Mécanique

Chapitre 6

Écoulements de fluides

Écoulements de fluides

Après avoir vu quelques mouvements particuliers de fluide dans le chapitre précédent, nous allons désormais nous intéresser à l'aspect *local* des écoulements. Après avoir déterminé les équations du mouvement en terme de champ de vitesse, nous déterminerons explicitement ce dernier dans quelques cas particuliers : pour des écoulements dits *visqueux* dans la première partie et pour des écoulements *parfaits* dans la deuxième.

Ces calculs ne devront pas faire oublier qu'ils ne s'agit là que de cas **très** particuliers et que, dans le cas général, il est impossible de trouver analytiquement l'expression du champ de vitesse d'un écoulement.

Table des matières

Biographies succinctes 6

I Écoulements visqueux 9
I·1 Actions au sein d'un fluide . . . 9
I·1·*i* rappel du modèle . . . 9
I·1·*ii* modélisation des forces tangentielles : fluide newtonien . . . 9
situation canonique : écoulement laminaire 1D . . . 9
de l'interprétation à l'expression . . . 10
I·1·*iii* viscosité dynamique . . . 11
unité . . . 11
valeurs . . . 11
I·1·*iv* équivalent volumique . . . 11
résultante des forces de viscosité . . . 11
situation canonique : écoulement laminaire 1D . . . 12
I·2 Équation de NAVIER – STOKES . . . 13
I·2·*i* le PFD renommé . . . 13
énoncé . . . 13
« démonstration » . . . 13
I·2·*ii* les conditions aux limites . . . 14
constatation expérimentale . . . 14
traduction technique . . . 14
I·2·*iii* 1re interprétation du nombre de REYNOLDS : accélération convective et effet de viscosité . . . 14
termes de l'équation de NAVIER – STOKES . . . 14
viscosité cinématique . . . 15
I·3 Écoulement ce COUETTE plan . . . 16
I·3·*i* étude . . . 16
dispositif . . . 16
première simplification . . . 16
mise en équation . . . 17
le régime stationnaire . . . 17
I·3·*ii* 2e interprétation du nombre de REYNOLDS : épaisseur de la couche limite . . . 18
deux situations équivalentes . . . 18
où l'équation de diffusion refait une apparition . . . 19
exemple numérique . . . 20
I·4 Écoulement de POISEUILLE plan . . . 21
I·4·*i* qu'est-ce qu'un écoulement de POISEUILLE ? . . . 21
I·4·*ii* écoulement de POISEUILLE plan . . . 21
dispositif, analyse . . . 21
mise en équation . . . 22
résolution . . . 22
profil des vitesses . . . 23
débit . . . 23
interprétation . . . 24
I·4·*iii* 3e interprétation du nombre de REYNOLDS : transport de la quantité de mouvement . . . 24
deux types de transport . . . 24
transport convectif sur l'exemple de POISEUILLE plan . . . 25

		transport diffusif sur l'exemple de Poiseuille plan	25
		comparaison	26
		un terme diffusif étrange	26
I·5	écoulement de Poiseuille cylindrique		27
	I·5·*i*	champ des vitesses	27
		dispositif, analyse	27
		liminaires	27
		mise en équation par le PFD – version locale	28
		mise en équation par le TCI – version globale	30
	I·5·*ii*	quelques aspects de l'écoulement de Poiseuille cylindrique	31
		débit volumique	31
		pourquoi une dépendance en R^4 ?	32
		exemple qualitatif	32
		une nouvelle analogie diffusive	32
		puissance perdue par viscosité	33
II	**Écoulements parfaits**		**35**
II·1	Modèle de l'écoulement parfait		35
	II·1·*i*	définition	35
	II·1·*ii*	en pratique	35
II·2	Équation d'Euler		35
	II·2·*i*	à partir de l'équation de Navier – Stokes	35
		énoncé	36
		« démonstration »	36
	II·2·*ii*	lecture	36
		équation non linéaire	36
		retrouver la RFSF	37
		tout est désormais possible	37
II·3	Premières applications		37
	II·3·*i*	surface libre d'un tourbillon	37
		dispositif, modèle	37
		idée, plan de bataille	39
		pour $r < a$	39
		pour $r > a$	40
		détermination complète du champ de pression	41
		surface libre	42
		retour sur l'accélération particulaire	42
	II·3·*ii*	pression et forme des lignes de courant	43
		répartition de pression	43
		effet Coanda	44
	II·3·*iii*	pression dans un jet libre	45
		jet libre	45
		résultat utile	45
		jet libre	46
II·4	Ondes sonores, l'écho		46
	II·4·*i*	rappel à la loi	46
	II·4·*ii*	linéarisation	46
		approximation acoustique	46
		l'accélération convective est négligeable	47
		l'équation d'Euler	47

conservation de la masse 47
loi de comportement phénoménologique 48
II·4·*iii* équation de propagation 48
équations de couplage 48
équation de propagation en surpression 48
équation de propagation en vitesse particulaire 49
II·5 Relations de Bernoulli 49
II·5·*i* écoulement irrotationnel et homogène 49
énoncé 49
démonstration 50
II·5·*ii* écoulement non irrotationnel et homogène 50
énoncé 50
démonstration 51
démonstration sans l'homogénéité 52
remarques 53
généralisation 53
II·5·*iii* idoinotons vérificateurs d'hypothèses 53
importance du homogène 53
importance du irrotationnel 54
II·5·*iv* limite de vitesse pour un écoulement incompressible 55
II·6 Applications des relations de Bernoulli 56
II·6·*i* effet Venturi 56
qualitativement 56
débimètre 57
II·6·*ii* vidange d'un réservoir : formule de Torricelli 60
expérience 60
cas quasi-stationnaire 61
vérification de la quasi-stationnarité 62
II·6·*iii* tube de Pitot 63
dispositif 63
modélisation 63
pressions en A et B 64
mesure de vitesse 64
II·7 Régime non stationnaire 65
II·7·*i* idée 65
II·7·*ii* oscillations dans un tube en U 65
dispositif 65
équation d'évolution 65
discussion 68

Fiche de révision **69**

Biographies succintes

Evangelista Torricelli
(1608 Faenza – 1647 Florence)

Fils d'un modeste artisan, Evangelista étudie pendant deux ans à l'école des Jésuites avant d'être envoyé à Rome sur recommandation de ses professeurs. Il suit alors les cours d'un ancien élève de Galilée, Castelli. Ce dernier remarque le talent d'Evangelista et le prend comme secrétaire avant de le proposer à Galilée comme assistant personnel. En 1641 le savant accepte mais meurt en 1642. C'est alors Evangelista qui prend sa place comme philosophe et mathématicien privé du grand duc de Toscane, ce qu'il restera jusqu'à la fin de sa vie.

Henri Pitot
(1695 Aramon, Languedoc – 1771 Aramon)

Alors qu'il n'aime pas les études, Henri rentre en tant qu'assistant dans le laboratoire de Réaumur à Paris. Il s'intéresse alors aux mathématiques et à la mécanique et en vient à diriger la construction d'un canal. Par la suite il continue sa carrière d'ingénieur en se préoccupant à la fois des aspects théoriques et pratiques. Il invente pour le cela le tube qui porte son nom.

Leonhard Euler
(1707 Bâle – 1783 Saint-Pétersbourg)

Fils de pasteur, Leonhard ne rencontre que peu de difficulté scolaire puisqu'il rentre à l'université de Bâle à 14 ans et publie son premier article à 19 ans. Aidé par son professeur, Johann Bernoulli dont le fils n'est autre que Daniel, il rejoindra ce dernier à l'université de Saint-Pétersbourg pour y effectuer l'essentiel de sa carrière (il passera quelques années à Berlin aussi). Leonhard est à la fois un grand physicien et un des plus grands mathématiciens de l'histoire. Il travaillera entre autre sur l'optique, l'hydrodynamique et la mécanique.

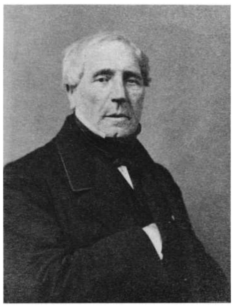
Giovanni Battista Venturi
(1746 Reggio Emilia – 1822 Reggio Emilia)

Giovanni est ordonné prêtre en 1769 et commence aussitôt à enseigner la logique. Vers 1773 il devient professeur de géométrie et philosophie à l'université de Modène puis, en 1776, il devient professeur de physique. Il s'installe à Paris à partir de 1796 et c'est là qu'il écrit un ouvrage où il décrit l'effet qui porte son nom.

Claude Louis Marie Henri Navier
(1785 Dijon – 1835 Paris)

Claude, jeune, suit son père qui travaille à l'assemblé constituante mais ce dernier meurt en 1793. Claude est alors pris en charge par son oncle ingénieur. Il rentre à l'école Polytechnique en 1802 et à l'école des Ponts et Chaussées en 1804. Ses résultats sur l'application des mathématiques aux sciences de l'ingénieur, notamment en ce qui concerne la déformation élastique des solides, lui permettent d'obtenir, en 1819, une charge de cours à l'école des Ponts et Chaussées. Il se tourne alors vers l'écoulement des liquides et découvre en 1822 l'équation qui porte son nom et qui sera redécouverte indépendamment par Stokes en 1845.

Jean-Louis Marie Poiseuille
(1797 Paris – 1869 Paris)



Fils d'un charpentier, Jean-Louis est élève de l'école Polytechnique de 1815 à 1816. Sa thèse *Recherches sur la force aortique du coeur* soutenue en 1828 est très remarquée et même couronnée par la médaille d'or de l'Académie des Sciences car c'est dans celle-ci que, pour la fois, est mesurée la pression sanguine. Dans la suite, Jean-Louis s'intéresse principalement à la physiologie de la circulation sanguine. Cela l'amène non seulement à s'intéresser à la physique des écoulements. En 1842 il est élu à l'Académie de médecine.

Heinrich Gustav Magnus
(1802 Berlin – 1870 Berlin)

Fils d'un riche marchant, l'un des cinq frères d'Heinrich (Eduard 1799 - 1872) deviendra un célèbre peintre. Heinrich étudie à Berlin, Stokholm puis à Paris avec Gay-Lussac. Il obtient son doctorat en 1831 et devient aussitôt présentateur. Il est ensuite nommé assistant professeur puis professeur en 1834 et 1845. Heinrich commence par s'intéresser à la chimie (sels de Magnus) avant d'étudier les gaz, la vapeur d'eau, l'induction, l'aérodynamique, … Il prend sa retraite en 1869.

George Stokes
(1819 Sligo, Islande – 1903 Cambridge)

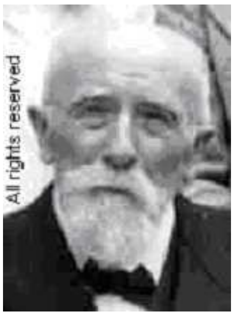
George fait ses études à Cambridge où il obtient son diplôme en 1841 pour y devenir professeur de mathématique en 1849. Son activité de recherche se concentre d'abord sur l'hydrodynamique des fluides visqueux. Il s'intéresse après à la propagation du son et de la lumière. Il explique le phénomène de fluorescence vers 1852. Il est à noter que sa productivité de chercheur a notablement diminué à partir de 1857, année de son mariage.

Osborne Reynolds

(1842 Belfast – 1912 Watchet, Grande-Bretagne)

Le père d'Osborne fut, d'après ce dernier, son premier professeur. Directeur d'école et prêtre, il a déposé de nombreux brevets pour améliorer des machines agricoles. Osborne fait ses études à Cambridge et devient quelques temps après l'un des premiers « professeurs en ingénieurie » dans une nouvelle école qui deviendra l'université de Manchester. En parallèle de ses cours, il fait des recherches en mécaniques des fluides et c'est en 1883 qu'il publie un article dans lequel il introduit le nombre qui porte son nom.

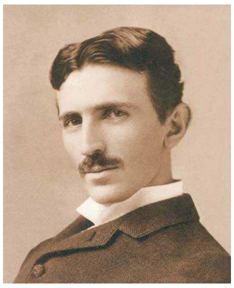
Maurice Couette



(1858 Tours – 1943 Dijon)

Maurice né en 1858 et est le seul fils de la famille dont le père est marchand de vêtements. Il fait ses études chez les frères des écoles chrétiennes et obtient deux baccalauréats (en science et en humanités) la même année 1874. Il suit ensuite deux licences de mathématiques et de physique qu'il obtient en 1877 et 1879. En 1881 il s'inscrit à la Sorbonne pour préparer l'agrégation. Dans la suite il enseigne un peu partout et notamment dans l'université catholique de l'ouest (Anger). Il sera membre de la société de physique.

Henri Coanda



(1886 Bucarest – 1972 Bucarest)

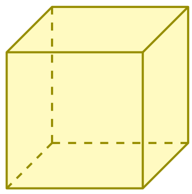
Le père d'Henri est général, professeur de mathématiques et attaché d'embassade en France. C'est pourquoi Henri commence ses études en France mais est envoyé à 13 ans en Roumanie dans un lycée militaire. Sa passion pour tout ce qui touche au vent et à l'aviation le conduit à contruire un avion-fusée pour l'armée en 1905. Toutefois il quitte l'armée et voyage à travers le monde. À son retour, il reprend des études d'ingénieur à Supaéro et en sort major en 1910. Il travaillera ensuite dans l'aviation jusqu'en 1969 où il retourne en Roumanie pour la fin de sa vie.

I – Écoulements visqueux

I·1 – Actions au sein d'un fluide

I·1·*i* – rappel du modèle

✧ Considérons une particule de fluide.



✧ Cette particule de fluide est soumise à deux types de forces :
- ➜ les forces à distances ;
- ➜ les forces de contact.

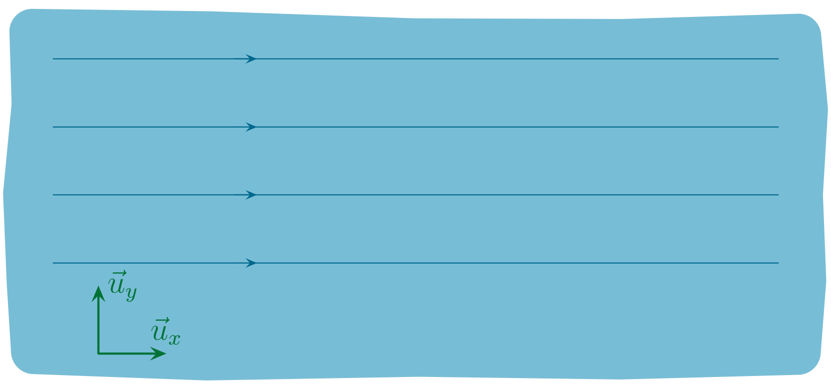
✧ En ce qui concerne les forces à distances qui sont « naturellement » volumique, nous trouvons :
- ➜ la pesanteur ;
- ➜ la force de Laplace ;
- ➜ par extension, les forces d'inertie.

✧ Au niveau des forces de contact, nous avons :
- ➜ les actions normales, pressantes, dont la *résultante* s'écrit $\mathrm{d}\vec{f}_{\text{press}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P\,\mathrm{d}\tau$;
- ➜ les action tangentielles associées au frottement.

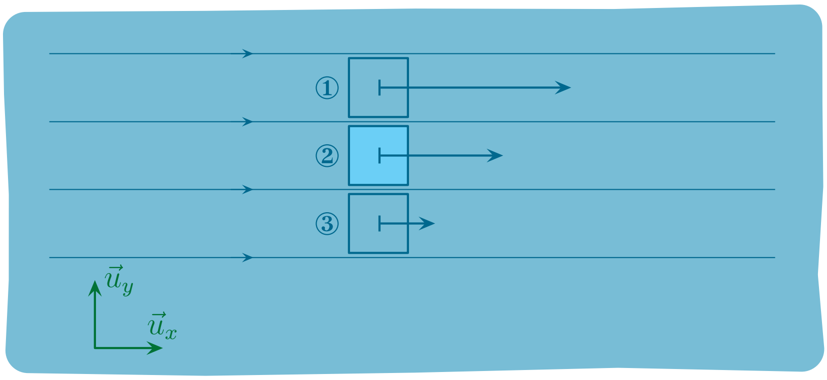
I·1·*ii* – modélisation des forces tangentielles : fluide newtonien

✫ situation canonique : écoulement laminaire 1D

✧ Considérons un écoulement laminaire unidimensionnel, *i.e.* un écoulement où toutes les lignes de courant sont parallèles et ne dépendent que d'une seule coordonnée cartésienne de l'espace du type $\vec{v}(M,t) = v(y,t)\,\vec{u}_x$.



✧ Dans ces conditions, nous pouvons isoler, par la pensée, une particule de fluide (la ② sur le schéma ci-dessous) et regarder ce qui va se passer.



◇ Imaginons que, comme le représente la figure ci-dessus, la vitesse soit croissante avec y. Alors :
- ➜ la particule de fluide ①, qui a une vitesse plus grande que la ②, va *entraîner* cette dernière vers l'avant, *i.e.* elle va exercer une force suivant $+\vec{u}_x$;
- ➜ la particule de fluide ③, qui a une vitesse plus faible que la ②, va *ralentir* cette dernière et, donc, va exercer une force suivant $-\vec{u}_x$.

◇ Au delà de cette considération qualitative, nous pouvons dire, de manière naturelle, que la force de frottement entre particules de fluide dépend :
- ➜ de l'écart de vitesse entre les deux particules, *i.e.* de la manière dont varie la vitesse dans l'espace ;
- ➜ de la surface de contact entre les deux particules de fluide (plus la surface est grande, plus l'interaction l'est).

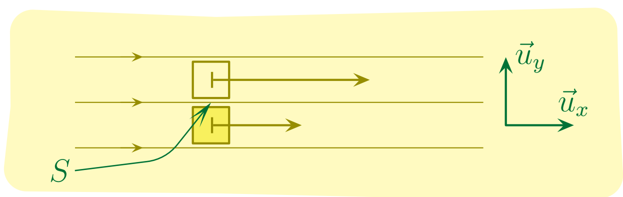
◇ Ensuite, nous pouvons naturellement faire l'approximation que cette dépendance, au moins au premier ordre, est linéaire. Autrement dit, nous pouvons dire que la force est *proportionnelle* à la variation spatiale de la vitesse et à la surface de contact entre les deux particules de fluide.

✯ de l'interprétation à l'expression

Dans la situation représentée ci-dessous, la force que la particule du haut exerce sur celle du bas s'écrit

$$\vec{f}_{\mathrm{h}\to\mathrm{b}} = +\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}\,S\,\vec{u}_x \qquad \text{où :}$$

- ➜ η est la *viscosité dynamique* (en Pl) ;
- ➜ S est la surface de contact entre les deux particules de fluide.



Attention ! La forme exacte de la force n'est pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver car elle dépend :
- ➜ du repérage ;
- ➜ de qui exerce une force sur qui.

Un fluide tel que les forces tangentielles qui s'exercent entre particules de fluide s'écrivent « $\eta\,S\,\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ » est dit *newtonien*.

✧ En fait la plupart des fluides usuels sont newtoniens : l'eau, l'air, l'huile, le glycérol...

I·1·*iii* – viscosité dynamique

✯ unité

η est appelé la *viscosité dynamique*.

✧ η est aussi appelée plus simplement « *viscosité* », l'ajout du qualificatif « dynamique » n'étant là que pour la discrimination avec « viscosité cinématique » que nous verrons plus loin.

L'unité de la viscosité dynamique η est le *poiseuille*, noté Pl ou, parfois, le Pa.s.

✧ Pour le montrer, partons de l'expression de la force, sachant qu'une force est une pression multipliée par une surface.

$$f \equiv \eta \times \frac{\partial v_x}{\partial y} S \equiv P\,S \qquad \rightsquigarrow \qquad \eta \times \frac{\partial v_x}{\partial y} \equiv P \qquad \overset{\eta}{\rightsquigarrow} \qquad \equiv P \times \frac{\ell}{v} \equiv P\,\tau$$

✧ Rappelons aussi, pour la culture, que la force de traînée exercée par un fluide sur une sphère s'écrit (formule de Stokes)

$$\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,r\,\vec{v} \qquad \text{avec :}$$

- ➜ r le rayon de la sphère ;
- ➜ $\vec{v}$ la vitesse de la sphère par rapport au fluide ;
- ➜ η la viscosité dynamique.

✯ valeurs

✧ Le poiseuille est une « grande » unité car, un peu comme le tesla, l'ordre de grandeur usuel est plutôt en sous-multiple du poiseuille.

fluide	air	eau	huile	glycérol
η (Pl)	2.10^{-5}	10^{-3}	0,1	1

I·1·*iv* – équivalent volumique

✯ résultante des forces de viscosité

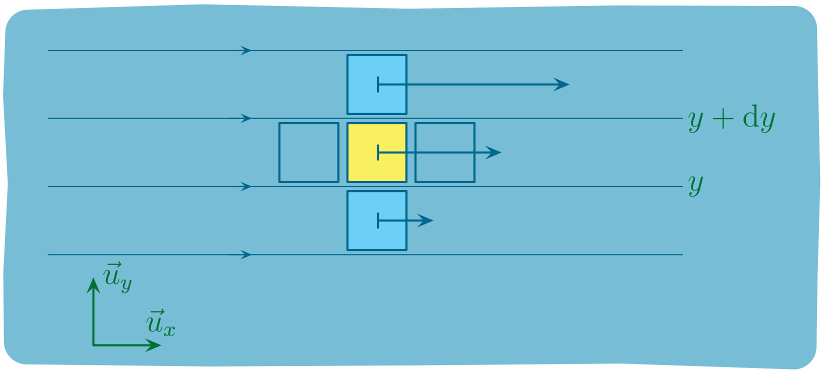
La résultante des forces de viscosité qui s'exerce sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$ dans un écoulement incompressible s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{f}_{\text{visc}} = \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}\,\mathrm{d}\tau$$

✯ situation canonique : écoulement laminaire 1D

✧ Nous allons démontrer le résultat précédent dans un cas particulier et admettre la généralisation.

✧ Reprenons l'écoulement laminaire unidimensionnel précédent et cherchons la *résultante* des forces de viscosité s'exerçant sur une particule de fluide.



✧ Intéressons-nous à la particule de fluide en jaune et cherchons la résultante des forces de viscosité s'exerçant sur elle.

✧ Il y a, *a priori*, 6 particules de fluide qui touchent PF, donc qui exercent des forces sur elle :
- ➜ les particules de fluide devant (contact en $x+\mathrm{d}x$) et derrière (contact en x) vont à la même vitesse (puisque celle-ci ne dépend que de y), donc elles ne peuvent pas exercer de force de frottement sur PF ;
- ➜ il en est de même avec les particules de fluide à droite (contact en $z+\mathrm{d}z$) et à gauche (contact en z) ;
- ➜ seules les deux particules de fluide coloriées en bleu clair au-dessus (contact en $y+\mathrm{d}y$) et au-dessous (contact en y) exercent des forces.

✧ En notant ① et ② les particules de fluide au-dessus et en-dessous, nous avons

$$\mathrm{d}\vec{f}_{\text{visc}} = \mathrm{d}\vec{f}_{1\,\to\text{PF}} + \mathrm{d}\vec{f}_{2\,\to\text{PF}}$$

✧ Or, en faisant très attention aux signes des forces, nous avons :

$$\mathrm{d}\vec{f}_{1\,\to\text{PF}} = +\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\vec{f}_{1\,\to\text{PF}} = -\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_x$$

✧ Étant donné que la surface de contact sur le dessus et le dessous est la même et s'écrit $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{f}_{\text{visc}} &= \mathrm{d}\vec{f}_{1\,\to\text{PF}} + \mathrm{d}\vec{f}_{2\,\to\text{PF}} \\
&= +\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_x - \eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_x \\
&= \eta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y+\mathrm{d}y) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y)\right)\,\vec{u}_x \\
&= \eta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)(y)\,\mathrm{d}y\,\vec{u}_x \\
&= \eta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \times \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y)\,\vec{u}_x
\end{aligned}$$

✧ Ce qui donne bien

$$\mathrm{d}\vec{f}_{\text{visc}} = \eta\,\mathrm{d}\tau \times \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y)\,\vec{u}_x$$

I·2 – Équation de Navier – Stokes

I·2·*i* – le PFD renommé

✭ énoncé

Équation de Navier – Stokes

Dans un fluide newtonien, pour un écoulement incompressible, le champ de vitesse obéit aux équations (équivalentes) suivantes :

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{f}_{\text{v,tot}} + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{f}_{\text{v,tot}} + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{f}_{\text{v,tot}} + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

➜ μ est la masse volumique ;
➜ $\vec{f}_{\text{v,tot}}$ est la densité volumique de force à distance (poids, électromagnétisme, inertie) ;
➜ η est la viscosité dynamique.

✭ « démonstration »

✧ La démonstration est quasiment immédiate.
✧ Écrivons le PFD sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$.
✧ Cette particule de fluide subit les forces :
  ➜ force à distance $\mathrm{d}\vec{f}_{\text{dist}} = \vec{f}_{\text{v,tot}}\,\mathrm{d}\tau$;
  ➜ force de contact normales (les forces pressantes) $\mathrm{d}\vec{f}_{\text{press}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$;
  ➜ force de contact tangentielles (les forces de viscosité) $\mathrm{d}\vec{f}_{\text{visc}} = \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}\,\mathrm{d}\tau$.
✧ Le PFD donne donc

$$\mathrm{d}m\,\widetilde{\vec{a}} = \mathrm{d}\vec{f}_{\text{press}} + \mathrm{d}\vec{f}_{\text{dist}} + \mathrm{d}\vec{f}_{\text{visc}}$$

✧ Ce qui s'écrit, en remplaçant

$$\mu\,\mathrm{d}\tau\,\widetilde{\vec{a}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau + \vec{f}_{\text{v,tot}}\,\mathrm{d}\tau + \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}\,\mathrm{d}\tau$$

✧ Ce qui donne bien le résultat en simplifiant par $\mathrm{d}\tau$ car l'accélération lagrangienne n'est autre que la dérivée particulaire de la vitesse

$$\widetilde{\vec{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}$$

I·2·*ii* – les conditions aux limites

✧ Nous avons déjà rencontré les conditions aux limites *naturelles* qui ne faisaient que traduire l'imperméabilité des parois.

✧ Pour les fluides newtoniens, il existe d'autres conditions aux limites.

✯ constatation expérimentale

> Les particules de fluide d'un fluide newtonien adhèrent aux parois.

✧ Il s'agit là d'une constatation expérimentale, nous ne pouvons rien y faire, si ce n'est l'admettre et le traduire analytiquement.

✯ traduction technique

✧ La traduction est simple : puisque la particule de fluide adhère à la paroi, cela signifie qu'elle (la particule de fluide) a tout le temps la même vitesse que la paroi.

> Pour un fluide newtonien, en un point I au niveau d'une paroi
> $$\vec{v}(I \in \text{fluide})_{|\mathscr{R}} = \vec{v}(I \in \text{paroi})_{|\mathscr{R}}$$

✧ Très fréquemment (mais pas systématiquement) la paroi sera immobile, ce qui donnera

> Pour un fluide newtonien, en un point I au niveau d'une paroi immobile
> $$\vec{v}(I \in \text{fluide})_{|\mathscr{R}} = \vec{0}$$

I·2·*iii* – 1re interprétation du nombre de Reynolds : accélération convective et effet de viscosité

✯ termes de l'équation de Navier – Stokes

✧ Reprenons l'équation de Navier – Stokes

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{f}_{\text{v}} + \eta\, \vec{\Delta}\, \vec{v}$$

✧ Il y a deux termes tout particuliers :

➜ $\mu \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$ est l'accélération convective ;

➜ $\eta\, \vec{\Delta}\, \vec{v}$ est l'action de viscosité.

> Le nombre de Reynolds peut s'écrire
> $$\text{Re} = \frac{\text{accélération convective}}{\text{action de viscosité}}$$

✧ La relation précédente est à prendre, bien sûr, en terme d'ordre de grandeur.

✧ Nous avons ainsi

$$\begin{cases} \text{accélération convective} & = \mu \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} \equiv \mu \times V \times \dfrac{V}{L} \\ \text{action de viscosité} & = \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v} \equiv \eta\,\frac{V}{L^2} \end{cases}$$

✧ En regroupant, cela donne

$$\frac{\text{accélération convective}}{\text{action de viscosité}} = \frac{\mu \times V \times \dfrac{V}{L}}{\eta\,\dfrac{V}{L^2}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\text{accélération convective}}{\text{action de viscosité}} = \frac{\mu\,V\,L}{\eta} = \text{Re}$$

✧ Nous pouvons donc dire que si Re est petit, alors l'action de viscosité prédomine sur l'accélération convective, ce qui se traduit par

$$\left\|\mu\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\| \ll \left\|\eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}\right\|$$

✯ viscosité cinématique

> La *viscosité cinématique* ν est définie par
> $$\mu \triangleq \frac{\eta}{\mu}$$

✧ Dans ces conditions nous avons immédiatement

> Le nombre de REYNOLDS s'écrit
> $$\text{Re} = \frac{V\,L}{\nu}$$

✧ L'intérêt de la viscosité cinématique provient du fait que, quand le fluide change, la viscosité dynamique η change en même temps que la masse volumique μ. En d'autre termes, il n'est pas facile de changer notablement η sans changer μ et réciproquement et c'est pourquoi il vaut mieux parler du rapport $\nu = \dfrac{\eta}{\mu}$.

✧ Nous avons ainsi

fluide	η (Pl)	ν (m^2.s^{-1})
eau	10^{-3}	10^{-6}
air	1,8.10^{-5}	1,4.10^{-5}

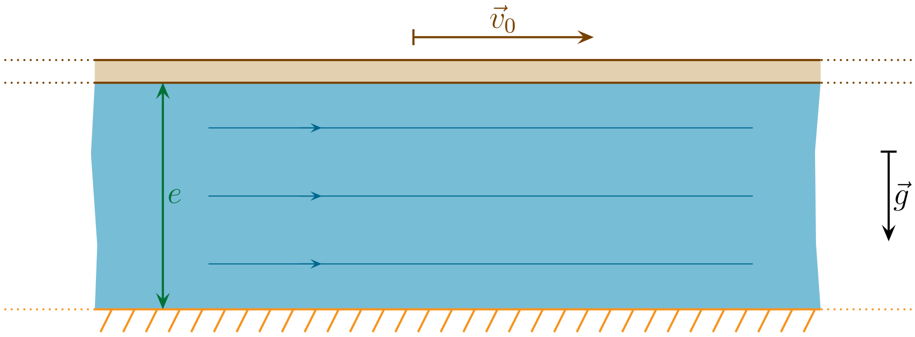
✧ Nous voyons donc que, bien que l'eau soit considérablement plus visqueuse que l'air, c'est quand même elle qui va avoir tendance à créer des écoulement à grand nombre de REYNOLDS, *i.e.* des écoulement où la viscosité est négligeable. Cela provient, évidemment, de son inertie, qui est, elle aussi, énorme.

I·3 – Écoulement ce COUETTE plan

I·3·*i* – étude

✯ dispositif

✧ Considérons deux plans infinis, l'un immobile et l'autre mobile, entre lesquels s'écoule un fluide.

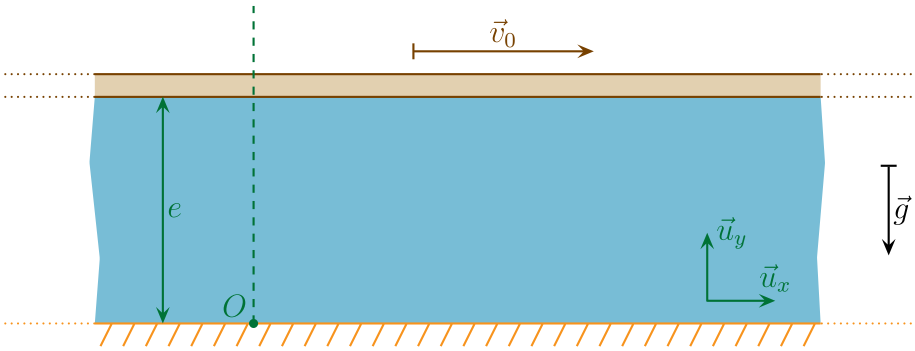


✧ Cette situation peut fort bien correspondre à un zoom sur l'espace entre deux pièces mécaniques lubrifiées.

✧ Nous allons chercher, ici, l'équation régissant le champ de vitesse et, si possible, nous allons trouver explicitement celui-ci.

✧ Au point de vue des grandeurs pertinentes nous avons :
- ➜ l'inertie μ ;
- ➜ la géométrie e ;
- ➜ les actions g pour la pesanteur, η pour la viscosité ;
- ➜ v_0 pour les contraintes.

✧ N'oublions pas de repérer le tout.



✯ première simplification

✧ Pour simplifier un peu l'ensemble, nous allons considérer :
- ➜ que les plans sont infinis en $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$;
- ➜ que l'écoulement est laminaire, *i.e.* que les lignes de courant sont portées uniquement par $\vec{u}_x$.

✧ Dans ces conditions, le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v}(M,t) = v_x(M,t)\,\vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v}(M,t) = v_x(\cancel{x},y,\cancel{z},t)\,\vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad \vec{v}(M,t) = v_x(y,t)\,\vec{u}_x$$

✧ De même l'invariance par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ nous permet de dire que

$$P(M,t) = P(y,t)$$

✯ mise en équation

✧ Commençons par reprendre l'équation de Navier – Stokes

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P+\vec{f}_{\mathrm{v}}+\eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

✧ Ici, la seule force à distance qui s'exerce est la pesanteur, ce qui donne

$$\vec{f}_{\mathrm{v,tot}}=\mu\,\vec{g}\qquad\rightsquigarrow\qquad\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P+\mu\,\vec{g}+\eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

✧ Projetons sur $\vec{u}_x$ l'équation précédente. Comme nous sommes en coordonnées cartésiennes, l'opération se fait facilement et nous avons, puisque le gradient de pression n'est porté que par $\vec{u}_y$,

$$\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}(y,t)+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)v_x(y,t)\right)=0+0+\eta\,\triangle\,v_x(y,t)$$

✧ De plus

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}=\begin{pmatrix}v_x\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\\dfrac{\partial}{\partial y}\\0\end{pmatrix}=0$$

✧ Mais aussi

$$\triangle\,v_x=0+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)+0$$

✧ Il reste donc

$$\mu\,\frac{\partial v_x}{\partial t}(y,t)=\eta\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}(y,t)$$

✧ Il s'agit ni plus ni moins que d'une équation de diffusion, autrement dit :
- ➜ le régime stationnaire est « lent » à venir ;
- ➜ il n'y a pas forcément de solution analytique.

✯ le régime stationnaire

◉ simplification

✧ Supposons, ici et seulement ici, que le régime soit stationnaire.
✧ Dans ces conditions, le champ des vitesses obéit à l'équation

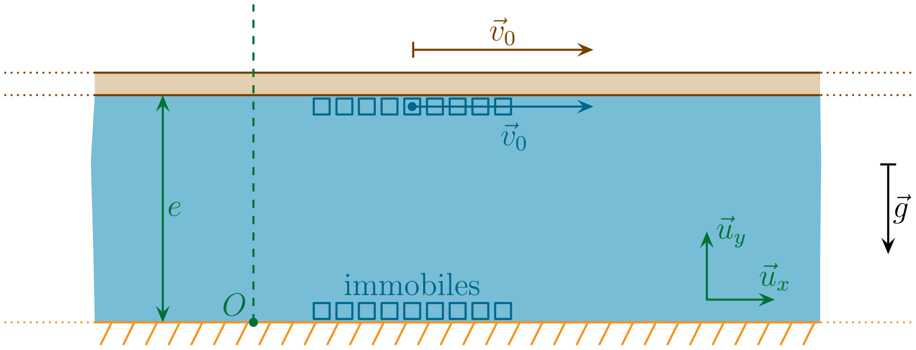
$$0=\eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y)\qquad\rightsquigarrow\qquad\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y)=0$$

solution

✧ La solution est immédiate

$$v_x(y) = \alpha\, y + \beta$$

✧ Reste à déterminer α et β. Pour cela, regardons les conditions aux limites.



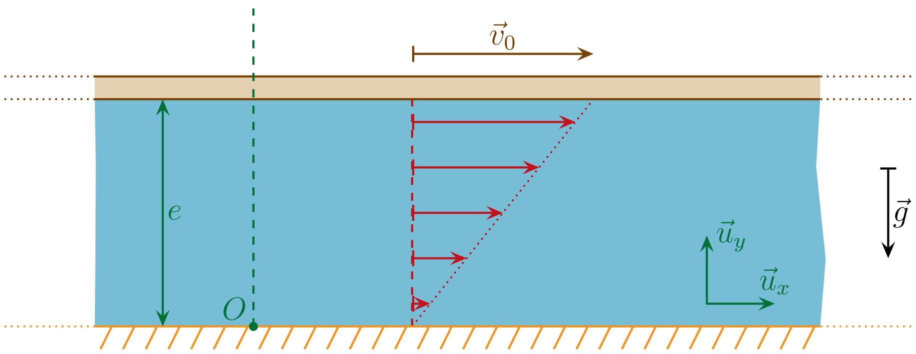
✧ Parce que le fluide adhère aux parois, nous devons avoir

$$v_x(0) = 0 \quad \text{et} \quad v_x(e) = v_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad v_x(y) = \frac{v_0}{e} \times y$$

✧ Nous pouvons constater que quelques grandeurs pertinentes n'interviennent pas :
- ➜ μ, ce qui est normal puisqu'il s'agit d'une grandeur inertielle alors même qu'ici, toutes les trajectoires des particules de fluide sont rectilignes uniformes ;
- ➜ g qui a une action verticale, *i.e.* dans le même sens que le gradient de vitesse, ce qui signifie que c'est ce dernier qui prédomine ;
- ➜ et surtout η, ce qui prouve que, quelle que soit la viscosité du fluide, à la fin, la situation cinématique est la même. En revanche, ce n'est pas forcément le cas au niveau des *efforts*.

profil des vitesses

✧ Représentons schématiquement le profil des vitesses dans une section droite du fluide.

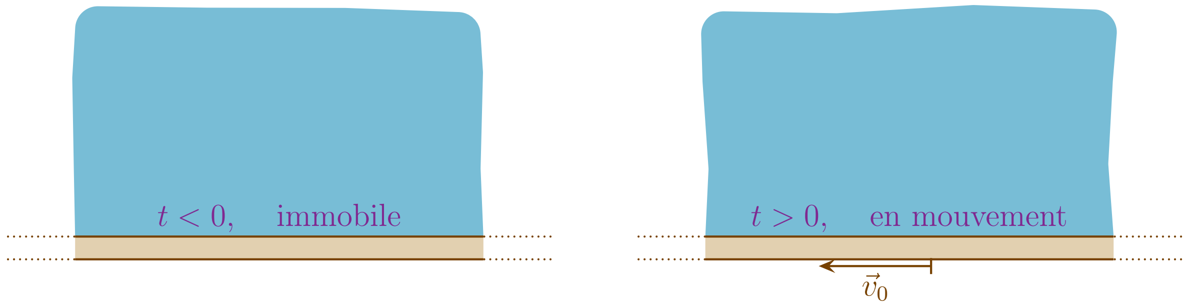


✧ Nous voyons qu'il s'agit là d'un profil *affine*.

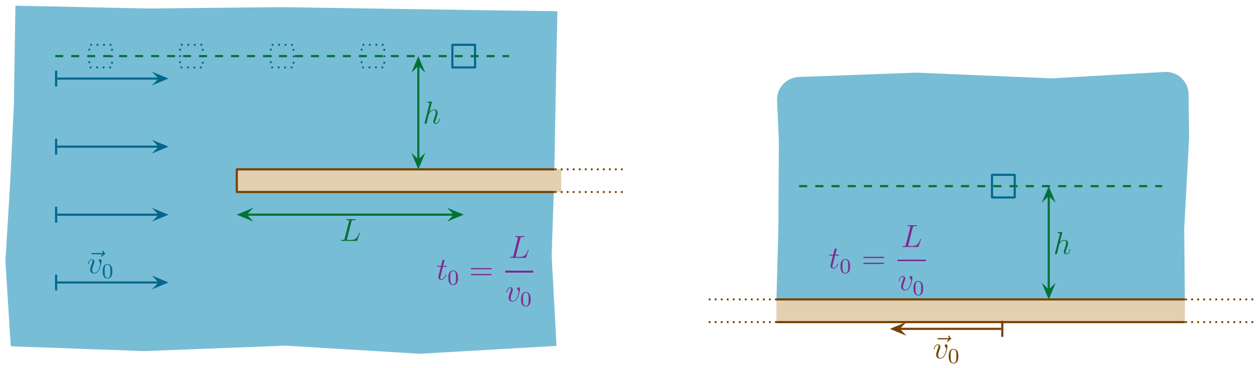
I·3·*ii* – 2e interprétation du nombre de REYNOLDS : épaisseur de la couche limite

✫ deux situations équivalentes

✧ Imaginons la situation où une plaque en dessous d'un fluide infini serait initialement immobile, puis serait mise en mouvement à la vitesse v_0 constante vers la gauche à partir de $t > 0$.



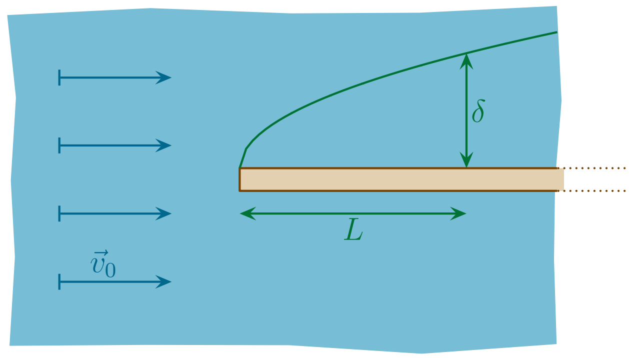
✧ Cette situation est, en fait, à peu près équivalente à la situation ci-dessous où du fluide arrive à la vitesse v_0 sur la droite sur une paroi immobile.



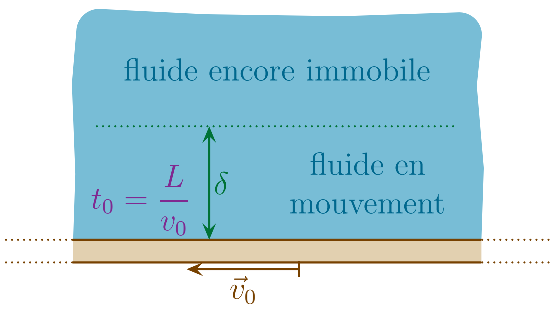
✧ En effet, pour une particule de fluide située à la cote h (cf. schémas), parcourir la distance L au delà du front de la plaque revient à « attendre » la durée $t_0 = \dfrac{L}{v_0}$ au dessus d'une plaque mise en mouvement.

✯ où l'équation de diffusion refait une apparition

✧ Notons δ l'épaisseur de la couche limite après la longueur L d'obstacle.



✧ Dans ces conditions, δ est aussi la distance caractéristique sur laquelle s'est *diffusée* la vitesse v_0 dans la situation équivalente.



✧ Il s'agit là d'une équation de diffusion comme nous l'avons montré dans le cas de l'écoulement de COUETTE. Nous avons donc, en ordre de grandeur,

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu \frac{v_0}{\tau} = \eta \frac{v_0}{\delta^2}$$

✧ Et ainsi, puisque d'après la première situation $\tau = \dfrac{L}{v_0}$

$$\delta^2 \equiv \frac{\eta}{\mu} \times \frac{L}{v_0} \quad \rightsquigarrow \quad \delta^2 \equiv \frac{\eta}{\mu\, L\, v_0} \times L^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta^2 \equiv \frac{L^2}{\mathrm{Re}}$$

✧ Finalement nous pouvons dire que

> L'épaisseur de la couche limite est en $\dfrac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ où L est la longueur parcourue sur l'obstacle.

✫ exemple numérique

✧ Considérons une voiture qui roule à environ 100 km/h ou 30 m.s^{-1}.

✧ Le nombre de REYNOLDS associé vaut, pour une voiture de 3 mètres de long

$$\mathrm{Re} = \frac{\mu\, L\, V}{\eta} = \frac{1 \times 30 \times 3}{10^{-5}} \sim 10^7$$

✧ L'écoulement est clairement turbulent.

✧ En revanche, en ce qui concerne l'épaisseur de la couche limite, tant qu'elle ne s'est pas décollée (*i.e.* avant l'arrière de la voiture), son épaisseur est au maximum de

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}} = \frac{3}{\sqrt{10^7}} \sim 1 \text{ mm}$$

✧ Autant dire que cette épaisseur est totalement négligeable géométriquement. Ceci étant, bien que cette épaisseur soit négligeable, une grande partie des phénomènes physiques se déroulent à l'intérieur, ce qui *interdit* de négliger l'effet de cette couche limite. Ainsi, si son épaisseur est négligeable, son influence ne l'est pas.

✧ Ceci étant, la couche limite n'est pas la seule responsable de toute la physique. Il faut aussi prendre en compte les turbulences à l'arrière de la voiture.

I·4 – Écoulement de POISEUILLE plan

I·4·*i* – qu'est-ce qu'un écoulement de POISEUILLE ?

✧ Dans l'écoulement de COUETTE nous avions un fluide mis en mouvement (ou dont le mouvement était entretenu) par du *cisaillement*, *i.e.* par une force tangentielle.

✧ Dans l'écoulement de POISEUILLE, le « moteur » du mouvement va être une force normale et dans le sens du mouvement : un gradient de pression.

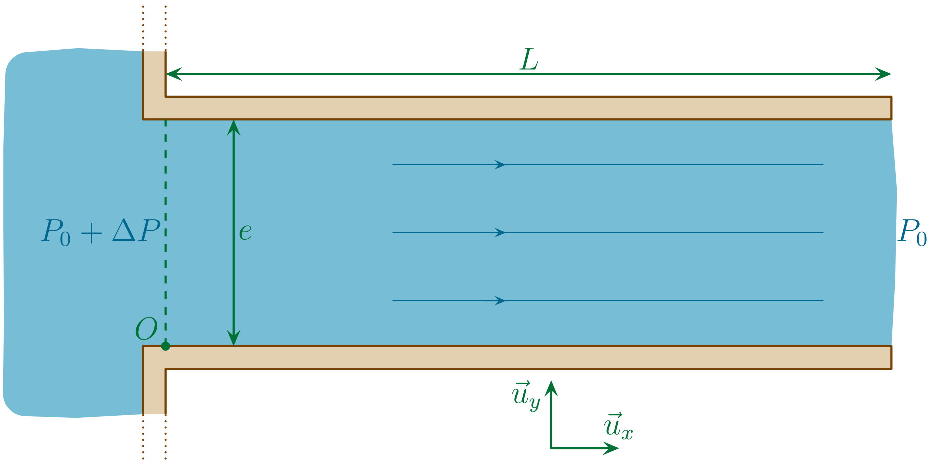
✧ Notons que ces forces (les forces pressantes), existent aussi pour les fluides dans lesquels il n'y a pas de viscosité (ou, du moins, pour lesquels l'effet de viscosité est négligeable).

✧ Dans ces conditions, nous pourrons avoir des écoulements de type « POISEUILLE » pour les fluides non visqueux alors qu'il ne sera pas possible d'avoir, pour ces derniers, des écoulement de type « COUETTE ».

I·4·*ii* – écoulement de POISEUILLE plan

✯ dispositif, analyse

✧ Le dispositif ressemble (un peu) à celui de COUETTE mais possède une différence notable : il est de taille finie L suivant $\vec{u}_x$ de manière à pouvoir *pousser* le fluide.



✧ En revanche, nous allons toujours supposer l'invariance par translation suivant $\vec{u}_z$.

✧ Pour simplifier, nous allons aussi supposer :
- ➜ que la pesanteur est négligeable ;
- ➜ que l'écoulement est laminaire ;
- ➜ que le régime est stationnaire.

✧ Dans ces conditions les champs de vitesse et de pression s'écrivent

$$\vec{v}(M,t) = v(x,y)\,\vec{u}_x \qquad \text{et} \qquad P(M,t) = P(x,y)$$

✧ Les grandeurs pertinentes de ce problème sont :
- ➜ μ pour l'inertie ;
- ➜ e et L pour la géométrie ;
- ➜ η pour les efforts ;
- ➜ P_0 et ΔP pour les contraintes.

✯ mise en équation

✧ L'équation de NAVIER – STOKES s'écrit, compte-tenu du fait que nous négligeons la pesanteur et que l'écoulement est stationnaire

$$\mu \left(\vec{0} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \vec{0} + \eta \vec{\Delta} \vec{v}$$

✧ Cherchons d'abord à simplifier un peu cette équation.

✧ Traduisons l'incompressibilité de l'écoulement

$$\text{div}\, \vec{v} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

✧ Autrement dit, le champ de vitesse ne dépend pas de x ce qui donne $\vec{v} = v_x(y)\, \vec{u}_x$.

✧ Commençons par projeter l'équation de NAVIER – STOKES sur $\vec{u}_y$. Cela donne, puisqu'il n'y a de vitesse que sur $\vec{u}_x$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + 0$$

✧ Nous pouvons donc dire que la pression ne dépend pas de y, ce qui fait qu'il reste $P(x)$.

✧ Projetons l'équation de NAVIER – STOKES sur $\vec{u}_x$

$$\mu\, \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, v_x = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) + \triangle\, v_x(y)$$

✧ En simplifiant, cela donne, comme pour l'écoulement de COUETTE

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \triangle\, v_x(y) = \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y)$$

✧ Il reste donc

$$0 = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) + \eta\, \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y)$$

✯ résolution

✧ L'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = \eta\, \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y)$$

✧ Comme les deux membres de cette équations sont des fonctions de variables *indépendantes*, nous en déduisons

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = \eta\, \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y) = \mathrm{C^{te}} \overset{\text{not}}{=} K$$

✧ Commençons par résoudre l'équation en pression

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = K \quad \rightsquigarrow \quad P(x) = a\,x + b$$

✧ Nous pouvons alors trouver très vite la solution en tenant compte des conditions aux limites

$$P(0) = P_0 + \Delta P \quad \text{et} \quad P(L) = P_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P(x) = P_0 + \Delta P \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

✧ Nous avons alors

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{\Delta P}{L} < 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad K = -\frac{\Delta P}{L}$$

✧ Attaquons-nous, à présent, à l'équation en vitesse

$$\eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2}(y) = K = -\frac{\Delta P}{L} \qquad \rightsquigarrow \qquad v_x(y) = -\frac{\Delta P}{2\,L\,\eta}\,y^2 + \alpha\,y + \beta$$

✧ Les conditions aux limites donnent

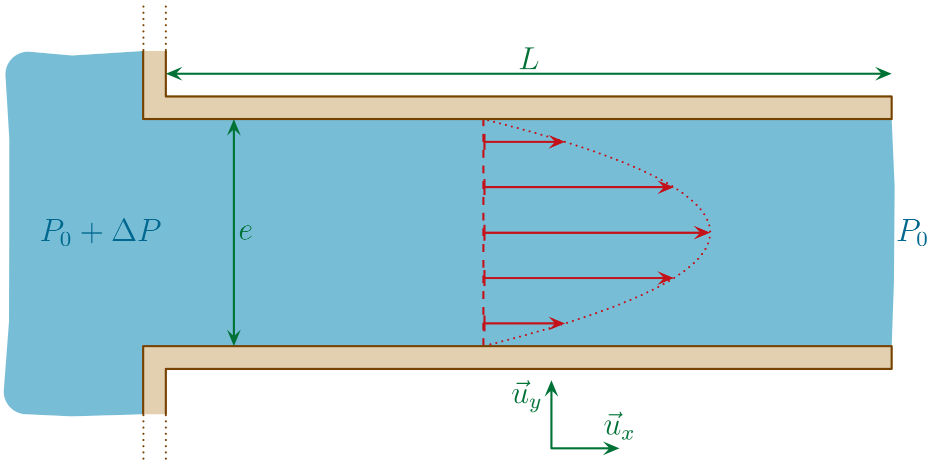
$$\left\{\begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v(e) = 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \beta = 0 \\ -\dfrac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\,e^2 + \alpha\,e = 0 \end{array}\right. \quad \rightsquigarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \beta = 0 \\ \alpha = -\dfrac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\,e \end{array}\right.$$

✧ Finalement

$$v(y) = \frac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\,\left(e\,y - y^2\right)$$

✯ profil des vitesses

✧ Le profil des vitesses à travers une section droite de l'écoulement est parabolique.



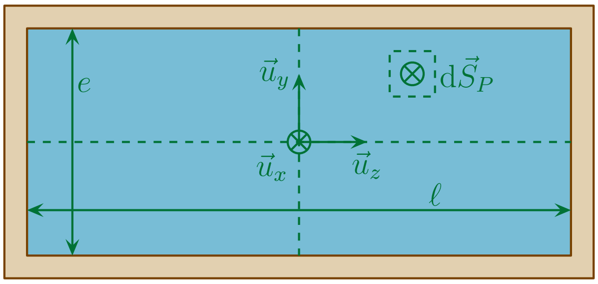
✯ débit

✧ Comme, ici, la vitesse n'est pas uniforme sur une section de l'écoulement, nous ne pouvons pas écrire $D_{\mathrm{v}} = S\,v$, ce qui n'aurait, d'ailleurs, aucun sens puisque nous ne saurions pas quel v prendre.

✧ Nous allons donc revenir à la définition du débit volumique en se rappelant que la densité surfacique de courant de volume en volume[1] n'est autre que $\vec{\jmath}_{\mathrm{v}} = \vec{v}$. Cela donne

1. De tels noms ne cessent de faire penser à l'auteur que, comme pour la nomenclature en chimie, la rigueur – nécessaire – peut créer des assemblages très bizarres.

$$D_\mathrm{v} = \iint_{P\in\mathcal{S}} \vec{\jmath}_\mathrm{v}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P \quad \rightsquigarrow \quad D_\mathrm{v} = \iint_{P\in\mathcal{S}} \vec{v}(P)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_P$$



✧ Etant donné que nous prenons une section droite, nous avons

$$\mathrm{d}\vec{S}_P = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_x \quad \rightsquigarrow \quad D_\mathrm{v} = \iint_{P\in\mathcal{S}} \vec{v}(y)\,\vec{u}_x\cdot\left(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_x\right) \quad \rightsquigarrow \quad D_\mathrm{v} = \iint_{P\in\mathcal{S}} \frac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\left(e\,y - y^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

✧ Nous avons donc

$$D_\mathrm{v} = \frac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\times\int_0^e\left(e\,y-y^2\right)\mathrm{d}y\times\int_0^\ell \mathrm{d}z \quad\rightsquigarrow\quad (\cdots) \quad\rightsquigarrow\quad D_\mathrm{v} = \frac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\times\frac{e^3}{6}\times\ell > 0$$

✯ interprétation

✧ Nous voyons que

$$D_\mathrm{v} \propto \frac{1}{\eta}\times\frac{\Delta P}{L}\times e^3$$

✧ C'est ainsi que, contrairement à l'écoulement de Couette la viscosité intervient : plus elle est grande, plus l'écoulement est lent car « freiné » par les actions internes.

✧ De même nous pouvons constater sans trop de surprise que plus le *gradient* de pression est élevé, plus le débit est grand.

✧ Ce n'est qu'en terme de dépendance spatiale qu'intervient la surprise. Le débit est proportionnel à e^3 ce qui est d'interprétation assez complexe surtout qu'il s'agit d'un cas idéal avec une invariance par translation suivant $\vec{u}_z$. Retenons essentiellement que lorsque l'écoulement est visqueux, diminuer la section par un facteur 2 diminue le débit de *bien plus* qu'un facteur 2.

I·4·*iii* – 3^e interprétation du nombre de Reynolds : transport de la quantité de mouvement

✯ deux types de transport

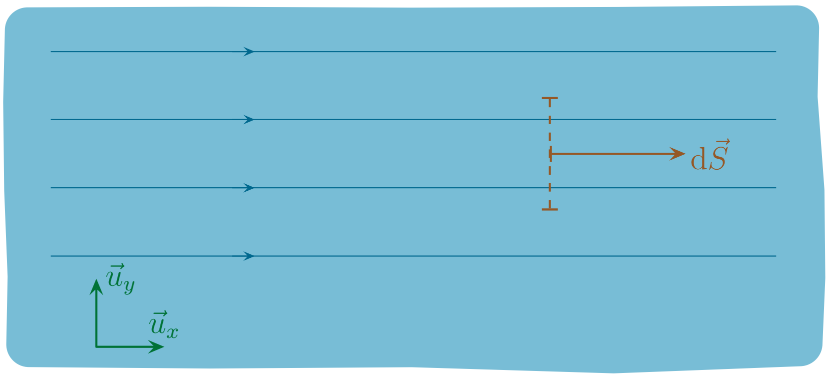
✧ Il y a deux moyens principaux de transporter de la quantité de mouvement.

> Le *transport convectif* de quantité de mouvement correspond à la quantité de mouvement emportée avec une particule de fluide lors de son mouvement.

> Le *transport diffusif* de quantité de mouvement correspond à la quantité de mouvement transférée entre particules de fluide par viscosité.

✯ transport convectif sur l'exemple de Poiseuille plan

- Reprenons la situation de l'écoulement de Poiseuille et cherchons la quantité de mouvement transférée par convection.
- Comme les particules de fluide avancent globalement suivant $+\vec{u}_x$, nous allons chercher la quantité de mouvement qui passe à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{u}_x$ pendant la durée $\mathrm{d}t$.



- Entre t et $t+\mathrm{d}t$, des particules de fluide traversent la surface S, chacune transportant la quantité de mouvement $\mathrm{d}m_{\text{PF}}\,v$.
- La quantité de mouvement total transportée vaut donc $\mathrm{d}m_{\text{tot}}\,v$ puisque, sur une ligne de courant, toutes les particules de fluide ont la même vitesse.
- Durant $\mathrm{d}t$, la masse qui s'écoule vaut, par définition du débit massique

$$\mathrm{d}m_{\text{tot}} = \mu\,v\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

- Donc, finalement, la quantité de mouvement transportée s'écrit

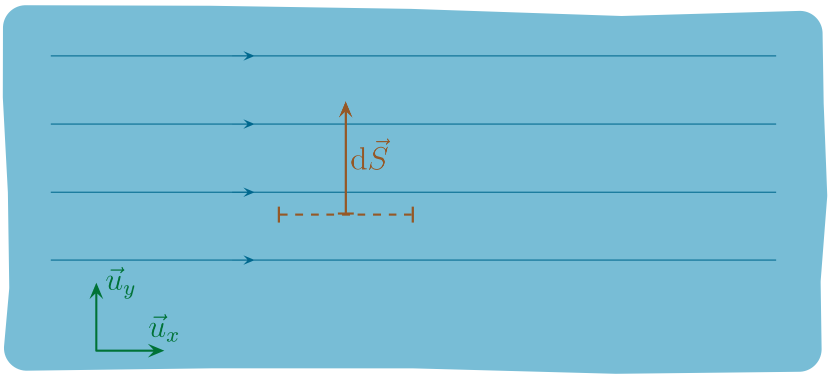
$$\mathrm{d}p_{\text{conv}} = \mathrm{d}m_{\text{tot}}\,v = \mu\,v^2\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

- Ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\mathrm{d}p_{\text{conv}} = j_{\text{conv}}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad j_{\text{conv}} = \mu\,v^2$$

✯ transport diffusif sur l'exemple de Poiseuille plan

- Toujours sur l'exemple de l'écoulement de Poiseuille, cherchons la quantité de mouvement transférée par diffusion.
- Comme les interactions de viscosité se font entre particules de fluide l'une au dessus de l'autre (*i.e.* sur une même verticale), nous pouvons dire que le transfert diffusif est globalement suivant $+\vec{u}_y$.
- Dans ces conditions, nous allons chercher la quantité de mouvement qui passe à travers une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{u}_y$ pendant la durée $\mathrm{d}t$.



✧ Entre t et $t+\mathrm{d}t$, la quantité de mouvement qui « passe » de bas en haut s'écrit, grâce au PFD

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{f}_{\text{bas}\to\text{haut}}\,\mathrm{d}t$$

✧ Ici la force est la force de viscosité, donc nous avons

$$\mathrm{d}\vec{p}_{\text{diff}} = -\,\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

✧ Résultat que nous pouvons écrire sous la forme

$$\mathrm{d}p_{\text{diff}} = j_{\text{diff}}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \qquad j_{\text{diff}} = -\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

✯ comparaison

✧ Calculons le rapport suivant, en ordre de grandeur

$$\frac{j_{\text{conv}}}{j_{\text{diff}}} = \frac{\mu\,v^2}{-\eta\,\dfrac{\partial v_x}{\partial y}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{j_{\text{conv}}}{j_{\text{diff}}} \equiv \frac{\mu\,V^2}{\eta\,\dfrac{V}{L}} \equiv \frac{\mu\,V\,L}{\eta} = \mathrm{Re}$$

> Le nombre de Reynolds représente le rapport des termes de transport convectif sur le transport diffusif de quantité de mouvement.

✯ un terme diffusif étrange

✧ Reprenons le terme de transport diffusif de quantité de mouvement.

$$j_{\text{diff}} = -\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

✧ Nous pouvons remarquer que si nous changeons $v \longrightarrow -v$ alors $j_{\text{diff}} \longrightarrow -j_{\text{diff}}$.
✧ Dans le même temps, même si $v \longrightarrow -v$ alors $j_{\text{conv}} = \mu\,v^2$ reste identique.
✧ Cela signifie que, dans une situation où le transport diffusif prédomine, si nous changeons de signe toutes les contraintes, alors le transport diffusif va, lui aussi, changer de signe, *i.e.* se faire dans l'autre sens.
✧ Il est donc possible de revenir au point de départ avec un écoulement à très faible nombre de Reynolds comme le montre l'expérience des goutte d'encre étallées puis réassemblées.

Montrer vidéo expérience.

✧ Dans l'expérience, il faut bien comprendre que, dans tous les cas, la transformation est **irréversible** car elle obéit à l'équation de diffusion

$$\mu\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$$

✧ En revanche, nous venons de prouver que la transformation pouvait être *renversable.*

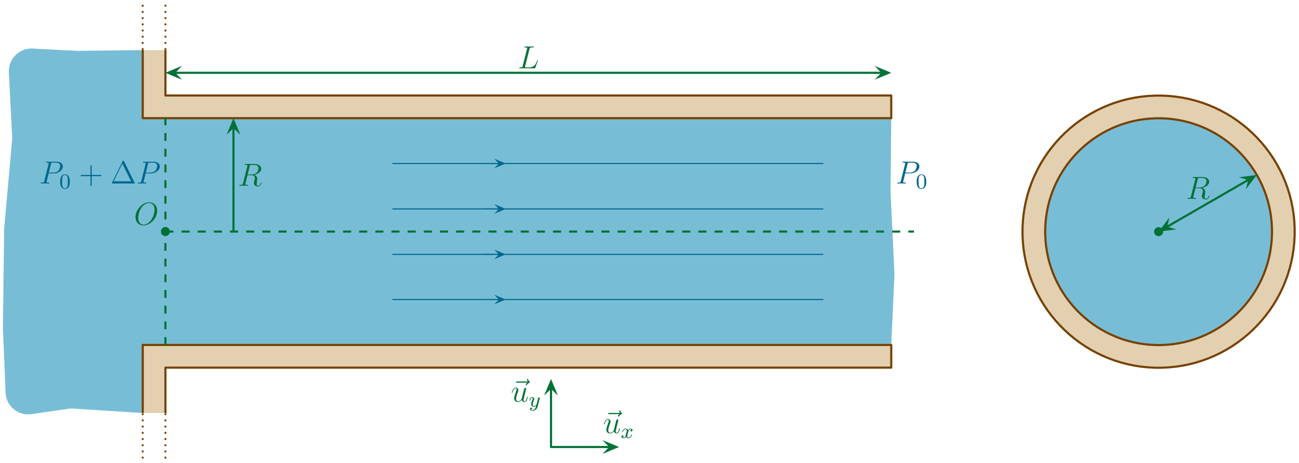
I·5 – écoulement de Poiseuille cylindrique

✧ Dans le paragraphe précédent, nous avons vu l'écoulement dans une canalisation de largeur infinie, ou du moins très grande devant son épaisseur, ce qui est possible, mais moins fréquent que l'écoulement dans un tuyau de section circulaire.

I·5·*i* – champ des vitesses

✯ dispositif, analyse

✧ Prenons un dispositif presqu'analogue au précédent, sauf que cette fois la section est circulaire.



✧ Nous avons toujours :
- ➜ un écoulement incompressible ;
- ➜ une longueur finie en L ;
- ➜ un régime stationnaire ;
- ➜ un écoulement laminaire ;
- ➜ une gravité négligée.

✧ En terme de grandeur pertinentes, nous avons les mêmes que précédemment :
- ➜ μ pour l'inertie dont nous pouvons nous douter qu'elle n'interviendra pas puisque le régime est stationnaire et que les lignes de courant sont rectilignes ;
- ➜ R et L pour la géométrie ;
- ➜ η pour les efforts ;
- ➜ P_0 et ΔP pour les contraintes.

✧ Le soucis, ici, en reprenant l'équation de Navier – Stokes, c'est qu'elle fait intervenir un laplacien vectoriel en cylindrique. . . que nous ne savons pas exprimer.

✧ Nous avons donc affaire avec une équation juste mais non utilisable. Il va falloir faire autrement.

✯ liminaires

✧ Commençons par simplifier les champs de vitesse et de pression qui s'écrivent, *a priori*, compte-tenu du régime permanent stationnaire et de l'invariance par rotation

$$\vec{v}(M) = v(r,x)\,\vec{u}_x \qquad \text{et} \qquad P(M) = P(r,x)$$

✧ Comme l'écoulement est incompressible, nous avons

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v(M) = v(r)\,\vec{u}_x$$

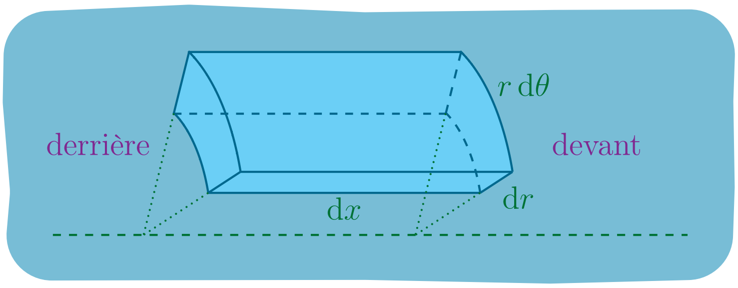
✧ De plus en projetant l'équation de Navier – Stokes sur $\vec{u}_r$ nous avons

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P(x)$$

✯ mise en équation par le PFD – version locale

☯ le système

✧ Considérons *une* particule de fluide en version cylindrique, *i.e.* une particule de fluide comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$, x et $x + \mathrm{d}x$ et θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$.



✧ Les forces qui s'exercent sont :
- ➜ force à distance, le poids, mais est négligé ;
- ➜ force de contact normale, la pression ;
- ➜ force de contact tangentielle, la viscosité.

✧ Comme nous nous intéressons uniquement au mouvement suivant $+\vec{u}_x$:
- ➜ les particules de fluide exerçant des forces pressantes sont celles situées devant (contact en $x + \mathrm{d}x$) et derrière (contact en x) ;
- ➜ les particules de fluide exerçant des forces de viscosité sont celles situées sur l'extérieur (contact en $r + \mathrm{d}r$) et à l'intérieur (contact en r).

☯ les forces pressantes

✧ Nous savons que la résultante des forces pressantes est en $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau$, donc, ici,

$$\mathrm{d}\vec{f}_{\text{press}} \cdot \vec{u}_x = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta$$

☯ les forces de viscosité

✧ Pour les forces de viscosité, il faut faire attention au fait que la surface de contact en $r + \mathrm{d}r$ n'est pas la même que la surface de contact en r.

✧ Dans ces conditions, en faisant (aussi) attention aux signes, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_{\text{visc}} &= f_{\text{ext}\to\text{PF}} + f_{\text{int}\to\text{PF}} \\
&= +\eta\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}(r+\mathrm{d}r)\,S(r+\mathrm{d}r) - \eta\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}(r)\,S(r) \\
&= +\eta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\,S\right)(r)\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

✧ Et comme la surface de contact $S(r)$ entre deux particules de fluide s'écrit $S(r) = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x$, nous arrivons à

$$\mathrm{d}f_{\text{visc}} = +\eta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\,r\right)(r)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r$$

regroupement

✧ Le PFD sur une particule de fluide s'écrit, sur $\vec{u}_x$,

$$\mu\,\mathrm{d}\tau\,\widetilde{a}_x = \mathrm{d}f_{\text{press},x} + \mathrm{d}f_{\text{visc}}$$

✧ Comme les particules de fluide ont toutes une trajectoire rectiligne (portée par $\vec{u}_x$) et uniforme (indépendante de x et de t), nous pouvons dire

$$\widetilde{a}_x = 0 \quad\rightsquigarrow\quad \mathrm{d}f_{\text{press},x} + \mathrm{d}f_{\text{visc}} \quad\rightsquigarrow\quad -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta + \eta\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\,r\right)(r)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r$$

✧ Ce qui donne, en simplifiant

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\eta}{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\right)(r)$$

résolution

✧ Comme nous sommes face à une équation dont les deux membres dépendent de deux variables *indépendantes*, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\eta}{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\right)(r) = \mathrm{C^{te}} \overset{\text{not}}{=} K$$

✧ Commençons par l'équation en pression.

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = K$$

✧ Comme le gradient de pression est uniforme, nous pouvons tout de suite écrire

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{P(L)-P(0)}{L} \qquad\rightsquigarrow\qquad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{\Delta P}{L}$$

✧ Reste à résoudre l'équation en v_x

$$\frac{\eta}{r}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\right)(r) = -\frac{\Delta P}{L} \qquad\rightsquigarrow\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}\right)(r) = -\frac{\Delta P}{\eta\,L}\times r$$

✧ En primitivant

$$r\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}(r) = -\frac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\times r^2 + \alpha \qquad\rightsquigarrow\qquad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}(r) = -\frac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\times r + \frac{\alpha}{r}$$

✧ Et encore

$$v_x(r) = -\frac{\Delta P}{4\,\eta\,L}\times r^2 + \alpha\ln r + \beta$$

✧ Les deux constantes d'intégration sont α et r_0.

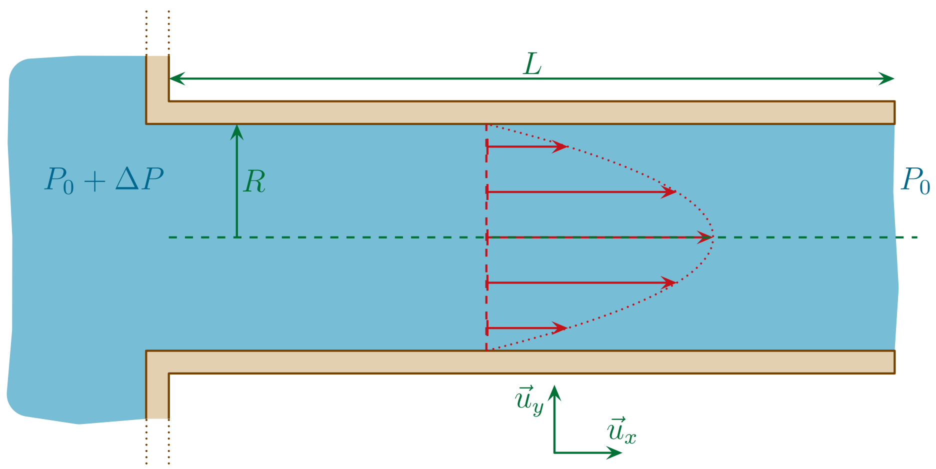
✧ Comme en $r = 0$ la vitesse est finie, cela impose $\alpha = 0$.

✧ De plus en $r = R$, le fluide adhère à la paroi, ce qui donne

$$v_x(R) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\,\eta\,L} \times \left(R^2 - r^2\right)$$

☯ profil des vitesses

✧ Représentons le profil du champ de vitesse sur une section droite.

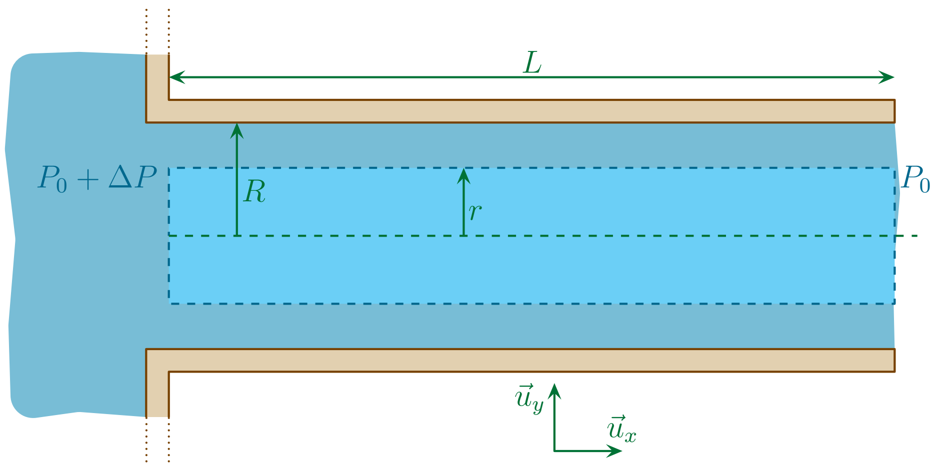


✧ Il s'agit, comme pour le cas précédent, d'un profil parabolique.

✫ mise en équation par le TCI – version globale

☯ le système

✧ Considérons, comme système, non pas *une* particule de fluide, mais *tout* le fluide contenu dans le cylindre de longueur L et de rayon r.



✧ Remarquons que, comme chaque particule de fluide a une trajectoire rectiligne uniforme, elle subit une résultante de force nulle.

✧ La somme totale des forces subies par toutes les particules de fluide contenues dans le système ne peut donc qu'être nulle aussi.

les forces pressantes

✧ Au niveau d'une section la pression est uniforme puisqu'elle ne dépend que de x.
✧ Nous avons donc

$$f_{\text{press}} = +P(0)\,\pi\,r^2 - P(L)\,\pi\,r^2 \qquad \rightsquigarrow \qquad f_{\text{press}} = +\Delta P\,\pi\,r^2$$

les forces de viscosité

✧ Le système ne touche que des particules de fluide situées sur son « extérieur » donc nous pouvons écrire (en faisant attention au signe)

$$f_{\text{visc}} = +\eta\,S\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r} \qquad \text{avec} \qquad S = 2\,\pi\,r\,L \qquad \rightsquigarrow \qquad f_{\text{visc}} = +\eta\,2\,\pi\,r\,L\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}$$

regroupement

✧ Le TCI donne tout de suite

$$0 = f_{\text{press}} + f_{\text{visc}} \quad \rightsquigarrow \quad +\Delta P\,\pi\,r^2 + \eta\,2\,\pi\,r\,L\,\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r} = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P}{2\,\eta\,L}\,r$$

✧ Ce qui se primitive facilement (en tenant compte de la condition au limite $v_x(L) = 0$)

$$v_x(r) = \frac{\Delta P}{4\,\eta\,L} \times \left(R^2 - r^2\right)$$

morale

✧ Bien évidemment les deux méthodes arrivent au même résultat, le contraire eût été inquiétant.
✧ Avec la deuxième méthode (la globale) nous passons outre le fait que la vitesse ne doit pas diverger en $r = 0$. Cela s'explique par le fait que le système *contient* le fluide en $r = 0$ et, donc, exclut de fait toute divergence.

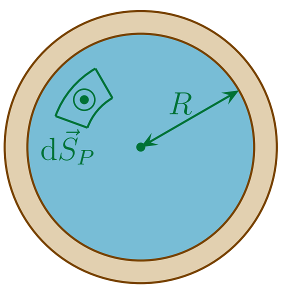
I·5·*ii* – quelques aspects de l'écoulement de Poiseuille cylindrique

✯ débit volumique

✧ Comme dans le cas du dispositif de Poiseuille plan, étant donné que la vitesse n'est pas uniforme sur une section, nous devons reprendre la définition du débit pour pouvoir la calculer.

$$D_{\text{v}} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{v}(P) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_P$$

✧ Ici $\mathrm{d}\vec{S}_P = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_x$



✧ Nous arrivons donc à

$$D_\mathrm{v} = \iint_{P\in\mathcal{S}} \frac{\Delta P}{4\,\eta\,L} \times \left(R^2 - r^2\right)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad \rightsquigarrow \qquad D_\mathrm{v} = \frac{\Delta P}{4\,\eta\,L} \times \int_0^R \left(R^2-r^2\right)\,r\,\mathrm{d}r \times \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

✧ Cela donne, après calculs

$$D_\mathrm{v} = \frac{\Delta P}{4\,\eta\,L} \times \frac{R^4}{4} \times 2\,\pi \qquad \rightsquigarrow \qquad D_\mathrm{v} = \frac{\pi}{8} \times \frac{\Delta P}{L} \times \frac{1}{\eta} \times R^4$$

✯ pourquoi une dépendance en R^4 ?

✧ En fait il faut voir R^4 comme $R^2 \times R^2$.
✧ Le premier R^2 vient « naturellement » de la proportionnalité du débit avec la section.
✧ Le deuxième R^2 vient de la viscosité dont nous savons que la résultante est en $\eta\,\vec{\Delta}\,\vec{v}$ soit, en ordre de grandeur en $\dfrac{\eta}{R^2}$ puisqu'ici la viscosité diffuse suivant R.
✧ Comme la viscosité est au dénominateur, cela signifie que le facteur R^2 monte au numérateur.
✧ Pour la situation Poiseuille plan, nous avions une dépendance en $\ell \times e^3$ qu'il fallait voir en :

➜ $e \times \ell$ pour la section ;
➜ e^2 pour les effets de viscosité.

✯ exemple qualitatif

✧ Considérons un certain nombre N de tubes dont la section *totale* est constante et vaut S_0.
✧ Comment varie le débit avec N ?
✧ Pour répondre, remplissons un tableau

grandeur	section totale	section unitaire	rayon	débit unitaire	débit total
dépendance fonctionnelle	S_0	$\dfrac{1}{N}$	$\sqrt{S_\mathrm{unit}}$	R^4	$N \times R^4$
$N = 1$	S_0	S_0	R_0	${R_0}^4$	D_v
$N \neq 1$	S_0	$\dfrac{S_0}{N}$	$\dfrac{R_0}{\sqrt{N}}$	$\dfrac{{R_0}^4}{N^2}$	$\dfrac{D_\mathrm{v}}{N}$

✧ Nous voyons donc qu'avec un fluide newtonien, du moins avec un écoulement à faible nombre de Reynolds, plus le nombre de conduite est multiplié (à section constante), plus le débit est faible.
✧ Cela est dû à la multiplication du nombre de surface immobiles et, donc, à l'augmentation de forces de frottement.

✯ une nouvelle analogie diffusive

✧ Le débit volumique n'est qu'un flux de volume à travers une section.
✧ C'est un peu comme le flux thermique

$$\Phi_{1\to 2} = \frac{T_1 - T_2}{R_\mathrm{th}}$$

✧ Ici, le « moteur » de l'écoulement de Poiseuille est la différence de pression. Nous pouvons donc écrire

$$D_\mathrm{v} = \frac{\Delta P}{R_\mathrm{hyd}} \qquad \text{avec} \qquad R_\mathrm{hyd} = \frac{8\,L\,\eta}{\pi\,R^4}$$

✧ De là à transformer un réseau hydraulique en circuit électrocinétique, il n'y a qu'un pas. . . .
✧ Remarquons aussi que cette analogie explique pourquoi les diminutions de pression entre le début et la fin d'une canalisation s'appellent des « pertes de charge » alors que dans le même temps quand un dipôle est relié directement à un générateur il est souvent dénommé « charge ».

✯ puissance perdue par viscosité

➒ par un bilan énergétique global

✧ Faisons un bilan énergétique entre t et $t + \mathrm{d}t$ sur l'ensemble du fluide contenu dans le tuyau de longueur L et de rayon R.

$$\mathrm{d}E_\mathrm{c} + \mathrm{d}E_\mathrm{p} = \delta W_\mathrm{nc,ext} + \delta W_\mathrm{nc,int}$$

✧ Comme le régime est stationnaire, nous avons $\mathrm{d}E_\mathrm{m} = 0$.
✧ La pesanteur étant négligée, $\mathrm{d}E_\mathrm{p} = 0$.
✧ En terme de force extérieures non conservatives, nous avons :
- ➜ les forces de contact exercées par la paroi sur le fluide ;
- ➜ les forces pressantes.

✧ Remarquons que les forces de contact exercées par la paroi **ne travaillent pas** car elles s'exercent sur des particules de fluide immobiles ! C'est la même chose que lorsque nous cherchons à déterminer l'énergie transférée par la route sur la roue de voiture, comme la force s'exerce en un point immobile, le transfert énergétique est nul.
✧ En revanche, pour les forces pressantes, nous avons [2]

$$\delta W_\mathrm{press} = +f(0)\,v\,\mathrm{d}t - f(L)\,v\,dt \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta W_\mathrm{press} = +P(0)\,\pi\,R^2\,v\,\mathrm{d}t - P(L)\,\pi\,R^2\,v\,dt$$

✧ Ce qui donne

$$\delta W_\mathrm{press} = +\Delta P\,\pi\,R^2\,v\,\mathrm{d}t$$

✧ Nous reconnaissons l'expression du débit volumique D_v, ce qui donne

$$\delta W_\mathrm{press} = D_\mathrm{v} \times \Delta P\,\mathrm{d}t$$

✧ Enfin, dans les interactions intérieures non conservatives, nous ne trouvons que les interactions de viscosité, ce qui donne

$$\delta W_\mathrm{nc,int} = \mathscr{P}_\mathrm{visc}\,\mathrm{d}t$$

✧ En rassemblant, nous obtenons

$$0 + 0 = 0 + D_\mathrm{v} \times \Delta P\,\mathrm{d}t + \mathscr{P}_\mathrm{visc}\,\mathrm{d}t \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathscr{P}_\mathrm{visc} = -D_\mathrm{v} \times \Delta P$$

✧ La puissance fournie par les interactions de viscosité est bien négative, ouf.
✧ Le lecteur curieux pourra réfléchir à l'interprétation de cette puissance dissipée au regard de l'analogie électrocinétique précédente.

2. Nous simplifions délibéremment l'expression en faisant apparaître une vitesse uniforme v sachant que la démonstration complète reviendrait au même résultat mais avec des intermédiaires un peu plus lourds.

◕ par un bilan énergétique local

✧ L'idée est toute simple : il suffit de sommer la puissance perdue par chaque particule de fluide à cause de la viscosité.

$$\mathscr{P}_{\text{tot}} = \iiint \mathrm{d}\mathscr{P}_{\text{PF}}$$

✧ Or, nous savons que la résultante des forces de viscosité agissant sur une particule de fluide s'écrit $\eta \vec{\Delta}\,\vec{v}\,\mathrm{d}\tau$. Nous avons donc

$$\mathrm{d}\mathscr{P}_{\text{PF}} = \left(\eta \vec{\Delta}\,\vec{v}\,\mathrm{d}\tau\right) \cdot \vec{v} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mathscr{P}_{\text{tot}} = \iiint \left(\eta \vec{\Delta}\,\vec{v}\right) \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}\tau$$

✧ Après ? Il *suffit* de calculer le laplacien vectoriel de la vitesse, de multiplier scalairement par la vitesse locale et de sommer le tout dans l'espace…

✧ Le lecteur avide de tester ses performances calculatoires peut le faire. L'auteur, quant à lui, préfère utiliser la première méthode.

II – Écoulements parfaits

II·1 – Modèle de l'écoulement parfait

II·1·*i* – définition

Un écoulement est dit *parfait* quand tous les phénomènes de diffusion peuvent être négligés.

✧ Cela implique, entre autre que :
- ➜ il n'y a pas de diffusion de quantité de mouvement, *i.e.* il n'y a pas de viscosité ;
- ➜ il n'y a pas de diffusion thermique, *i.e.* chaque particule de fluide subit une transformation adiabatique.

II·1·*ii* – en pratique

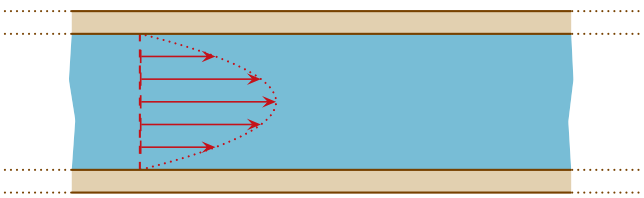
✧ Techniquement, si considérer un écoulement parfait revient à faire $\eta = 0$, nous allons surtout étudier ce qui se passe en dehors de la couche limite.

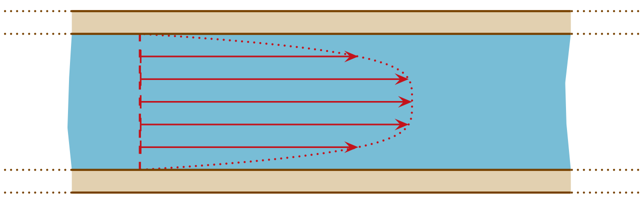
✧ Rappelons que la couche limite est d'épaisseur $\dfrac{L}{\sqrt{\text{Re}}}$. Négliger la viscosité revient à faire

$$\eta \longrightarrow 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{Re} \longrightarrow \infty \qquad \rightsquigarrow \qquad \delta \longrightarrow 0$$

✧ Nous allons donc négliger l'épaisseur géométrique de la couche limite.

✧ Qualitativement un écoulement de Poiseuille qui deviendrait de plus en plus « parfait » ressemblerait à


Re petit


Re plus grand


écoulement parfait

II·2 – Équation d'Euler

II·2·*i* – à partir de l'équation de Navier – Stokes

✯ **énoncé**

ÉQUATION D'EULER

Dans un écoulement parfait, le champ de vitesse obéit aux équations (équivalentes) suivantes :

$$\mu \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \vec{f}_{\mathrm{v,tot}}$$

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \vec{f}_{\mathrm{v,tot}}$$

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \vec{f}_{\mathrm{v,tot}}$$

➜ μ est la masse volumique ;
➜ $\vec{f}_{\mathrm{v,tot}}$ est la densité volumique de force à distance (poids, électromagnétisme, inertie) ;

✧ La plupart du temps les forces à distance extérieures se réduiront au poids, ce qui fait que nous écrirons directement

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}$$

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}$$

✯ **« démonstration »**

✧ Il suffit d'écrire l'équation de NAVIER – STOKES et de faire $\eta = 0$.

II·2·*ii* – lecture

✯ **équation non linéaire**

✧ Le terme d'accélération convective $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$ implique que l'équation d'EULER est non linéaire.

✧ Pour pouvoir le négliger (et rendre l'équation linéaire), il faut

$$\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\| \gg \left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right\|$$

✧ Cela donne, en ordre de grandeur

$$\frac{V}{T} \gg \frac{V^2}{L} \qquad \rightsquigarrow \qquad T \ll \frac{L}{V}$$

✧ Il s'agit là d'une situation rare car cela implique un déplacement *lent* et plus le déplacement est lent, plus le nombre de REYNOLDS diminue, ce qui contrarie le caractère parfait de l'écoulement.

✭ retrouver la RFSF

✧ En statique des fluides, nous avons

$$\widetilde{\vec{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{0} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \vec{f}_{\mathrm{v,tot}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = \vec{f}_{\mathrm{v,tot}}$$

✧ Ce qui n'est autre que la relation de la statique des fluides.

✭ tout est désormais possible

✧ Théoriquement, lorsque l'écoulement est parfait, tout est déterminable.

✧ En effet, un fluide est caractérisé par :
- ➜ un champ de vitesse, qui est un champ vectoriel ;
- ➜ un champ de pression, champ scalaire ;
- ➜ un champ de température, champ scalaire ;
- ➜ un champ de masse volumique, champ scalaire.

✧ Nous avons donc 6 champs scalaires à déterminer. Pour cela il nous faut 6 lois scalaires. Les voici :
- ➜ l'équation d'Euler qui, en tant qu'équation vectorielle, « apporte » 3 équations scalaires ;
- ➜ la conservation de la masse, qui est une équation scalaire ;
- ➜ l'équation d'état du fluide ($\mu = \mathrm{C^{te}}$ pour un liquide, $P\,V = n\,R\,T$ pour un gaz parfait) ;
- ➜ l'équation traduisant le comportement *adiabatique* du fluide ($T = \mathrm{C^{te}}$ pour un liquide, $P\,V^{\gamma} = \mathrm{C^{te}}$ pour un gaz parfait).

✧ 6 champs scalaires à trouver, 6 lois scalaires à utiliser, le compte est bon, théoriquement ça passe.

✧ Le problème c'est que dire « théoriquement » ça passe est un peu abusé car, dans l'état actuel des sciences, il n'est pas possible d'affirmer mathématiquement que la donnée de ces 6 lois scalaires :
- ➜ permettent d'avoir au moins une solution ;
- ➜ ne permettent d'avoir qu'une seule solution.

✧ Ne parlons pas des conditions aux limites minimales à donner pour pouvoir assurer l'unicité de la solution, si l'unicité existe.

✧ Il s'agit de problèmes mathématiques très difficiles et encore largement ouverts.

II·3 – Premières applications

✧ L'équation d'Euler étant une équation fondamentalement non linéaire, pour la résoudre, il n'y a pas véritablement de méthode, il n'y a presque que des cas particuliers.

II·3·*i* – surface libre d'un tourbillon

✭ dispositif, modèle

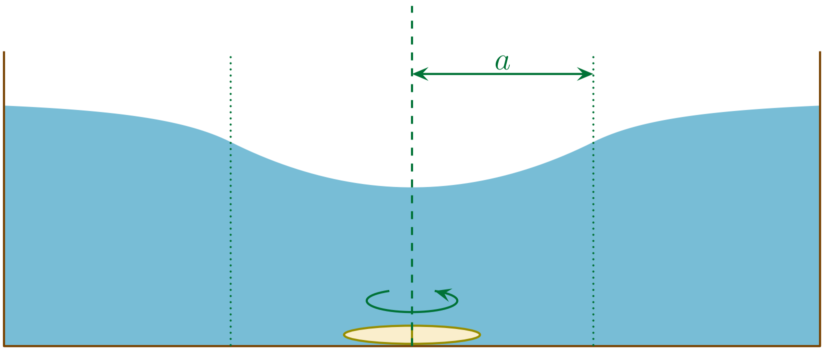
☯ comme la tornade

✧ Imaginons un tourbillon dans de l'eau, tourbillon provoqué, pourquoi pas, par un agitateur magnétique comme sur la photo ci-dessous [3].

3. Source : `http://www.lelaborantin.fr/boutique/images_produits/701182-z.jpg`

✧ La question que nous nous poserons est celle de la forme de la surface du fluide dont tout le monde a déjà pu constater qu'elle se « creusait ».

✧ L'écoulement sera modélisé par :
- ➜ un écoulement incompressible et parfait ;
- ➜ un vecteur tourbillon uniforme $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0$ dans le cylindre de rayon a ;
- ➜ un écoulement irrotationnel en dehors de cette zone.



✧ L'écoulement est considéré stationnaire.

rappel des résultats

✧ Nous retrouvons là le modèle de la tornade vu dans le chapitre 4.

✧ Ce modèle peut tout à fait s'appliquer ici puisque la seule hypothèse que nous avions faite alors était l'incompressibilité de l'écoulement. À aucun moment nous avions utilisé le fait que le fluide était liquide ou gazeux.

✧ Rappelons les résultats obtenus

zone	$\vec{\Omega}$	$\vec{v}$
$r < a$	$\vec{\Omega}_0$	$\Omega_0\, r\, \vec{u}_\theta$
$r > a$	$\vec{0}$	$\Omega_0\, \dfrac{a^2}{r}\, \vec{u}_\theta$

✯ idée, plan de bataille

✧ Pour déterminer la surface libre, nous allons faire comme pour le vase tournant vu au chapitre 5, à savoir :
- ➜ chercher le champ de pression à l'aide d'une loi (ici l'équation d'Euler) ;
- ➜ imposer $P(\text{surface}) = P_0$ et chercher la relation entre r et z_{surface}.

✧ Bien sûr, il faudra faire les deux cas $r < a$ et $r > a$.

✯ pour $r < a$

☯ accélération particulaire

✧ L'équation d'Euler s'écrit, au choix

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu\, \vec{g}$$

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\, \frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \right) \wedge \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \mu\, \vec{g}$$

✧ Nous avons ainsi, pour commencer, parce que le régime est stationnaire

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

✧ Ensuite, comme le calcul de la dérivée convective *via* $\left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{v}$ n'est pas, *a priori*, aisé en coordonnées cylindro-polaire, nous allons utiliser la deuxième relation.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{grad}}\, \frac{v^2}{2} &= \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{{\Omega_0}^2\, r^2}{2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{{\Omega_0}^2\, r^2}{2} \right) \vec{u}_r + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{{\Omega_0}^2\, r^2}{2} \right) \vec{u}_z \\
&= {\Omega_0}^2\, r\, \vec{u}_r
\end{aligned}$$

✧ Pour le deuxième terme, le calcul du rotationnel de la vitesse ne pose aucun problème puisque nous connaissons le vecteur tourbillon. Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \right) \wedge \vec{v} &= \left(2\, \vec{\Omega} \right) \wedge \Omega_0\, r\, \vec{u}_\theta \\
&= 2\, \Omega_0\, \vec{u}_z \wedge \Omega_0\, r\, \vec{u}_\theta \\
&= -2\, {\Omega_0}^2\, r\, \vec{u}_r
\end{aligned}$$

✧ Et en rassemblant

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\, \frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} \right) \wedge \vec{v} = \vec{0} + {\Omega_0}^2\, r\, \vec{u}_r - 2\, {\Omega_0}^2\, r\, \vec{u}_r = -\, {\Omega_0}^2\, r\, \vec{u}_r$$

☯ champ de pression

✧ L'équation d'Euler conduit donc à

$$-\mu\,{\Omega_0}^2\,r\,\vec{u}_r = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P - \mu\,g\,\vec{u}_z$$

✧ Cela donne, en projetant sur $\vec{u}_z$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \mu\,g = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P(r,z) = -\mu\,g\,z + f(r)$$

✧ La projection sur $\vec{u}_r$ donne, quant à elle

$$-\mu\,{\Omega_0}^2\,r = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

✧ Soit, en introduisant le début de solution trouvé,

$$-\mu\,{\Omega_0}^2\,r = 0 - f'(r) \qquad \rightsquigarrow \qquad f(r) = +\frac{\mu\,{\Omega_0}^2}{2}\,r^2 + \kappa \quad \text{avec} \quad \kappa = \mathrm{C^{te}}$$

✧ Et en rassemblant

$$P(r,z) = -\mu\,g\,z + \frac{\mu\,{\Omega_0}^2}{2}\,r^2 + \kappa$$

✯ pour $r > a$

☯ accélération particulaire

✧ Utilisons la même technique.
✧ Nous avons toujours

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

✧ Ensuite

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2} &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left({\Omega_0}^2\,\frac{a^4}{2\,r^2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left({\Omega_0}^2\,\frac{a^4}{2\,r^2}\right)\vec{u}_r + 0\,\vec{u}_z\\ &= -\frac{{\Omega_0}^2\,a^4}{r^3}\,\vec{u}_r\end{aligned}$$

✧ Pour le deuxième terme, c'est très rapide

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v} = \left(2\,\vec{\Omega}\right)\wedge\frac{\Omega_0\,a^2}{r}\,\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} = \vec{0} \qquad \rightsquigarrow \qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v} = \vec{0}$$

✧ Et en rassemblant

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v} = \vec{0} - \frac{{\Omega_0}^2\,a^4}{r^3}\,\vec{u}_r + \vec{0}$$

☯ champ de pression

✧ L'équation d'Euler donne

$$-\mu\,\frac{{\Omega_0}^2\,a^4}{r^3}\,\vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P - \mu\,g\,\vec{u}_z$$

✧ Cela donne, en projetant sur $\vec{u}_z$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \mu\,g = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad P(r,z) = -\mu\,g\,z + g(r)$$

✧ La projection sur $\vec{u}_r$ donne, quant à elle

$$-\mu\,{\Omega_0}^2\,\frac{a^4}{r^3} = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

✧ Soit, en introduisant le début de solution trouvé,

$$\mu\,{\Omega_0}^2\,\frac{a^4}{r^3} = 0 + g'(r) \qquad \rightsquigarrow \qquad f(r) = -\frac{\mu\,{\Omega_0}^2\,a^4}{2\,r^2} + \kappa' \quad \text{avec} \quad \kappa' = \text{C}^{\text{te}}$$

✧ Et en rassemblant

$$P(r,z) = -\mu\,g\,z - \frac{\mu\,{\Omega_0}^2\,a^4}{2\,r^2} + \kappa'$$

✯ détermination complète du champ de pression

☯ les conditions aux limites

✧ Il y a tout d'abord continuité de la pression en $r = a$, ce qui se traduit par

$$P(a^-,z) = P(a^+,z)$$

✧ De plus nous pouvons dire que « loin » du tourbillon, l'écoulement n'est pas pertubé. La surface libre est alors plane et nous en profiterons pour la prendre comme origine.
✧ Tout cela se traduit par

$$P(\infty,0) = P_0$$

☯ résolution

✧ La deuxième condition nous permet de trouver κ' et cela donne

$$0 + 0 + \kappa' = P_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \kappa' = P_0$$

✧ La première condition se traduit par

$$-\mu\,g\,z + \frac{\mu\,{\Omega_0}^2}{2}\,a^2 + \kappa = -\mu\,g\,z - \frac{\mu\,{\Omega_0}^2\,a^4}{2\,a^2}\,r^2 + P_0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \kappa = P_0 - \mu\,{\Omega_0}^2\,a^2$$

✧ Finalement

$$P(r<a,z) = -\mu\,g\,z + \frac{\mu\,{\Omega_0}^2}{2}\left(r^2 - 2\,a^2\right) + P_0 \qquad \text{et} \qquad P(r>a,z) = -\mu\,g\,z - \frac{\mu\,{\Omega_0}^2\,a^4}{2\,r^2} + P_0$$

✯ surface libre

☯ expression

✧ Traduisons le fait que

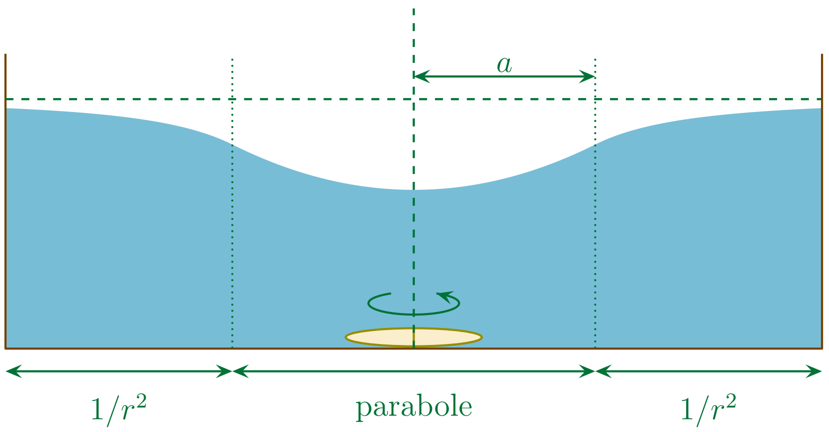
$$P(r,z_{\text{surf}}) = P_0$$

✧ Cela donne, après calculs

$$\begin{cases} \text{pour } r < a & z_{\text{surf}} = \dfrac{{\Omega_0}^2}{2\,g}\left(r^2 - 2\,a^2\right) \\ \text{pour } r > a & z_{\text{surf}} = -\dfrac{{\Omega_0}^2\,a^4}{2\,g}\,\dfrac{1}{r^2} \end{cases}$$

☯ graphiquement

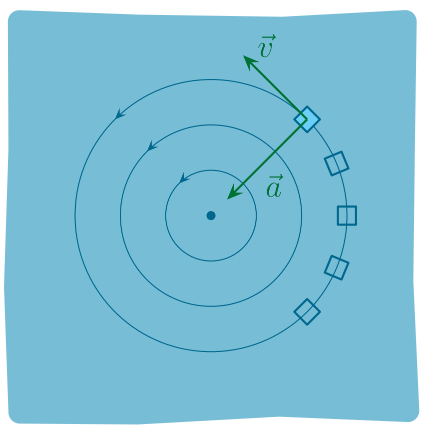
✧ Schématiquement la surface libre ressemble, en coupe, à la forme ci-dessous.



✯ retour sur l'accélération particulaire

✧ En fait, nous aurions pu trouver « facilement » les accélérations particulaire des particules de fluide sans passer par les calculs avec $\overrightarrow{\text{grad}}\,\dfrac{v^2}{2}$ et $\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}$.

✧ En effet, vu de dessus, chaque particule de fluide a une trajectoire circulaire.



✧ De plus le mouvement est uniforme donc nous pouvons écrire, conformément à la cinématique du *point* matériel sur une trajectoire circulaire

$$\widetilde{\vec{a}} = \text{« } -\frac{v^2}{r}\,\vec{u}_r \text{ »}$$

✧ Nous trouvons ainsi, pour $r < a$

$$v = \Omega_0\,r\,\vec{u}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{\vec{a}} = -\frac{{\Omega_0}^2\,r^2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{\vec{a}} = -{\Omega_0}^2\,r\,\vec{u}_r$$

✧ Et pour $r > a$

$$v = \Omega_0\,\frac{a^2}{r}\,\vec{u}_\theta \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{\vec{a}} = -\frac{{\Omega_0}^2\,a^4}{r^2} \times \frac{1}{r} \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{\vec{a}} = -{\Omega_0}^2\,\frac{a^4}{r^3}\,\vec{u}_r$$

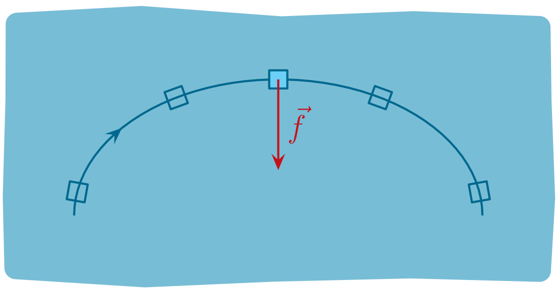
✧ Dans les deux cas, c'est bien ce que nous avions trouvé.

II·3·*ii* – pression et forme des lignes de courant

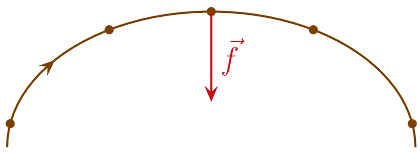
✯ répartition de pression

La pression est plus faible au niveau de la concavité des lignes de courant.

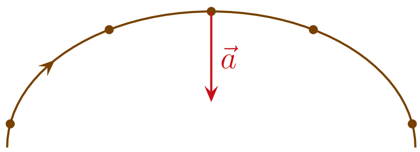
✧ Pour le voir, imaginons une ligne de courant en régime stationnaire. Il s'agit alors, forcément, d'une trajectoire particulaire.



✧ Nous pouvons considérer une particule de fluide comme un point matériel qui aurait alors la même trajectoire.



✧ Dans ces conditions, nous savons que l'accélération, et donc la résultante des forces, est dirigée vers la concavité de la trajectoire.



✧ Nous en déduisons que la résultante des forces qui s'exercent sur la particule de fluide est aussi dirigée vers la concavité.

✧ Or les forces qui s'exercent sont les forces pressantes et les force volumiques

$$\sum \vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \vec{f}_{\text{v,tot}}$$

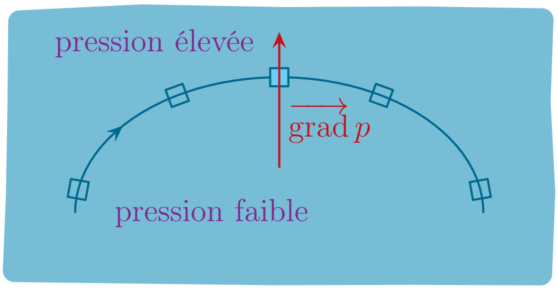
✧ Écrivons la pression sous la forme

$$P = \text{pression hydrostatique} \; + \; \text{surpression} \overset{\text{not}}{=} P_{\text{hyd}} + p$$

✧ La relation de l'hydrostatique nous permet de simplifier l'expression de la résultante des forces

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P_{\text{hyd}} = \vec{f}_{\text{v,tot}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \sum \vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p$$

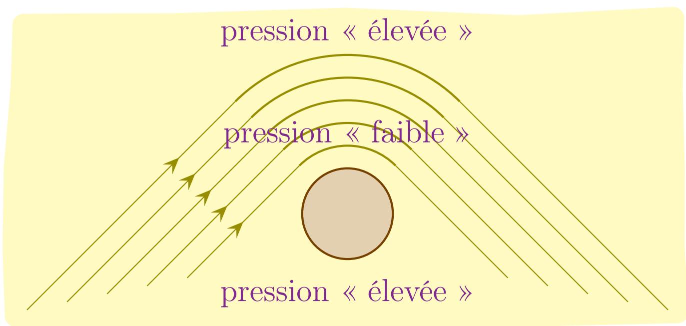
✧ Nous pouvons donc en conclure que $-\overrightarrow{\text{grad}}\,p$ est dirigé vers la concavité de la trajectoire donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,p$ est dirigé vers l'extérieur.



✧ Cela démontre bien que la surpression est plus faible à l'intérieur d'une ligne de courant.

★ **effet** Coanda

✧ Imaginons un obstacle (comme une balle) qui contrarirait les lignes de courant.



✧ Dans ces conditions la pression serait plus faible juste au dessus de la balle alors qu'en dessous, où les particules de fluides sont quasi-immobiles, la pression est plus élevée.
✧ La balle subit donc une résultante de force vers le haut.
✧ Avec une balle légère il est possible de la maintenir en suspension comme le montre la photoa ci-dessous issue d'une vidéo de l'expérience[4].

4. Source :

`http://pod.univ-lille1.fr/discipline/physique/1305/1305-faire-leviter-une-balle-de-ping-pong/`

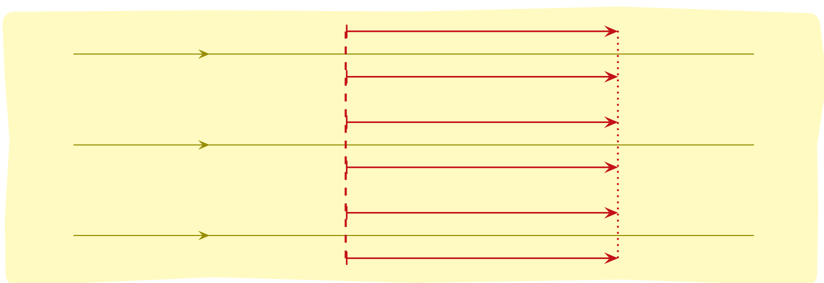
✧ Les deux captures d'écran suivantes, toujours extraites de la même vidéo, montrent que le flux d'air est intense au-dessus de la balle alors qu'il est quasiment nul en dessous.

✧ C'est aussi cet effet qui est responsable du fait que, contrairement à ce que laisserait le penser l'intuition, un objet placé en dessous d'un jet d'eau (pas trop fort) n'est pas éjecté mais, au contraire, est « aspiré » pour rester sous le jet.

II·3·*iii* – pression dans un jet libre

✯ jet libre

Un *jet* est un écoulement à lignes de courant parallèles où la vitesse ne dépend pas de la ligne de courant.



✧ Autrement dit, en notant $\vec{u}_x$ la direction du jet, nous avons $\vec{v} = v(x,t)\,\vec{u}_x$.

✯ résultat utile

Dans un jet, la répartition de pression orthogonalement aux lignes de courant est hydrostatique.

✧ En effet, en projetant l'équation d'Euler sur $\vec{u}_y$ (ou $\vec{u}_z$) qui sont les direction normales à l'écoulement nous avons

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} + f_{\text{v,tot},y} \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = f_{\text{v,tot},y}$$

✧ Ce qui est bien l'équation de statique des fluides.

✫ jet libre

Un *jet libre* est un jet à l'intérieur d'un autre fluide.

✧ Avec le résultat précédent, nous pouvons dire immédiatement

Dans tout jet libre à l'intérieur de l'atmosphère, la pression n'est autre que la pression atmosphérique.

II·4 – Ondes sonores, l'écho

✧ Les ondes sonores étant un cas particulier d'écoulement de fluide, il paraît normal de pouvoir les retrouver à l'aide des équations de la mécanique des fluides.

II·4·*i* – rappel à la loi

✧ Nous disposons de trois lois.
✧ Il y a tout d'abord l'équation d'Euler puisque, pour les ondes sonores, l'écoulement est considéré parfait

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}$$

✧ Il y a ensuite la loi locale de conservation de la masse

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = \vec{0}$$

✧ Il y a, enfin, la loi comportementale du fluide

$$\mu = \mu(P)$$

✧ Cette dernière loi représente la manière dont le fluide est *compressible*.
✧ Insistons : les ondes sonores ne sont qu'un écoulement particulier, parfait mais, pour une fois, **non** incompressible.

II·4·*ii* – linéarisation

✫ approximation acoustique

✧ Rappelons que l'approximation acoustique consiste à dire que les ondes sonores ne sont qu'une faible perturbation de l'état de repos, *i.e.*

$P = P_0 + p_1$	avec	$p_1 \ll P_0$
$\mu = \mu_0 + \mu_1$	avec	$\mu_1 \ll \mu_0$
$\vec{v} = \vec{0} + \vec{v}_1$	avec	$\|\vec{v}_1\| \ll c$

✧ Dans notre cas, nous allons aussi supposer la pression uniforme au repos, ce qui revient à négliger l'influence du poids.

✭ l'accélération convective est négligeable

✧ Dans la dérivée particulaire, il y a deux termes à prendre en compte : l'accélération locale et l'accélération convective.

✧ Comparons-les en ordre de grandeur en sachant que la longueur caractéristique de propagation pour les ondes est la longueur d'onde λ

$$\frac{\left\|\dfrac{\partial}{\partial t}\right\|}{\left\|\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right\|} \equiv \frac{\dfrac{1}{T}}{V\,\dfrac{1}{\lambda}} \qquad \leadsto \qquad \frac{\text{variation locale}}{\text{variation convective}} \equiv \frac{\lambda/T}{V} \equiv \frac{c}{V} \gg 1$$

✧ Nous pouvons donc en conclure que, dans tous les cas, nous pouvons négliger le terme de variation convective.

✭ l'équation d'Euler

✧ L'équation d'Euler s'écrit

$$\left(\mu_0 + \mu_1\right)\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\left(P_0 + p_1\right)$$

✧ Comme le gradient de P_0 est nul (pression uniforme) et que le terme $\mu_1\,\dfrac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ est d'ordre 2, nous arrivons à

$$\mu_0\,\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p_1$$

✭ conservation de la masse

✧ La loi de conservation de la masse, dans sa deuxième version, donne

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = 0$$

✧ Comme la variation convective est négligeable devant la variation locale, la dérivée particulaire de la masse volumique se réduit à la dérivée locale et ainsi

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\,\text{div}\,\vec{v} = 0 \qquad \leadsto \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 + \mu_1\right) + \left(\mu_0 + \mu_1\right)\,\text{div}\,\vec{v}_1 = 0$$

✧ μ_0 est une constante et $\mu_1\,\text{div}\,\vec{v}_1$ est d'ordre 2, donc nous arrivons à

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0\,\text{div}\,\vec{v}_1 = 0$$

✯ loi de comportement phénoménologique

✧ Celle-ci ne change pas.
✧ Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit

$$\chi_S = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial P}$$

✧ La loi consiste à dire $\chi_S = \mathrm{C^{te}}$.
✧ Nous avons ainsi, en assimilant les petites variation à l'écart à l'état de repos

$$\chi_S = \frac{1}{\mu_0+\mu_1}\,\frac{\mu_1}{p_1} \quad \rightsquigarrow \quad p_1\,(\mu_0+\mu_1)\,\chi_S = \mu_1$$

✧ Et en négligeant le terme d'ordre 2

$$p_1\,\mu_0, \chi_S = \mu_1$$

II·4·*iii* – équation de propagation

✯ équations de couplage

✧ Commençons par supprimer la variable μ_1 pour faire des équations de couplage entre p_1 et $\vec{v}_1$.
✧ Pour l'équation d'Euler il n'y a rien à faire

$$\mu_0\,\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1$$

✧ Pour l'équation de conservation de la masse, ça se passe tout seul

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{v}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 = p_1\,\mu_0, \chi_S \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(p_1\,\mu_0\,\chi_S\right) + \mu_0\,\mathrm{div}\,\vec{v}_1 = 0$$

✧ Et ainsi, en simplifiant par μ_0,

$$\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{v}_1$$

✯ équation de propagation en surpression

✧ Il faut « éliminer » $\vec{v}_1$.
✧ Commençons par calculer $\triangle\,p_1 = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1\right)$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p_1\right) &= \mathrm{div}\left(-\mu_0\,\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right) = -\mu_0\,\mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\\ &= -\mu_O\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\vec{v}_1\right)\\ &= -\mu_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(-\chi_s\,\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

✧ Et finalement nous arrivons bien à

$$\triangle\,p_1 = \mu_0\,\chi_S\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \rightsquigarrow \quad \triangle\,p_1 = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}}$$

✯ **équation de propagation en vitesse particulaire**

✧ Comme nous faisons depuis toujours, pour trouver l'équation vérifié, en 3D, par un champ vectoriel, calculons le rotationnel du rotationnel.

✧ Ici, pour $\vec{v}_1$, cela donne d'abord, avec l'aide de la définition du laplacien vectoriel

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}_1\right) &= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{v}_1\right) - \vec{\Delta}\,\vec{v}_1 \\
&= \overrightarrow{\text{grad}}\left(-\chi_S\,\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) - \vec{\Delta}\,\vec{v}_1 \\
&= -\chi_S\,\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}\right) - \vec{\Delta}\,\vec{v}_1 \\
&= -\chi_S\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,p_1\right) - \vec{\Delta}\,\vec{v}_1 \\
&= -\chi_S\,\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\,\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right) - \vec{\Delta}\,\vec{v}_1 \\
&= +\chi_S\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - \vec{\Delta}\,\vec{v}_1
\end{aligned}$$

✧ Reste à calculer $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}$. Pour cela reprenons l'équation d'EULER linéarisée et calculons son rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0\,\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,p_1\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}_1\right) = \vec{0}$$

✧ Nous pouvons donc dire que le rotationnel de la vitesse est constant. Sauf qu'à l'état initial, l'état de repos, celui-ci est nul puisque tout est immobile.

✧ De là nous en déduisons $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}_1 = \vec{0}$ puis

$$\vec{0} = +\chi_S\,\mu_0\,\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - \vec{\Delta}\,\vec{v}_1 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \vec{\Delta}\,\vec{v}_1 \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}}$$

II·5 – Relations de BERNOULLI

II·5·*i* – écoulement irrotationnel et homogène

✯ **énoncé**

> Dans un écoulement **P**arfait **H**omogène **I**rrotationnel **S**tationnaire **Inc**compressible (PHISIc), nous pouvons écrire
>
> $$\frac{P}{\mu} + g\,h + \frac{v^2}{2} = \text{C}^{\text{te}} \text{ dans } \textbf{tout} \text{ le fluide}$$

✧ Commençons par insister : la constante est valable dans *tout* le fluide. Il existe en effet une autre relation de BERNOULLI où tel ne sera pas le cas.

✧ Pour retenir toutes les hypothèses (5), nous pouvons remarquer que, rassemblées, elles forment l'acronyme PHISIc.

✧ Le terme $g\,z$ représente l'énergie potentielle de pesanteur massique. Si d'autre énergies potentielles sont présentes, alors la relation de BERNOULLI s'écrirait

$$\frac{P}{\mu} + e_{\text{p}} + \frac{v^2}{2} = \text{C}^{\text{te}}$$

✯ démonstration

✧ Commençons par reprendre l'équation d'EULER, puisque l'écoulement est parfait.

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}$$

✧ Sachant que l'écoulement est stationnaire, il se simplifie en

$$\mu\left(\vec{0} + \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}$$

✧ Puis l'écoulement est irrotationnel

$$\mu\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \vec{0}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}$$

✧ De plus nous pouvons, en notant $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire ascendant écrire

$$\mu\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P - \mu\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(g\,z)$$

✧ Divisons par la masse volumique

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,P - \overrightarrow{\text{grad}}\,(g\,z)$$

✧ Comme l'écoulement est homogène, nous pouvons passer la masse volumique « dans » le gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{P}{\mu} - \overrightarrow{\text{grad}}\,(g\,z)$$

✧ Enfin, en regroupant les gradients

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g\,z\right) = 0 \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\mu} + g\,z = \text{C}^{\text{te}}$$

✧ Ce qui est bien la loi recherchée en renommant z en h pour rendre l'écriture intrinsèque, *i.e.* indépendant du système de coordonnées.

II·5·*ii* – écoulement non irrotationnel et homogène

✯ énoncé

Dans un écoulement **P**arfait **S**tationnaire **I**n**c**compressible et **H**omogène (PSIcH), nous pouvons écrire

$$\frac{P}{\mu} + g\,h + \frac{v^2}{2} = \text{C}^{\text{te}} \text{ sur une ligne de courant}$$

✧ Bien que la formulation de la relation soit la même que précédemment, la loi est bien différente car, cette fois, la constante n'est valable que le long d'une ligne de courant !

✧ La plupart du temps, comme nous ne saurons pas forcément si l'écoulement est rotationnel ou non (ce qui n'est pas toujours évident à « voir » [5]), nous utiliserons cette dernière forme de la relation de BERNOULLI.

✧ En revanche, il faudra bien faire attention que l'écoulement soit parfait *tout le long* de la ligne de courant. En particulier il ne faut pas que la ligne de courant traverse une zone de turbulence.

✯ démonstration

✧ La démonstration est très similaire à la précédente, évidemment.

✧ Commençons par reprendre l'équation d'EULER, puisque l'écoulement est parfait.

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2}+\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,P+\mu\,\vec{g}$$

✧ Sachant que l'écoulement est stationnaire, cela nous donne, en divisant par la masse volumique

$$\vec{0}+\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2}+\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}=-\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,P+\vec{g}$$

✧ Multiplions scalairement par $\text{d}\vec{\ell}$, déplacement élémentaire le long d'une ligne de courant, tout en transformant $\vec{g}$ en $-\overrightarrow{\text{grad}}\,(g\,z)$

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2}\right)\cdot\text{d}\vec{\ell}+\left(\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right)\cdot\text{d}\vec{\ell}=-\frac{1}{\mu}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,P\right)\cdot\text{d}\vec{\ell}-\overrightarrow{\text{grad}}\,(g\,z)\cdot\text{d}\vec{\ell}$$

✧ Comme $\vec{v}$ est, par définition, tangent à la ligne de courant, nous avons

$$\vec{v}\,/\!\!/\,\text{d}\vec{\ell}\quad\rightsquigarrow\quad\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\perp\text{d}\vec{\ell}\qquad\rightsquigarrow\qquad\left(\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right)\cdot\text{d}\vec{\ell}=0$$

✧ Comme l'écoulement est homogène, nous pouvons « rentrer » la masse volumique dans le gradient et ainsi

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2}\right)\cdot\text{d}\vec{\ell}+0=-\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{P}{\mu}\right)\cdot\text{d}\vec{\ell}-\overrightarrow{\text{grad}}\,(g\,z)\cdot\text{d}\vec{\ell}$$

✧ Utilisons la relation fondamentale du gradient

$$\text{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\text{d}\left(\frac{P}{\mu}\right)-\text{d}(g\,z)$$

✧ Et regroupons

$$\text{d}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{P}{\mu}+g\,z\right)=0$$

5. C'est ainsi que l'écoulements de COUETTE et de POISEUILLE vus dans la partie précédente ne sont pas irrotationnels. Ceci dit, ce n'est pas grave vu qu'ils ne sont pas parfaits non plus, nous n'aurions pas pu utiliser la relation de BERNOULLI.

✧ En notant de manière intrinsèque $z \overset{\text{not}}{=} h$, cette relation signifie que la grandeur $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{P}{\mu} + g\,h$ reste constante pour tout déplacement envisagé. Et comme nous avons imposé $\mathrm{d}\vec{\ell}$ suivant une ligne de courant, cela implique que la constante n'est vraie que sur une telle ligne.

✯ démonstration sans l'homogénéité

✧ Ce petit paragraphe est totalement hors-programme, c'est uniquement culturel.

✧ En fait le caractère « homogène » n'est pas nécessaire à la démonstration. Que l'écoulement soit incompressible suffit.

✧ En effet, l'intérêt de l'homogénéité de l'écoulement est de pouvoir écrire

$$\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{P}{\mu}$$

✧ En fait, nous avons de manière plus générale et en supposant uniquement le caractère incompressible de l'écoulement

$$\frac{1}{\mu}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{P}{\mu}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$$

✧ Pour le prouver, calculons $\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\dfrac{P}{\mu}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$. Les relations sur les opérateurs vectoriels donnent

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{P}{\mu}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} &= \left(\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \left(P\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{1}{\mu}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\\ &= \left(\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} - \frac{P}{\mu^2}\,\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\end{aligned}$$

✧ Calculons, maintenant, la dérivée particulaire de la masse volume.

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mu}{\partial t} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu$$

✧ Comme l'écoulement est incompressible, les particules de fluide ont une masse volumique constante et comme l'écoulement est stationnaire, nous obtenons

$$0 = 0 + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu$$

✧ Comme $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t}$ avec $\mathrm{d}\vec{\ell}$ le long d'une ligne de courant, nous avons donc

$$\mathrm{d}\vec{\ell}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mu = 0$$

✧ En reportant ce résultat dans le développement de $\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\dfrac{P}{\mu}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$, nous obtenons

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{P}{\mu}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \left(\frac{1}{\mu}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

✯ remarques

☯ où la mécanique du point refait surface

✧ Sans véritablement s'en rendre compte, le fait de multiplier scalairement par $\mathrm{d}\vec{\ell}$ le long d'une ligne de courant tout en étant en régime stationnaire transforme l'équation d'EULER en PFD. Autrement dit, nous revenons à la vision de la mécanique du point.

✧ En effet, en régime stationnaire les trajectoires et les lignes de courant sont identiques. Donc si nous nous focalisons sur une ligne de courant, c'est que nous regardons les trajectoires une à une donc, en fait, chaque particule de fluide de manière isolée.

✧ En remarquant cela, nous comprenons mieux pourquoi le caractère « homogène » qui implique une relation entre les particules de fluide n'est pas nécessaire pour la démonstration.

☯ et la relation de BERNOULLI vue avec les bilans énergétiques ?

✧ En fait, lorsque nous avons « démontré » une relation de BERNOULLI dans le chapitre précédent, c'est la version « PSIcH » que nous avons vue.

✧ Dans ce chapitre la démonstration a été faite *via* l'équation d'EULER, *i.e. via*, d'une certaine manière, le PFD, alors que dans le chapitre précédent nous sommes partis de la conservation de l'énergie.

✯ généralisation

Suivant les hypothèses, les relations de BERNOULLI peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{P}{\mu} + e_{\mathrm{p}} + \frac{v^2}{2} = \mathrm{C^{te}}$$

La relation n'est valable que là où les hypothèses l'autorisent avec e_{p} l'énergie potentielle massique.

✧ L'énergie potentielle massique est le plus souvent l'énergie potentielle de pesanteur $e_{\mathrm{p,pes}} = g\,h$.

✧ Il n'est pas interdit d'imaginer des problèmes où l'énergie potentielle est celle associée à la force d'inertie d'entraînement

$$e_{\mathrm{p,ie}} = -\frac{1}{2}\,\Omega^2\,HM^2$$

II·5·*iii* – idoinotons vérificateurs d'hypothèses

✯ importance du homogène

✧ Considérons un écoulement irrotationnel, incompressible et non homogène comme, par exemple, l'atmosphère statique isotherme.

✧ Dans une telle atmosphère, la pression et la masse volumique suivent les lois respectives [6]

$$P(z) = P_0\,\mathrm{e}^{-z/H} \qquad \text{et} \qquad \mu(z) = \mu_0\,\mathrm{e}^{-z/H} \qquad \text{avec} \qquad H = \frac{R\,T}{M\,g}$$

✧ Question la relation de BERNOUILLI est-elle vérifiée dans tout le fluide ?

✧ Nous avons

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g\,z = \frac{P_0\,\mathrm{e}^{-z/H}}{\mu_0\,\mathrm{e}^{-z/H}} + 0 + g\,z \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g\,z = \frac{P_0}{\mu_0} + g\,z \neq \mathrm{C^{te}}$$

6. Voir chapitre précédent.

- Nous pouvons constater que la relation n'est pas constante dans tout le fluide.
- En revanche, comme nous l'avons vu, nous pourrions utiliser l'autre relation de BERNOULLI, celle qui n'impose pas l'homogénéité. Et là nous aurions, sur une ligne de courant

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g\,z = \mathrm{C^{te}}$$

- C'est bien le cas ici sauf que les lignes de courant se réduisent à un point. Autant dire que la relation est inutile.

✯ importance du irrotationnel

modèle de la tornade

- Rappelons les résultats obtenus précédemment.
- Pour $r < a$:
  - ➜ vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \Omega_0\,\vec{u}_z$;
  - ➜ champ de vitesse : $\vec{v} = r\,\Omega_0\,\vec{u}_\theta$;
  - ➜ champ de pression : $P = -\mu\,g\,z + \dfrac{1}{2}\,\mu\,\Omega_0\,(r^2 - 2\,a^2) + P_0$.
- Pour $r > a$:
  - ➜ vecteur tourbillon : $\vec{\Omega} = \vec{0}$;
  - ➜ champ de vitesse : $\vec{v} = \Omega_0\,\dfrac{a^2}{r}\,\vec{u}_\theta$;
  - ➜ champ de pression : $P = -\mu\,g\,z - \dfrac{1}{2}\,\mu\,\Omega_0\,\dfrac{a^4}{r^2} + P_0$.

pour $r < a$

- Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g\,z &= \left(-g\,z + \frac{1}{2}\,\Omega_0\,(r^2 - 2\,a^2) + \frac{P_0}{\mu}\right) + r^2\,{\Omega_0}^2 + g\,z \\ &= \frac{P_0}{\mu} + {\Omega_0}^2\,(r^2 - a^2)\end{aligned}$$

- Nous trouvons donc

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g\,z = f(r)$$

- Autrement dit, nous avons bien une constante pourvu que nous restions à r fixé.
- Or, fixer r, revient à rester sur un cercle, *i.e.* sur une trajectoire particulaire ou encore une ligne de courant.
- La constante n'est bien constante que sur une ligne de courant : c'est cohérent avec le fait qu'ici, pour $r < a$, l'écoulement est rotationnel.

pour $r > a$

- Nous avons

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} + g\,z = \left(-g\,z - \frac{1}{2}\,\Omega_0\,\frac{a^4}{r^2} + \frac{P_0}{\mu} \right) + {\Omega_0}^2\,\frac{a^4}{r^2} + g\,z$$
$$= \frac{P_0}{\mu}$$

✧ Cette fois, nous voyons bien que la constante est valable dans toute la zone où le rotationnel est nul, conformément aux hypothèses de la relation de Bernoulli.

II·5·*iv* – limite de vitesse pour un écoulement incompressible

✧ Rappelons une loi vue prédemment.

> Un écoulement ne peut être considéré comme incompressible que si les vitesses particulaires sont très inférieures à celle du son.

✧ L'exemple de la propagation sonore nous montre tout de suite qu'il s'agit là d'une condition nécessaire mais non suffisante. En effet :
- ➜ l'écoulement est compressible (cf. utilisation de χ_S) ;
- ➜ les vitesses particulaires sont faibles (approximation acoustique).

✧ Pour le justifier, supposons un écoulement incompressible, stationnaire et parfait.

✧ Sur une ligne de courant, nous pouvons écrire, en négligeant la pesanteur

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} = \mathrm{C^{te}}$$

✧ Ainsi, en supposant que $0 < v < v_{\text{max}}$, nous pouvons dire que la pression vérifie la double inégalité

$$P_{\text{min}} < P < P_{\text{min}} + \mu\,\frac{{v_{\text{max}}}^2}{2}$$

✧ Connaissant la variation de pression que subit une particule de fluide, cherchons sa variation de masse volumique

$$\chi_S = \frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial P} \quad \rightsquigarrow \quad \chi_S = \frac{1}{\mu_0} \times \frac{\delta\mu}{\delta P} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\delta\mu}{\mu_0} = \chi_S\,\delta P$$

✧ Or $\delta P = P_{\text{max}} - P_{\text{min}}$ ce qui conduit à

$$\frac{\delta\mu}{\mu_0} = \chi_S \times \mu\,\frac{{v_{\text{max}}}^2}{2}$$

✧ Nous reconnaissons l'expression de la célérité du son

$$\chi_S \times \mu = \frac{1}{c^2} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\delta\mu}{\mu_0} = \frac{{v_{\text{max}}}^2}{2\,c^2}$$

✧ Dans ces conditions, nous pouvons dire que tant que les particules de fluides ont des vitesses faibles devant la célérité du son, alors l'écoulement peut être considéré comme incompressible.

✧ Nous ne retrouvons là qu'un des aspects de l'approximation acoustique qui implique que la masse volumique des particules de fluide ne varie que de manière infinitésimale.

✧ Sauf que dans le cas du son, cette variation infinitésimale correspond à un phénomène intéressant.

II·6 – Applications des relations de Bernoulli

II·6·*i* – effet Venturi

✫ qualitativement

✧ Qualitativement, l'effet Venturi correspond à la baisse de pression engendrée par une augmentation locale de vitesse conformément à la relation de Bernoulli où l'effet de pesanteur est négligé

$$\frac{P}{\mu} + \frac{v^2}{2} = \mathrm{C^{te}}$$

☯ trompe à eau

✧ Ce phénomène est utilisé, par exemple, dans les trompe à eau en chimie (voir photos ci-dessous [7]) :
- ➜ le resserement du tube dans lequel s'écoule l'eau provoque une diminution de pression dans l'eau ;
- ➜ la pression étant une fonction continue de l'espace, la pression autour du jet diminue ;
- ➜ cela crée une dépression par rapport à la pression atmosphérique et, de là, une aspiration.

☯ soulever une balle

✧ Autre manifestation (plus spectaculaire) de l'effet Venturi : quand un courant d'air « assez fort » arrive par l'embouchure d'un entonnoir retourné au dessus d'une balle de ping-pong, celle-ci à tendance à se soulever. Voir la capture d'écran ci-dessous d'une vidéo de l'expérience [8].

✧ La raison est simple :
- ➜ la présence de la balle obture le passage pour l'air ;

7. Sources :
   - ➜ http://abauhain.free.fr/4images/data/media/309/trompe_eau_ensemble_01.JPG
   - ➜ http://abauhain.free.fr/4images/data/media/309/trompe_eau_detail_04.JPG

8. Source : http://pod.univ-lille1.fr/video/1303/1303-une-balle-de-ping-pong-recalcitrante/

- ➜ comme l'écoulement est incompressible[9], l'air voit sa vitesse augmenter, spécialement au dessus de la balle, là où il y a le moins de place ;
- ➜ puisque la vitesse augmente au-dessus de la balle, la pression diminue ;
- ➜ et comme la pression est plus faible au dessus de la balle qu'en dessous, cette dernière subit une poussée de bas en haut.

les toits des maisons

✧ L'effet Venturi existe de manière domestique, au niveau des toits.

✧ Ceux-ci, par leurs présences diminuent la place disponible pour le vent, donc celui-ci accélère et la pression baisse :

- ➜ si le vent est faible, c'est plutôt une bonne chose pour le tirage des cheminées ;
- ➜ si le vent est fort, l'effet est tel que les tuiles peuvent s'envoler.

voitures de course

✧ Dernier exemple : les voitures de course.

✧ En s'arrangeant, aérodynamiquement pour créer un « goulot » sous la voiture, l'air qui s'y engoufre doit accélérer ce qui fait chuter la pression. L'intérêt est de créer une force verticale sur la voiture de haut en bas de manière à « plaquer » la voiture au sol.

✧ En effet, plus la voiture appuie sur le sol, plus la réaction normale est grande et plus la réaction normale est grande, plus la réaction tangentielle peut l'être.

✧ Et comme seule la réaction fait accélerer, nous voyons bien qu'il s'agit là d'un effet recherché.

✧ L'effet est si important que, pour limiter la vitesse, il est contrôlé par les réglements.

Remarque. Cet effet, dans le cas des voitures, est appelé « effet de sol »

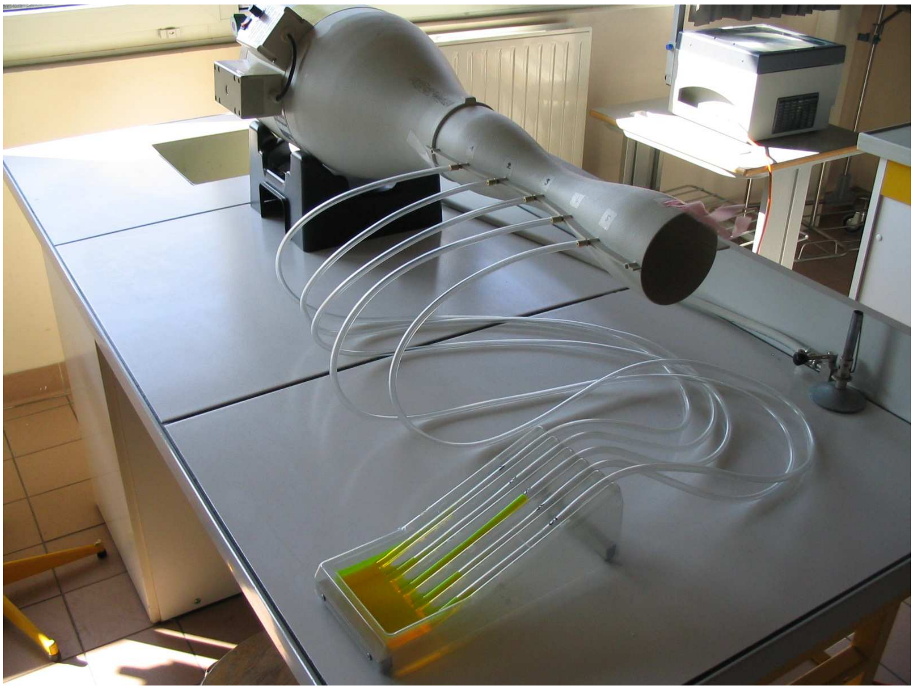
✯ débimètre

✧ Nous allons voir, dans ce paragraphe, un exemple de dispositif basé sur l'effet Venturi et qui permet de mesurer des débits.

expérience

✧ Voici ci-dessous la photo d'une expérience[10].

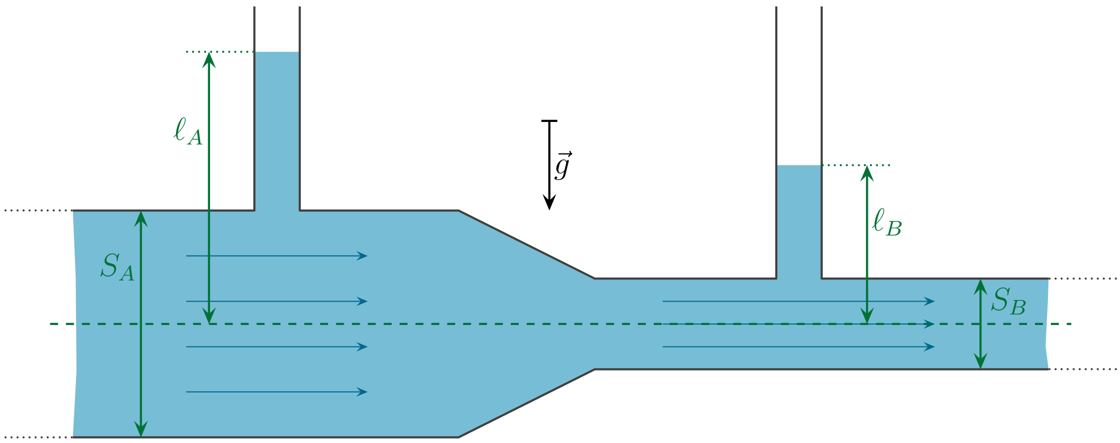
9. L'air n'est pas envoyé à la vitesse du son !
10. Source : `http://www.maths-sciences-pro.fr/pages/bacpro/T5/LivreIII/venturi1.jpg`



- Comme cela ne se voit pas, la soufflerie crée un courant d'air dans le tube.
- Au niveau du resserement, comme l'écoulement est incompressible, la vitesse doit augmenter donc la pression diminuer.
- Cette diminution de pression crée une « aspiration » nettement visible dans les pailles numéroté.
- En connaissant les caractéristiques géométriques de l'appareil, il est possible d'en déduire le débit.

dispositif étudié

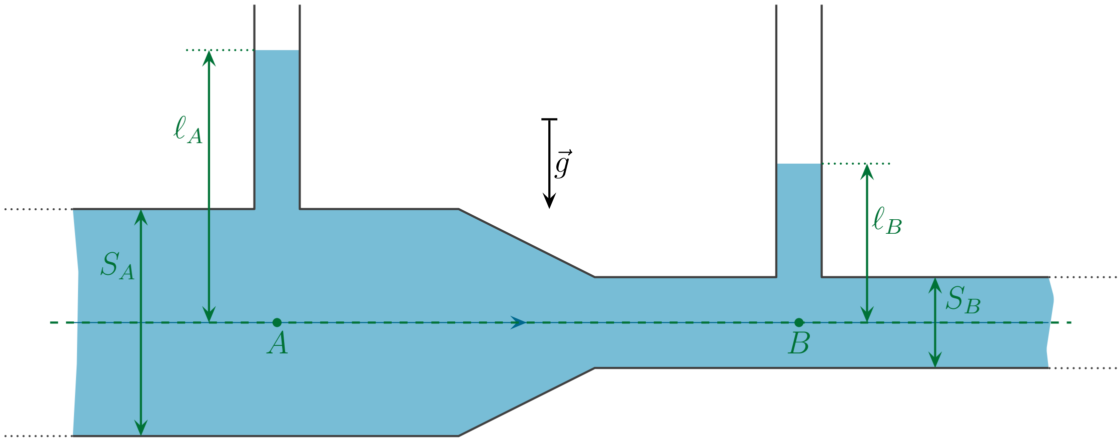
- Ici nous n'allons pas étudier un écoulement d'air, mais un écoulement de liquide dans une canalisation horizontale.



- Comme nous le voyons sur le schéma précédent, il y a deux petit tuyaux greffés sur l'écoulement principal.
- Nous allons montrer que la différence de hauteur permet de mesurer le débit.

relation de Bernoulli

- Choisisons la ligne de courant qui passe par l'axe et notons A et B les points sur cette ligne à la verticale des prises de pression.



✧ La relation de Bernoulli s'écrit donc, pour cet écoulement PSIcH (Parfait, Stationnaire, Incompressible et Homogène)

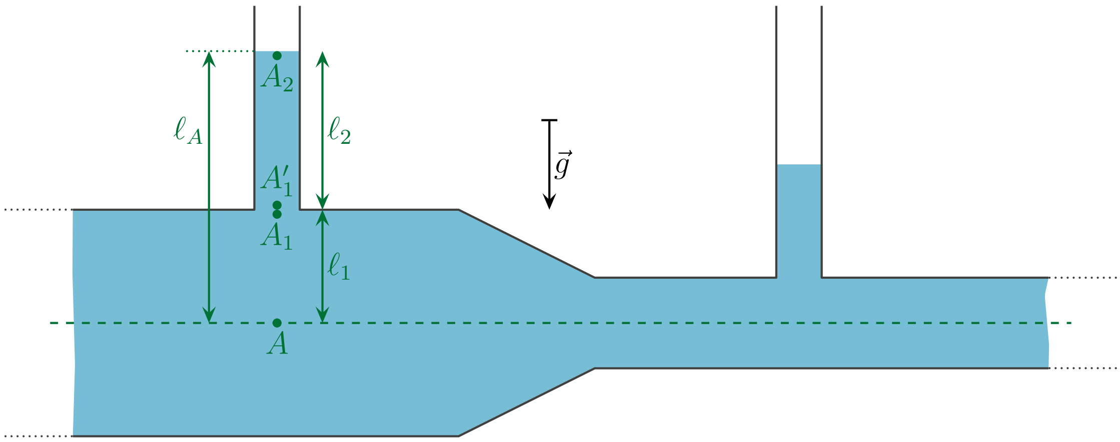
$$\frac{P_A}{\mu} + g\,h_A + \frac{{v_A}^2}{2} = \frac{P_B}{\mu} + g\,h_B + \frac{{v_B}^2}{2}$$

✧ Comme les points A et B sont à la même cote, il reste

$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{{v_A}^2}{2} = \frac{P_B}{\mu} + \frac{{v_B}^2}{2}$$

☯ pression en A

✧ Focalisons-nous sur ce qui se passe autour de A.



✧ Entre A et A_1, nous avons affaire à un jet donc la répartition de pression est hydrostatique, ce qui donne

$$P_A = P_{A1} + \mu\,g\,\ell_1$$

✧ Entre A_1 et A'_1, la pression est continue

$$P_{A1} = P'_{A1}$$

✧ Enfin entre A'_1 et A_2, l'eau étant statique, la répartition de pression est hydrostatique donc

$$P'_{A1} = P_{A_2} + \mu\,g\,\ell_2$$

✧ Par continuité de la pression, nous avons

$$P_{A_2} = P_{\text{atm}}$$

✧ En rassemblant le tout

$$P_A = P_{\text{atm}} + \mu\, g\, \ell_1 + \mu\, g\, \ell_2 \qquad \rightsquigarrow \qquad P_A = P_{\text{atm}} + \mu\, g\, \ell_A$$

☯ **pression en B**

✧ Avec un raisonnement identique, nous trouvons

$$P_B = P_{\text{atm}} + \mu\, g\, \ell_B$$

☯ **expression du débit**

✧ En remplaçant les expressions de la pression dans la relation de BERNOULLI nous obtenons

$$P_{\text{atm}} + \mu\, g\, \ell_A + \mu\, \frac{{v_A}^2}{2} = P_{\text{atm}} + \mu\, g\, \ell_B + \mu\, \frac{{v_B}^2}{2} \qquad \rightsquigarrow \qquad {v_B}^2 - {v_A}^2 = 2\, g\, \left(\ell_A - \ell_B\right)$$

✧ Or, l'incompressibilité de l'écoulement nous permet d'écrire

$$D_v = S_A\, v_A \qquad \text{et} \qquad D_v = S_B\, v_B$$

✧ Ce qui donne

$$\frac{{D_v}^2}{{S_B}^2} - \frac{{D_v}^2}{{S_A}^2} = 2\, g\, \left(\ell_A - \ell_B\right) \qquad \rightsquigarrow \qquad {D_v}^2 = 2\, g\, \left(\ell_A - \ell_B\right) \times \frac{{S_A}^2\, {S_B}^2}{{S_A}^2 - {S_B}^2}$$

✧ Et ainsi

$$D_v = S_A\, S_B \times \sqrt{\frac{2\, g\, \left(\ell_A - \ell_B\right)}{{S_A}^2 - {S_B}^2}}$$

II·6·*ii* – vidange d'un réservoir : formule de TORRICELLI

✭ **expérience**

✧ Prenons deux réservoirs de diamètres différents et remplissons-les à la même hauteur.

✧ Installons des petits tubes de vidange à différentes hauteurs sur ces réservoirs et regardons ce qui se passe[11].

11. Source : `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/23/Bernoulli.jpg`

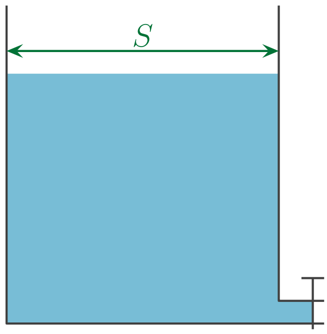
✧ Nous constatons que plus la vidange se fait près de la surface, plus la vitesse est faible et ce, quelle que soit la taille du réservoir.
✧ Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que la vitesse d'éjection de l'eau ne dépend, en effet que de la hauteur de l'eau au-dessus de l'éjection.

✫ cas quasi-stationnaire

✧ Supposons l'écoulement quasi-stationnaire

☯ modélisation

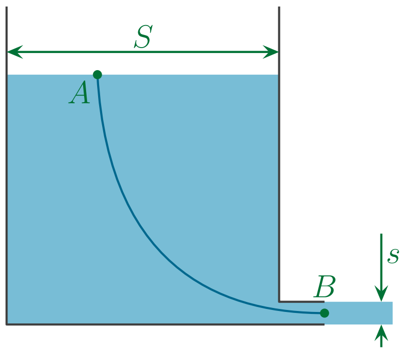
✧ Modélisons le réservoir de la manière suivante.



✧ La section s de l'écoulement est très petite devant la section S du réservoir.
✧ Cherchons la vitesse au niveau de la vidange.

☯ vitesse d'éjection

✧ Comme l'écoulement est PSIcH (Parfait, (quasi-)stationnaire, Incompressible et Homogène), nous pouvons utiliser la relation de BERNOULLI sur la ligne de courant dessinée ci-dessous.



✧ Ainsi, entre A et B, nous avons

$$\frac{P_A}{\mu} + \frac{{v_A}^2}{2} + g\,h_A = \frac{P_B}{\mu} + \frac{{v_B}^2}{2} + g\,h_B$$

✧ Nous avons :
- ➜ $P_A = P_{\text{atm}}$ par continuité de la pression ;
- ➜ $P_B = P_{\text{atm}}$ parce qu'en B il y a un jet libre.

✧ Il reste

$$\frac{{v_A}^2}{2} + g\,h_A = \frac{{v_B}^2}{2} + g\,h_B$$

✧ De plus, l'incompressibilité de l'écoulement impose

$$v_A\,S = v_B\,s \qquad \text{et} \qquad S \gg s \qquad \rightsquigarrow \qquad v_A \ll v_B$$

✧ Nous pouvons donc simplifier encore la relation

$$g\,h_A = \frac{{v_B}^2}{2} + g\,h_B \quad \rightsquigarrow \quad v_B = \sqrt{2\,g\,(h_A - h_B)} \quad \rightsquigarrow \quad v_B = \sqrt{2\,g\,H}$$

interprétation

✧ Nous reconnaissons là la vitesse acquise par un point matériel après une chute libre de hauteur H lâché sans vitesse initiale.

✧ En fait, cela n'a rien d'étonnant car, dans le réservoir, les particules de fluides ne perdent pas d'énergie (pas de viscosité).

✧ Il est donc normal que si elles perdent l'énergie potentielle $\mathrm{d}m\,g\,H$, cette dernière ne peut se transformer qu'en énergie cinétique.

✯ vérification de la quasi-stationnarité

✧ Lorsque le régime est stationnaire, cela signifie que $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

✧ Donc, lorsque le régime est *quasi*-stationnaire, cela signifie que $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est négligeable.

✧ Négligeable devant quoi ? Devant l'autre terme d'accélération, à savoir l'accélération convective $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$.

✧ Comparons donc les deux accélérations.

✧ En ordre de grandeur, nous avons, en notant τ la durée caractéristique de vidange

$$\left\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\| \equiv \frac{v_B}{\tau} \qquad \text{et} \qquad \left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\| \equiv \frac{{v_B}^2}{h}$$

✧ Ce qui donne

$$\frac{\left\|\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|}{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\|} \equiv \frac{h}{v_B\,\tau}$$

✧ Or, précisément, nous pouvons dire, en ordre de grandeur

$$\frac{h}{\tau} = v_A$$

✧ Ce qui conduit à

$$\frac{\left\|\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right\|}{\left\|\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right\|} \equiv \frac{v_A}{v_B}$$

✧ Nous pouvons donc en conclure que l'approximation de quasi-stationnarité est d'autant mieux vérifiée que $v_A \ll v_B$ ou, ce qui est équivalent, que $s \ll S$.

II·6·*iii* – tube de Pitot

✯ dispositif

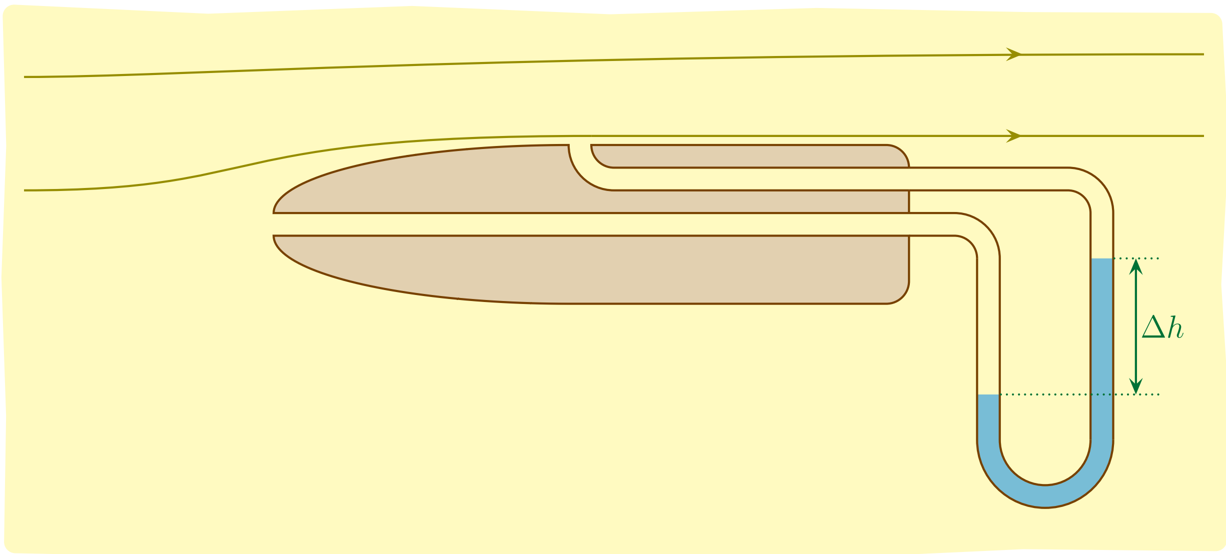
✧ Un tube de Pitot ou « tube Pitot » est un dispositif très simple permettant de déterminer la vitesse d'un écoulement.

✧ Ce dispositif est très utilisé dans l'aviation pour connaitre la vitesse de l'avion par rapport à l'air, paramètre extrêmement important.

✧ Ci-dessous [12], le tube fin au bout du nez de ce mirage 2000 est un tube Pitot.

✯ modélisation

✧ Vu en coupe, un tube Pitot peut être représenté de la manière suivante.

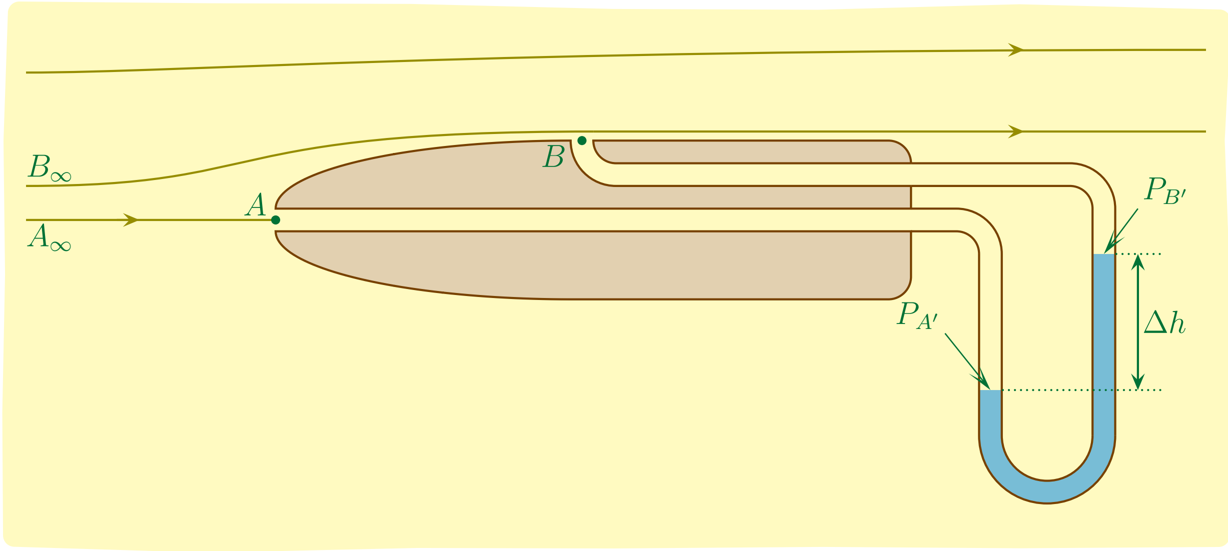


✧ Nous allons considérer que l'écoulement est PSIcH à savoir Parfait, Stationnaire, Incompressible et Homogène.

✧ De plus, nous négligerons l'effet de pesanteur.

✧ Introduisons les points remarquables et traçons les lignes de courant utiles.

12. Source : `http://florent1973.free.fr/FrenchAirWings/images/img_walarounds/avions/Mirage.2000C/nez/Mirage.2000C_17g.jpg`



✯ pressions en A et B

✧ Étant donné les hypothèses, nous pouvons écrire la relation de Bernoulli entre A_∞ et A, ce qui donne

$$\frac{P_0}{\mu_{\text{air}}} + \frac{{v_0}^2}{2} = \frac{P_A}{\mu_{\text{air}}} + \frac{{v_A}^2}{2}$$

✧ Et comme A est un point d'arrêt, $v_A = 0$ ce qui donne

$$P_A = P_0 + \mu_{\text{air}}\,\frac{{v_0}^2}{2}$$

✧ Nous pouvons, de plus, écrire la relation de Bernoulli entre B_∞ et B, ce qui donne

$$\frac{P_0}{\mu_{\text{air}}} + \frac{{v_0}^2}{2} = \frac{P_B}{\mu_{\text{air}}} + \frac{{v_B}^2}{2}$$

✧ Or tout est fait pour que le tube soit fin et qu'au niveau de B l'écoulement ne soit pas perturbé.
✧ En d'autre termes, nous avons $v_B \sim v_0$. Cela nous conduit à

$$P_B = P_0$$

✯ mesure de vitesse

✧ Le gaz contenu dans le tube étant immobile, nous pouvons dire que

$$P_A = P_{A'} \qquad \text{et} \qquad P_B = P_{B'}$$

✧ Ensuite, par continuité de la pression, nous pouvons écrire, dans le fluide

$$P_A = P_B + \mu_{\text{eau}}\,g\,H$$

✧ En rassemblant, cela donne

$$P_A = P_B + \mu_{\text{air}}\,\frac{{v_0}^2}{2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \mu_{\text{eau}}\,g\,H = \mu_{\text{air}}\,\frac{{v_0}^2}{2}$$

✧ Nous pouvons ainsi en déduire l'expression de la vitesse

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\,\mu_{\text{eau}}\,g\,H}{\mu_{\text{air}}}}$$

II·7 – Régime non stationnaire

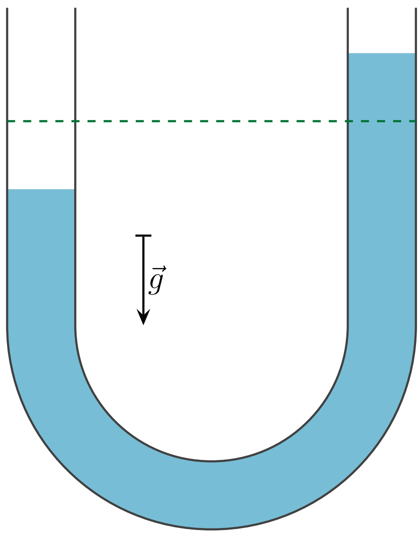
II·7·*i* – idée

- Il est possible d'étudier des cas non stationnaires lorsque ceux-ci sont parfaits, incompressibles et homogènes.
- Pour cela, une fois les lignes de courant identifiées, nous emploierons la technique utilisée lors de la démonstration de la seconde relation de Bernoulli, à savoir la multiplication par $\mathrm{d}\vec{\ell}$ porté par une ligne de courant.
- Ensuite, nous sommerons le résultat sur toute une ligne et aviserons, au cas par cas, du devenir de $\displaystyle\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$.
- En revanche les autres termes seront identiques.

II·7·*ii* – oscillations dans un tube en U

✯ dispositif

- Imaginons un tube en U rempli de liquide.

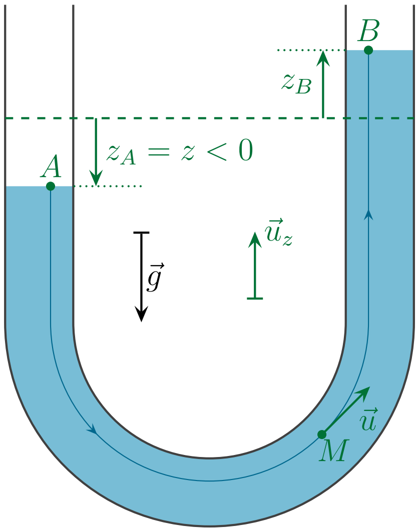


- Imaginons qu'à un moment donné l'un des bras soit plus haut que l'autre. Des oscillations vont naître. Le but va être de déterminer leur période.

✯ équation d'évolution

☯ schématisaton

- Commençons par représenter ce qui se passe en introduisant des points remarquables.



- Notons que l'incompressibilité associée à l'uniformité de la section impose que la vitesse est la même partout.
- De plus, vu qu'il n'y a pas de viscosité, il n'y a pas d'effet de bord et, donc, la vitesse est uniforme sur une section.
- Les lignes de courants ressemblent donc aux lignes représentées sur le schéma.

travailler l'équation d'Euler

- Commençons par écrire l'équation d'Euler

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2} + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \mu\,\vec{g}$$

- Multiplions scalairement par $\mathrm{d}\vec{\ell}$ où $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est choisi sur une ligne de courant. Nous obtenons d'abord

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{v^2}{2}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + 0\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right)\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \mu\,\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$$

- Et en utilisant la relation du gradient (sans oublier que l'homogénéité de l'écoulement permet de dire que μ est une constante)

$$\mu\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} + \mathrm{d}\left(\mu\,\frac{v^2}{2}\right) = -\mathrm{d}P - \mathrm{d}\left(\mu\,g\,z\right)$$

- Réarrangeons les termes

$$\mu\,\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\mathrm{d}\left(\mu\,\frac{v^2}{2} + P + \mu\,g\,z\right)$$

- Sommons de A à B la partie droite de l'équation

$$-\int_A^B \mathrm{d}\left(\mu\,\frac{v^2}{2} + P + \mu\,g\,z\right) = \mu\,\frac{{v_A}^2}{2} + P_A + \mu\,g\,z_A - \mu\,\frac{{v_B}^2}{2} - P_B + \mu\,g\,z_B$$

- Et comme $P_A = P_B = P_{\mathrm{atm}}$ et que $v_A = v_B$ (la vitesse est la même le long d'une ligne de courant), il reste

$$-\int_A^B \mathrm{d}\left(\mu\,\frac{v^2}{2}+P+\mu\,g\,z\right)=\mu\,g\,(z_A-z_B)$$

manipuler l'accélération locale

✧ Regardons de plus près le terme de gauche.

✧ Comme, en chaque point fixe de l'espace, $\vec{v}=v\,\vec{u}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell}=\mathrm{d}\ell\,\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur **constant** tangent à la ligne de courant, le produit scalaire s'écrit

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\frac{\partial v}{\partial t}\,\mathrm{d}\ell$$

✧ Et comme la norme de la vitesse ne dépend ni de la ligne de courant, ni de la position sur cette ligne, nous pouvons écrire

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

✧ La somme de A à B de ce terme donne donc, puisque v est constant le long de la ligne

$$\int_A^B \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\int_A^B \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\ell \qquad\rightsquigarrow\qquad \int_A^B \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\int_A^B \mathrm{d}\ell$$

✧ En notant L la longueur totale du tube, nous avons donc

$$\int_A^B \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times L$$

rassemblement

✧ En reprenant les expressions trouvées, cela nous donne d'abord

$$\mu\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times L=\mu\,g\,(z_A-z_B)$$

✧ De plus, avec les notations choisies, nous avons (attention aux signes)

$$z_A=-z_B=z$$

✧ En ce qui concerne la vitesse, quand la ligne de courant va de A vers B (cf. schéma), nous avons en même temps $\vec{v}$ dans le sens de $\vec{u}$ (donc $v>0$) et un point A qui va vers le bas, donc avec $v_A<0$. Ainsi

$$v_A=\frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}=-v$$

✧ Et ainsi, finalement

$$-\mu\,\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\times L=\mu\,g\,2\,z \qquad\rightsquigarrow\qquad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{2\,g}{L}\,z(t)$$

✧ Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0=\sqrt{\dfrac{2\,g}{L}}$.

✯ discussion

- Notons bien que les hypothèses sont toutes importantes ici.
- Sans le caractère parfait et incompressible, il n'aurait pas été possible d'écrire que la norme de la vitesse était partout la même.
- D'ailleurs, pour que cette dernière approximation soit vraie, il est important que la ligne de courant la plus courte (celle à l'intérieure) soit quasiment de la même longueur que la plus grande (celle à l'extérieur).
- Cela rajoute donc une dernière hypothèse : le diamètre du tube doit être très inférieur au rayon du tube.

Écoulements de fluides

Au niveau du cours

✯ Programme concerné

✧ Programme de 2e année :
- ➜ I.A.4. Équations dynamiques locales

✯ Les définitions

✧ Sont à savoir :
- ➜ viscosité dynamique, viscosité cinématique, fluide newtonien, écoulement laminaire ;
- ➜ équation de NAVIER – STOKES, d'EULER ;
- ➜ écoulement de COUETTE, de POISEUILLE ;
- ➜ effet VENTURI, COANDA ;
- ➜ tube de PITOT, formulle de TORRICELLI.

✯ Les grandeurs

✧ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leurs interprétations :
- ➜ $\mathrm{d}\vec{f}_{\mathrm{t}} = \pm \eta \, \dfrac{\partial v_x(y)}{\partial y} \, \vec{u}_x$ avec $[\eta]$ en Pl ;
- ➜ $\nu = \dfrac{\eta}{\mu}$ avec ν en $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$;
- ➜ $\chi_S = \dfrac{1}{\mu} \, \dfrac{\partial \mu}{\partial P}\Big|_S$ en Pa^{-1}.

✧ Connaître les valeurs de :
- ➜ viscosité dynamique de l'eau $\eta_{\mathrm{eau}} = 10^{-3}$ Pl, de l'air $1{,}8.10^{-5}$ Pl, de l'huile 0,1 Pl ;
- ➜ viscosité cinématique de l'eau $\nu_{\mathrm{eau}} = 10^{-6}$ $\mathrm{m2.s}^{-1}$ et de l'air $\nu_{\mathrm{air}} = 1{,}4.10^{-5}$ $\mathrm{m2.s}^{-1}$.

✯ Les lois

✧ Sont à connaître :
- ➜ équation d'EULER ;
- ➜ expression surfacique des forces de viscosité pour un fluide newtonien ;
- ➜ connaître les deux formes de la dérivée particulaire ;
- ➜ connaître les relations de BERNOULLI dans le cas d'un écoulement stationnaire homogène et incompressible.

✯ la phénoménologie

✧ Connaître / savoir :
- ➜ interpréter le nombre de REYNOLDS compte tenu du type d'écoulement (en terme de rapport d'effet convectif et de viscosité, d'épaisseur de couche limite ou de transport de quantité de mouvement) ;
- ➜ savoir retrouver l'équation de NAVIER – STOKES à partir de l'expression surfacique des forces de viscosité ;
- ➜ interpréter l'effet renversable d'un écoulement visqueux ;
- ➜ la définition d'un écoulement parfait ;

➜ reconnaitre les gradients de pression à partir de la forme des lignes de courant ;
➜ quelques applications de l'effet VENTURI.

Au niveau des savoir-faire

✯ exercices classiques

✧ Savoir refaire / retrouver :
➜ retrouver le champ des vitesses dans le cas d'un écoulement de COUETTE plan en régime stationnaire ;
➜ retrouver le champ des vitesses dans le cas d'un écoulement de POISEUILLE plan en régime stationnaire ;
➜ mettre en équation l'écoulement de POISEUILLE cylindrique et en déduire le champ des vitesses en régime stationnaire ;
➜ retrouver l'équation de propagation des ondes sonores à partir des équations locales de la dynamique des fluides ;
➜ retrouver l'expression du débit pour un débit-mètre à effet VENTURI ;
➜ retrouver la formulle de TORRICELLI ;
➜ retrouver la vitesse d'un écoulement mesuré par un tube de PITOT.