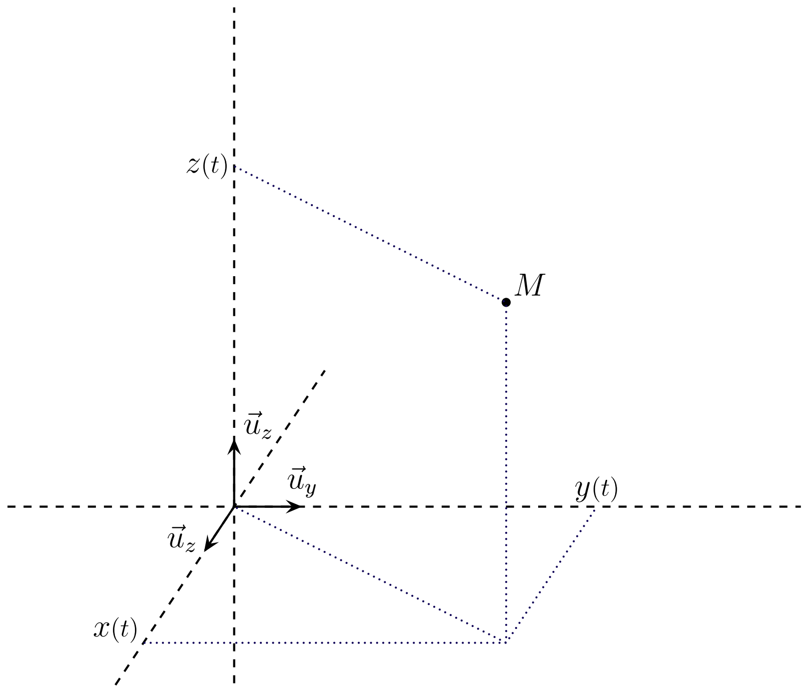
Mécanique du point

I – Cinématique

Loi

En coordonnées cartésiennes, un point M est repéré par les trois coordonnées

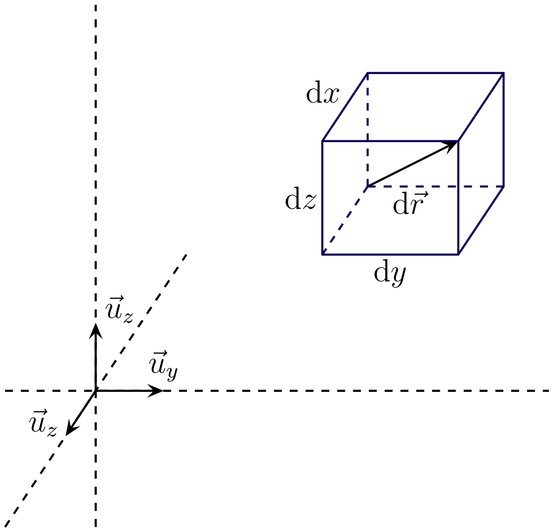
$$x(t) \qquad y(t) \qquad \text{et} \qquad z(t)$$



LOI

Le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$



LOI

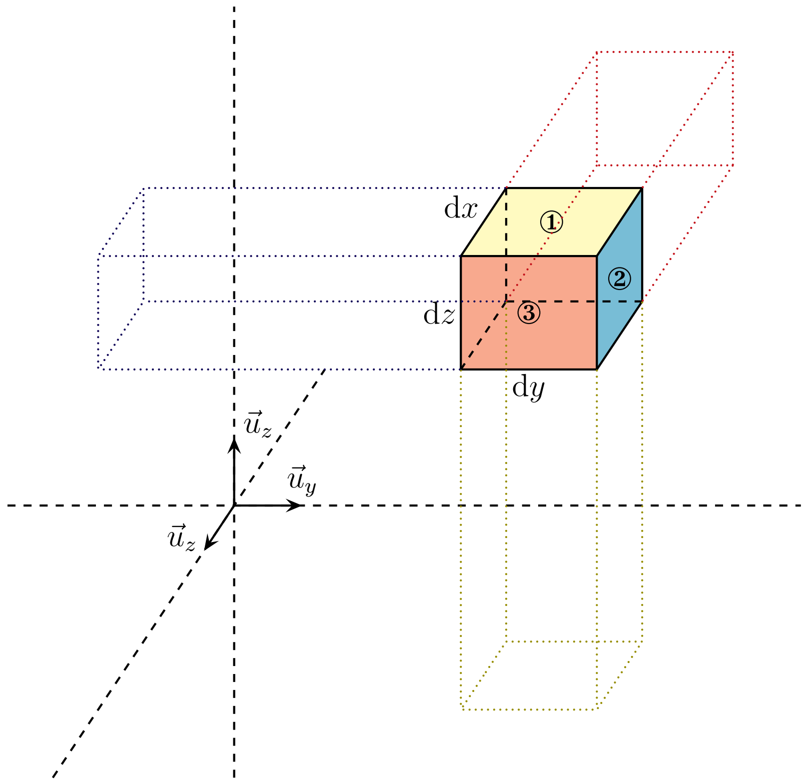
En coordonnées cartésiennes le volume élémentaire s'écrit

$$d\tau = dx\,dy\,dz$$

LOI

Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression

$$dS_1 = dx\,dy \;; \qquad dS_2 = dx\,dz \qquad \text{et} \qquad dS_3 = dx\,dz$$



LOI

La vitesse en coordonnées cartésiennes s'écrit

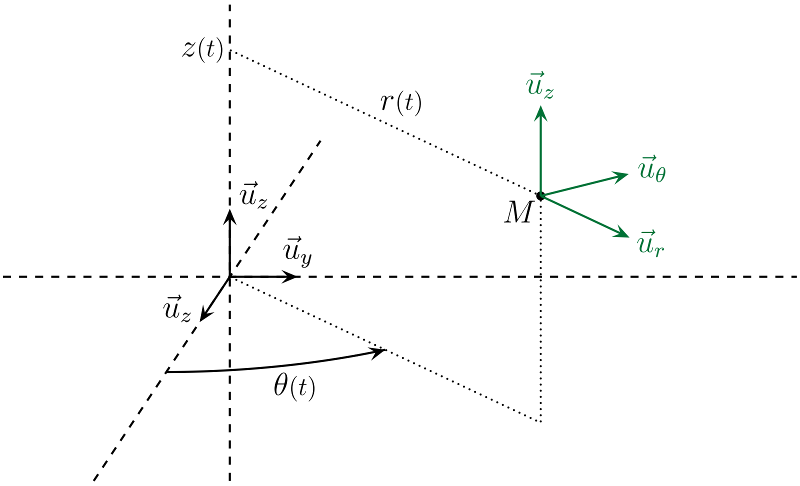
$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\,\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}(t)\,\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}(t)\,\vec{u}_z$$

Loi

L'accélération en coordonnées cartésiennes s'écrit
$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t)\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t)\,\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}(t)\,\vec{u}_z$$

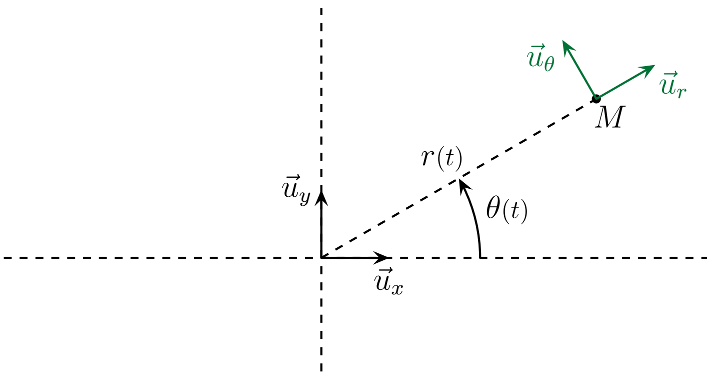
Loi

En coordonnées cylindro-polaires, un point M est repéré par les trois coordonnées
$$r(t) \qquad \theta(t) \qquad \text{et} \qquad z(t)$$



Loi

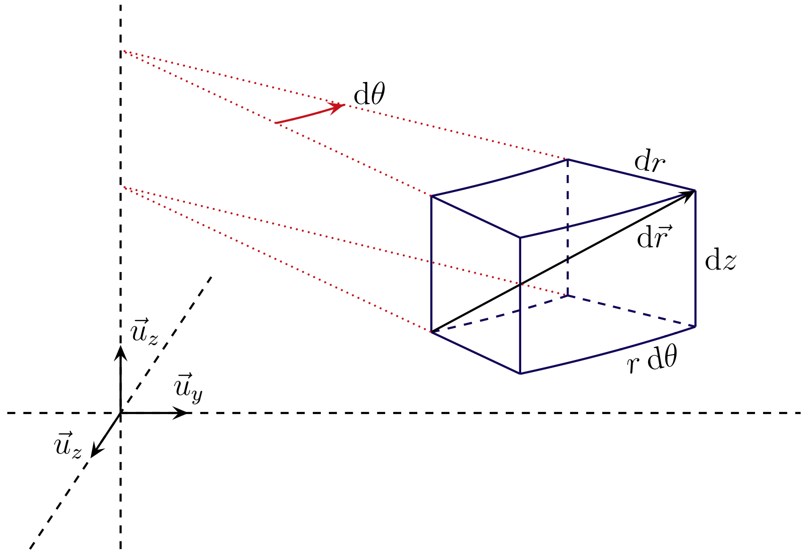
En coordonnées polaires, un point M est repéré par les deux coordonnées
$$r(t) \qquad \text{et} \qquad \theta(t)$$



LOI

Le déplacement élémentaire en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$$



LOI

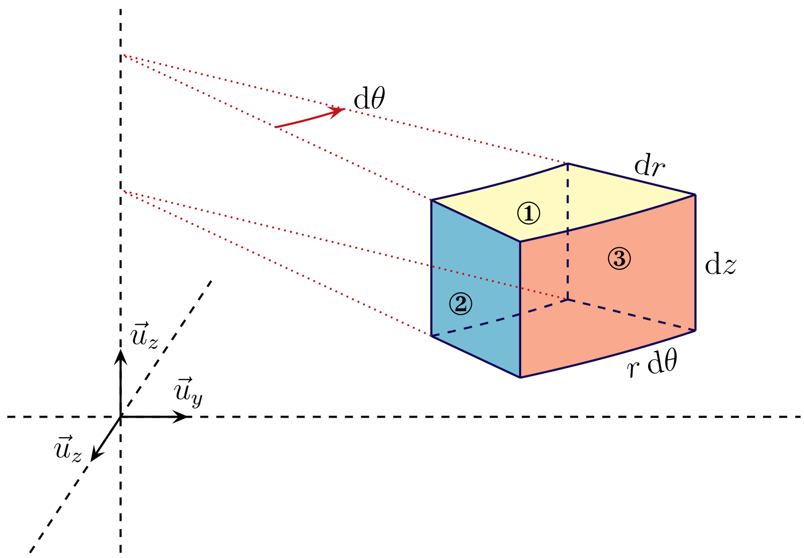
En coordonnées cylindro-polaires le volume élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

LOI

Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression

$$\mathrm{d}S_1 = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\ ; \qquad \mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}S_3 = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$



LOI

La vitesse en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_x + r\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\,\vec{u}_z$$

LOI

L'accélération en coordonnées cylindro-polaires s'écrit

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\,\dot{\theta}^2(t)\right)\,\vec{u}_r + \left(2\,\dot{r}(t)\,\dot{\theta}(t) + r(t)\,\ddot{\theta}(t)\right)\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

LOI

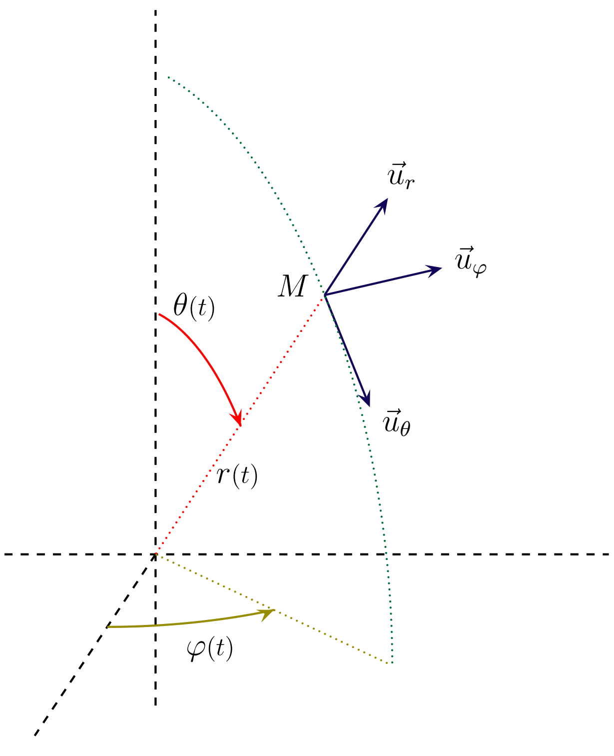
Le moment cinétique d'un point M par rapport à O s'écrit, pour un mouvement plan

$$\vec{\sigma}_O(M,t) = m\,r^2(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_z$$

LOI

En coordonnées sphériques, un point M est repéré par les trois coordonnées

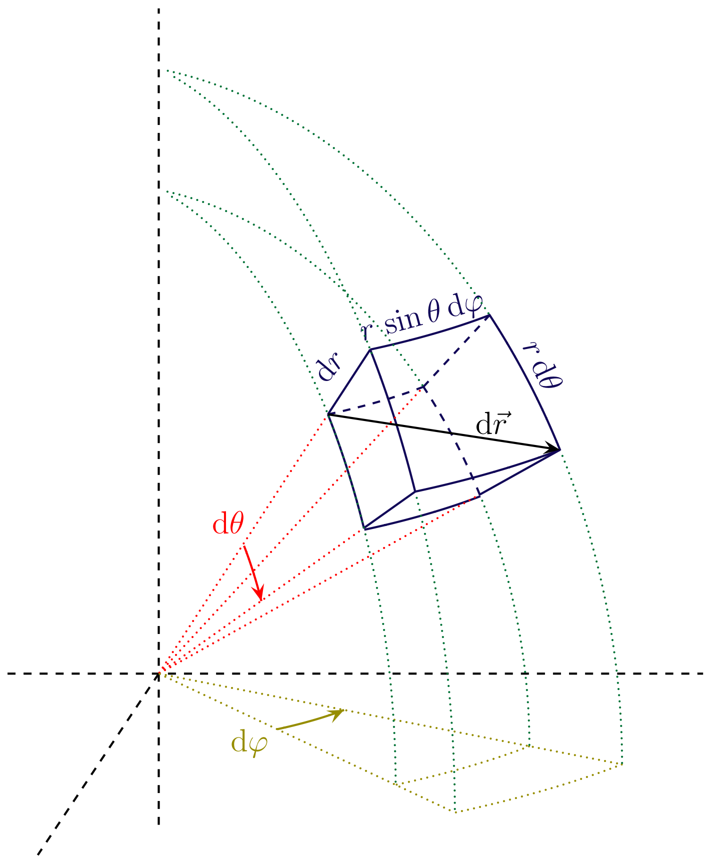
$$r(t) \qquad \theta(t) \qquad \text{et} \qquad \varphi(t)$$



Loi

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$$



Loi

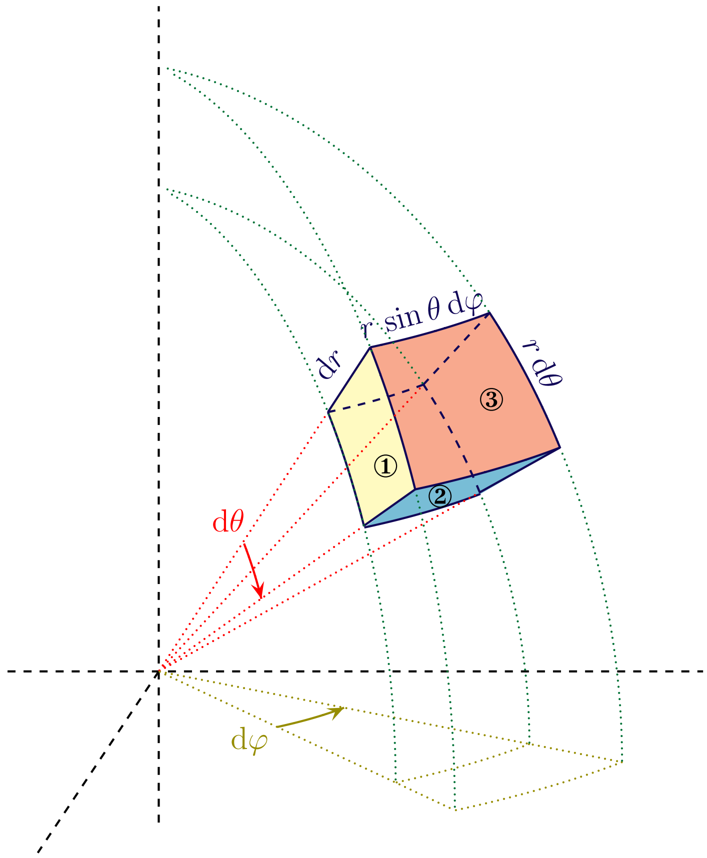
En coordonnées sphériques le volume élémentaire s'écrit

$$\mathrm{d}\tau = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

LOI

Les trois surfaces élémentaires ①, ② et ③ représentées ci-dessous ont pour expression

$$\mathrm{d}S_1 = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\ ; \qquad \mathrm{d}S_2 = r\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}S_3 = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$



LOI

Un mouvement de coordonnée $x(t)$ est sinusoïdal s'il obéit à l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + {\omega_0}^2\,x(t) = 0$$

DÉF

Un mouvement sinusoïdal s'écrit

$$x(t) = X_\mathrm{m}\,\cos(\omega\,t + \varphi) \qquad \text{où :}$$

- ➜ X_m est l'*amplitude* ;
- ➜ ω_0 est la *pulsation* ;
- ➜ φ est la *phase à l'origine*.

DÉF

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* lorsque l'accélération est vectoriellement constante.

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}$$

LOI

La trajectoire d'un mouvement uniformément accéléré est parabolique ou rectiligne suivant les conditions initiales.

LOI

Un objet en chute libre lâché sans vitesse initiale acquiert la vitesse $v = \sqrt{2\,g\,h}$ après une chute de hauteur h.

DÉF

Un mouvement est dit *circulaire* lorsque la trajectoire est circulaire.

LOI

La vitesse en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω, s'écrit

$$\vec{v}(t) = R\,\dot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta \quad \text{ou} \quad \vec{v}(t) = R\,\omega(t)\,\vec{u}_\theta$$

LOI

L'accélération en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire ω, s'écrit, au choix

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= -R\,\dot{\theta}^2(t)\,\vec{u}_r + R\,\ddot{\theta}(t)\,\vec{u}_\theta \\ &= -R\,\omega^2(t)\,\vec{u}_r + R\,\dot{\omega}(t)\,\vec{u}_\theta \\ &= -\frac{v^2(t)}{R}\,\vec{u}_r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t),\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

DÉF

Le *référentiel de* COPERNIC est le référentiel :

- ➜ centré sur le centre de masse du système solaire ;
- ➜ dont les axes pointent vers 3 étoiles éloignées.

LOI

Le référentiel de COPERNIC est postulé galiléen.

DÉF

Le *référentiel héliocentrique* est le référentiel :

- ➜ centré sur le centre du Soleil ;
- ➜ dont les axes sont parallèles aux axes du référentiel de COPERNIC.

DÉF

Le *référentiel géocentrique* est le référentiel :

- ➜ centré sur le centre de la Terre ;
- ➜ dont les axes sont parallèles aux axes du référentiel de COPERNIC.

DÉF

Le *référentiel terrestre* est un référentiel dans lequel la Terre est immobile.

LOI

Bien que le référentiel terrestre soit non galiléen, il ne faut pas compter de force d'inertie d'entraînement dans ce référentiel.

DÉF

Deux référentiels sont dits *en translation* si leurs axes sont constamment parallèles l'un avec l'autre.

LOI

La loi de composition des vitesses entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en translation pure l'un par rapport à l'autre s'écrit

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \qquad \text{où}$$

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \overset{\text{not}}{=} \vec{v}_{\text{e}} \text{ est appelé la vitesse d'entraînement}$$

LOI

La loi de composition des accélérations entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en translation pure l'un par rapport à l'autre s'écrit

$$\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \qquad \text{où}$$

$$\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) \overset{\text{not}}{=} \vec{a}_{\text{e}} \text{ est appelé l'accélération d'entraînement}$$

DÉF

Deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ sont en *rotation pure* lorsque

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(O,t) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{|\mathscr{R}}(\widetilde{O},t) = \vec{0}$$

LOI

Deux référentiels de centres confondus sont en rotation pure.

DÉF

Le *vecteur rotation* noté $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}}$ caractérise la rotation de $\mathscr{R}$ par rapport à $\widetilde{\mathscr{R}}$:

➜ sa direction est la direction de l'axe de rotation ;
➜ son sens est donné par la règle de la main droite ;
➜ sa norme est la vitesse angulaire de rotation.

LOI

La loi de composition des vitesses entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en rotation pure l'un par rapport à l'autre s'écrit

$$\vec{v}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) + \vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \text{où}$$

$$\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \overrightarrow{OM} \overset{\text{not}}{=} \vec{v}_{\text{e}} \text{ est appelé la vitesse d'entraînement}$$

LOI

La loi de composition des accélérations entre deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en translation pure **et uniforme** l'un par rapport à l'autre s'écrit

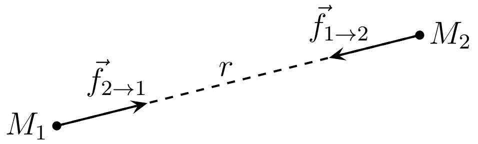
$$\vec{a}_{|\widetilde{\mathscr{R}}}(M,t) = \vec{a}_{|\mathscr{R}}(M,t) - \Omega^2\,\overrightarrow{HM} + 2\,\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) \qquad \text{où :}$$

➜ H est le projeté de M sur l'axe de rotation ;
➜ $-\Omega^2\,\overrightarrow{HM} \overset{\text{not}}{=} \vec{a}_{\text{e}}$ est appelé l'accélération d'entraînement ;
➜ $2\,\vec{\Omega}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \wedge \vec{v}_{|\mathscr{R}}(M,t) \overset{\text{not}}{=} \vec{a}_{\text{c}}$ est appelé l'accélération de CORIOLIS.

II – Dynamique

Loi

Deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 s'attirent et exercent l'un sur l'autre une force telle que



$$\vec{f}_{1\to 2} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\vec{u}_{12} \text{ où :}$$

- ➜ G est la constante universelle de gravitation ;
- ➜ r est la distance entre les deux masses ;
- ➜ $\vec{u}_{12}$ est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2.

Déf

La *masse grave* caractérise la capacité d'un corps à attirer et à être attiré par l'interaction gravitationnelle.

Loi

Un point matériel de masse m situé au centre d'un référentiel crée le champ gravitationnel

$$\vec{\mathscr{G}}(M) = -G\,\frac{m}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Loi

Un astre à symétrie sphérique se comporte vis-à-vis de la gravitation comme un point matériel situé en son centre, dans lequel serait concentré toute la masse.

Loi

Dans le référentiel terrestre, un objet à la surface de la Terre subit son poids $\vec{P}$ tel que

$$\vec{P} = m\,\vec{g} \qquad \text{où :}$$

- ➜ m est la masse grave ;
- ➜ g est l'accélération de pesanteur avec $g \simeq 9{,}81$ m.s^{-1}.

Déf

$\vec{g}$ est *vertical* et dirigé vers le *bas*.

Loi

Le poids reste constant dans une zone restreinte à l'échelle planétaire.

Loi

Le poids inclut la force d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la Terre.

LOI

Un point matériel de charge q plongé dans un champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ subit la force de LORENTZ

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

LOI

Pour une particule, la force de LORENTZ est toujours prédominante face au poids.

LOI

Deux points matériels de charges q_1 et q_2 en vitesse faible l'un par rapport à l'autre exercent une force

$$\vec{f}_{1\to 2} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_{1\to 2} \qquad \text{où :}$$

- ➜ $\vec{u}_{1\to 2}$ est le vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2 ;
- ➜ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi} \times 10^{-9}$ F.m^{-1} est la permitivité du vide.

LOI

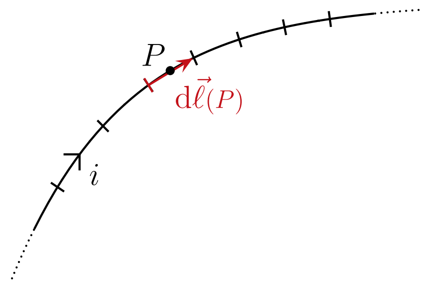
Le champ électrique créé en M par une charge ponctuelle q s'écrit

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{u}_r$$

LOI

La force de LAPLACE qui s'exerce sur un conducteur parcouru par un courant plongé dans un champ magnétique s'écrit

$$\vec{F}_{\rm L} = \int_{P\in\text{conducteur}} \mathrm{d}\vec{F}_{\rm L}(P) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\vec{F}_{\rm L}(P) = i\,\mathrm{d}\vec{\ell}_P \wedge \vec{B}(P)$$

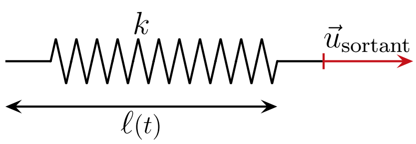


LOI

La force exercée par un ressort sur un point attaché à une de ses extrémités s'écrit

$$\vec{f} = -k\,(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{\text{sortant}} \qquad \text{où :}$$

- ➜ $\ell(t)$ est la longueur du ressort ;
- ➜ ℓ_0 est la longueur naturelle du ressort ;
- ➜ $\ell(t) - \ell_0$ est l'allongement ;
- ➜ $\vec{u}_{\text{sortant}}$ est le vecteur unitaire tangent au ressort et « sortant » du ressort au niveau du point qui subit la force.



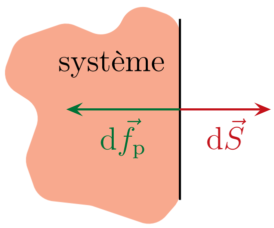
LOI

Un élastique est un ressort qui n'exerce de force que lorsqu'il est étiré.

LOI

La force pressante sur une surface $\mathrm{d}\vec{S}$ dirigée conventionnellement vers l'extérieur s'écrit

$$\vec{f}_{\mathrm{p}} = -P\,\mathrm{d}\vec{S}$$



LOI

Un objet entièrement immergé dans un fluide au repos subit la poussée d'ARCHIMÈDE, verticale, de bas en haut et de norme le poids du fluide remplacé.

LOI

Pour des vitesses faibles, la force de frottement fluide exercée par un fluide sur un objet est linéaire et s'écrit

$$\vec{f} = -\lambda\,\vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet}) \qquad \text{où}$$

λ est une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet.

LOI

Pour des vitesses élevées, la force de frottement fluide exercée par un fluide sur un objet est quadratique et s'écrit

$$\vec{f} = -h\,\|\vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet})\| \times \vec{v}_{|\text{fluide}}(\text{objet}) \qquad \text{où}$$

h est une constante qui dépend du fluide et de la forme de l'objet.

LOI

La réaction normale $\vec{R}_N$ est **toujours** présente dès lors qu'il y a contact et telle que :

➜ sa direction est normale au plan de tangence ;
➜ le sens est du support vers l'objet ;
➜ la norme est **inconnue**.

LOI

Il n'y a de réaction tangentielle $\vec{R}_N$ que lorsqu'il y a des frottements.
Les frottements sont alors dit *solides*.

Loi

L'action tangentielle exercée par un support dépend du mouvement de l'objet sur ce support :

- si l'objet glisse sur le support :
  - la direction de $\vec{R}_T$ est la même que celle de la vitesse qu'a l'objet par rapport au support ;
  - $\vec{R}_T$ est opposée à la vitesse qu'a l'objet par rapport au support ;
  - la norme de $\vec{R}_T$ vaut $\|\vec{R}_T\| = f_{\text{d}}\,\|\vec{R}_N\|$ où f_{d} est le *coefficient de frottement dynamique* ;
- si l'objet ne glisse pas sur le support :
  - la direction de $\vec{R}_T$ est inconnue ;
  - le sens de $\vec{R}_T$ est inconnu ;
  - la norme de $\vec{R}_T$ vérifie $\|\vec{R}_T\| \leqslant f_{\text{s}}\,\|\vec{R}_N\|$ où f_{s} est le *coefficient de frottement statique*.

Loi

Sauf précision contraire, les coefficients de frottements statique et dynamique sont considérés égaux.

Loi

Un fil est *idéal* lorsqu'il est :

- sans masse ;
- inextensible ;
- infiniment souple.

Loi

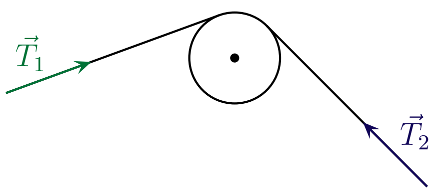
Un poulie est *idéale* lorsque :

- elle est de masse nulle ;
- elle ne frotte pas en tournant autour de son axe ;
- le fil qui l'entoure ne glisse pas en s'enroulant ou en se déroulant.

Loi

Un fil exerce une force :

- dans sa direction ;
- dirigée vers lui ;
- de norme **inconnue** mais identique à ses extrémités lorsque fils et poulie sont idéaux.



$$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$$

Loi

Dans un référentiel **non galiléen**, un point matériel subit la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f}_{\text{ie}} = -m\,\vec{a}_{\text{e}} \qquad \text{où}$$

$\vec{a}_{\text{e}}$ est l'accélération d'entraînement.

Loi

Dans un référentiel en rotation pure et uniforme, la force d'inertie d'entraînement est appelée *force centrifuge* et s'écrit

$$\vec{f}_{\text{ie}} = +m\,\Omega^2\,\overrightarrow{HM} \qquad \text{où}$$

H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

Loi

Dans un référentiel **non galiléen** en rotation pure par rapport à un référentiel galiléen, un point matériel subit la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{f}_{\text{ic}} = -m\,\vec{a}_{\text{c}} \qquad \text{où}$$

$\vec{a}_{\text{c}} = 2\,\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M,t)$ est l'accélération de Coriolis.

Loi

À l'équilibre dans un référentiel non galiléen en rotation pure par rapport à un référentiel galiléen, un point ne subit pas de force d'inertie de Coriolis.

Loi

Les forces d'inertie n'existent pas.

Loi

Il existe des référentiels dits *galiléens* dans lesquels tout point matériel a une trajectoire rectiligne uniforme si et seulement si la résultante des forces qu'il subit est nulle.

Loi

Un référentiel est galiléen si et seulement s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.

Loi

Dans un référentiel galiléen, pour tout point matériel M de masse m subissant les forces $\vec{f}_i$, nous pouvons écrire :

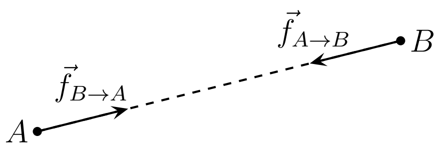
$$\sum \vec{f}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{où} \qquad \vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t)$$

$\vec{p}(t)$ est appelée la *quantité de mouvement*.

Loi

Lorsque deux points matériels sont en interaction, alors :

$$\vec{f}_{A\to B} = -\vec{f}_{B\to A} \qquad \textbf{et} \qquad \vec{f}_{A\to B} /\!/ \overrightarrow{AB}$$



Déf

Le *moment cinétique* d'un point M par rapport à un point A dans le référentiel $\mathscr{R}$ s'écrit, par définition,

$$\vec{\sigma}_A(M/\mathscr{R}) \triangleq \overrightarrow{AM} \wedge m\,\vec{v}(M/\mathscr{R})$$

LOI

Le moment cinétique représente la quantité de rotation de M autour de A.

LOI

Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors, pour tout point A fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$

➜ $\vec{\sigma}_{A|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique de M par rapport à A ;
➜ $\vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$ est le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

LOI

Soit M un point matériel soumis à $\sum \vec{f}$ dans $\mathscr{R}$ un référentiel quelconque. Alors, pour tout axe Δ fixe par rapport à $\mathscr{R}$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) \qquad \text{où :}$$

➜ $\sigma_{\Delta|\mathscr{R}}(M,t)$ est le moment cinétique scalaire de M par rapport à A ;
➜ $\mathscr{M}_\Delta(\vec{f})$ est le moment scalaire de la force $\vec{f}$ par rapport à A.

III – Énergétique du point matériel

LOI

THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel $\mathscr{R}$. Alors, entre deux points A et B de sa trajectoire :

$$\Delta E_\mathrm{c} = \sum W(\vec{f}) \text{ où :}$$

➜ $\Delta E_\mathrm{c} = E_\mathrm{c}(B) - E_\mathrm{c}(A)$ est la variation d'énergie cinétique de M ;
➜ $W(\vec{f})$ est le travail fourni par la force $\vec{f}$.

LOI

THÉORÈME DE LA PUISSANCE CINÉTIQUE

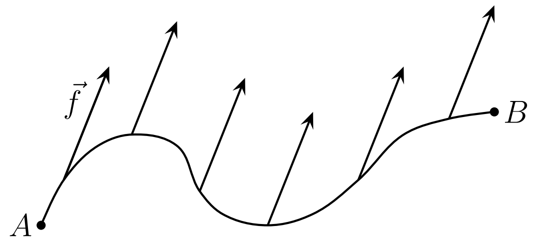
Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}) \text{ où :}$$

➜ E_c est l'énergie cinétique de M ;
➜ $\mathscr{P}(\vec{f})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$.

LOI

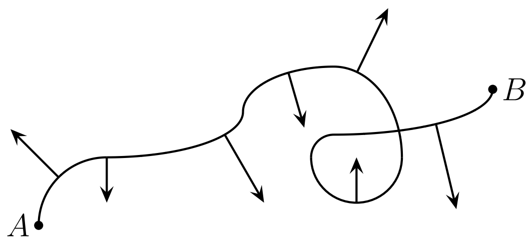
Un point matériel reçoit de la part d'une force vectoriellement constante $\vec{f}$ entre deux points A et B de sa trajectoire le travail :



$$W_{AB} = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$$

LOI

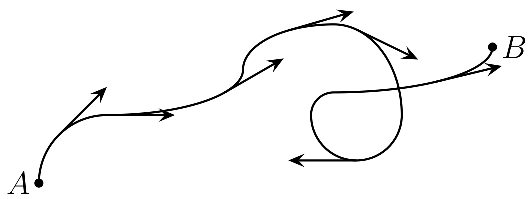
Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment orthogonale à la trajectoire un travail nul.



$$W_{AB} = 0$$

LOI

Un point matériel reçoit de la part d'une force $\vec{f}$ constamment parallèle à la trajectoire et d'intensité constante le travail :



$W_{AB} = \pm \ell_{AB}\, f$ où ℓ_{AB} est la longueur totale du trajet parcouru entre A et B et le signe dépendant du caractère moteur ou résistant de la force.

DÉF

Une force est dite *conservative* lorsque le travail qu'elle fournit à un point matériel ne dépend pas de la trajectoire de ce dernier mais uniquement des positions initiale et finale du point matériel.

DÉF

À chaque force conservative est associée une *énergie potentielle* $E_\text{p}(M)$ ne dépendant que de la position et telle que :

- ➜ la force s'écrit $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_\text{p}$;
- ➜ le travail fourni entre A et B s'écrit $W_{AB} = -\Delta E_\text{p} = -(E_\text{p}(B) - E_\text{p}(A))$.

DÉF

Le *gradient* est un opérateur vectoriel qui transforme un champ scalaire en champ vectoriel.

Loi

Soit un champ scalaire $E_\mathrm{p}(M)$ quelconque ; alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_\mathrm{p}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}E_\mathrm{p}$$

Loi

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_\mathrm{p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

Loi

En coordonnées cylindro-polaires, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_\mathrm{p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

Loi

En coordonnées sphériques, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_\mathrm{p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\,\sin\theta}\,\dfrac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

Loi

Quels que soient les potentiels électrostatiques $E_{\text{p1}}(M)$ et $E_{\text{p2}}(M)$, nous pouvons écrire, avec $\lambda = \text{C}^{\text{te}}$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda\,E_{\text{p}}(M)) = \lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p}}(M))$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p1}}(M) + E_{\text{p2}}(M)) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p1}}(M)) + \overrightarrow{\text{grad}}\,(E_{\text{p2}}(M))$$

Loi

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{\text{p,pes}} = m\,g\,h \qquad \text{où :}$$

h est la hauteur comptée à partir d'une référence quelconque.

Loi

L'énergie potentielle élastique contenue dans un ressort s'écrit

$$E_{\text{p,él}} = \frac{1}{2}\,k\,(\ell - \ell_0)^2$$

Loi

L'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle s'écrit

$$E_{\text{p,grav}} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2} \qquad \text{où :}$$

- ➜ m_1 et m_2 sont les masses des deux points en interaction ;
- ➜ $G = 6{,}67.10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} est la constante universelle de gravitation ;
- ➜ r est la distance entre les deux points matériels.

Loi

L'énergie potentielle d'interaction coulombienne s'écrit

$$E_{\text{p,coul}} = \frac{q_1\,q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \qquad \text{où :}$$

- ➜ q_1 et q_2 sont les charges des deux points en interaction ;
- ➜ $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi} \times 10^{-9}$ F.m^{-1} est la permitivité du vide ;
- ➜ r est la distance entre les deux points matériels.

Loi

L'énergie potentielle électrostatique s'écrit

$$E_{\text{p,elst}} = q\,V \qquad \text{où :}$$

- ➜ q est la charge du point matériel ;
- ➜ V est le potentiel électrostatique.

Loi

Dans un référentiel non galiléen en rotation **uniforme**, l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (ou énergie potentielle centrifuge) s'écrit

$$E_{\text{p,fie}} = -\frac{1}{2}\,m\,\Omega^2\,HM^2 \qquad \text{où :}$$

- ➜ Ω est la vitesse angulaire de rotation ;
- ➜ H est le projeté de M sur l'axe de rotation.

Loi

Conventionnellement, lorsque c'est possible, les énergies potentielles sont choisies nulles là où les forces le sont.

$$E_{\text{p}}(\vec{r}_0) = 0 \quad \text{pour } \vec{r}_0 \text{ tel que} \quad \vec{f}(\vec{r}_0) = \vec{0}$$

Loi

Les positions d'équilibre d'un point matériel possédant l'énergie potentielle E_p sont les points de l'espace où cette énergie potentielle est stationnaire.

Loi

Les positions d'équilibre stables correspondent à des points où l'énergie potentielle est localement minimale.

Loi

Théorème de l'énergie mécanique

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors, entre deux points A et B de sa trajectoire :

$$\Delta E_\text{m} = \sum W(\vec{f}_\text{nc}) \text{ où :}$$

- ➜ $\Delta E_\text{m} = E_\text{m}(B) - E_\text{m}(A)$ est la variation d'énergie mécanique de M ;
- ➜ $W(\vec{f}_\text{nc})$ est le travail fourni par les forces non conservatives.

Loi

Théorème de la puissance mécanique

Soit M un point matériel soumis à une résultante $\sum \vec{f}$ et étudiée par rapport au référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}E_\text{m}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}_\text{nc}) \text{ où :}$$

- ➜ E_m est l'énergie cinétique de M ;
- ➜ $\mathscr{P}(\vec{f}_\text{nc})$ est la puissance fournie par la force $\vec{f}$.

Déf

Le *plan de phase* est le plan qui permet de représenter la vitesse en fonction de la position.

Loi

Dans le plan de phase, les trajectoires tournent globalement dans le sens horaire.

Loi

Dans le plan de phase, les points de vitesse nulle sont situés sur l'axe des absisses.

IV – Mouvement dans un champ de force central

Déf

Soit M un point matériel soumis à une $\vec{f}$ (force unique ou résultante) telle que la droite d'action de $\vec{f}$ passe par un point fixe du référentiel $\mathscr{R}$.
Alors M est dit soumis à une *force centrale*.

Loi

Un point soumis à une force centrale possède un moment cinétique constant.

Loi

Si un point matériel a un moment cinétique constant, alors :
- ➜ le mouvement est plan ;
- ➜ il obéit à la loi des aires.

Loi

Un point soumis à une force centrale possède une énergie mécanique constante.

. . . .

Déf

Une force est dite *newtonienne* lorsqu'elle peut s'écrire

$$\vec{f} = -k\,\frac{1}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Loi

L'énergie potentielle associée à une force newtonienne s'écrit

$$E_{\mathrm{p}} = -\frac{k}{r}$$

Loi

La trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale newtonienne est une conique.

Loi

Dans le cas particulier d'un mouvement à force centrale (et en particulier pour une interaction newtionienne), si la trajectoire est circulaire, alors le mouvement est uniforme.

Loi

L'énergie mécanique d'un point matériel soumis à une force newtonienne et dans un état lié est strictement négative et s'écrit

$$E_{\mathrm{m}} = -\frac{k}{2\,a} \qquad \text{où :}$$

a est le demi-grand axe de la trajectoire

Loi

L'excentricité de la trajectoire de la Terre est d'environ $\dfrac{1}{60}$.