Mécanique du solide

DÉF

Un *solide* est un ensemble de points tel que quels que soient A et B, la distance $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ reste constante dans le temps.

LOI

Deux solides ne constituent pas forcément un solide.

Biographies succintes

I – Mécanique des systèmes de points matériels

DÉF

Le *centre de masse* (ou cdm) d'un système de N points est le point noté G tel que

$$\sum_i m_i\,\overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \qquad \text{ou} \qquad \iint_{\mathscr{V}} \overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}m = \vec{0}$$

LOI

Le centre de masse vérifie, quel que soit le point O

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1,\overrightarrow{OM_1} + m_2\,\overrightarrow{OM_2} + \cdots + m_N\,\overrightarrow{OM_N}}{m_{\text{tot}}} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \times \iiint_{\mathscr{V}} \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m$$

DÉF

Noté $\mathscr{R}^\star$, le *référentiel barycentrique* d'un système est le référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude et centré sur le centre de masse du système considéré.

DÉF

La *quantité de mouvement* d'un point matériel s'écrit

$$\vec{p}(M,t) = m\,\vec{v}(M,t)$$

LOI

La quantité de mouvement est une grandeur extensive. Ainsi pour un système

$$\vec{p}(\mathscr{S},t) = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) + \ldots + \vec{p}_N(t) \text{ ou } \vec{p}(\mathscr{S},t) = \iiint_{\mathscr{V}} \vec{v}(M,t)\,\mathrm{d}m$$

LOI

La quantité de mouvement permet de caractériser de manière globale, le mouvement d'ensemble du système.

LOI

La quantité de mouvement d'un système s'écrit

$$\vec{p}(\mathscr{S},t) = m_{\text{tot}}\,\vec{v}(G,t)$$

LOI

La quantité de mouvement d'un système dans son référentiel barycentrique est nul

$$\vec{p}^{\,\star} = \vec{p}(\mathscr{S}/\mathscr{R}^\star,t) = \vec{0}$$

DÉF

Le *référentiel propre* associé à un système $\mathscr{S}$ est le référentiel généralement noté $\mathscr{R}^\circ$ par rapport auquel le système est constamment immobile.

DÉF

Le *moment cinétique* d'un point M par rapport à un point A s'écrit

$$\vec{\sigma}_A(M,t) = \overrightarrow{AM} \wedge m\,\vec{v}(M,t)$$

LOI

Le moment cinétique de M par rapport à A représente la « quantité de rotation » que possède M lorsqu'il tourne autour de A.

LOI

Le moment cinétique est une grandeur extensive.

$$\vec{\sigma}(\mathscr{S},t) = \vec{\sigma}_1(t) + \vec{\sigma}_2(t) + \cdots + \vec{\sigma}_3(t)$$

LOI

THÉORÈME DE KŒNIG

Pour un système $\mathscr{S}$ quelconque et un point A quelconque

$$\vec{\sigma}_A(\mathscr{S},t) = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{p}(\mathscr{S},t) + \sigma^\star(\mathscr{S},t)$$

DÉF

Le *moment cinétique scalaire* σ_Δ d'un point M par rapport à un axe Δ se définit par

$$\sigma_\Delta = \sigma_A(M,t)\cdot\vec{u} \qquad \text{où :}$$

- ➜ A est un point de Δ ;
- ➜ $\vec{u}$ est un vecteur unitaire directeur de Δ orienté dans le sens de la rotation.

DÉF

L'*énergie cinétique* d'un point M s'écrit

$$E_c(M,t) = \frac{1}{2}\,m\,v^2(M,t)$$

LOI

L'énergie cinétique de M représente l'énergie que possède M du fait de son mouvement.

Loi

L'énergie cinétique est une grandeur extensive.

$$E_{\mathrm{c}}(\mathscr{S},t) = E_{\mathrm{c},1}(t) + E_{\mathrm{c},2}(t) + \cdots + E_{\mathrm{c},3}(t)$$

Loi

Théorème de Kœnig

Pour un système $\mathscr{S}$ quelconque et un point A quelconque

$$E_{\mathrm{c}}(\mathscr{S},t) = \frac{1}{2}\, m_{\mathrm{tot}}\, v^2(G,t) + E_{\mathrm{c}}^{\star}(\mathscr{S},t)$$

. . . .

Déf

L'*interaction* $\overleftrightarrow{f}_{1\leftrightarrow 2}$ est l'ensemble des deux forces $\vec{f}_{1\to 2}$ et $\vec{f}_{2\to 1}$.

Loi

Pour un système $\mathscr{S}$ quelconque, dans un référentiel $\mathscr{R}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathscr{S},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{f}_{\mathrm{ext}} + \sum \vec{f}_{\mathrm{inertie}}$$

Loi

Théorème du moment cinétique (TMC)

Soit un système $\mathscr{S}$ quelconque, un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque et un point A fixe. Alors

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_A(\mathscr{S},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\mathrm{ext}}) + \sum \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}_{\mathrm{inertie}}) \qquad \text{avec} \qquad \vec{\mathscr{M}}_A(\vec{f}) = \overrightarrow{AM_{\text{qui subit }\vec{f}}} \wedge \vec{f}$$

Loi

Théorème du moment cinétique scalaire (TMCS)

Soit un système $\mathscr{S}$ quelconque, un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque et un axe Δ fixe. Alors

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\Delta(\mathscr{S},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}_{\mathrm{ext}}) + \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}_{\mathrm{inertie}}) \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) = \pm\|\vec{f}\| \times \text{bras de levier}$$

Loi

Théorème du moment cinétique barycentrique (TMCB)

Soit un système $\mathscr{S}$ quelconque, alors dans son référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}^{\star}_G(\mathscr{S},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{\mathscr{M}}_G(\vec{f}_{\mathrm{ext}}) \ \textbf{sans} \text{ les forces d'inertie}$$

Loi

Théorème du moment cinétique barycentrique scalaire (TMCBS)

Soit un système $\mathscr{S}$ quelconque, alors dans son référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star$, avec Δ un axe passant par G.

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\star}_\Delta(\mathscr{S},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}_{\mathrm{ext}}) \ \textbf{sans} \text{ les forces d'inertie}$$

Loi

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Soit $\mathscr{S}$, un système quelconque et deux états « début » et « fin » quelconques (avec B postérieur à A) alors

$$E_{\mathrm{c}}(\mathscr{S},\text{fin}) - E_{\mathrm{c}}(\mathscr{S},\text{début}) = \sum W(\vec{f}_{\mathrm{ext}}) + \sum W(\vec{f}_{\mathrm{inertie}}) + \sum W(\overleftrightarrow{f}_{\mathrm{int}})$$

Loi

Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Soit $\mathscr{S}$, un système quelconque et deux états « début » et « fin » quelconques (avec B postérieur à A) alors

$$E_{\mathrm{m}}(\mathscr{S},\text{fin}) - E_{\mathrm{m}}(\mathscr{S},\text{début}) = \sum W(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum W(\vec{f}_{\text{inertie,nc}}) + \sum W(\overleftrightarrow{f}_{\text{int,nc}}) \qquad \text{où}$$

- ➜ $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p,ext}} + E_{\mathrm{p,int}}$;
- ➜ « nc » signifie « non conservative ».

Loi

Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Soit $\mathscr{S}$, un système quelconque alors

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{c}}(\mathscr{S},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{\text{inertie}}) + \sum \mathscr{P}(\overleftrightarrow{f}_{\text{int}}) \qquad \text{avec} \qquad \mathscr{P}(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\vec{v}(M_{\text{qui subit } \vec{f}})$$

Loi

Théorème de la puissance mécanique (TPM)

Soit $\mathscr{S}$, un système quelconque alors

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}(\mathscr{S},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{\text{inertie,nc}}) + \sum \mathscr{P}(\overleftrightarrow{f}_{\text{int,nc}})$$

Loi

Le travail fourni par une interaction intérieure à un système est une grandeur intrinsèque, c'est-à-dire une grandeur qui ne dépend pas du référentiel choisi.

Loi

Lorsque deux points sont rigidement liés, le travail de l'interaction de contact entre les deux est nul.

Loi

Lorsque deux points sont reliés par une liaison sans frottement (contact plan, liaison pivot. . .), le travail de l'interaction est nul.

Loi

Le travail fourni par une interaction de contact avec frottement sans glissement (ou « roulement sans glissement » est nul.

Loi

L'énergie potentielle associée à des interactions intérieures n'est pas extensive.

Loi

Pour les interactions, il ne faut compter qu'une seule fois l'énergie potentielle.

Loi

L'énergie potentielle interne contenue dans un ressort s'écrit

$$E_{\mathrm{p,int,él}} = \frac{1}{2}\,k\,(\ell-\ell_0)^2$$

. . . .

DÉF

Pour un système de deux points M_1 et M_2, la *particule fictive* M de masse μ est définie par

$$\overrightarrow{GM} \triangleq \overrightarrow{M_1M_2} \qquad \text{et} \qquad \mu \triangleq \frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2}$$

LOI

Dans le cas d'un système avec de points de masses très différentes, la particule fictive s'identifie avec la particule la moins massique.

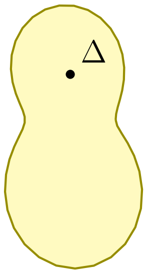
II – Solide en rotation autour d'un axe fixe

LOI

Le moment cinétique scalaire d'un solide Σ quelconque tournant autour d'un axe Δ fixe s'écrit

$$\sigma_\Delta(\Sigma) = J_\Delta \times \Omega \qquad \text{où :}$$

➜ J_Δ est le *moment d'inertie* du solide par rapport à Δ ;
➜ Ω est la vitesse de rotation algébrique du solide autour de Δ.



LOI

Dimensionnellement parlant, en utilisant les unité SI pour les dimensions

$$[J_\Delta] = (\text{kg}).(\text{m})^2$$

LOI

Un solide possède *a priori* une infinité de moment d'inertie puisque « le » moment d'inertie dépend de l'axe de rotation choisi.

LOI

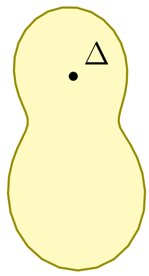
Plus un axe passe près du centre de masse, plus le moment d'inertie associé à la rotation autour de cet axe est petit.

Loi

L'énergie cinétique d'un solide Σ quelconque tournant autour d'un axe Δ fixe s'écrit

$$E_c(\Sigma) = \frac{1}{2} J_\Delta \times \Omega^2 \qquad \text{où :}$$

- ➜ J_Δ est le *moment d'inertie* du solide par rapport à Δ ;
- ➜ Ω est la vitesse de rotation algébrique du solide autour de Δ.



Loi

J_Δ caractérise l'inertie pour la rotation :

- ➜ plus J_Δ est grand, plus c'est difficile à mettre en rotation (ou à freiner) ;
- ➜ plus J_Δ est grand, plus il y a d'énergie cinétique dans la rotation.

. . . .

Déf

Un *couple* (ou *couple de forces*) est un ensemble de forces de résultante nulle mais de moment par rapport à un axe non nul.

Par extension, le *couple* est le moment d'un couple de forces.

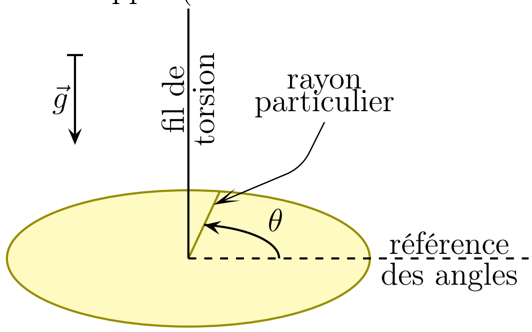
Loi

Dans le cas d'une liaison parfaite (dite aussi « sans frottement »), le couple est nul.

$$\Gamma_\Delta = 0$$

Loi

Dans le cas d'un couple de rappel (comme avec un fil de torsion), le couple s'écrit



$$\Gamma_\Delta = -C\,(\theta - \theta_0)$$

Loi

Dans le cas d'un couple résistant (liaison un peu « grippée »), le couple s'écrit

$$\Gamma_\Delta = -h\,\Omega$$

Loi

Dans le cas d'un couple moteur (tige reliée à une machine), le couple s'écrit

$$\Gamma_\Delta = \Gamma_m \overset{\text{svt}}{=} \text{C}^{\text{te}}$$

Loi

Le travail élémentaire et la puissance fournis par une force (ou un couple) s'écrivent

$$\delta W = \mathscr{M}_\Delta(\vec{f})\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P} = \mathscr{M}_\Delta(\vec{f}) \times \Omega$$

III – Solide en mouvement presque quelconque

Loi

Pour deux points A et B quelconques d'un même solide

$$\vec{v}(A/\mathscr{R},t) = \vec{v}(B/\mathscr{R},t) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA} \qquad \text{où}$$

$\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du solide par rapport à $\mathscr{R}$.

Loi

Pour A quelconque d'un solide

$$\vec{v}(A/\mathscr{R},t) = \vec{v}(G/\mathscr{R},t) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA} \qquad \text{où}$$

- ➜ G est le centre de masse du solide ;
- ➜ $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du solide par rapport à $\mathscr{R}$.

Loi

La donnée de la vitesse d'un point d'un solide et du vecteur rotation de ce solide permet de décrire entièrement le champ de vitesse de ce solide.

Loi

La vitesse de glissement d'un solide ② par rapport à un solide ① caractérise la manière dont ② bouge par rapport à ① au niveau du point de contact.

Loi

La vitesse de glissement de ② par rapport à ① s'écrit

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(②/①) = \vec{v}(I \in ②/\mathscr{R}) - \vec{v}(I \in ①/\mathscr{R})$$

Loi

Pour deux solides quelconques

$$\vec{v}_{\text{gliss}}(②/①) = -\vec{v}_{\text{gliss}}(①/②)$$

Loi

La vitesse de glissement d'un solide Σ par rapport à un support immobile s'écrit

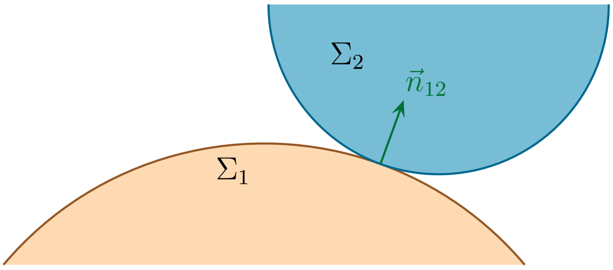
$$\vec{v}_{\text{gliss}}(\Sigma) = \vec{v}(I \in \Sigma/\mathscr{R})$$

Loi

La vitesse de glissement d'un solide par rapport à un autre est tangentielle au contact entre les deux solides.

Loi

Entre deux solides en contact, il y a toujours une interaction normale



$$\vec{f}_{1\to 2} = R_N\,\vec{n}_{12} \qquad \text{où}$$

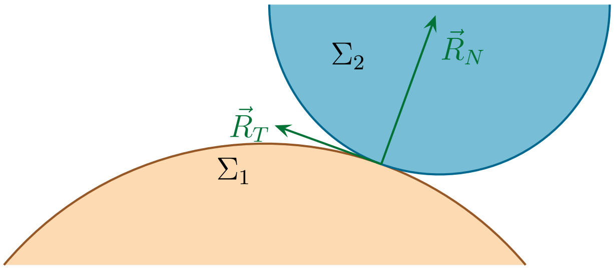
- ➜ $\vec{n}_{12}$ est le vecteur normal et unitaire dirigé de ① vers ② ;
- ➜ $R_N > 0$ est toujours possible ;
- ➜ $R_N < 0$ que si le décollement entre les deux est impossible.

Loi

Les actions tangentielles de contact traduisent le frottement.

Loi

Lois de Coulomb



Lors du contact entre deux solides, il y a deux cas possibles suivant qu'il y a ou non glissement :

- ➜ s'il y a glissement, *i.e.* si $\vec{v}_{\text{gliss}}(②/①) \neq \vec{0}$ alors

$$\|\vec{R}_{T,1\to 2}\| = f_{\text{d}}\,\|R_N\| \qquad \text{et} \qquad \vec{R}_{T,1\to 2} \text{ opposée à } \vec{v}_{\text{gliss}}(②/①)$$

- ➜ s'il n'y a pas glissement, *i.e.* si $\vec{v}_{\text{gliss}}(②/①) = \vec{0}$ alors

$$\|\vec{R}_{T,1\to 2}\| \leqslant f_{\text{s}}\,\|R_N\| \qquad \text{et} \qquad \vec{R}_{T,1\to 2} \text{ de direction inconnue}$$

f_{d} et f_{s} sont appelés respectivement *coefficient de frottement **d**ynamique et **s**tatique.*

Loi

En ce qui concerne le contact, nous avons toujours

$$f_{\text{d}} \leqslant f_{\text{s}}$$

Loi

Si rien n'est précisé, nous prendrons

$$f_{\text{d}} = f_{\text{s}} \stackrel{\text{not}}{=} f$$

Loi

Les coefficients de frottements sont des grandeurs sans dimension et dont la valeur est de l'ordre de l'unité.

. . . .

DÉF Les frottements associés au contact entre deux solides sont appelés *frottement solides*.

LOI La puissance totale fournie par une interaction de contact aux deux solides en contact est strictement négative en cas de frottement avec glissement et nulle sinon.

LOI Un contact avec frottement mais sans glissement n'est pas dissipatif.

LOI Un contact avec glissement mais sans frottement n'est pas dissipatif.

LOI Une réaction normale peut fournir un travail, positif ou négatif.

LOI Une force de frottement peut fournir un travail positif.

LOI

THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE (TCI)

Pour un solide dans un référentiel quelconque

$$m\,\frac{\mathrm{d}v(G/\mathscr{R},t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{f}_{\text{ext}} + \sum \vec{f}_{\text{inertie}}$$

LOI

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE BARYCENTRIQUE SCALAIRE (TMCBS)

Pour un solide dans un référentiel quelconque

$$m\,\frac{\mathrm{d}\sigma^\star}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}(\vec{f}_{\text{ext}}) + \sum \mathscr{M}(\vec{f}_{\text{inertie de }\mathscr{R}}) \qquad \text{avec}$$

$\sigma^\star = J_{G\Delta}\,\Omega$ avec (G_Δ) axe fixe ans $\mathscr{R}^\star$ passant par G

LOI

THÉORÈME DE LA PUISSANCE MÉCANIQUE (TPM)

Pour un solide dans un référentiel quelconque

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{m}}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{P}(\vec{f}_{\text{ext,nc}}) + \sum \mathscr{M}(\vec{f}_{\text{inertie,nc}})$$