = \delta Q + \delta W + \delta W_1 + \delta W_2$$

✧ Soit, en remplaçant

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\,\left({v_2}^2 - {v_1}^2\right) + \mathrm{d}m\,g\,\left(h_2 - h_1\right) + \mathrm{d}m\,\left(u_2 - u_1\right) = q\,\mathrm{d}m + w\,\mathrm{d}m + P_1\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu_1} - P_2\,\frac{\mathrm{d}m}{\mu_2}$$

✧ En divisant par $\mathrm{d}m$ et en regroupant les termes, cela nous conduit au résultat général

$$\left(\frac{1}{2}\,{v_2}^2 + g\,h_2 + \frac{P_2}{\mu_2} + u_2\right) - \left(\frac{1}{2}\,{v_1}^2 + g\,h_1 + \frac{P_1}{\mu_1} + u_1\right) = w + q$$

✯ où nous retrouvons le cas connu

✧ Dans le cas de la détente de Joule – Thomson, nous avons :
- ➜ une détente sans travail utile, $w = 0$;
- ➜ une détente adiabatique, $q = 0$;
- ➜ un écoulement lent $v_2 = v_1 = 0$;
- ➜ une énergie potentielle négligeable $g \sim 0$.

✧ Cela nous donne

$$\left(\frac{P_2}{\mu_2} + u_2\right) - \left(\frac{P_1}{\mu_1} + u_1\right) = 0$$

✧ Et comme la masse volumique est l'inverse du volume massique, cela nous conduit à

$$\big(P_2\,\mathscr{V}_2 + u_2\big) - \big(P_1\,\mathscr{V}_1 + u_1\big) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad h_2 - h_1 = 0$$

✧ Nous retrouvons bien que la détente de Joule – Thomson est isenthalpique.

III·1·*vi* – un résultat colatéral bien utile : une relation de Bernoulli

✯ relation

> Dans un écoulement parfait incompressible qui ne reçoit ni travail ni transfert thermique, nous avons entre l'entrée et la sortie
> $$\frac{P}{\mu} + g\,h + \frac{v^2}{2} = \mathrm{C^{te}}$$

✧ La démonstration est rapide.

✧ Il n'y a pas de transfert thermique ni de travail reçu donc $w = 0$ et $q = 0$.

✧ De plus, chaque particule de fluide conserve son énergie interne car :
- ➜ le travail fourni par les interactions intérieures sont nulle vu qu'il n'y a pas de viscosité (écoulement parfait) ;
- ➜ la particule de fluide ne reçoit pas de travail par compression car elle est incompressible.

✧ Donc nous avons $u_1 = u_2$.

✧ Il reste donc bien

$$\frac{P_1}{\mu} + g\,h_1 + \frac{{v_1}^2}{2} = \frac{P_2}{\mu} + g\,h_2 + \frac{{v_2}^2}{2}$$

✯ interprétation

✧ Cette relation ne fait que rendre compte de la conservation de l'énergie mécanique des particules de fluide lors d'un écoulement.

✧ Nous démontrerons d'une autre manière cette relation dans le dernier chapitre.

✧ Nous verrons d'ailleurs qu'il existe deux formes de la relation de Bernoulli.

III·2 – Bilans de quantité de mouvement

III·2·*i* – idée

✧ Dans cette partie, nous allons essentiellement nous intéresser :
- ➜ soit à des fluides qui mettent en mouvement des objets (comme la fusée) ;
- ➜ soit à des objets qui mettent en mouvement des fluides (comme la lance incendie).

✧ Comme il s'agit de mise en mouvement, nous allons plutôt nous intéresser à l'aspect mécanique, *i.e.* à la quantité de mouvement des différentes parties du dispositif.

✧ Globalement, la méthode, dans cette partie, est à peu près identique à celle utilisée pour faire des bilans énergétiques :
- ➜ nous commencerons par définir un système $\mathscr{S}$ **fermé** que nous étudierons entre t et $t+\mathrm{d}t$, éventuellement découpé à t et à $t+\mathrm{d}t$ en morceaux utiles ;
- ➜ nous déterminerons la quantité de mouvement totale $\vec{p}(\mathscr{S})$ à t et à $t+\mathrm{d}t$ à l'aide de l'extensivité de manière à en déduire $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(\mathscr{S},t)$;
- ➜ nous ferons la liste des forces *extérieures* qui s'exercent sur l'ensemble du sytème ;
- ➜ nous écrirons le TCI sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = \sum \vec{f}_{\text{ext}}$$

✧ Ainsi, comme dans le cas des bilans énergétiques, nous n'utiliserons pas de lois véritablement nouvelles. Nous utiliserons des lois connues de manière nouvelle, nuance.

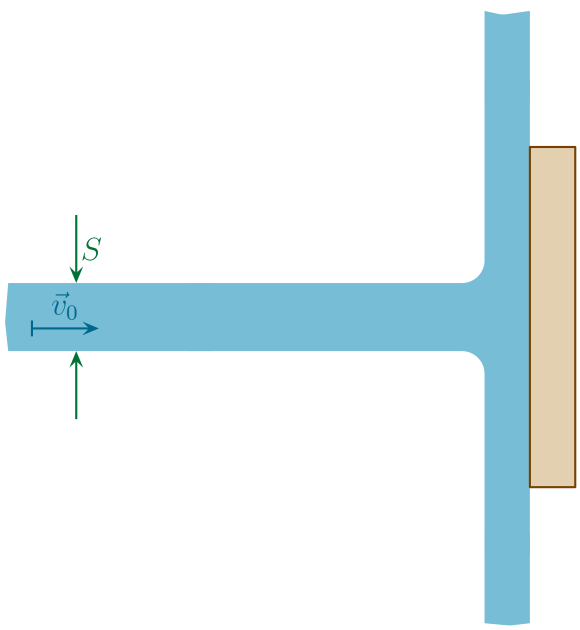
✧ Deux petites exceptions :
- ➜ nous utiliserons la loi qui nous dit que la pression dans un jet libre est la pression atmosphérique ;
- ➜ il peut arriver que nous utilisions la loi de Bernoulli.

III·2·*ii* – jet cylindrique

✫ présentation – analyse

✧ Chacun sait bien qu'un violent jet d'eau peut aisément mettre en mouvement des objets posés par terre.

✧ Dans ce paragraphe, pour simplifier, nous allons chercher à déterminer la force qu'il faut exercer sur une plaque verticale pour qu'elle soit à l'équilibre lorsqu'elle est percutée par un jet d'eau.

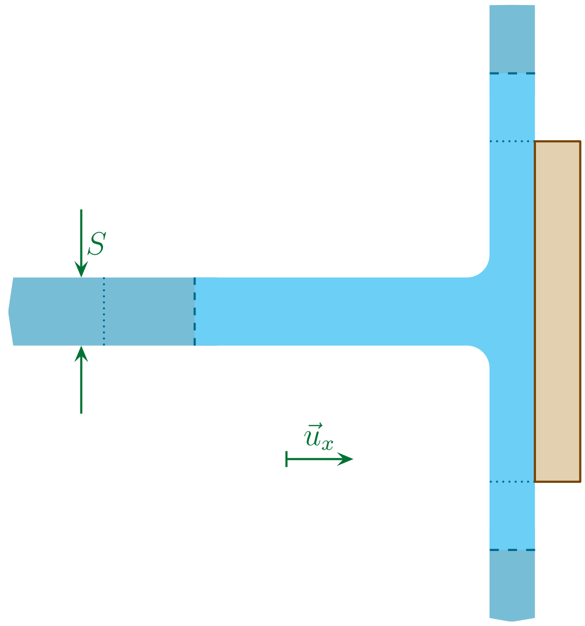


✧ Nous ne nous préoccuperons que de l'aspect horizontal des forces.
✧ En terme de grandeur pertinentes, nous auront besoin de :
- ➜ la section S du jet (dont nous pouvons nous douter que plus il est gros, plus intense sera la force) ;
- ➜ la vitesse v_0 du jet (idem) ;
- ➜ la masse volumique μ du fluide (idem aussi).

✧ Comme nous nous intéressons uniquement à l'aspect horizontal, nous allons négliger le poids.

✯ variation de quantité de mouvement

✧ Nous cherchons la force que l'opérateur doit exercer sur la plaque pour que celle-ci reste immobile.
✧ Comme la force que l'eau exerce sur la plaque est mal connue, nous allons faire en sorte qu'elle devienne une force « intérieure » et, donc, nous allons choisir comme système **fermé** { la plaque + une portion d'eau }
✧ Commençons par bien représenter la situation à t et à $t + \mathrm{d}t$.



◕ quantité de mouvement à t

✧ À t, nous pouvons constater que le système se décompose en deux :
- ➜ la partie commune ;
- ➜ l'eau qui va avancer.

✧ Par extensivité, nous pouvons donc écrire

$$p(\mathcal{S},t) = p^\star(\mathcal{S},t) + p_1$$

✧ La quantité de mouvement p_1 de l'eau qui va rentrer s'écrit

$$p_1 = \mathrm{d}m\, v_0 \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}m = \mu\, S\, \mathrm{d}\ell$$

✧ Mais $\mathrm{d}\ell$ n'est autre que la longueur dont avance l'extrémité du système et comme celle-ci avance à v_0

$$\mathrm{d}\ell = v_0\, \mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}m = \mu\, s\, v_0\, \mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow \quad p_1 = \mu\, S\, {v_0}^2\, \mathrm{d}t$$

✧ Finalement

$$p(\mathcal{S},t) = p^\star(\mathcal{S},t) + \mu\, S\, {v_0}^2\, \mathrm{d}t$$

quantité de mouvement à $t+\mathrm{d}t$

✧ Une décomposition identique (avec, d'une part la partie commune et, d'autre part, les bouts éjectés en haut et en bas) donne

$$p(S,t+\mathrm{d}t) = p^\star(S,t+\mathrm{d}t) + p_2$$

✧ Sauf qu'ici l'eau ejectée en haut et en bas ont des vitesses verticales donc des quantités de mouvement horizontales *nulles*

$$p_2 = 0$$

✧ Il reste

$$p(S,t+\mathrm{d}t) = p^\star(S,t+\mathrm{d}t)$$

variation

✧ En tenant compte du régime stationnaire, nous avons $p(S,t) = \mathrm{C^{te}}$ et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p(\mathscr{S}) &= p(S,t+\mathrm{d}t) - p(S,t)\\ &= p^\star(S,t+\mathrm{d}t) - \Big(p^\star(S,t) + \mu\,S\,{v_0}^2\,\mathrm{d}t\Big)\\ &= -\mu\,S\,{v_0}^2\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

✧ Ce qui nous conduit à

$$\frac{\mathrm{d}p(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = -\mu\,S\,{v_0}^2$$

✯ forces

✧ Les forces extérieures qui s'exercent sont :
- ➜ à distance : le poids, vertical, donc nous pouvons l'oublier ;
- ➜ de contact :
  - ➜ les forces pressantes $\vec{f}_{\mathrm{p,air}}$ exercées par l'air, sauf au niveau du jet d'entrée ;
  - ➜ les forces pressantes $\vec{f}_{\mathrm{p,eau}}$ exercées par l'eau non contenue dans le système au niveau du jet d'entrée ;
  - ➜ la force $\vec{f}_{\mathrm{op}}$ exercée par l'opérateur.

✧ En rassemblant toutes les forces pressantes ($\vec{f}_{\mathrm{p,air}}$ et $\vec{f}_{\mathrm{p,eau}}$), nous pouvons constater, comme il s'agit d'un jet libre, que cela donne une résultante de forces pressantes de pression uniforme P_{atm} sur l'ensemble du système.

✧ Or nous savons que la résultante des forces pressantes exercées par un fluide au repos (ici l'atmosphère) n'est autre que la poussée d'Archimède.

✧ Dans ces conditions, nous pouvons dire que la résultante de toutes les forces pressantes est verticale. Donc nous pouvons l'oublier aussi.

✯ rassemblement

✧ Le TCI nous donne donc, en projection sur l'axe horizontal

$$\frac{\mathrm{d}p(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = \sum f_{\mathrm{ext}} \qquad \rightsquigarrow \qquad -\mu\,S\,{v_0}^2 = f_{\mathrm{op}}$$

✧ Nous pouvons vérifier que cette force est bien dirigée vers la gauche, comme le laisse à penser l'intuition.

III·2·*iii* – fusée

✯ un modèle simple

✧ Tout le monde a déjà vu une fusée décoller (ci-dessous une fusée soyouz[21])

✧ Sans rentrer dans le détail exact de la combustion, nous allons modéliser ce décollage de manière simple en supposant que :
- ➜ le débit massique D_m de gaz brûlés est constant ;
- ➜ les gaz sont ejectés à la vitesse u (vers le bas !) par rapport à la fusée ;
- ➜ le mouvement est bien vertical ;
- ➜ la variation de pesanteur est négligeable.

✧ La question est : à quelle équation différentielle obéit le mouvement de la fusée ?

✯ variation de quantité de mouvement dans un référentiel bien choisi

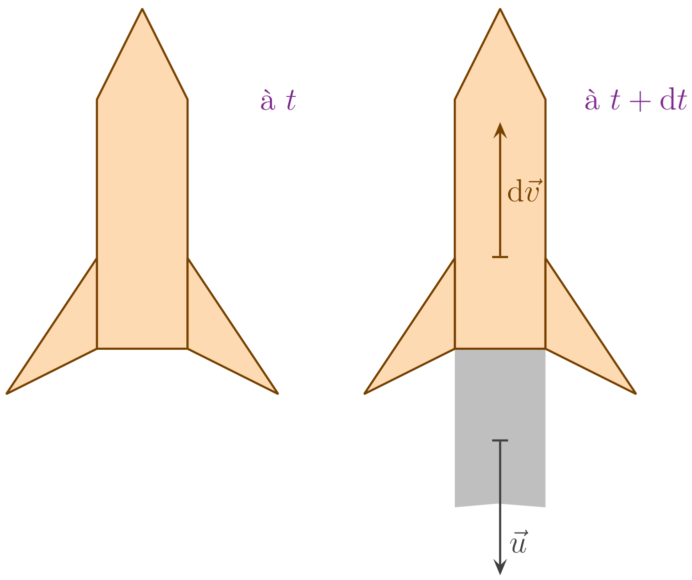
✧ Une fois n'est pas coutume, plaçons nous dans le référentiel **galiléen**, donc en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, tel que, à l'instant t, la fusée soit immobile.

☯ découpe

✧ Considérons le système $\mathscr{S}$ étudié entre t et $t + \mathrm{d}t$ constitué de la fusée (structure) et des gaz qui vont être ejectés durant dt.

✧ Représentons ce qui se passe.

21. Source : `http://www.lexpress.fr/pictures/628/321901_la-fusee-russe-soyouz-tma-04m-au-decollage-le-15-mai-2012-du-cosmodrome-de-baikonour.jpg`



- À $t + \mathrm{d}t$, la vitesse de la fusée n'est « que » $\mathrm{d}\vec{v}$ car nous raisonnons dans le référentiel en translation à la vitesse $\vec{v}(t)$ par rapport au référentiel terrestre.
- Notons $M(t)$ la masse de la fusée et de tout ce qu'il y a dedans (combustible et comburant)

décompte

- À l'instant t, c'est très facile : étant donné le choix du système, la quantité de mouvement est nulle.

$$\vec{p}(\mathscr{S},t) = \vec{0}$$

- À $t + \mathrm{d}t$, l'extensivité du système nous permet d'écrire

$$\vec{p}(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) = M(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\vec{v} + \mathrm{d}m\,\vec{u}$$

- En notant D_m le débit massique des gaz, cela donne

$$\vec{p}(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) = M(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\vec{v} + D_m\,\mathrm{d}t\,\vec{u}$$

- Et ainsi

$$\vec{p}(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) - \vec{p}(\mathscr{S},t) = M(t+\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}\vec{v} + D_m\,\mathrm{d}t\,\vec{u}$$

- En divisant par $\mathrm{d}t$ et en faisant tendre $\mathrm{d}t$ vers 0 à droite et à gauche, nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = M(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t) + D_m\,\vec{u}$$

✫ forces extérieures

- La liste des forces extérieures est réduite :
  - ➜ force à distance : le poids $\vec{P} = M(t)\,\vec{g}$;
  - ➜ forces de contact :
    - ➜ les forces pressantes exercées par l'atmosphère correspondant à la poussée d'Archimède, donc négligeables ;
    - ➜ les forces de frottement dont l'expression est $-\lambda\,v^2\,\vec{u}_z$.

✯ rassemblement

✧ Le TCI s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = \sum \vec{f}_{\text{ext}}$$

✧ Ce qui donne

$$M(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t) + D_m\,\vec{u} = M(t)\,\vec{g} - \lambda\,v^2\,\vec{u}_z \qquad \rightsquigarrow \qquad M(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t) = -D_m\,\vec{u} + M(t)\,\vec{g} - \lambda\,v^2\,\vec{u}_z$$

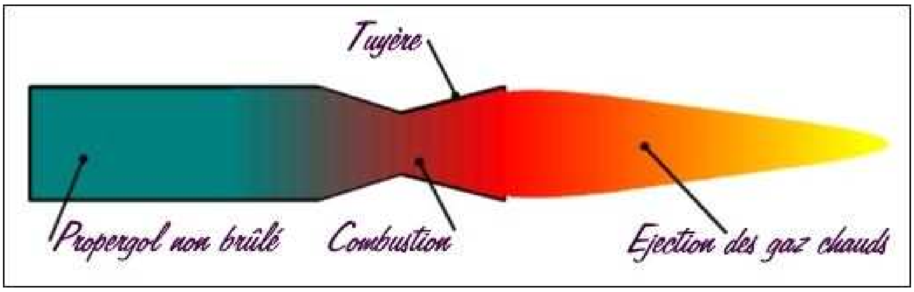
✧ Nous constatons que si nous voulons une accélération $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t)$ vers le haut, comme le poids $M(t)\,\vec{g}$ et les frottements $-\lambda\,v^2\,\vec{u}_z$ sont vers le bas, il faut $-D_m\,\vec{u}$ vers le haut, *i.e.* $\vec{u}$ vers le bas.

✯ résolution ?

✧ En fait la résolution importe peu ici car elle ne correspond à aucune réalité physique hormis, peut-être, les tous premiers mètres lorsque la vitesse est faible.
✧ En effet, dès que la fusée atteint des vitesses importantes (ce qu'elle est obligée de faire pour aller en orbite), les forces de frottements sont non négligeables.
✧ Il faut alors :
- ➜ tenir compte des frottements ;
- ➜ tenir compte de la variation de la pesanteur avec l'altitude ;
- ➜ tenir compte des variations de température (qui change le rendement, donc la poussée, des réacteurs) ;
- ➜ des éventuelles séparations des différents étages de la fusée.

✯ pourquoi la fusée monte-t-elle ?

✧ Regardons ce qui se passe d'un peu plus près au niveau du moteur de la fusée [22].



✧ En fait la combustion du propelgol, mélange de comburant et carburant, provoque une augmentation du volume par réaction chimique et par augmentation de la température.
✧ Cette augmentation de volume est « contrariée » à gauche car les gaz ne peuvent s'échapper que vers la droite.
✧ Il s'en suit une augmentation de la pression là où les gaz ne peuvent s'échapper.
✧ C'est cette augmentation de pression qui crée la force vers la gauche qui permet à la structure de la fusée d'avancer et, donc, de s'élever.

22. Source : `http://argoth.free.fr/images/la_pro16.jpg`

✯ pourquoi la fusée ne tombe-t-elle pas ?

✧ Si nous reprenons le TCI, loi toujours vraie, nous avons

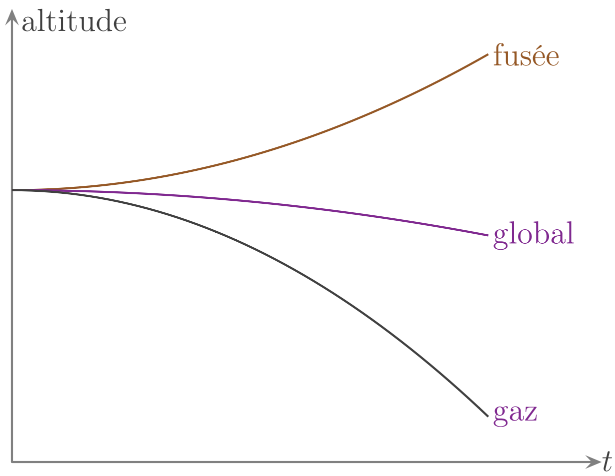
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = M(t)\,\vec{g} - \lambda\,v^2\,\vec{u}_z$$

✧ Autrement dit, les forces extérieures ne font que provoquer un mouvement vers le bas et nous savons déjà que seules les forces extérieures sont à prendre en compte.

✧ Pourquoi donc la fusée ne tombe-t-elle pas ?

✧ Réponse : parce qu'elle tombe ! Ou, plutôt, *globalement* elle tombe.

✧ En effet si nous représentons qualitativement la hauteur de la structure, des gaz brûlés et du centre de masse total en fonction du temps, nous avons quelque chose comme ce qui suit.



✧ Nous voyons alors nettement que, dans l'ensemble, la fusée, et tout ce qu'elle contient, tombe. *Mais* les gaz tombent suffisamment vite pour que la structure puisse avoir un mouvement vers le haut.

III·2·*iv* – lance incendie

✯ description, analyse

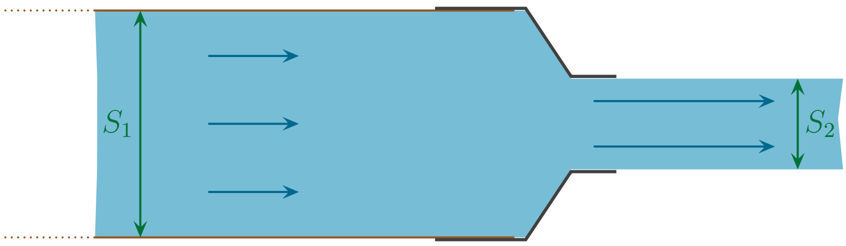
✧ L'expérience courante nous fait savoir que lorsque nous manions un jet d'eau sous pression, il faut bien tenir le lanceur.

✧ Dans le cas des lances incendie, la force à exercer peut devenir très importante.

✧ Nous allons rechercher, dans ce paragraphe, la force à exercer sur un embout tel que celui ci-dessous [23] pour le maintenir immobile. Sur cet embout, l'eau arrive par la gauche et est ejectée vers la droite.

23. Source : `http://www.dumont-securite.fr/media/catalog/product/cache/4/image/9df78eab33525d08d6e5fb8d27136e95/7/7/777744_lance-turbo-twist.jpg`

✧ Schématisons l'ensemble de la manière suivante.



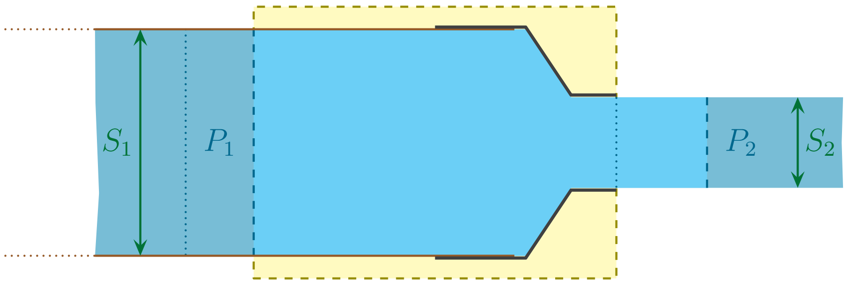
✧ Cherchons la force à exercer sur cette lance (par l'intermédiaire de la jonction au tuyau et du pompier) qui permet de la maintenir immobile.

✧ Les grandeurs pertinentes sont :
- ➜ les sections S_1 et S_2 (pour la géométrie) ;
- ➜ la masse volumique μ pour l'inertie ;
- ➜ le débit volumique D_v.

✫ variation de quantité de mouvement

☯ découpe

✧ Considérons le système fermé $\mathscr{S}$ { tout ce qui est encadré + eau qui circule } de telle sorte que le système, entre t et $t + \mathrm{d}t$, se représente de la manière suivante.



✧ Oui, dans le système, il y a un peu d'air immobile. Cela sera très utile, plus tard, pour déterminer les forces pressantes car là, au moins, la direction sera connue.

décompte

◇ À l'instant t, l'extensivité de la quantité de mouvement (comptée uniquement sur l'axe horizontal) nous permet d'écrire

$$p(\mathscr{S},t) = p^\star(t) + p_1 \qquad \text{avec} \qquad p_1 = \mathrm{d}m\, v_1 = \mu\, D_v\, \mathrm{d}t\, v_1$$

◇ De même à $t + \mathrm{d}t$, nous avons, comme les masses entrantes et sortantes sont les mêmes (régime stationnaire)

$$p(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) = p^\star(t+\mathrm{d}t) + p_2 \qquad \text{avec} \qquad p_2 = \mathrm{d}m\, v_2 = \mu\, D_v\, \mathrm{d}t\, v_2$$

◇ Compte-tenu du caractère stationnaire de l'évolution, cela nous conduit à une variation de quantité de mouvement

$$p^\star(t) = \mathrm{C^{te}} \qquad \leadsto \qquad \mathrm{d}p(\mathscr{S},t) = p(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) - p(\mathscr{S},t) = \mu\, D_v\, (v_2 - v_1)\, \mathrm{d}t$$

◇ De qui donne, avec les grandeurs pertinentes

$$\frac{\mathrm{d}p(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = \mu\, {D_v}^2 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}\right)$$

✯ les forces extérieures

◇ Les forces extérieures qui agissent sur le système sont :
- ➜ force à distance : le poids, vertical donc à ne pas prendre en compte ;
- ➜ force de contact :
  - ➜ les forces pressantes f_2 exercées par l'air sur l'eau au niveau de la sortie ;
  - ➜ les forces pressantes f_2' exercées par l'air sur l'air au niveau de la sortie ;
  - ➜ les forces pressantes f_1 exercées par l'eau sur le système au niveau de l'entrée ;
  - ➜ la force F exercée par le tuyau et le pompier sur l'embout.

◇ Notons que, comme nous avons choisi d'inclure l'embout dans le système, nous n'avons pas à compter les forces pressante que celui-ci exerce sur l'eau.

◇ Au niveau de l'entrée, la force pressante est dirigée vers la droite donc

$$f_1 = +P_1\, S_1$$

◇ En revanche, au niveau de la sortie, elle est dirigée vers la gauche et nous avons

$$f_2 + f_2' = -P_2\, S_2 - P_{\text{atm}}\, (S_1 - S_2)$$

◇ Comme il s'agit d'un jet libre, nous avons $P_2 = P_{\text{atm}}$ ce qui conduit à

$$f_2 + f_2' = -P_2\, S_1$$

✯ rassemblement

◇ Le TCI s'écrit donc

$$\frac{\mathrm{d}p(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = f_1 + f_2 + f_2' + F \qquad \leadsto \qquad \mu\, {D_v}^2 \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}\right) = +P_1\, S_1 - P_2\, S_1 + F$$

◇ Ce qui donne

$$F = \underbrace{\left(P_2 - P_1\right)\,S_1}_{<0} + \underbrace{\mu\,{D_v}^2\,\left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}\right)}_{>0}$$

✧ Pour l'instant, nous ne pouvons pas dire si la force exercée est vers la droite ou vers la gauche.
✧ Cherchons donc à supprimer la grandeur non pertinente P_1 (P_2 est la pression atmosphérique, elle peut donc être considérée comme une grandeur pertinente).

✯ une interprétation bien cachée

☯ réécrire le terme de force

✧ Pour nous débarasser de P_2, utilisons la relation de Bernoulli qui nous dit qu'entre l'entrée et la sortie de l'embout, en négligeant les variations d'altitude

$$\frac{P_1}{\mu} + \frac{{v_1}^2}{2} = \frac{P_2}{\mu} + \frac{{v_2}^2}{2}$$

✧ Ce qui donne, en remplaçant

$$P_1 = P_2 + \frac{{D_v}^2}{2}\,\left(\frac{1}{{S_2}^2} - \frac{1}{{S_1}^2}\right)$$

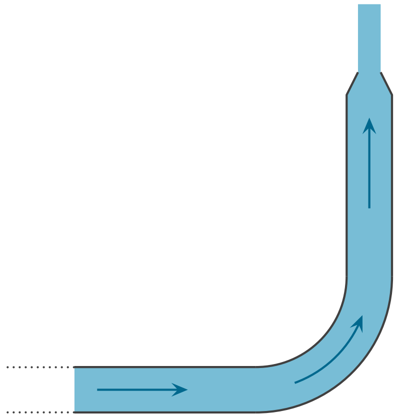
✧ Comme $S_1 > S_2$, nous pouvons constater que $P_1 > P_2$.
✧ Remplaçons et simplifions

$$\begin{aligned}
F &= -\mu\,\frac{{D_v}^2}{2}\,\left(\frac{S_1}{{S_2}^2} - \frac{1}{S_1}\right) + \mu\,\frac{{D_v}^2}{2}\,\left(\frac{2}{S_2} - \frac{2}{S_1}\right)\\
&= -\mu\,\frac{{D_v}^2}{2\,S_1}\,\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2} - 1 - 2\,\frac{S_1}{S_2} + 2\right)\\
&= -\mu\,\frac{{D_v}^2}{2\,S_1}\,\left(1 - 2\,\frac{S_1}{S_2} + \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}\right)\\
&= -\mu\,\frac{{D_v}^2}{2\,S_1}\,\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2
\end{aligned}$$

✧ La force est donc indéniablement négative, *i.e.* dirigée vers la gauche.

☯ un sens de force paradoxal

✧ Contrairement à ce que nous aurions pu penser, l'embout a tendance à partir vers l'avant !
✧ Cela peut paraître étrange car quiconque s'est servi d'un nettoyeur haute pression (pour le jardin ou pour laver sa voiture dans les laveries « automatiques ») sait qu'il y a un fort phénomène de recul de l'embout.
✧ D'où vient la contradiction ?
✧ Le problème vient de la forme du tuyau.
✧ Considérons un coude comme celui-ci



✧ L'eau qui arrive initialement horizontalement est déviée vers le haut. Pour cela, aucune magie : il *faut* qu'elle subisse une force vers le haut et cette force ne peut être exercée par le tuyau.

✧ Oui mais, la troisième loi de Newton marche aussi pour les lances incendies et si l'eau subit, de la part du tuyau, une force vers le haut, c'est qu'elle exerce simulanément une force vers le bas sur tuyau au niveau du coude.

✧ Nous y voilà donc :
- ➜ au niveau du coude, l'eau exerce une force vers le bas ;
- ➜ au niveau de l'embout, l'eau exerce une force vers le haut.

✧ Une façon de se convaincre que l'eau exerce *vraiment* une force vers l'avant au niveau de l'embout consiste à imaginer l'expérience de pensée suivante.

✧ Imaginez l'embout pas encore fixé au tuyau, mais l'eau mise en route. Essayez, mentalement, d'attacher l'embout. Vous sentirez (normalement) que plus vous aller rapprocher l'embout de la lance, plus cela va résister. L'eau va tout faire pour « pousser » l'embout… vers l'avant.

III·3 – Bilans de moment cinétique

III·3·*i* – idée

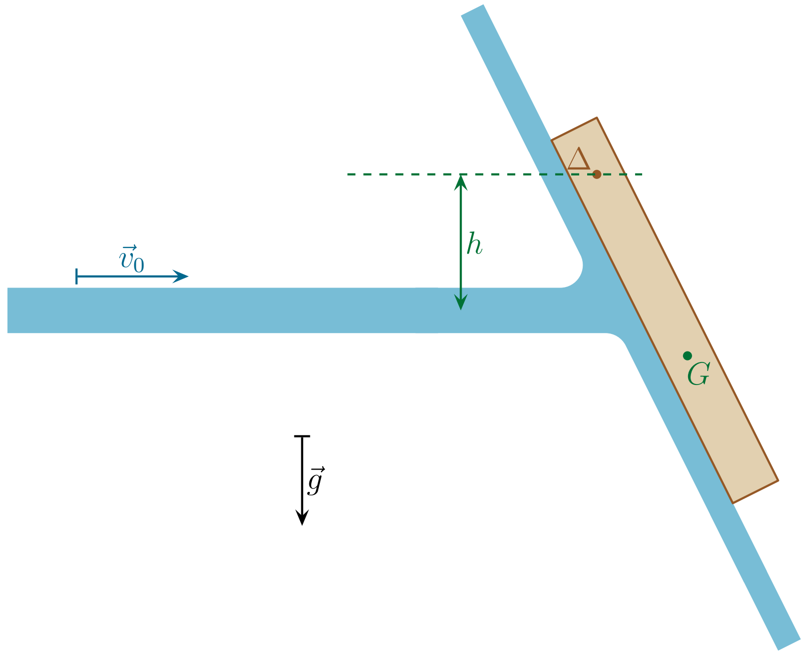
✧ Aucune surprise dans les bilans de moment cinétique. Nous allons procéder de la même manière que pour les bilans énergétiques et les bilans de quantité de mouvement :
- ➜ définition d'un système fermé ;
- ➜ expression des quantités de moment cinétique à t et à $t+\mathrm{d}t$, souvent en décomposant le système en parties idoines ;
- ➜ utilisation du théorème du moment cinétique qui ne fait intervenir que les actions extérieures.

✧ Dans ce paragraphe, comme dans les précédents, aucune loi nouvelle.

III·3·*ii* – équilibre d'une plaque

✯ dispositif, analyse

✧ Commençons par un dispositif simple : celui d'une plaque en rotation autour d'un axe horizontal (un peu comme une chatière) maintenue en équilibre par un jet d'eau.

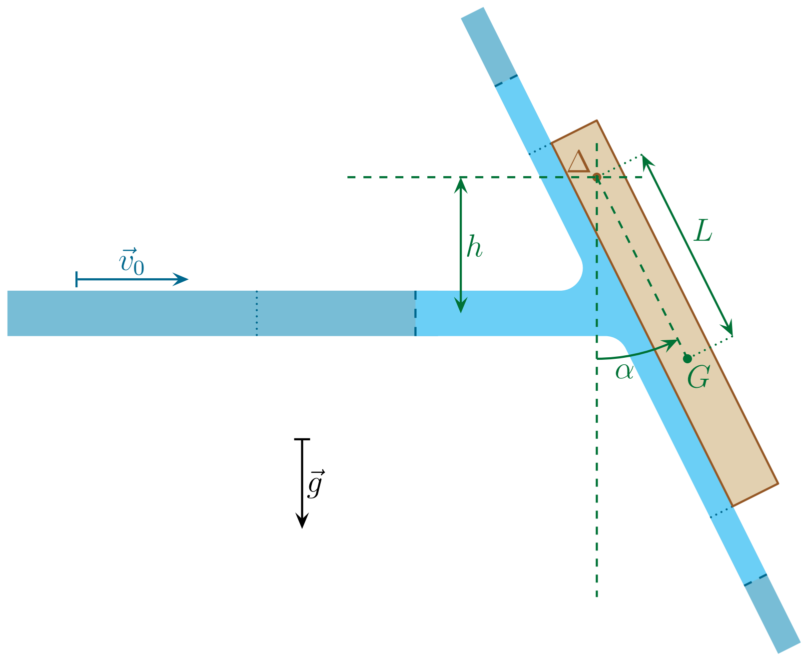


✧ A quel angle va se stabiliser la plaque ?

✯ variation de moment cinétique

☯ découpe

✧ Choisissons, comme système, la planche, ainsi qu'une portion du jet et représentons-le à t et $t + \mathrm{d}t$.



☯ décompte

✧ Faisons un bilan de moment cinétique scalaire par rapport à l'axe de rotation.
✧ À l'instant t, l'extensivité du moment cinétique permet d'écrire en tenant compte, tout de suite, du caractère stationnaire du dispositif,

$$\sigma_\Delta(\mathscr{S},t) = \sigma^\star + \sigma_1$$

✧ Ici nous pouvons aisément déterminer σ_1 avec le bras de levier

$$\sigma_1 = +p_1 \times h \qquad \text{et} \qquad p_1 = \mathrm{d}m\, v_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \sigma_1 = \mu\, S\, v_0\, \mathrm{d}t \times v_0 \times h = \mu\, S\, {v_0}^2\, h\, \mathrm{d}t$$

✧ À $t + \mathrm{d}t$ le moment cinétique s'écrit, toujours exensivité

$$\sigma_\Delta(\mathscr{S},t + \mathrm{d}t) = \sigma^\star + \sigma_2$$

✧ Ici les portions de l'eau qui se sont écoulées sur la plaque ont une vitesse quasiment en direction de l'axe. Nous pouvons donc négliger leur moment cinétique par rapport à Δ.

✧ Il reste donc

$$\sigma_\Delta(\mathscr{S},t + \mathrm{d}t) = \sigma^\star$$

✧ Ainsi la variation s'écrit

$$\mathrm{d}\sigma_\Delta = \sigma_\Delta(\mathscr{S},t + \mathrm{d}t) - \sigma_\Delta(\mathscr{S},t) \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathrm{d}\sigma_\Delta = -\mu\, S\, {v_0}^2\, h\, \mathrm{d}t \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = -\mu\, S\, {v_0}^2\, h$$

✯ les moments exercés

◕ par les forces à distance

✧ Il n'y a que le poids ici.

✧ Négligeons le poids de l'eau (ce qui est cohérent avec le fait qu'elle arrive horizontalement), il reste le poids de la plaque.

✧ Le moment qu'il exerce par rapport à l'axe Δ se calcule facilement avec le bras de levier. Nous avons

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = -M\, g\, L\, \sin\alpha$$

◕ par les forces de contact

✧ Au niveau des forces de contact nous avons :
- ➜ l'action d'axe ;
- ➜ les forces pressantes exercées par l'atmophère partout sauf au niveau du jet ;
- ➜ les forces pressantes exercées par l'eau non contenue dans le système au niveau du jet.

✧ Pour l'action d'axe, comme nous allons négliger les frottements, le moment est nul.

✧ Pour les forces pressantes, nous pouvons les regrouper car, comme il s'agit d'un jet libre, la pression exercée est identique à celle exercée par l'atmosphère.

✧ Dans ces conditions, tout se passe comme si l'ensemble des forces pressantes était exercé par l'atmosphère, *i.e.* tout se passe comme si la résultante était la poussée d'ARCHIMÈDE. . . que nous pouvons négliger.

✯ rassemblement

◕ équation

✧ Le théorème du moment cinétique appliqué au système s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = \sum \mathscr{M}(\vec{f}_{\text{ext}})$$

✧ Ce qui donne, en remplaçant

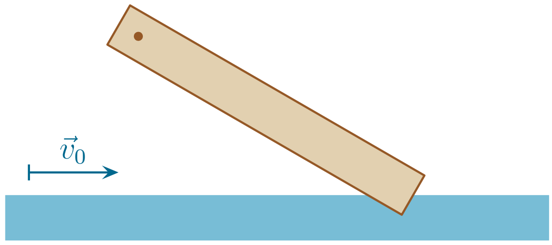
$$-\mu\, S\, {v_0}^2\, h = -M\, g\, L\, \sin\alpha \qquad \rightsquigarrow \qquad \sin\alpha = \frac{\mu\, S\, {v_0}^2\, h}{M\, g\, L}$$

interprétation

◇ La dépendance fonctionnelle du résultat est cohérent car
- ➜ quand μ, v_0, h ou S augmente, cela a tendance à soulever la plaque, *i.e.* à faire augmenter α ;
- ➜ plus M ou L sont grands, plus la plaque a tendance à se rabattre, *i.e.* à faire diminuer α.

◇ Et dans le cas où $\dfrac{\mu\,S\,{v_0}^2\,h}{M\,g\,L} > 1$, que se passe-t-il ?

◇ En fait il ne se passe rien car un tel cas ne peut arriver. En effet, il existe une valeur maximale de α au delà de laquelle la planche n'est plus entièrement dans le jet.



◇ Dans ces conditions, ce qui précède n'est plus valable et donc, en particulier, la relation aussi.

III·3·*iii* – tourniquet hydraulique

✩ dispositif, analyse

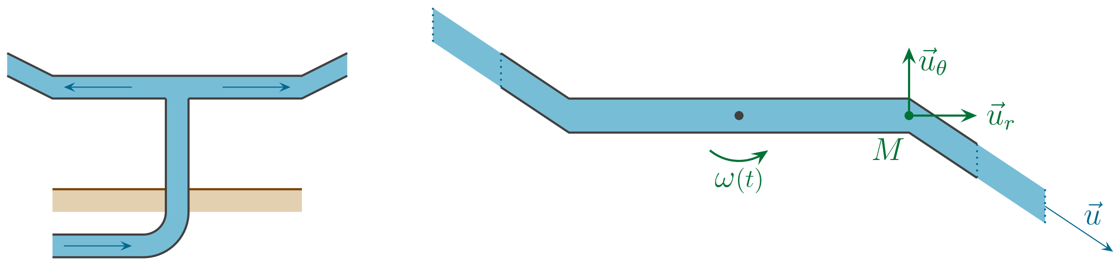
◇ Considérons un tourniquet hydraulique d'arrosage comme celui ci-dessous [24].

◇ Nous allons chercher à modéliser tout cela et à comprendre comment cela marche. Pour ce faire nous regardons un modèle plus simple, avec seulement deux bras [25]

24. Sources :
- ➜ `www.arrosagedujardin.fr/463-768-thickbox/arroseur-rotatif-sectoriel-tango-comfort.jpg`
- ➜ `cdn.gardena.com/dimage.axd/productLarge/ga150-0337/800x500/arroseur-circulaire-pratique-a-reglage-p-697b7fb7.jpg`

25. Source :
`i2.cdscdn.com/pdt2/7/6/9/1/700x700/bou3160142173769/rw/arroseur-rotatif-sur-embase.jpg`

✧ Nous le représenterons, vu de profil et de dessus, de la manière suivante.

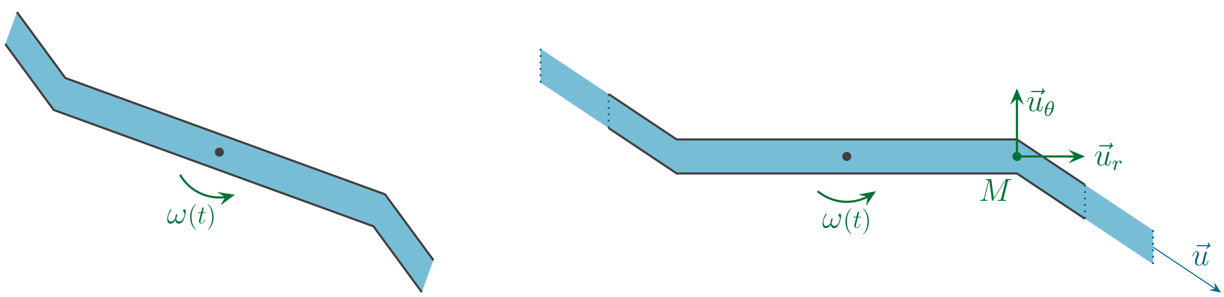


✧ Pour simplifier, faisons comme ci l'eau était éjectée dans un plan horizontal.
✧ En supposant qu'il n'y a pas de frottement, cherchons à quelle équation différentielle obéit la vitesse de rotation $\omega(t)$.

✯ variation de moment cinétique

☯ découpe

✧ Prenons, comme système, le tourniquet ainsi que l'eau contenu dedant à t et celle qui va rentrer durant dt.
✧ Représentons le à t et à $t + \mathrm{d}t$



✧ Faisons un bilan de moment cinétique par rapport à l'axe de rotation du tourniquet.

◕ décompte

✧ À l'instant t, le tourniquet et l'eau contenue dedans, parce qu'elle a un mouvement radial, peut être vu, du point de vue du moment cinétique, comme un solide de moment d'inertie J.

✧ Dans ces conditions, le moment cinétique par rapport à l'axe s'écrit, à t,

$$\sigma_\Delta(\mathscr{S},t) = +J\,\omega(t)$$

✧ À $t+\mathrm{d}t$ de l'eau a été ejectée aux deux extrémités. Pour des raisons de symétrie, le moment cinétique des deux portions sont les mêmes.

✧ Nous avons donc, par extensivité

$$\sigma_\Delta(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) = +J\,\omega(t+\mathrm{d}t) + 2\,\sigma_\Delta(\text{eau})$$

✧ Pour trouver l'expression de $\sigma_\Delta(\text{eau})$, nous allons revenir à la définition du moment cinétique car l'eau éjectée n'a pas la vitesse $\vec{u}$ mais la vitesse $\vec{v}+\vec{u}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'extrémité de l'embout du tourniquet.

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_O(\text{eau}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m\;\big(\vec{v}+\vec{u}\big)\\
&= (L\,\vec{u}_r) \wedge \frac{D_m}{2}\,\mathrm{d}t\;\big(L\,\omega\,\vec{u}_\theta + u\,(\sin\alpha\,\vec{u}_r - \cos\alpha\,\vec{u}_\theta)\big)\\
&= \frac{L\,D_m\,\mathrm{d}t}{2}\;\big(L\,\omega - u\,\cos\alpha\big)\;\vec{u}_z
\end{aligned}$$

✧ Et ainsi

$$\sigma_\Delta(\text{eau}) = \vec{\sigma}_O(\text{eau})\cdot\vec{u}_z = \frac{L\,D_m\,\mathrm{d}t}{2}\;\big(L\,\omega - u\,\cos\alpha\big)$$

✧ En rassemblant nous avons ainsi (n'oublions pas le facteur 2 pour tenir compte des deux bras)

$$\sigma_\Delta(\mathscr{S},t+\mathrm{d}t) - \sigma_\Delta(\mathscr{S},t) = J\,\omega(t+\mathrm{d}t) + L\,D_m\,\mathrm{d}t\;\big(L\,\omega - u\,\cos\alpha\big) - J\,\omega(t)$$

✧ Ce qui donne, en divisant par $\mathrm{d}t$ et en faisant tendre $\mathrm{d}t$ vers 0

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(t) + L\,D_m\;\big(L\,\omega - u\,\cos\alpha\big)$$

✯ les moments exercés

◕ par les forces à distance

✧ Il n'y a ici que le poids qui est vertical, donc de moment nul.

◕ par les forces de contact

✧ Il y a les forces pressantes exercées partout sauf au niveau du tuyau d'entrée. Ces forces pressantes sont exercées soit par l'atmosphère, soit par un jet libre donc, en rajoutant la force verticale $P_{\text{atm}}\,S\,\vec{u}_z$ nous obtenons la poussée d'Archimède, verticale, donc de moment nul.

✧ Une force (fictive) a été rajoutée, il faut donc la retrancher mais comme elle est verticale, son moment est nul.

✧ Enfin la force pressante exercée par l'eau au niveau de l'entrée du tourniquet est aussi une force verticale de moment nul.

✧ Résultat : la résultante de toutes les forces pressantes a un moment nul par rapport à Δ.

✧ Il reste l'action d'axe mais comme la liaison est parfaite, le moment est nul.

✯ rassemblement

☯ équation

✧ Le théorème du moment cinétique s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta(\mathscr{S})}{\mathrm{d}t}(t) = \sum \mathscr{M}(\vec{f}_{\text{ext}})$$

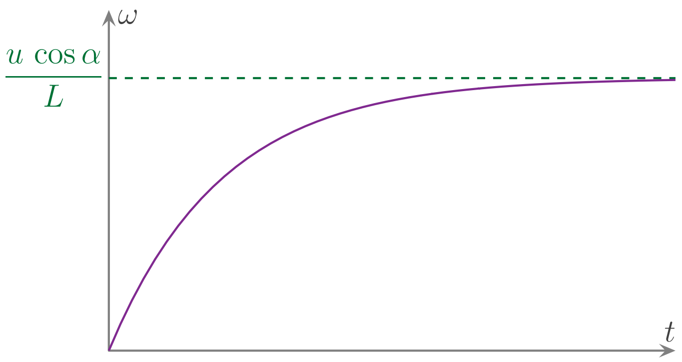
✧ Soit, ici

$$J\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(t) + L\,D_m\,\big(L\,\omega - u\,\cos\alpha\big) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{L^2\,D_m}{J}\,\omega(t) = \frac{L\,D_m\,u\,\cos\alpha}{J}$$

☯ interprétation

✧ Nous avons, ici, une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants dont la solution est en exponentielle croissante.

$$\omega(t) = \frac{u\,\cos\alpha}{L}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad \text{avec} \qquad \tau = \frac{J}{L^2\,D_m}$$



✧ Nous pouvons constater que :
- ➜ plus l'inertie est grande, plus grand est la constante de temps ;
- ➜ plus le débit est grand, plus petite est la constante de temps ;
- ➜ la vitesse limite de rotation est indépendante de l'inertie ;
- ➜ la vitesse limite de rotation est d'autant plus grande que u et $\cos\alpha$ sont grand.

✧ Tout cela est très cohérent.

✧ Le lecteur curieux pourra vérifier que la vitesse limite est atteinte lorsque l'eau est éjectée *radialement* par rapport au référentiel terrestre.

III·4 – Morale

✧ Comme nous l'avons vu pour chacun des bilans (énergie, quantité de mouvement et moment cinétique), il n'y a que les méthodes qui changent, les lois sont connues depuis longtemps.

✧ En revanche, ici plus qu'ailleurs, parce que les dispositifs peuvent être complexes, parce que les approches peuvent être variées, il est très important d'être rigoureux et précis :
- ➜ par une définition claire et explicite du système ;
- ➜ par des schémas détaillés avec les grandeurs utiles représentées ;
- ➜ par une liste claire des actions extérieures (et intérieures dans le cas énergétique) qui s'exercent.

Mouvements de fluides

Au niveau du cours

✯ Programme concerné

◇ Programme de 1re année :
- ➜ III.C.2. Éléments de statique des fluides dans le champ de pesanteur

◇ Programme de 2e année :
- ➜ I.A.3. Bilans mécaniques et thermodynamique
- ➜ I.C.2. Ondes sonores dans les fluides

✯ Les définitions

◇ Sont à savoir :
- ➜ force surfacique, force volumique ;
- ➜ champ de pression, fluide incompressible ;
- ➜ poussée d'ARCHIMÈDE, fluide déplacé ;
- ➜ onde sonore, approximation acoustique, pression acoustique, surpression ;
- ➜ impédance acoustique, énergie volumique sonore ;
- ➜ intensité sonore ;
- ➜ jet libre, relation de BERNOULLI ;
- ➜ fusée, tourniquet hydraulique.

✯ Les grandeurs

◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leurs interprétations :
- ➜ χ_T : coefficient de compressibilité isentropique en m^{-3} ;
- ➜ $c = \dfrac{1}{\sqrt{\chi_T\,\mu_0}}$: célérité des ondes sonores en $\mathrm{m.s}^{-1}$;
- ➜ D_m : débit massique en $\mathrm{kg.s}^{-1}$;
- ➜ D_V : débit volumique en $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$.

✯ Les lois

◇ Sont à connaître :
- ➜ connaître l'équivalent volumique des forces de pression, du poids, de la force d'inertie d'entraînement dans le cas particulier d'une rotation uniforme ;
- ➜ connaître la relation fondamentale de la statique des fluides ;
- ➜ connaître les conditions aux limites pour un champ de pression ;
- ➜ connaître et savoir démontrer l'expression de la pression au sein d'un fluide incompressible ;
- ➜ connaître l'expression de la poussée d'ARCHIMÈDE ainsi que les conditions d'utilisation ;
- ➜ connaître l'expression de l'énergie volumique cinétique, potentielle et totale sonore ;
- ➜ connaître la pression dans un jet libre ;
- ➜ connaître la relation de BERNOULLI avec ses restrictions.

✯ la phénoménologie

◇ Connaître / savoir :
- ➜ connaître l'origine physique des forces volumique et surfacique au sein d'un fluide ;

- ➜ connaître l'origine physique de la poussée d'Archimède ;
- ➜ savoir ce que devient la poussée d'Archimède lorsque les conditions d'utilisation ne sont plus respectées ;
- ➜ connaître la phénoménologie des ondes sonores ;
- ➜ connaître la vitesse du son pour les milieux usuels : air, eau, métal ;
- ➜ connaître les raisons et les conséquences de l'approximation acoustique ;
- ➜ savoir justifier l'utilisation de χ_T ;
- ➜ connaître les ordres de grandeurs d'intensité sonore.

Au niveau des savoir-faire

✯ exercices classiques

✧ Savoir refaire / retrouver :

- ➜ déterminer le champ de pression pour l'atmosphère isotherme ;
- ➜ retrouver l'équation de propagation sonore dans un tube de section constante ;
- ➜ savoir retrouver les coefficients de réflexion et de transmission entre deux fluides dans un tuyau de section constante ;
- ➜ savoir faire un bilan d'énergie cinétique, d'énergie interne, de quantité de mouvement et de moment cinétique pour un dispositif avec un fluide en mouvement ;
- ➜ savoir déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position d'une fusée ;
- ➜ savoir faire un bilan de quantité de mouvement pour une lance à incendie ;
- ➜ savoir déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire d'un tourniquet hydraulique.