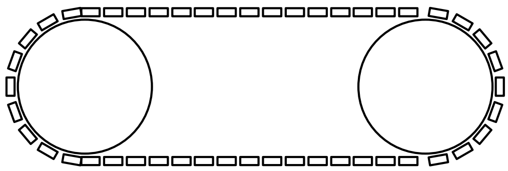
Mécanique du solide

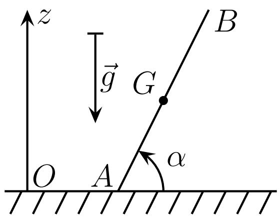
Exercice 1 Chenille



La masse d'une chenille d'un bulldozer est m. L'engin avance avec la vitesse $\vec{v}$ par rapport au sol et sans déraper.

Déterminer l'énergie cinétique de la chenille en l'absence de glissement de la chenille sur le sol et des roues sur la chenille.

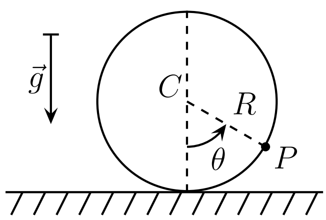
Exercice 2 Tige tombant sur le sol



Une tige AB homogène de masse m, de longueur $2\,\ell$ et de moment d'inertie J par rapport à un axe horizontal passant par G est abandonnée sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ quand $\alpha = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$. Le point A glisse sans frottement sur le plan horizontal. On notera $\eta \overset{\text{not}}{=} \dfrac{J}{m\,\ell^2}$.

1. Expliquer qualitativement pourquoi $\eta < 1$.
2. Quelle est la trajectoire de G centre d'inertie de la tige ?
3. Exprimer la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ en fontion de α.

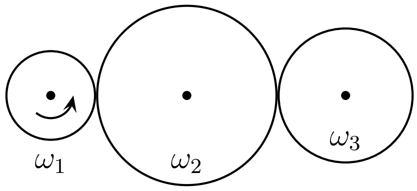
Exercice 3 Balourd



Un point matériel P de masse m est solidaire, et à la périphérie, d'un disque homogène de centre C, de rayon R, de masse M et de moment d'inertie J par rapport à un axe horizontal passant par C. Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal.

1. Donner une intégrale première du mouvement.
2. Quelle est la pulsation des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable ?
3. À quelle condition le disque avance-t-il toujours dans le même sens ?

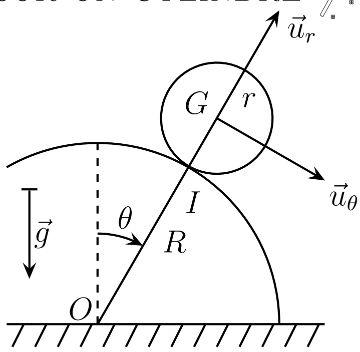
Exercice 4 ENGRENAGES



Trois disques numérotés 1, 2 et 3, de centres O_1, O_2 et O_3 alignés, de moment J_1, J_2 et J_3, de rayons r_1, r_2 et r_3, roulent sans glisser les uns sur les autres. On applique au disque 1 un couple moteur $\vec{\Gamma}_{\rm m} = \Gamma_{\rm m}\,\vec{u}_z$ ($\vec{u}_z$ étant un vecteur unitaire de l'axe du disque 1) et au disque 3 un couple résistant $\vec{\Gamma}_{\rm f} = \Gamma_{\rm f}\,\vec{u}_z$, $\Gamma_{\rm m}$ et $\Gamma_{\rm f}$ étant constants. Les liaisons d'axe sont parfaites.

Déterminer l'accélération angulaire du disque 3.

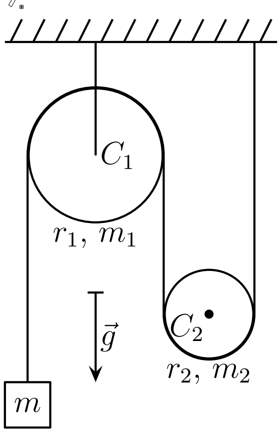
Exercice 5 BOULE ROULANT SUR UN CYLINDRE



Une boule sphérique de rayon r, de masse m et de moment d'inertie J par rapport à un de ses diamètres est abandonnée dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ au sommet d'un demi cylindre d'axe horizontal de rayon R. Le coefficient de frottement est f.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ lors de la phase de roulement sans glissement.
2. Trouver l'équation vérifiée par l'angle $\theta_{\rm g}$ pour lequel s'arrête le roulement sans glissement.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ lors de la phase de roulement avec glissement.
4. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $R_N(\theta)$ lors de la phase de glissement.

Exercice 6 MASSE ET POULIES

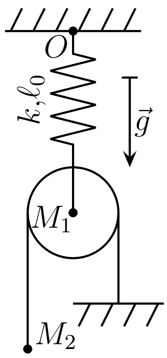


Une masse m mobile verticalement, une poulie homogène de centre fixe, de rayon r_1, de masse m_1 et une poulie mobile homogène, de rayon r_2, de masse m_2 sont assemblés comme sur le schéma ci-dessus. Les brins de fil entre les poulies sont verticaux. Les fils ne peuvent pas glisser sur les poulies et les liaisons d'axe sont parfaites. On donne le moment d'inertie par rapport à son axe d'une poulie homogène de masse m et de rayon r : $J = \dfrac{1}{2}\,m\,r^2$.

Déterminer l'expression de l'accélération du centre d'inertie C_2 de la poulie mobile.

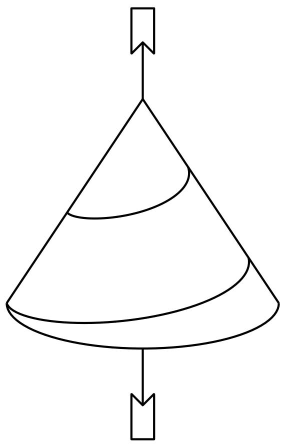
Exercice 7 Oscillateur

Soit le dispositif représenté ci-dessous. Le ressort est idéal, de raideur k et de longueur naturelle ℓ_0. Les points matériels M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 peuvent se déplacer verticalement. La poulie accrochée en M_1 et le fil sont idéaux.



Montrer que la période des oscillations s'écrit : $T = 2\,\pi\,\sqrt{\dfrac{m_1 + 4\,m_2}{k}}$.

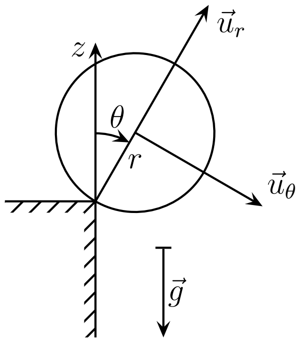
Exercice 8 Bille sur un cône



Un cône homogène de hauteur h, à base circulaire de rayon R et de moment d'inertie J par rapport à son axe, peut tourner librement autour de son axe géométrique vertical. Un bille de masse m part du sommet du cône et glisse vers le bas, sans frottement, le long d'une rainure tracée sur la surface. Elle quitte le cône horizontalement, la rainure étant tangente au cercle de base.

Le cône et la bille étant initialement au repos, trouver la vitesse angulaire du cône après que la bille l'a quitté.

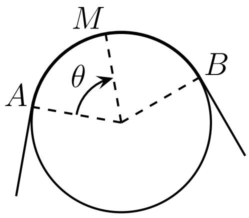
Exercice 9 Cylindre sur le coin d'une table



Un cylindre de rayon r, initialement en équilibre au bord d'une table, tombe sans vitesse initiale. Le coefficient de frottement de l'arête sur le cylindre étant f. Le moment d'inertie du cylindre autour de son axe géométrique vaut $\dfrac{1}{2}\,m\,r^2$.

Déterminer l'angle dont a tourné le cylindre lorsque s'amorce le mouvement de glissement du cylindre sur l'arête de la table.

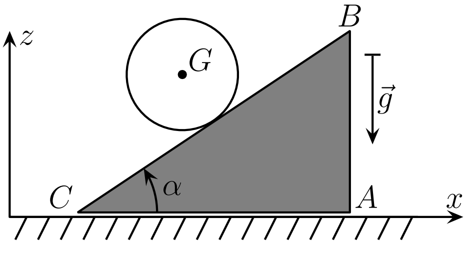
Exercice 10 Fil enroulé autour d'un cylindre



Un fil inextensible inextensible $\mathscr{F}$ de poids négligeable est en contact le long d'un arc de cercle (AB) de centre C d'angle au centre $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \alpha$ avec un cylindre de révolution fixe $\mathscr{C}$. Le coefficient de frottement entre $\mathscr{F}$ et $\mathscr{C}$ est f. On note $T(0)$ et $T(\alpha)$ les tensions de $\mathscr{F}$ en A et B. On tire sur $\mathscr{F}$ du côté de B jusqu'à obtenir le glissement de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{C}$.

1. En raisonnant sur un élément de fil infinitésimal repéré par $\theta = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM})$, établir une équation différentielle vérifiée par $T(\theta)$ à l'équilibre limite.
2. Déduire de cette équation la relation qui existe entre $T(\alpha)$ et $T(0)$ à l'équilibre limite.
3. Calculer $\dfrac{T(\alpha)}{T(0)}$ pour $\alpha = 2\pi$, 4π, 6π sachant que pour une corde mouillée glissant sur du fer, $f = 0{,}3$.

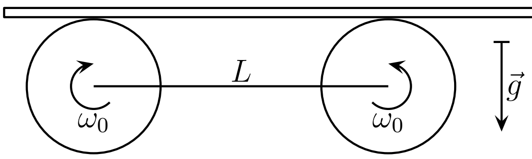
Exercice 11 Cylindre roulant sur un prisme



Un prisme $\mathscr{P}$ de masse M de section verticale ABC avec $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \alpha$ repose sans frottement sur un plan (xOy) fixe dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Un cylindre homogène $\mathscr{C}$ de centre G, de rayon r, d'axe (Gy) et de masse m est en contact au point I avec la face BC de $\mathscr{P}$, le coefficient de frottement étant f et on suppose qu'à $t = 0^+$ le cylindre $\mathscr{C}$ roule sans glisser sur $\mathscr{P}$.

Étudier le mouvement de l'ensemble.

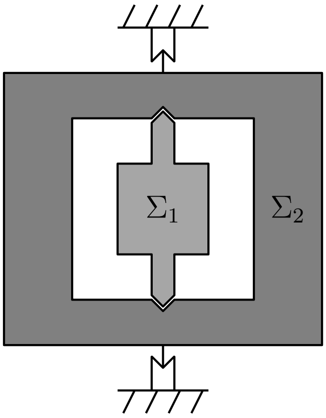
Exercice 12 Planche en oscillation sur des cylindres



Deux cylindres identiques de rayon R tournent avec une vitesse angulaire constante ω_0 autour de leurs axes géométriques, les sens de rotation étant opposés. Les axes des deux cylindres sont fixes dans le référentiel $\mathscr{R}$ galiléen, parallèles, dans un même plan horizontal et leur distance est L. Une planche $\mathscr{P}$ d'épaisseur négligeable et de masse m est placée sur les cylindres. On note f le coefficient de frottement pour le contact entre la planche et chacun des cylindres et on suppose que ω_0 est suffisamment grand pour qu'il y a toujours glissement au niveau des contacts planche – cylindre.

Étudier le mouvement de la planche supposée immobile à l'instant initial.

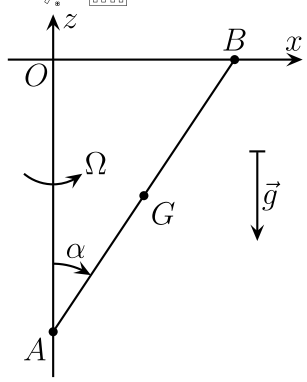
Exercice 13 Solides liés en rotation



Soit un solide Σ_1 de moment d'inertie J_1 lié par des pivots non parfaits d'axe vertical à un solide Σ_2 de moment d'inertie J_2, lui-même lié à un support fixe par des pivots parfaits d'axe vertical. À l'instant $t = 0$, Σ_1 est au repos dans un référentiel galiléen et Σ_2 tourne avec la vitesse angulaire ω_0. Le frottement solide au niveau des pivots a pour effet d'entraîner Σ_1. On suppose que le frottement solide introduit un moment constant de valeur absolue Γ par rapport à l'axe.

1. Déterminer la vitesse angulaire finale ω_f du système et calculer la variation d'énergie cinétique ΔE_c de l'ensemble.
2. Déterminer les vitesses angulaires $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ en fonction du temps.
   Au bout de combien de temps la vitesse angulaire ω_f est-elle atteinte ?
3. Déterminer la puissance totale des forces de frottement.
   En déduire l'énergie transformée en chaleur et la comparer à ΔE_c.

Exercice 14 TIGE EN ROTATION



Une tige AB, homogène, de longueur $2\,\ell$ et de masse m, est mise en rotation par le guide horizontal (Ox) qui tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire constante Ω. L'extrémité A glisse sans frottement sur (Oz) et l'extrémité B sur (Ox) sans frottement. On pose $\alpha = (\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})$ et on note J son moment d'inertie par rapport à un axe horizontal passant par G.

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle $E_{\text{p}}(\alpha)$ de la tige dans le référentiel $\mathscr{R}'$ tournant avec l'axe (Ox) autour de l'axe (Oz).
2. En déduire les positions d'équilibre de la tige dans $\mathscr{R}'$ et discuter de leurs stabilités.
3. Montrer que la pulsation ω des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable est donnée par $\omega(\alpha_{\text{éq}}) = \sqrt{\dfrac{1}{m\,\ell^2 + J} \times \dfrac{\mathrm{d}^2 E_{\text{p}}}{\mathrm{d}\alpha^2}(\alpha_{\text{éq}})}$.

Exercice 15 BALANÇOIRE

Pour amplifier l'amplitude de ses oscillations, un enfant sur une balançoire se déforme. De façon très sommaire, on suppose qu'il modifie son moment d'inertie J sans modifier la position de son centre d'inertie G à la distance a de l'axe de rotation.

1. On suppose que l'enfant, arrivant en $\theta = 0$ avec une énergie cinétique E_{c1}, fait passer rapidement son moment d'inertie de la valeur J_1 à la valeur J_2.
   Justifier que son moment cinétique par rapport à l'axe se conserve.
   En déduire la variation relative d'énergie cinétique $\dfrac{E_{\text{c2}} - E_{\text{c1}}}{E_{\text{c1}}}$ au cours de l'opération.
2. Lorsqu'ensuite l'enfant arrive en $\theta = \theta_{\max}$, il fait passer rapidement son moment d'inertie de la valeur J_2 à la valeur J_1.
   Montrer que le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation du système {enfant + balançoire } est une fonction mathématiquement continue du temps.
   Que vaut $\sigma(\mathscr{S},\theta_{\max}^-)$? En déduire $\sigma(\mathscr{S},\theta_{\max}^+)$.
   Justifier alors que l'énergie cinétique de l'enfant ne varie pas.
   Conclure sur la manière d'amplifier le mouvement.
3. Pour justifier que la solution optimale correspond à une variation du moment d'inertie $J(t)$ de forme créneau de période $\dfrac{T_0}{2}$, on utilise la fonction approchée $J(t) = J_0 + \Delta J\,\cos(\omega\,t)$.
   En supposant $|\Delta J| \ll J_0$ et en faisant un développement limité pour les petits angles (correspondant au démarrage des balancements de l'enfant), montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 \left(1 - \frac{\Delta J}{J_0}\cos(\omega\,t)\right)\theta(t) = 0 \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,a}{J_0}}$$

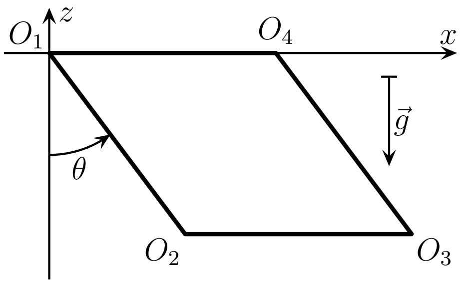
Montrer alors que $\dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_0\,\dfrac{\Delta J}{J_0}\,\cos(\omega\,t)\,\theta(t)\,\dot{\theta}(t)$ où $E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\,\dot{\theta}^2(t) + \dfrac{{\omega_0}^2}{2}\,\theta^2(t)$.

En supposant que $\theta(t) = A(t)\,\sin(\omega_0\,t+\varphi)$ avec $A(t)$ lentement variable à préciser, montrer que

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \omega_0\,\frac{\Delta J}{J_0}\,\cos(\omega\,t)\,A^2(t)\,\sin(2\,\omega_0\,t+2\,\varphi)$$

En déduire la présence de résonance pour $\omega = 2\,\omega_0$.

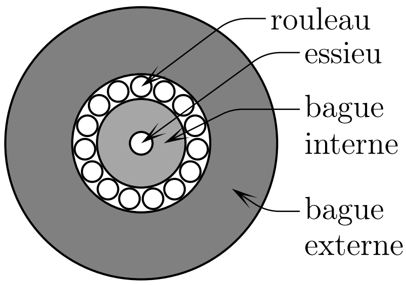
Exercice 16 Losange articulé



Un losange articulé est constitué de quatre barres homogènes de masse m et de longueur L articulées par des liaisons pivots parfaites en O_1, O_2, O_3 et O_4. La barre O_1O_4 reste horizontale et fixe, le losange pouvant alors penduler avec un angle θ dans son plan vertical. On note J le moment d'inertie d'une barre autour d'un axe qui lui est orthogonal et qui passe par une de ses extrémités.

Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et déterminer la période des petites oscillations.

Exercice 17 Roulement à rouleaux



La liaison entre un essieu de centre de masse C, d'axe horizontal, animé d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{v} = v\,\vec{u}_x$, et une roue de rayon r, est assurée par un roulement à rouleaux constitué :

- ➜ d'une bague interne de rayon extérieur r_1 solidaire de l'essieu
- ➜ d'une bague externe de rayon intérieur r_2 tournant à la vitesse angulaire ω de la roue
- ➜ de n cylindres homogènes situés entre les deux bagues et roulant dessus sans glisser à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.

On repère le centre d'inertie A d'un rouleau par l'angle $\theta = (\vec{u}_x,\overrightarrow{CA})$.

1. Exprimer la vitesse angulaire ω de la roue en fonction de la vitesse v.
2. Trouver la relation entre $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.
3. Trouver la relation entre $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ et ω.
4. Exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de v, r, r_1 et r_2 puis $\dot{\varphi}$ en fonction de v, r, r_1 et r_2. Comparer $\dot{\varphi}$ et $\dot{\theta}$.