Premières ondes

I – Vers l'équation d'onde

LOI — Pour un régime apériodique avec $Q \ll 1$, le régime permanent est atteint au bout de la durée $\dfrac{T_0}{Q}$ où T_0 est la période propre.

LOI — Pour un régime pseudopériodique avec $Q \gg 1$, le régime permanent est atteint au bout de la durée $2\,Q\,T_0$ où T_0 est la période propre.

DÉF — La grandeur $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est appelée *pulsation réduite.*

LOI — Dans le cas de l'amplitude de l'élongation en régime sinusoïdal forcé :

- si $Q < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ il n'y a **pas** de résonance
- si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ il a résonance en $u_{\mathrm{r}} \neq 1$ et avec $X_{\mathrm{m,max}} \neq Q\,a$

LOI — Si $Q \gg 1$, il y a résonance de l'amplitude de l'élongation avec

$$u_{\mathrm{r}} = 1 \qquad \text{et} \qquad X_{\mathrm{m,max}} = Q\,a$$

En pratique $Q \gg 1$ correspond à Q>5.

LOI — Dans le cas de l'amplitude de la vitesse en régime sinusoïdal forcé :

- il y a toujours résonance
- la résonance est toujours en $u_{\mathrm{r}} = 1$
- l'amplitude maximale vaut (ici) $Q\,V_0$

LOI — En régime permanent, l'excitateur (ou le moteur) ne fait *que* compenser les pertes par frottement.

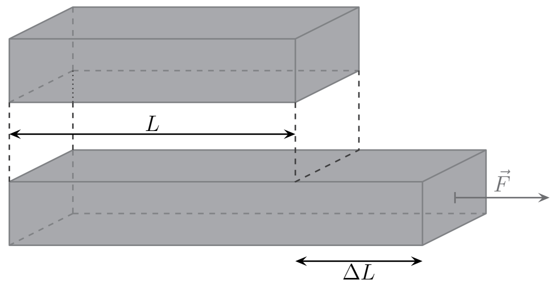
LOI — Il y a résonance quand la pulsation extérieure est égale à la pulsation propre **quand il n'y a pas de frottement.**

LOI — La résonance est intrinsèque au dispositif alors que l'antirésonance dépend de la manière d'exciter un dispositif.

DÉF — Nous appelerons *équation de* D'ALEMBERT ou *équation de propagation* l'équation aux dérivées partielles

où :
c est homogène à une vitesse.

LOI — La force nécessaire pour allonger un solide de la longueur ΔL s'écrit



$$\frac{\Delta L}{L} \triangleq \frac{1}{E} \times \frac{F}{S} \qquad \text{où :}$$

E est le *module d'*YOUNG du matériau et S la section du solide.

II – Solutions de l'équation de D'ALEMBERT

LOI — Pour une corde infiniment fine et souple, sans mouvement longitudinal et pour laquelle pesanteur et frottements sont négligeables, les petits ébranlements obéissent à l'équation de D'ALEMBERT

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \quad \rightsquigarrow \quad = \frac{1}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(x,t) \qquad \text{avec} \qquad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

LOI — **Toutes** les solutions de l'équation de D'ALEMBERT $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{1}{c^2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(x,t)$ s'écrivent sous la forme

$$y(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$$

avec f et g quelconques.

DÉF — Une grandeur a un caractère *ondulatoire* si elle obéir à l'équation de D'ALEMBERT.

DÉF — La *célérité* est la vitesse de propagation d'une onde.

LOI — Mettre sous la forme $y(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$ une solution de l'équation de D'ALEMBERT consiste à écrire cette solution sous la forme d'une **O**onde **P**lane **P**rogressive :
- ➜ *onde* parce que solution de l'équation de D'ALEMBERT
- ➜ *plane* par opposition aux ondes sphériques
- ➜ *progressives* parce qu'elles avancent

DÉF — Nous distinguons :
- ➜ les OPP➠ qui est une OPP qui va vers les x (ou les z !) croissant ;
- ➜ les OPP⬅ qui est une OPP qui va vers les x (ou les z !) décroissant, ces ondes étant parfois appelées *Ondes Planes Régressives*.

LOI — La philosophie d'une onde est
« Je suis ici et maintenant ce que j'étais là-bas tout à l'heure. »

DÉF — Une *OPPM* est une **O**nde **P**lane **P**rogressive **M**onochromatique.
Nous dirons aussi parfois OPPH pour **O**nde **P**lane **P**rogressive **H**armonique.

LOI — Une OPPM➠ s'écrit
$$y(x,t) = A\,\cos(\omega\,t - k\,x + \varphi)$$

LOI — Une OPPM⬅ s'écrit
$$y(x,t) = A\,\cos(\omega\,t + k\,x + \psi)$$

LOI — La superposition de deux OPPM n'est pas une OPPM.

DÉF — Le *vecteur d'onde* d'une OPPM est le vecteur :
- ➜ de norme k
- ➜ de direction la direction de propagation
- ➜ de sens le sens de progragation

$\vec{k} = +k\,\vec{u}_x$ pour une OPPM➠ et $\vec{k} = -k\,\vec{u}_x$ pour une OPPM⬅.

LOI — Double périodicité d'une OPPM

vision temporelle	vision spatiale
pulsation ω	vecteur d'onde k
fréquence $\nu = \dfrac{\omega}{2\,\pi}$	nombre d'onde $\sigma = \dfrac{k}{2\,\pi}$
période $T = \dfrac{2\,\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu}$	longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\,\pi}{k} = \dfrac{1}{\sigma}$

DÉF — La *relation de dispersion* est la relation (*ie.* l'équation) entre les périodes spatiales et temporelle d'une OPPM.

LOI — La relation de dispersion caractérise le couplage spatio-temporel pour une OPPM.

LOI — La relation de dispersion pour l'équation de D'ALEMBERT s'écrit
$$\omega^2 = k^2\,c^2$$

LOI — Une solution en OPPM➠ et OPPM⬅ s'écrit, en notation complexe
$$\underline{y}(x,t) = \underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t - k\,x)} + \underline{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t + k\,x)}$$

DÉF — Une OS est une **O**nde **S**tationnaire.

DÉF — Une *solution stationnaire* d'une équation est une solution qui peut s'écrire sous la forme
$$y(x,t) = f(x)_t imesg(t)$$

DÉF — Une *onde stationnaire* est une solution stationnaire de l'équation d'onde.

LOI — Une onde stationnaire d'une équation de D'ALEMBERT s'écrit
$$y_d ext = A\,\cos(\omega\,t + \varphi) \times \cos(k\,x + \psi)$$

DÉF — Pour une onde stationnaire :
- ➜ un *nœud de vibration* est une zone où les vibrations sont d'amplitude nulle
- ➜ un *ventre de vibration* est une zone où les vibrations sont d'amplitude maximale

LOI — Une onde stationnaire pour l'équation de D'ALEMBERT peut être vue comme la superposition de deux OPPM de même amplitude, l'une allant vers les x croissant et l'autre allant vers les x décroissant.

LOI — Une onde stationnaire pour l'équation de D'ALEMBERT peut être vue comme la superposition de deux OPP, l'une allant vers les x croissant et l'autre allant vers les x décroissant.

LOI — Une superposition d'OPP n'est pas forcément une OPP.

LOI — Une superposition d'OPP→ (resp. d'OPP←) est une OPP→ (resp. OPP←).

LOI — Une superposition d'OPPM n'est pas forcément une OPPM.

LOI — Une superposition d'OS n'est pas forcément une OS.

III – Tenir compte des conditions aux limites

LOI — Un câble coaxial pris dans sa globalité ne fonctionne pas dans l'ARQS.

LOI — THÉORÈME DE SCHWARZ
Pour une fonction $f(x,y)$ suffisamment régulière

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) \qquad ie. \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)$$

DÉF — Des grandeurs *duales* sont des grandeurs qui obéissent à des équations couplées en général symétriques.

LOI — Pour qu'il y ait propagation il est nécessaire d'avoir des échanges énergétiques entre les grandeurs duales.

LOI — Si une onde de courant le long d'un câble coaxial et une OPP→, alors l'onde en tension est une OPP→ qui lui est proportionnelle

$$u(x,t) = +Z_{\mathrm{c}}\,i(x,t) \text{ avec } Z_{\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

LOI — Si une onde de courant le long d'un câble coaxial et une OPP←, alors l'onde en tension est une OPP← qui lui est proportionnelle

$$u(x,t) = -Z_{\mathrm{c}}\,i(x,t) \text{ avec } Z_{\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

LOI — Si une onde de courant le long d'un câble coaxial et une somme d'OPP notées $i(x,t) = f_d exmct + g(x+c\,t)$, alors l'onde en tension est aussi une somme OPP

$$u(x,t) = +Z_{\mathrm{c}}\left(f(x-c\,t) - g(x+c\,t)\right) \text{ avec } Z_{\mathrm{c}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

Z_{c} est appelée *impédance caractéristique*.

LOI — Dans le cas du câble coaxial, l'impédance caractéristique est homogène à une résistance.

LOI — Pour une corde obéissant à l'équation de D'ALEMBERT, si $v_y(x,t) = f(x-c\,t) + g(x+c\,t)$ alors

$$T_y^+(x,t) = Z_{\mathrm{c}}\left(f(x-c\,t) + g(x+c\,t)\right) \qquad \text{avec} \qquad Z_{\mathrm{c}} = \sqrt{\mu\,T_0}$$

DÉF — Un *coefficient de réflexion* est défini en une extrémité d'un milieu propagatif par

$$r = \frac{\text{amplitude de la grandeur réfléchie}}{\text{amplitude de la grandeur incidente}}$$

LOI — Pour les milieux linéaires, le coefficient de réflexion est indépendant de l'amplitude de la grandeur incidente.

LOI — Un coefficient de réflexion est une grandeur systémique, *ie.* une grandeur qui dépend de l'ensemble du dispositif.

LOI — Lorsqu'un milieu propagatif est fermé sur son impédance caractéristique, cela implique qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

LOI — Une impédance caractéristique permet de simuler l'infini propagatif.

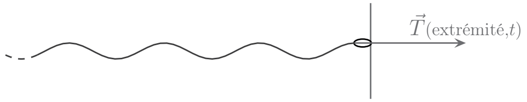
LOI

Pour une corde fixée à une extrémité

$$y(\text{extrémité},t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad v_y(\text{extrémité},t) = 0$$

LOI

Pour une corde fixée à un anneau sans masse coulissant sans frottement



$$T_y(\text{extrémité},t) = 0$$

LOI

Lorsqu'une corde est accrochée à quelque-chose (ressort, masse, ...) une condition aux limites est donnée par la continuité de la corde et l'autre est donnée par le PFD sur l'objet accroché.

$$y_1(\text{extrémité},t) = y_2(\text{extrémité},t) = Y_{\text{obj}}(t) \qquad \text{et} \qquad m_{\text{obj}}\,\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2}(t) = \cdots$$

LOI

Lorsqu'une corde est fermé sur son impédance caractéristique, il n'y a pas d'onde réfléchie.

LOI

Les solutions de l'équation de D'ALEMBERT s'écrivent, au choix

- ➜ soit sous forme spatiale $y(x,t) = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$
- ➜ soit sous forme temporelle $y(x,t) = F(t - x/c) + G(t + x/c)$

LOI

Une onde sur une corde se réfléchit en son opposée lorsqu'elle arrive sur une extrémité fixe.

LOI

Quand, dans un milieu propagatif, au moins un nœud de vibration est imposé, il est pratique de rechercher une solution en onde stationnaire.

LOI

Les vecteurs d'ondes des modes propres de la corde de MELDE ne peuvent prendre que quelques valeurs dépendant d'un entier. Ces modes sont dits *quantifiés*.

LOI

Les modes propres de la corde de MELDE sont tels que L soit un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde du mode propore considéré.

$$L = n \times \frac{\lambda}{2}$$

LOI

Dans le cas d'un système oscillant, le mode propre associé à la fréquence la plus basse est appelé *fondamental*. Les autres sont appelés *harmoniques*.

LOI

Dans le cas de la corde de MELDE, les fréquences propres des harmonique sont des multiples entier de la fréquence propre du fondamental.

LOI

La corde de MELDE résone lorsque l'excitation correspond à la fréquence d'un mode propre.

IV – Aspect énergétique

LOI

La densité linéique d'énergie e est telle que l'énergie $\mathrm{d}\mathscr{E}$ contenue dans un tronçon de longueur $\mathrm{d}x$ s'écrive

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = e\,\mathrm{d}x$$

LOI

Pour un câble coaxial, la densité linéique d'énergie s'écrit

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\,\Lambda\,i^2(x,t) + \frac{1}{2}\,\Gamma\,u^2(x,t)$$

LOI

Dans une propagation unidimensionnelle suivant $\vec{u}_x$ dans un milieu passif, en notant $e(x,t)$ la densité linéique d'énergie et $\mathscr{P}(x,t)$ la puissance tranférée comptée positivement suivante $+\vec{u}_x$, la loi de conservation de l'énergie s'écrit

$$\frac{\partial e}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}(x,t) = 0$$

LOI

Quelle que soit la grandeur considérée, le bilan d'une grandeur pour un système quelconque durant une durée quelconque se résume par

variation dans le temps = échange à travers la surface + création à l'intérieur

---

LOI

Dans un câble coaxial, la puissance transférée suivant $+\vec{u}_x$ à l'abscisse x s'écrit

$$\mathscr{P}(x,t) = u(x,t)\,i(x,t)$$

LOI Pour une OPP➠, la densité d'énergie se déplace à la célérité $+c\,\vec{u}_x$.

LOI Pour une OPP⇐, la densité d'énergie se déplace à la célérité $-c\,\vec{u}_x$.

LOI Lors d'une propagation unidimensionnelle, les puissances et les énergies associées aux OPP➠ et OPP⇐ s'additionnent.

DÉF Il y a *interférence* lorsque les énergies transportées par deux phénomènes qui se superposent ne s'additionnent pas entre elles.

LOI Dans le cas de la propagation unidimensionnelle, il n'y a pas d'interférence entre les OPP➠ et les OPP⇐.

V – Dispersion, atténuation

DÉF Nous appelerons ***P**resque **O**nde **P**lane **P**rogressive **M**onochromatique* (POPPM) une solution qui s'écrit formellement comme une OPPM mais avec un « vecteur d'onde » complexe.

DÉF *La vitesse de phase* est la célérité associée au terme de phase, *ie.* au terme en cos().

LOI Dans le cas d'une POPPM en $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(\omega\,t-\underline{k}\,x)}$ avec $\underline{k}=k'+\mathrm{j}\,k''$ la vitesse de phase s'écrit

$$v_\varphi=\frac{\omega}{k'}=\frac{\omega}{\mathcal{R}\mathrm{e}(\underline{k})}$$

DÉF La *dispersion* est associée à une propagation telle que la vitesse de phase v_φ dépende de la pulsation ω.

LOI Il n'y a pas de dispersion dans un milieu obéissant à l'équation de D'ALEMBERT.

DÉF *L'atténuation* est le fait que l'amplitude d'une « onde » diminue avec la propagation.

DÉF *L'absorption* est le fait qu'une « onde » cède de l'énergie au milieu dans lequel elle se propage.

DÉF Un milieu est dit :

- ➜ *passif* s'il ne peut **que** absorber de l'énergie à l'onde
- ➜ *actif* s'il a été conçu pour augmenter l'énergie d'une onde

LOI Une fonction est dite *gaussienne* si elle est de la forme

$$\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\,\sigma^2}} \qquad \text{où :}$$

- ➜ x_0 est la valeur moyenne
- ➜ σ est l'écart-type

LOI Entre une onde d'extension temporelle δt et son spectre d'extension $\delta\omega$ nous pouvons écrire

$$\delta t\times\delta\omega\sim 1$$

LOI Pour un paquet d'ondes, *la vitesse de groupe* est la vitesse de l'enveloppe et s'écrit

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \qquad \text{ou} \qquad v_{\mathrm{g}}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k'}$$