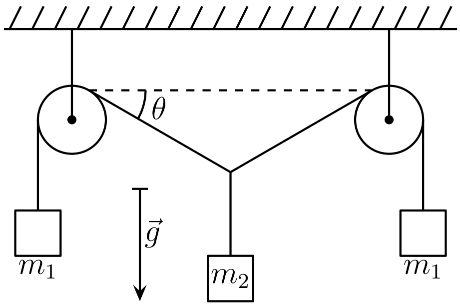
Mécanique du point

Exercice 1 POULIES À L'ÉQUILIBRE

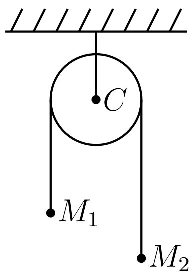
Les poulies et les fils disposés selon le schéma ci-dessous sont idéaux.



Déterminer l'angle θ à l'équilibre.

Exercice 2 MACHINE D'ATWOOD

Deux objets de masse m_1 et m_2 , assimilés à des points matériels, sont suspendus aux deux brins d'un fil idéal qui passe dans la gorge d'une poulie idéale, accrochée en un point fixe. On pose : $\vec{a}(M_1) = a_1(t)\,\vec{u}_z$ et $\vec{a}(M_2) = a_2(t)\,\vec{u}_z$.



Déterminer $a_1(t)$ et $a_2(t)$ ainsi que l'intensité des forces T_1 et T_2 que le fil exerce sur M_1 et M_2.

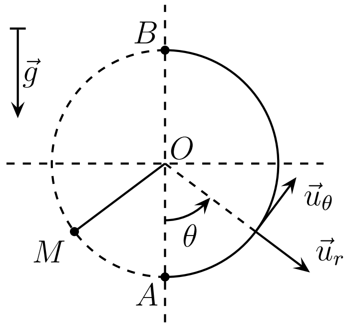
Exercice 3 FROTTEMENT FLUIDE ET FROTTEMENT SOLIDE

Une voiture, assimilée à un point matériel de masse m se déplace sur une route horizontale. Elle est soumise à une force de frottement solide de module $\alpha\,m$ et à la résistance de l'air de module $m\,\beta\,v^2(t)$ avec $v(t)$ la vitesse de la voiture. À l'instant initial, la voiture arrête son moteur, sa vitesse étant v_0.

1. Discuter de la validité et de l'origine des forces de frottement proposées.
2. À quelle date T la voiture s'arrête-t-elle ?
   Quelle est alors la distance L parcourue ?

Exercice 4 LIAISON UNILATÉRALE

Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'une tige OA de longueur R, de masse négligeable, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par O. Soient OA et OB les positions d'équilibre respectivement stable et instable de OM.



1. La tige est abandonnée sans vitesse, M étant très légèrement à gauche de B.
   Quelle est la vitesse de M à son passage en A ?
2. Au passage en A, M se détache de la tige et se met à glisser sans frottement sur une demi sphère de centre O et de rayon R.
   Établir l'équation différentielle régissant le mouvement de M sur la sphère. On pose $\omega^2 = \dfrac{g}{R}$.
3. Déterminer la réaction N que la sphère exerce sur M en fonction de θ.
   Montrer qu'en un certain point C, M quitte la sphère.
   Déterminer θ_C, la vitesse de M en C et exprimer sous la forme d'une intégrale la durée T qui sépare les passage en A et C.
4. Décrire le mouvement ultérieur de M.

Exercice 5 Modélisation d'un choc élastique

Un chariot assimilable à un point matériel de masse m, est mobile sans frottement sur un plan horizontal. Ce chariot est muni à son extrémité d'un ressort de raideur k pouvant se comprimer. Par l'intermédiaire de ce ressort, le chariot, animé d'une vitesse v_0, heurte un obstacle fixe. On admettra que l'énergie mécanique se conserve entre juste avant et juste après le contact.

1. Déterminer la durée τ pendant laquelle le ressort reste en contact avec l'obstable (durée du choc).
   Quel est l'enfoncement maximal du ressort ?
   Quelle est la force maximale exercée par le ressort ?
2. Que deviennent les expressions précédentes lorsque $k \to \infty$?
   Que devient le produit de la force maximale exercée par le ressort par la durée du choc ?
3. Quelle est la vitesse v' après le choc ?
   En déduire sans calcul la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)\,\mathrm{d}t$ où t_0 est l'instant caractérisant le début du choc, τ est la durée du choc et $F(t)$ la force exercée par le choc.

Exercice 6 Chute avec force de frottement en v^2

Un point matériel de masse m tombe verticalement dans un fluide. On repère la position et la vitesse $v(t)$ de ce point M sur un axe vertical orienté vers le bas. Le fluide exerce sur M un force de frottement de norme $\lambda\,v^2$.

1. Établir, en notant u la norme de la vitesse pour laquelle la force de frottement est égale au poids, l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse $v(t)$.
2. (a) À l'instant $t = 0$, on a $x = 0$ et $v = 0$.
   Exprimer la vitesse en fonction de g, u, et t.

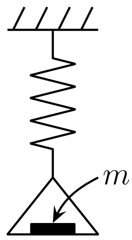
   (b) En déduire la loi horaire $x(t)$ du mouvement.

3. (a) À l'instant $t = 0$, on a $x = 0$ et $v = 2u$.
   Exprimer la vitesse en fonction de g, u, et t.

   (b) En déduire la loi horaire $x(t)$ du mouvement.

Exercice 7 Ne pas tomber

À l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de raideur k est suspendu un plateau de masse négligeable sur lequel on a placé un objet de masse m. On lâche le plateau sans vitesse initiale après l'avoir descendu d'une altitude A par rapport à sa position d'équilibre. Les frottements sont négligés.



Déterminer la valeur de A à ne pas dépasser afin que l'objet ne décolle jamais du plateau.

Exercice 8 Chute d'une bille de plomb

On considère une sphère de plomb de rayon a et de masse volumique ρ.

1. Dans un premier temps, la sphère est suspendue à un point fixe O par un fil et se trouve placée dans une soufflerie ; la vitesse du vent, horizontale, a pour valeur v_0 et le fil fait alors un angle α avec la verticale.

   Sachant que la résistance de l'air est de norme $f = k\,\pi\,a^2\,{v_0}^2$ où v_0 est la vitesse du vent, déterminer le coefficient k dans le système S.I.

2. Cette sphère est maintenant lâchée dans l'air immobile, hors de la soufflerie, sans vitesse initiale. La norme de la force de frottement s'écrit alors $f = k\,\pi\,a^2\,v^2$ où v est cette fois-ci la vitesse de l'objet et avec le même k qu'à la question précédente.

   (a) Justifier la différence entre les expressions des forces de frottement à la première et à la deuxième question.

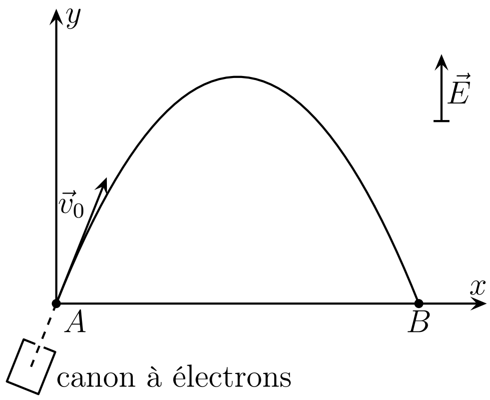
   (b) Calculer sa vitesse limite ; à quelle hauteur de chute dans le vide cette vitesse correspond-elle ?

   (c) Pour une chute de deux mètres de haut, quelle fraction du poids la force de frottement représente-t-elle ?

Données : $a = 1{,}0$ cm ; $\rho = 11{,}34$ g.cm^{-3} ; $v_0 = 10$ m.s^{-1} ; $\alpha = 1{,}68.10^{-1}$ rad ; $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Exercice 9 Focalisation d'électrons

Des électrons, préalablement accélérés par une tension V, pénètrent par la fente A supposée très fine dans une région où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\,\vec{u}_y$. On désire recueillir ces électrons à travers une fente B pratiquée dans le plan opaque (xOy), à la distance $AB = L$ de A.



On peut repérer l'angle α que fait le vecteur $\vec{v}_0$ des électrons en A avec l'axe (Ax), ainsi que la norme et le sens du champ électrostatique $\vec{E}$. Le vecteur $\vec{v}_0$ est supposé contenu dans le plan (xOy).

1. Quelles sont les valeurs optimales à donner à α et à $\vec{E}$ pour réaliser la focalisation de ces électrons, sachant que le faisceau incident présente une faible dispersion angulaire $\Delta\alpha$? (*i.e.* α compris entre $\alpha_0 - \dfrac{\Delta\alpha}{2}$ et $\alpha_0 + \dfrac{\Delta\alpha}{2}$.)
2. La largeur de la fente placée en B étant ΔL, donner un ordre de grandeur de la dispersion angulaire $\Delta\alpha$ acceptable pour ne pas atténuer sensiblement l'intensité du faisceau d'électrons étudié.

Données : $V = 10$ kV ; $L = 20$ cm ; $\Delta L = 2{,}0$ mm.

Exercice 10 Périodes sidérales

1. **Jour solaire et jour sidéral**

   La durée du jour solaire moyen est la durée T_{m} qui sépare, en moyenne, deux positions successives du Soleil au zénith dans son mouvement dans le référentiel terrestre. La durée du jour sidéral est la durée T_{s} que met la Terre pour faire un tour sur elle-même dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est immobile).

   Montrer que $T_{\mathrm{m}} - T_{\mathrm{s}} = \dfrac{{T_{\mathrm{m}}}^2}{T_{\mathrm{a}} + T_{\mathrm{m}}}$ où T_{a} est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_{\mathrm{m}} - T_{\mathrm{s}}$ sachant que $T_{\mathrm{m}} = 86\,400$ s et $T_{\mathrm{a}} = 365{,}25\,T_{\mathrm{m}}$.

2. **Lunaison synodique et lunaison sidérale**

   La lunaison synodique est la durée T_{n} qui sépare deux positions successives de la nouvelle lune. La lunaison sidérale est la durée T_{s} de révolution de la Lune autour de la Terre dans le référentiel géocentrique (référentiel dans lequel le centre de la Terre est fixe).

   Montrer que $T_{\mathrm{n}} - T_{\mathrm{s}} = \dfrac{{T_{\mathrm{s}}}^2}{T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{s}}}$ où T_{a} est la période de révolution de la Terre autour du Soleil.
   Calculer $T_{\mathrm{n}} - T_{\mathrm{s}}$ en jour, sachant que $T_{\mathrm{s}} = 27{,}3$ j et $T_{\mathrm{a}} = 365{,}25$ j.

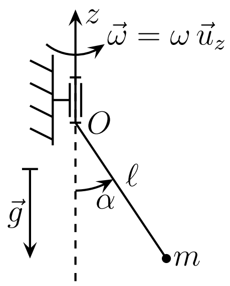
Exercice 11 Palet sur une demi-sphère

Un palet que l'on considérera ponctuel est placé au sommet d'une demi-sphère de rayon R fixée à une plate-forme mobile. La plate-forme tractée se met en mouvement avec une accélération horizontale a_0 constante.

En négligeant tout frottement avec l'air et avec demi-sphère, déterminer l'équation donnant l'angle de rupture du contact entre le palet et la demi-sphère en fonction de a_0/g et résoudre graphiquement l'équation précédente.

Exercice 12 Pendule conique

Une masse ponctuelle m est fixée à l'extrémité A d'une tige de longueur $\ell = OA$ et de masse négligeable, fixée en O et tournant autour de l'axe vertical (Oz) à vitesse angulaire constante ω en restant dans le plan vertical. Soit $\alpha = \mathrm{C^{te}}$ l'angle que fait cette tige avec la verticale.



1. En faisant l'analyse des forces dans un référentiel qui sera précisé, calculer $\cos\alpha = f(\omega)$ et tracer la courbe représentant α en fonction de ω.
2. En se plaçant dans un référentiel tournant avec la tige, montrer que l'énergie potentielle de la masse m se compose de deux termes.

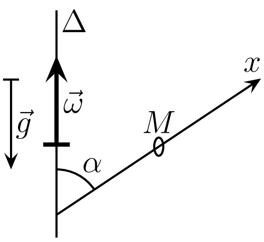
   Les expliciter et retrouver l'expression de $\cos\alpha$ à partir de celle de l'énergie potentielle E_p.
3. On se propose d'examiner en détail ce qui se passe pour les faibles valeurs de α.

   Tracer l'allure de la courbe $E_\mathrm{p}(\alpha)$ en distinguant les deux cas possibles suivant la valeur de ω.

   Expliquer à l'aide des courbes l'allure de la courbe $\alpha(\omega)$.

Exercice 13 Anneau sur tige en rotation

Un axe matériel (Ox) est en rotation uniforme avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical Δ. Un point matériel M de masse m coulisse sans frottement sur (Ox).

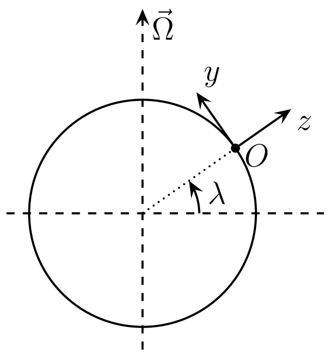


1. Déterminer la position d'équilibre M_0 de M par rapport à la barre (Ox).
2. M étant abandonné sans vitesse initiale relativement à (Ox) à une distance a de M_0, donner l'expression de $x(t)$.

   La position d'équilibre M_0 est-elle stable ou instable ?
3. Calculer à la date t la composante de l'action de M sur (Ox) perpendiculaire au plan (Δ,Ox).

Exercice 14 Déviation vers l'ouest

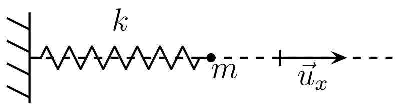
Un objet de masse m est lancé vers le haut selon la verticale ascendante $\vec{u}_z$ d'un lieu de latitude λ avec une vitesse initiale $v_0\,\vec{u}_z$. Le vecteur $\vec{\Omega}$ représente le vecteur vitesse angulaire de rotation instantanée de la Terre. $\vec{\Omega}$ est contenu dans le plan (O,y,z), l'axe (O,x) pointant vers l'Est.



1. Dans un premier temps on suppose le référentiel $(Oxyz)$ galiléen.
   Donner les lois du mouvement définissant $\vec{v}(t)$ et $z(t)$.
   Que représente la grandeur $\eta = \dfrac{\Omega\, v_0}{g}$?
   Que peut-on dire de la valeur de η pour des hauteurs maximales atteintes de l'ordre de quelques centaines de mètres ?
2. On cherche à déterminer la variation Δx observée selon l'axe (Oxx'). On abandonne l'hypothèse de référentiel galiléen pour $(Oxyz)$ et on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même.
   En considérant la force de Coriolis, et en utilisant la loi de vitesse selon (Oz) établie à la question précédente, donner une évaluation de cette déviation.
3. **A.N. :** calculer Δx pour $\lambda = 51\ °$, $g = 9{,}81$ m.s^{-2} et une altitude maximale atteinte de $h = 100$ m.

Exercice 15 Oscillateur amorti

On considère une masse au bout d'un ressort horizontal soumis à une force de frottement solide.



On rappelle qu'un frottement solide se caractérise par :
➜ lorsque $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ et $\|\vec{f}\| = \lambda\, N$ où λ est le coefficient de frottement et N la norme de la réaction normale du support.
➜ lorsque $\vec{v} = \vec{0}$, $\|\vec{f}\| < \lambda N$.

On choisit l'origine du repère de telle sorte que lorsque la masse m est en O, le ressort a sa longueur naturelle. On note ${\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m}$.

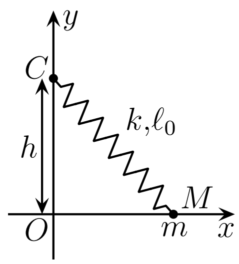
1. Montrer qu'il existe une plage d'équilibre, *i.e.* que l'on peut avoir $x(t) = \text{C}^{\text{te}}$ pour x compris entre $-a$ et a (a à déterminer).
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement. On introduira $\varepsilon = \pm 1$ tel que $\varepsilon\, \dot{x} < 0$.
3. (a) Déterminer la solution $x_1(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = 1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_1(0) = X_1 > a$ et $\dot{x_1}(0) = 0$.
   (b) Déterminer la solution $x_2(t)$ de l'équation différentielle lorsque $\varepsilon = -1$ (préciser le sens du mouvement) avec $x_2(0) = X_2 < -a$ et $\dot{x_2}(0) = 0$.
4. (a) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_1(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan inférieur et centré sur $(a,0)$.

(b) Montrer que, dans le plan de phase $(x,\dfrac{\dot{x}}{\omega_0})$, $x_2(t)$ correspond à un demi cercle, dont on déterminera le rayon, situé dans le demi-plan supérieur et centré sur $(-a,0)$.

(c) En déduire la construction graphique de la trajectoire du mouvement dans le plan de phase à partir de la condition initiale : $x(0) = X_0 > a$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Exercice 16 OSCILLATEUR ANHARMONIQUE

On dispose d'un ressort élastique de raideur k, de longueur naturelle ℓ_0 (longueur au repos) et de masse négligeable. L'une des extrémités de ce ressort est relié à un point C et l'autre à un anneau de masse m, coulissant sans frottements sur un axe (Ox) horizontal dont la distance h au point C peut être réglée à volonté.



1. Que peut-on prévoir concernant le comportement du système pour les cas : $\ell_0 < h$ et $\ell_0 > h$? On envisagera d'abord une réponse intuitive, puis une étude fondée sur l'énergie potentielle de ce système à évolution conservative pour vérifier ces affirmations.

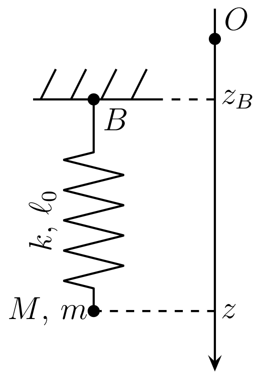
2. Le cas $\ell_0 = h$ est un cas limite intéressant correspondant à des oscillations qualifiées d'anharmoniques, car non sinusoïdales. Ayant réglé la distance OC pour se trouver dans une telle situation, on abandonne sans vitesse initiale l'anneau à la distance $x = a$ du point O.

   Montrer que l'intégrale première du mouvement (*i.e.* l'écriture de la conservation de l'énergie mécanique) se simplifie en : $\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{k}{8\,{\ell_0}^2}(a^4 - x^4)$ après un développement limité à l'ordre le plus bas de l'énergie potentielle.

   En déduire que la période d'un tel mouvement est de la forme $T = 8\,I\left(\dfrac{\ell_0}{a}\right)\left(\dfrac{m}{k}\right)^{1/2}$, où $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}} \simeq 1{,}31$.

Exercice 17 BILAN ÉNERGÉTIQUE EN RÉGIME FORCÉ

Un ressort idéal de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0 est disposé verticalement. Son extrémité supérieure B est reliée à un bâti dont on peut faire varier la cote de manière sinusoïdale, $z_B(t) = A\cos(\omega\,t)$, et un corps M assimilable à un point de masse m est accroché à son autre extrémité. L'action de l'air ambiant se traduit par une force de frottement du type $\vec{f} = -h\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de M dans le référentiel $\mathscr{R}(O,\vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ vers le bas, et h un coefficient positif.



1. Déterminer l'équation d'évolution de la cote $z(t)$ de M. On introduira la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
2. En déduire l'équation d'évolution de $x(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$, écart à l'équilibre de la masse.
3. Déterminer les amplitudes complexes $\underline{X_{\text{m}}}$ et $\underline{V_{\text{m}}}$ respectivement de l'écart à l'équilibre et de la vitesse de M.
4. Déterminer les déphasages ϕ et φ respectivement entre l'écart à l'équilibre $x(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$ puis entre la vitesse $\dot{x}(t)$ et le terme excitateur $z_B(t)$.
5. En reprenant la notation réelle, déterminer les expressions de :
   (a) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{f}}$ fournie par les frottements en une période ;
   (b) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{r}}$ fournie par le ressort en une période ;
   (c) l'énergie $\mathscr{E}_{\text{p}}$ fournie par le poids en une période ;
   (d) l'énergie cinétique $\mathscr{E}_{\text{c}}$ maximale ;
   (e) la différence $\Delta\mathscr{E}_{\text{pp}}$ des énergie potentielle entre les cotes maximale et au repos de M.
6. Écrire et vérifier le bilan énergétique en fonction des énergies calculées à la question précédente.

Exercice 18 Particule dans un puits de potentiel

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur un axe (Ox) avec $x \geqslant 0$ et soumis à un champ de forces dérivant du potentiel $E_{\text{p}}(x) = E_0\left(\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{a}{x}\right)$.

1. Tracer l'allure de $E_{\text{p}}(x)$.
2. Déterminer la position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ en fonction de E_0 et a.
3. (a) Faire un développement limité à l'ordre 2 de $E_{\text{p}}(x)$ autour de $x_{\text{éq}}$ et en déduire l'équation d'évolution de $\varepsilon(t)$ défini par $x(t) = x_{\text{éq}} + \varepsilon(t)$.
   (b) Montrer que l'on a, alors, $x(t) = x_{\text{éq}} + X_{\text{m}} \cos(\omega_0\,t + \varphi)$ où ω_0 est une pulsation à déterminer en fonction de E_0 et $x_{\text{éq}}$ et $X_{\text{m}} \ll x_{\text{éq}}$.
4. (a) Faire un développement limité à l'ordre 3 de $E_{\text{p}}(x)$ autour de $x_{\text{éq}}$ et en déduire la nouvelle équation d'évolution de $\varepsilon(t)$.
   (b) On suppose que $x(t) = x_{\text{éq}} + A + X_{\text{m}} \cos(\omega_0\,t) + B \cos(2\,\omega_0\,t)$ avec $A \ll X_{\text{m}}$, $B \ll X_{\text{m}}$ et $X_{\text{m}} \ll x_{\text{éq}}$.
   Déterminer les expressions de A et A.
   (c) Commenter.

On rappelle que, pour $\varepsilon \ll 1$: $(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\,\varepsilon + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,\varepsilon^2 + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)}{6}\,\varepsilon^3$.

Exercice 19 Trajectoire circulaire

On considère un satellite de masse m sur une trajectoire circulaire de rayon r autour d'un corps sphérique de masse M et de rayon R.

1. Déterminer en fonction de r et des constantes caractéristiques du problème : la vitesse v sur la trajectoire, la période T de révolution, le moment cinétique σ par rapport au centre de la trajectoire, l'énergie mécanique E_{m}.
2. Retrouver l'expression de la constante de la loi de Kepler.

Exercice 20 Freinage d'un satellite

Un satellite S de masse m décrit autour de la Terre assimilée à un astre à symétrie sphérique une orbite circulaire de rayon r.

1. Exprimer en fonction de r et de la masse M de la Terre : l'énergie potentielle de gravitation E_{p} de S, son énergie cinétique E_{c} dans le référentiel géocentrique, son énergie mécanique E.
2. Les hautes couches de l'atmosphère freinent très légèrement S.
   Décrire l'évolution de la trajectoire de S sans nouveau calcul.
3. On admet que la force de frottement subie par le satellite est de la forme $-k\,\vec{v}$.
   Quelle est la signification physique de la grandeur $\tau = \dfrac{m}{k}$?
4. En supposant le frottement très faible (préciser), exprimer la variation relative par révolution $\dfrac{\Delta r}{r}$ du rayon de l'orbite en fonction de r et de la période T_0 du mouvement non perturbé par le freinage.

Exercice 21 Impesanteur

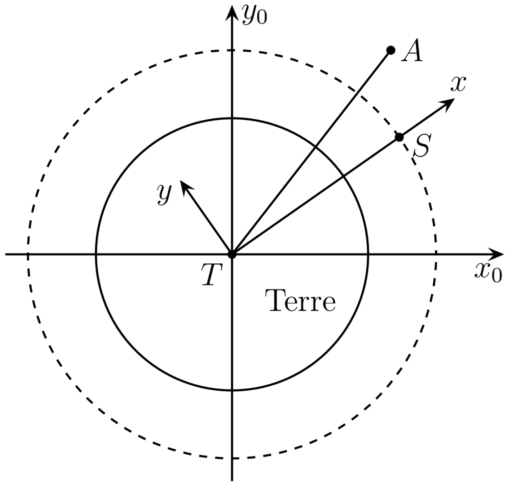
Un satellite artificiel S de centre de masse G décrit autour de la Terre de centre O une orbite circulaire de rayon R avec le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \omega\,\vec{u}_z$ par rapport au référentiel géocentrique $\mathscr{R}_0$ supposé galiléen. On désigne par $\mathscr{R}_S = (G,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$ un référentiel lié à S. Un point P situé dans le voisinage de S est repéré par ses coordonnées (x,y,z) avec $\dfrac{x}{R}$, $\dfrac{y}{R}$ et $\dfrac{z}{R} \ll 1$. On suppose que $(G,\vec{u}_y)$ pointe en permanence vers O ; dans ces conditions $(G,\vec{u}_x)$ est dirigé dans le sens de rotation.

1. En ne tenant compte, outre les forces d'inertie, que de la force gravitationnelle exercée par la Terre (supposée à symétrie sphérique), établir le système des trois équations différentielles du mouvement de P par rapport à S.
2. Décrire qualitativement l'influence des termes figurant dans les expressions de $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, $\ddot{z}(t)$ en distinguant les termes statiques et les termes dynamiques.
3. Pour un satellite orbitant à faible altitude (quelques centaines de kilomètres) de quelques mètres de dimension, évaluer, en m.s^{-2} l'importance de la partie statique de ces champs résiduels.
4. Pour des conditions initiales quelconques, $\overrightarrow{GP}_0 = a\,\vec{u}_x + b\,\vec{u}_y + c\,\vec{u}_z$ et $\vec{v}_0 = \omega(\alpha\,\vec{u}_x + \beta\,\vec{u}_y + \gamma\,\vec{u}_z)$, donner la solution générale du système précédent en posant $\theta = \omega\,t$.
   Calculer la valeur moyenne temporelle de $\vec{v}$ et commenter le résultat.
5. Représenter graphiquement les cas particuliers suivants :
   - ➜ $\vec{v}_0 = \vec{0}$ et $\overrightarrow{GP}_0 = b\,\vec{u}_y$
   - ➜ $\vec{v}_0 = \beta\,\omega\,\vec{u}_y$ et $\overrightarrow{GP}_0 = \vec{0}$
   - ➜ $\vec{v}_0 = \alpha\,\omega\,\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{GP}_0 = \vec{0}$

Exercice 22 Arrimage d'un satellite

Une station orbitale S gravite autour de la Terre sur une orbite circulaire de rayon r_0.

On donne l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et le rayon terrestre $R_\mathrm{T} = 6{,}36.10^6$ m.



1. Trouver la vitesse de satellisation v_s de la station à une altitude de 900 km et calculer sa période de révolution T_0 autour de la Terre.
2. On veut arrimer à cette station un satellite artificiel A, de masse m. Pour étudier les possibilités de cet arrimage, on analyse le mouvement de A dans le référentiel tournant $\mathscr{R} = (Txyz)$ d'origine le centre T de la Terre et dont l'axe (Tx) est défini par le vecteur $\overrightarrow{TS}$. L'axe (Ty) est dans le sens du mouvement de la station.
   (a) Expliquer pourquoi l'arrimage du satellite à la station est impossible par freinage ou par accélération si A est initialement sur la même orbite que S.
   (b) Effectuer le bilan des forces exercées sur A dans $\mathscr{R}$. Écrire vectoriellement ces forces en fonction de $\vec{r} = \overrightarrow{TA}$, de la vitesse $\vec{v}$ de A par rapport à $\mathscr{R}$ et de $\omega = \dfrac{v_\mathrm{s}}{r_0}$.
   (c) En déduire la relation vectorielle issue de la loi fondamentale de la dynamique appliquée à A dans $\mathscr{R}$.
3. Dans le cas où $r \simeq r_0$, expliciter l'équation vectorielle précédente selon les axes (Sx) et (Sy). On fera un développement limité de r à l'ordre un en $\dfrac{x}{r_0}$ et $\dfrac{y}{r_0}$.
4. Dans le cas où A et S sont très proches l'un de l'autre, montrer que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de A dans $\mathscr{R}$ satisfont les équations d'évolution suivantes :

$$\ddot{x}(t) = 3\,\omega^2\,x(t) + 2\,\omega\,\dot{y}(t) \qquad \text{et} \qquad \ddot{y}(t) = -2\,\omega\,\dot{x}(t)$$

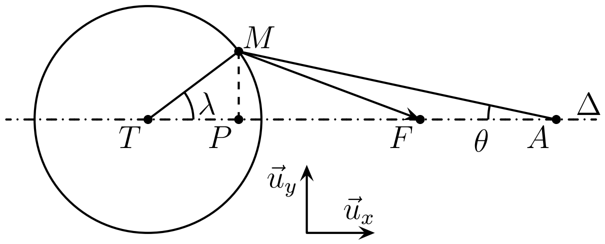
   (a) À quelle force soit-on attribuer les termes $2\,\omega\,\dot{y}(t)$ et $-2\,\omega\,\dot{x}(t)$?
   (b) Intégrer la deuxième équation en tenant compte des conditions initiales :

$$x(0) = 0\ ; \qquad y(0) = y_0\ ; \qquad \dot{x}(0) = v_0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = 0$$

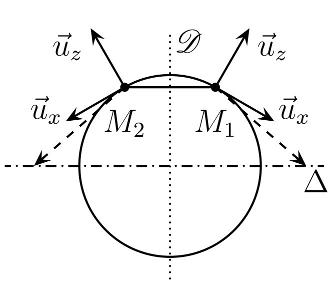
   (c) En déduire que $x(t)$ et $y(t)$ sont des fonction sinusoïdales de période T_0.
   (d) Montrer que la trajectoire de A dans $\mathscr{R}$ est une ellipse sont on déterminera le centre et les axes.
   En déduire que la durée nécessaire à l'arrimage peut s'écrire $\alpha\,T_0$, α étant à déterminer.
   Quelle doit être la valeur correspondante de y_0 ?

Exercice 23 CONSTRUCTION DE PROCTOR

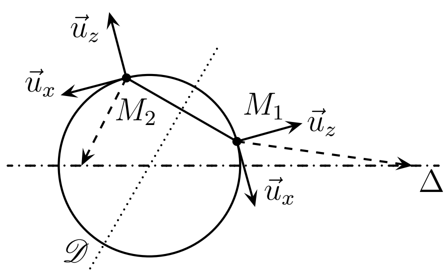
La construction de PROCTOR permet de déterminer très facilement la direction et l'importance relative du terme de marée dû à un astre. La construction est la suivante. On note T le centre de la Terre, R son rayon, A le centre de l'astre, M_A sa masse, Δ la droite (AT) et M le point où l'on veut déterminer la direction du terme de marée. On se place dans le plan ATM. P est le projeté de M sur Δ, F le point tel que $\overrightarrow{TF} = 3\,\overrightarrow{TP}$. Dans ces conditions le terme de marée est proportionnel à $\overrightarrow{MF}$.



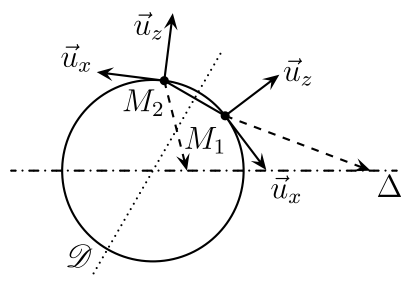
1. On se propose de démontrer la construction précédente.
   (a) Rappeler l'expression vectorielle du terme de marée en M noté $\vec{\mathscr{M}}_A(M)$.
   (b) En choisissant $\vec{u}_x = \dfrac{\overrightarrow{TA}}{\|\overrightarrow{TA}\|}$ et $\vec{u}_y = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}$ et en notant $d = TA$, $R = TM$, $r = AM$ et λ l'angle $(\overrightarrow{TP},\overrightarrow{TM})$, montrer que $\vec{\mathscr{M}}_A(M) = \dfrac{G\,M_A\,R}{d^3}(2\,\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$. Comme l'astre responsable du terme de marrée est éloigné (!), on fera les calculs à l'ordre 1 en $\dfrac{R}{d}$ et θ.
   (c) Montrer que $\overrightarrow{MF} = \kappa\,(2\,\cos\lambda\,\vec{u}_x - \sin\lambda\,\vec{u}_y)$ en précisant κ et justifer la construction de PROCTOR.
2. À partir des schémas suivants sur lesquels on a représenté en pointillés les directions des termes de marée, expliquer pourquoi les marées de la situation ① sont appelées « semi-diurnes », celles de la situation ② « semi-diurne à inégalité diurnes » et celles du type ③ « diurnes ». La droite $\mathscr{D}$ est l'axe de rotation de la Terre. Sur chacun des schémas, $\vec{u}_z$ représente la verticale locale et $\vec{u}_x$ le vecteur local qui pointe « du large vers la côte ».



situation ①



situation ②



situation ③