Premières ondes

Exercice 1 Réflexion d'une déformation

Une corde de masse linéique μ est tendue avec une tension T_0. On néglige les effets de la pesanteur.

La corde a une longueur L et s'étend de $x = 0$ à $x = L$. Elle est fixée en $x = L$. On impose à l'extrémité $x = 0$ le mouvement :

$$\begin{cases} y(0,t) = 0 & \text{pour} \quad t \leqslant 0 \\ y(0,t) = a\,\dfrac{t}{\tau} & \text{pour} \quad 0 < t \leqslant \tau \\ y(0,t) = a & \text{pour} \quad \tau < t \leqslant 3\,\tau \\ y(0,t) = a\dfrac{1}{2\,\tau}\,(5\,\tau - t) & \text{pour} \quad 3\,\tau < t \leqslant 5\,\tau \end{cases}$$

On prendra $L = 20\,c\,\tau$.

1. Dessiner la forme de la corde à $t = 7\,\tau$.
   Quel est le vecteur vitesse des points d'abscisse $3\,c\,\tau$, $5\,c\,\tau$ et $\dfrac{13}{2}\,c\,\tau$ à cet instant là ?
2. Dessiner de même la forme de la corde à $t = 21\,\tau$ et $t = 30\,\tau$.

Exercice 2 Corde vibrante conductrice dans $\vec{B}$

On étudie les petits mouvements dans la direction (Oz) d'une corde métallique de longueur L fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I(t) = I_0\,\cos(\omega\,t)$ et plongée dans le champ magnétique $\vec{B} = B_0\,\sin\left(\dfrac{\pi\,x}{L}\right)\,\vec{u}_y$.

1. Établir l'équation du mouvement de la corde et en rechercher les solutions en régime forcé.
2. Discuter la résonance éventuelle.

Exercice 3 Vibrations longitudinales d'une lame de céramique

On étudie les petits mouvements de déformation le long de l'axe horizontal (Ox) d'une lame de céramique de section S (perpendiculairement à l'axe Ox) et de masse volumique μ_0. À l'équilibre la pression est uniforme dans la lame, égale à P_0. À l'instant t un plan d'abscisse x au repos se trouve à l'abscisse $x + y(x,t)$, sa vitesse vibratoire est $u(x,t)$. On néglige tout effet lié à la pesanteur.

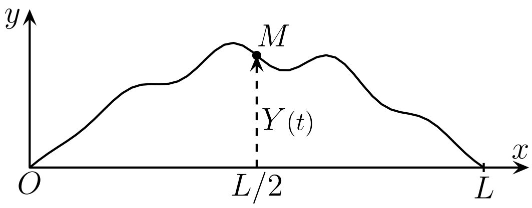
Dans le domaine d'élasticité du matériau, la force de traction T permettant à la lame de section S et de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke : $T = E\,S\,\dfrac{\Delta L}{L}$ où E est le module d'Young du matériau.

1. Montrer qu'à l'abscisse x, à l'instant t, la force de traction que la partie droite de la lame exerce sur la partie gauche est $T(x,t) = E\,S\,\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$.
2. Écrire l'équation du mouvement d'une tranche de lame située au repos entre les plans d'abscisse x et $x + \mathrm{d}x$.
   En déduire que la déformation $y(x,t)$ vérifie une équation de d'Alembert à une dimension.
   Quelle est la célérité c des ondes ?
   A.N. : calculer c pour une lame de masse volumique $\mu_0 = 3{,}4.10^3$ kg.m^{-3} et de module d'Young $E = 8{,}0.10^{10}$ N.m^{-2}.

3. Donner sans démonstration la forme des solutions de cette équation.
   Interpréter chaque terme.

Exercice 4 Corde plombée

La corde représentée ci-dessous est plombée en son milieu M par une masse m. On néglige la pesanteur et la corde est tendue avec la tension T_0 quand l'ensemble est au repos.



1. Dessiner sans démonstration l'allure qu'aurait la corde au repos si on négligeait la pesanteur pour cette dernière mais pas pour la masse m.
2. Étudier les petits mouvements transversaux de la masse m, repérés par la position $Y(t)$.
3. Déterminer les pulsations propres de la corde.
4. Étudier les cas limites $m \ll \mu\, L$ et $m \gg \mu\, L$.

Exercice 5 Création et stabilisation d'une OPPH

On considère une corde métallique, de longueur L, de masse linéique μ, tendue avec la tension T_0. On s'intéresse à la propagation de petites déformations transversales. On note c leur célérité.

Une onde incidente imprime à l'extrémité $x = L$ une déformation de la forme :

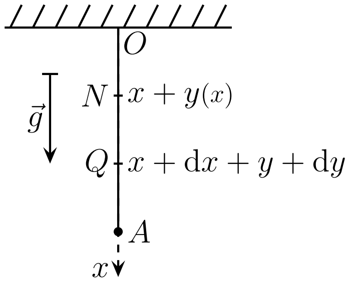
$$y(L,t) = y_0 \sin\left[\omega\left(t + \frac{L}{c}\right)\right]$$

L'extrémité en $x = 0$ est liée à un anneau de masse négligeable, mobile sur une tige verticale (d'équation $x = 0$) et soumis à la force de frottement : $\vec{F} = -f\,\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_y$ où $Y(t)$ représente la position de l'anneau sur la tige.

1. On écrit l'onde réfléchie en $x = 0$ sous la forme : $y_{\mathrm{r}}(0,t) = r\,y_0 \cos(\omega\,t + \varphi)$.
   Déterminer r et φ en fonction de T_0, c et f.
2. Montrer que l'on peut choisir le coefficient de frottement f pour qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie.
   Commenter.
3. Dans cette question, on ne néglige plus la masse M de l'anneau.
   Montrer que si on ajoute un ressort exerçant sur l'anneau la force $\vec{F}_{\mathrm{r}} = -K\,Y(t)\,\vec{u}_y$, il existe une unique pulsation (à déterminer) pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie.

Exercice 6 Ondes longitudinales dans une corde verticale

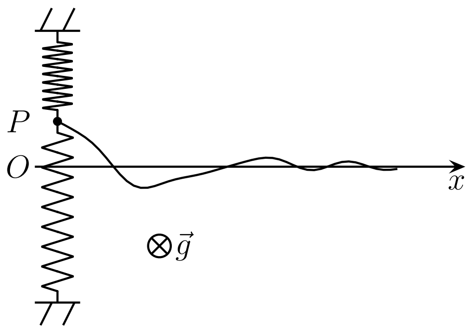
Une corde de longueur L, de section constante s, de masse linéique μ_0, de masse totale m, possède la raideur k. Le champ de pesanteur uniforme est $\vec{g} = g,\vec{u}_x$, l'axe (Ox) étant vertical descendant.



1. **Étude statique**
   La corde est suspendue au point O. À l'extrémité libre A est suspendue une masse ponctuelle M. L'élément de corde compris, en l'absence de toute traction, entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ devient l'élément NQ compris entre les abscisses $x+y(x,t)$ et $x+\mathrm{d}x+y(x+\mathrm{d}x,t) = x+\mathrm{d}x+y+\mathrm{d}y$. À l'équilibre de la corde, l'élément de corde de longueur initiale $\mathrm{d}x$ s'est donc déplacé et allongé de la longueur $\mathrm{d}y$ sous l'action de la portion QA.
   On admet que la tension de la corde, au niveau du point N (d'abscisse initiale x) est donnée par $k\,L\left(\dfrac{\partial s(x,t)}{\partial x}\right)$ où $s(x,t)$ est le déplacement, supposé petit, du point N.
   (a) En raisonnant sur la portion NA, établir, à l'équilibre, l'équation différentielle liant $y(x)$ et x.
   (b) En déduire l'allongement ΔL de la corde en fonctionde M, g, m et k.
   Quelle est la contribution due à la seule masse de la corde ?
2. **Étude dynamique**
   Lorsque la corde est en mouvement vertical, la distance ON devient $x+y(x)+z(x,t)$. Les déplacements sont toujours supposés petits.
   (a) Montrer que $z(x,t)$ satisfait à une équation de d'Alembert à une dimension.
   (b) On donne $k = 10\ \mathrm{N.m^{-1}}$. La corde a une longueur $L = 1{,}25$ m et un diamètre $d = 1{,}16$ mm. Elle est en acier de masse volumique $\rho = 7{,}8\ \mathrm{g.cm^{-3}}$.
   Calculer la célérité c des ondes étudiées.
   (c) Justifier que l'on cherche des solutions sous la forme : $z(x,t) = z_0\cos(K\,x+\varphi)\cos(\omega\,t+\psi)$.
   Établir l'équation vérifiée par les pulsations propres du système.
   (d) Étudier le cas où $m \ll M$. Commenter.

Exercice 7 Corde vibrante excitée par deux ressorts

On étudie le dispositif suivant.

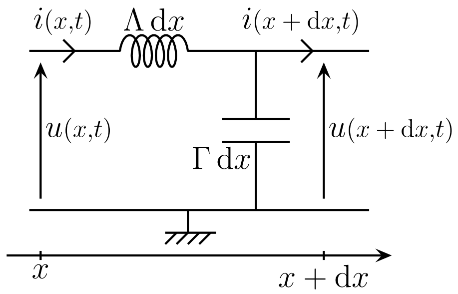


Le point P se déplace sans frottement sur l'axe vertical (Oy). Les deux ressorts sont identiques (raideur k, longueur naturelle ℓ_0). Quand le point matériel P, de masse m, se trouve en O, leurs actions se compensent exactement. À l'instant $t = 0$, la corde, de masse linéique μ et de longueur infinie, est horizontale, elle est tendue avec la tension T_0. Le point P se trouvant en O on lui communique la vitesse $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u}_y$.

1. Étudier le mouvement du point P. On posera ${\omega_0}^2 = \dfrac{2\,k}{m}$ et $\lambda = \dfrac{T_0}{2\,m\,\omega_0\,c}$ où c est la célérité des ondes sur la corde. On suppose $\lambda < 1$.
2. Dessiner la corde à l'instant t.
3. Effectuer un bilan énergétique.

Exercice 8 Câble coaxial, épisode 1

Un câble coaxial peut être modélisé par une succession de cellules élémentaires représentant la portion $\{\ x,\ x+\mathrm{d}x\ \}$ du câble où Λ est l'inductance par unité de longueur et Γ sa capacité par unité de longueur.

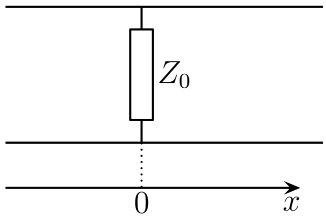


1. Établir les équations aux dérivées partielles vérifiées par $i(x,t)$ et par $u(x,t)$.
2. Montrer que $i(x,t)$ peut se mettre sous la forme $i(x,t) = i_+(x - c\,t) + i_-(x + c\,t)$.
   Quelle est l'expression de c ?
   En déduire l'expression de $u(x,t)$ en fonction de i_+, de i_- et de l'impédance caractéristique du câble $Z_\mathrm{c} = \sqrt{\dfrac{\Lambda}{\Gamma}}$.
3. Le câble s'étend de $x = 0$ à $x = L$. On branche en $x = 0$ un générateur de tension délivrant la f.é.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega\,t)$.
   (a) L'extrémité $x = L$ est ouverte.
   Déterminer $i(x,t)$ et $u(x,t)$ en régime sinusoïdal forcé.
   Définir et calculer l'impédance d'entrée du câble.
   (b) Le câble est fermé sur une résistance R.
   Déterminer entièrement $i(x,t)$ et $u(x,t)$ en régime sinusoïdal forcé. Commenter.
   Montrer en particulier qu'on peut annuler l'onde réféchie en choisissant la bonne valeur de R.
   Exprimer dans ce cas la puissance moyenne transportée par l'onde à l'abscisse $x = L$. Commenter.

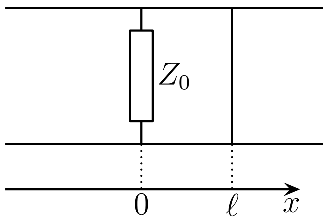
Exercice 9 Câble coaxial, épisode 2

Cet exercice fait suite au précédent.

Le câble s'étend maitenant jusqu'à $x = +\infty$ et on branche l'impédance $Z_0 = Z_\mathrm{c}$ en parallèle sur le câble à l'abscisse $x = 0$.



1. On s'intéresse à l'onde de courant dans la partie $x < 0$.
   Montrer que cette onde « voit » en $x = 0$ une impédance équivalente Z_1 qui s'exprime très simplement en fonction de Z_c.
2. Définir et calculer le coefficient r de réflexion (en tension ou en intensité) de l'onde en $x = 0$.
3. On place sur le câble précédent un court-circuit en parallèle à l'abscisse $x = \ell$.



   (a) Quelle est la forme de l'onde de courant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \ell$?
   (b) Montrer qu'il existe une valeur minimale ℓ_0 de ℓ telle que le courant dans la partie $x > 0$ du câble s'annule en $x = 0$. On exprimera ℓ_0 en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde de courant dans le câble.
   (c) En déduire alors le coefficient de réflexion en courant et la forme de l'onde dans la partie $x < 0$ du câble.

Exercice 10 INSTRUMENTS À CORDES

La résolution de cet exercice ne nécessite pas de connaissance musicale particulière.

Compte tenu des conditions aux limites imposées à une corde de longueur L, toute solution en oscillations libres de l'équation de D'ALEMBERT s'écrit sous la forme d'une superposition de modes de vibration $y_n(x,t)$:

$$y(x,t) = \sum_n y_n(x,t) = \sum_n \left[a_n \cos\left(\frac{n\,\pi\,\nu\,t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\,\pi\,\nu\,t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)$$

1. **Interprétation**
   L'élaboration de la gamme musicale dite naturelle repose sur trois intervalles consonants (c'est-à-dire agréables à l'oreille) et qui constituent l'accord parfait complété par l'octave. Ainsi dans la suite do – mi – sol – do, les rapports de fréquence sont :
   ➜ pour la tierce do – mi : 5/4
   ➜ pour la quinte do – sol : 3/2
   ➜ pour l'octave do – do : 2.
   Il apparaît donc que si le fondamental est do, l'harmonique $n = 2$ est également do, mais à l'octave supérieure, et l'harmonique $n = 3 = \dfrac{3}{2} \times 2$ est le sol de l'octave supérieure.
   Trouver les notes correspondant aux harmoniques $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.
   Montrer que l'harmonique $n = 7$ ne rentre pas dans le schéma tierce – quinte – octave (les musiciens disent, de ce fait, qu'il est dissonant.)
   Quelle est la note correspondant à l'harmonique $n = 8$? Est-elle consonante ou dissonante ?

2. **Intermède musical**

Pour aller plus loin, quelques notions sur la gamme sont nécessaires. Parmi les qualités que l'on attribue aux sons (durée, hauteur, timbre et intensité), la hauteur et plus précisément les écarts de hauteur peuvent être évalués à partir des notions de gamme et d'octave. Le doublement de fréquence d'un son s'accompagne d'un changement d'octave. La gamme dite tempérée (la plus simple et la plus utilisée) divise l'octave en 12 intervalles égaux, appelés *demi-tons*. Les fréquences successives N_p des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique, vérifiant la loi générale $N_p = 2^{p/12}\,N$ où $0 \leqslant p \leqslant 12$ entier. Dans une octave, la succession des notes est la suivante :

do, do$\sharp$ (ou ré$\flat$), ré, ré$\sharp$ (ou mi$\flat$), mi, fa, fa$\sharp$ (ou sol$\flat$), sol, sol$\sharp$ (ou la$\flat$), la, la$\sharp$ (ou si$\flat$), si, do

Les symboles dièse ($\sharp$) et bémol ($\flat$) réhaussent ou rabaissent respectivement les sons considérés d'un demi-ton. La base de fréquence de la gamme dite tempérée est le la$_3$ (la de la troisième octave) dont la fréquence vaut 440 Hz. Pour exprimer l'écart entre deux sons, on introduit une unité associée au pouvoir séparateur de l'oreille, le savart : deux fréquences N_1 et N_2 sont séparées de $1\,000 \log_{10} \dfrac{N_2}{N_1}$ savarts.

Les fréquences fondamentales des cordes d'une guitare sont :

mi$_1$, la$_1$, ré$_2$, sol$_2$, si$_2$, mi$_3$

l'indice étant le numéro de l'octave considérée.

(a) Déterminer la fréquence fondamentale de chacune des six cordes.

(b) À l'aide des données fournies dans le tableau ci-dessous :

Corde numéro	1	2	3	4	5	6
Note fondamentale	mi$_1$	la$_1$	ré$_2$	sol$_2$	si$_2$	mi$_3$
L	63 cm					
Diamètre (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25
Masse volumique	boyau : 975 kg.m^{-3} nylon : 1180 kg.m^{-3} acier : 7800 kg.m^{-3}					

déterminer les tensions nécessaires pour que la guitare soit parfaitement accordée (mode fondamental) lorsqu'elle est équipée de cordes en acier (guitare électrique).

Comparer, pour une corde donnée (par exemple la corde n°4), l'influence de la nature du matériau constituant la corde sur la force de tension (en supposant le diamètre constant).

(c) Quelle est la variation relative qui peut être tolérée sur la tension de la corde n°4 pour que la fréquence fondamentale ne varie pas de plus de 5 savarts (limite de séparation de l'oreille moyenne) ?

Effectuer l'application numérique pour une corde en acier.

(d) Le guitariste, tout en grattant les cordes d'une main, déplace les doigts de son autre main sur une ou plusieurs cordes afin de faire varier la distance entre les extrémités fixes A et B.

De combien déplace-t-il le doigt, sur la corde n°4 par exemple, pour passer du sol$_2$ au la$_2$?

Effectuer l'application numérique pour une corde en acier.

Commenter le résultat obtenu.

(e) Au fur et à mesure qu'un orchestre joue dans la salle, la hauteur des instruments à cordes s'abaisse.

Expliquer ce phénomène.

3. **Spectre sonore d'une corde frappée (piano)**

   À l'instant $t=0$, la corde est dans la position d'équilibre $y(x,0)=0$. On la frappe avec un petit marteau de largeur e (avec $e \ll L$) situé entre les abscisses $x=a$ et $x=a+e$. On admet dans ces conditions que la vitesse de chaque point de la corde à l'instant $t=0$ est donné par la fonction $h(x) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ telle que $h(x)=u$ pour $a \leqslant x \leqslant a+e$ et $h(x)=0$ sinon, où u est une constante. On cherche une solution sous la forme donnée au début de l'exercice.

   (a) Déterminer les coefficients a_n en utilisant une des conditions initiales.

   (b) Déterminer les coefficients b_n en fonction de u, n, e, L, ν et a en utilisant l'autre condition initiale.

   On donne la décomposition en série de FOURIER de la fonction $f(x)$ impaire et de période $2\,L$ coïncidant avec $h(x)$ sur $[0,L]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,e\,u}{L} \sin\left(\frac{n\,\pi\,a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)$$

   (c) Trouver une application musicale du fait que les coefficients b_n dépendent de a.

   Que faut-il faire pour supprimer le premier harmonique dissonant défini par $n=7$? Commenter.

   (d) Dans le cas $a=L/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde frappée ?

   Ce résultat était-il physiquement prévisible ?

   Donner l'expression de $y(x,t)$.

   Exprimer les rapports des amplitudes des harmoniques à l'amplitude du fondamental en fonction de n.

4. **Spectre sonore d'une corde pincée (clavecin ou guitare)**

   La même corde de longueur L est maintenant pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t=0$. Pour simplifier les calculs et faire la comparaison sur les harmoniques impaires avec la corde de piano, nous nous limiterons au cas $a=L/2$. La position initiale de la corde est alors définie par la fonction triangle $y(x,0)=a(x)$:

$$\begin{cases} a(x) &= \dfrac{2\,h}{L}\,x & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{L}{2} \\ a(x) &= \dfrac{2\,h}{L}(L-x) & \text{pour} \quad \dfrac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

   On cherche toujours des solutions sous la forme présentée au début de l'énoncé.

   (a) Déterminer les coefficients a_n et b_n par les même méthodes que précédemment.

   On donne la décomposition en série de FOURIER de la fonction $g(x)$ impaire et de période $2\,L$ coïncidant avec $a(x)$ sur $[0,L]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\,h}{\pi^2}(-1)^n \, \frac{\sin\left((2\,n+1)\dfrac{\pi\,x}{L}\right)}{(2\,n+1)^2}$$

   (b) Quelles sont les fréquences des harmoniques obtenues ?

   Suivant quel rapport décroissent leurs amplitudes ?

(c) Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin et apprécier objectivement la différence de timbre sonore dans le cadre des études ci-dessus.

5. **Aspect énergétique**

La corde est fixée en ses deux extrémités A et B.

(a) Exprimer, sous forme d'une intégrale, l'énergie cinétique E_{c} de la corde en mouvement.

(b) On étudie la portion de corde située au repos entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce système, entre t et $t + \mathrm{d}t$, montrer que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_{\mathrm{p}}(x,t) = \frac{1}{2}\,T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

où T est la tension de la corde et en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est immobile.

(c) On étudie la corde dans le mode propre n. On écrit $y_n(x,t)$ sous la forme $y_n(x,t) = c_n\,\sin(\omega_n\,t + \varphi_n)\,\sin(k_n\,x)$.
Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode n s'écrit :

$$E_n = n^2\,{c_n}^2\,\frac{\pi^2}{4\,L}T$$

(d) On écrit $y(x,t)$ sous la forme $y(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$.
Montrer que l'énergie E de la corde est $E = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E_n$.
Commenter.

(e) On reprend l'exemple de la corde frappée avec $a = L/2$.
Déterminer l'énergie du mode n et étudier ses variations avec n.
Même question pour la corde pincée.
Préciser alors le commentaire de la question 4c

Exercice 11 Vitesse de phase, vitesse de groupe

La relation de dispersion d'une onde à la surface d'une eau de profondeur h est donnée par :

$$\omega^2 = \left(g\,k + \frac{\gamma}{\mu}\,k^3\right)\tanh(k\,h)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, μ la masse volumique de l'eau et γ la constante de tension superficielle à l'interface eau – air.

1. Déterminer la dimension de γ.
2. Déterminer la distance caractéristique ℓ_{c} qui permet de comparer les effets de la tension superficielle et ceux de la pesanteur.
3. Comment se simplifie la relation de dispersion si la longueur d'onde λ est très inférieure à ℓ_{c} ? très supérieure à ℓ_{c} ?
Donner dans chaque cas la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_{g} dans un milieu de faible profondeur ($h \ll \lambda$) puis dans un milieu de grande profondeur ($h \gg \lambda$).
Quand a-t-on dispersion ?

4. On donne $\gamma = 0{,}073$ S.I..
   Calculer ℓ_{c}.
   Calculer v_φ et v_{g} pour :
   ➜ une onde de marée dans l'océan (on prendra $\lambda \simeq 1000$ km et $h \simeq$ quelques km)
   ➜ une houle de longueur d'onde 5 m dans un océan profond
   ➜ une onde dans une cuve à onde ($\lambda = 3$ cm et $h = 1$ mm)

Exercice 12 Influence de la raideur d'une corde

On désire étudier la propagation d'ondes transversales dans une orde de masse linéique μ tendue sous la tension T_0. La corde n'est pas infiniment souple et les effets de raideur sont caractérisés par le couple :

$$C(x_0,t) = J\,E\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_0,t)$$

exercé en x_0 par la partie de la corde $x > x_0$ sur la partie de la corde $x < x_0$, où J est un coefficient dépendant de la géométrie du problème et E le module d'Young de la corde. On se place dans l'hypothèse des petites déformations et on néglige les effets de la pesanteur.

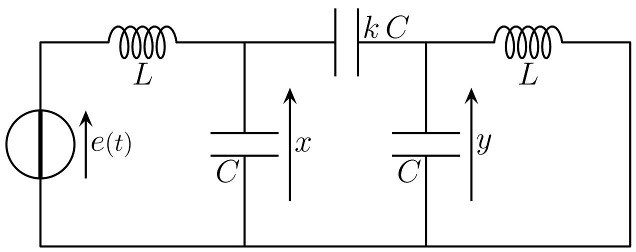
1. Montrer que ce couple s'accompagne de la force $N(x)$ perpendiculaire à la corde donnée par :

$$N(x,t) = -J\,E\,\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x,t)$$

2. Établir l'équation de propagation vérifiée par $y(x,t)$.
3. Établir la relation de dispersion entre ω et k.
   En supposant que les effets dus à la raideur restent faibles, déterminer, au premier ordre en $a = \dfrac{J\,E}{T_0}$, la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
4. La corde, de longueur L, est fixée à ses deux extrémités.
   Déterminer les pulsations propres de la corde.
   Comparer aux pulsations propres d'une corde sans raideur.

Exercice 13 Circuits couplés par capacité partagée

Deux circuits (L,C) identiques son couplés par un condensateur de capacité $k\,C$ selon le schéma ci-dessous. Le générateur envoie un échelon de tension d'amplitude E_0 à l'entrée du montage et x et y sont les tensions aux bornes des deux capacités C.



1. Établir les équations différentielles qui régissent les évolutions de $x(t)$ et $y(t)$ pendant l'évolution libre, $e(t)$ étant en court-circuit. On prend $L = 10$ mH, $k = 2$, $C = 10$ nF.
2. Identifier les modes propres du système.
3. Montrer que l'on peut trouver des conditions initiales pour lesquelles le système évolue selon chacun de ses modes propres.
4. Déterminer le mode excité par l'envoi de l'échelon en entrée.

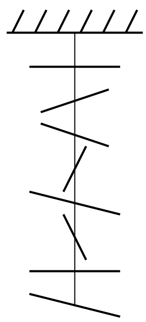
Exercice 14 Corde vibrante

Une corde vibrante de masse linéique μ est soumise à une tension F. On admet que chaque point $M(x)$ possède un mouvement transversal $y(x,t)$ dans un plan vertical et que l'amplitude reste faible. On supposera aussi qu'à chaque instant la tangente à la corde en un point quelconque fait avec Ox un angle faible α. La corde est sans raideur ; son poids est négligé de sorte que sa position au repos coïncide avec l'axe Ox.

1. Montrer que si on néglige l'amortissement, l'équation de mouvement d'un petit morceau de corde conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante : $F\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$.
   Quelle est la solution générale de cette équation ?
2. Aspect énergétique
   (a) Donner l'expression de l'énergie cinétique par unité de longueur de la corde.
   (b) Donner l'expression de l'énergie potentielle par unité de longueur de la corde ;
   (c) Soit $E(x,t)$ l'énergie mécanique linéique de la corde.
   Montrer qu'il existe une fonction $P(x,t)$, que l'on exprimera en fonction de y et de ses dérivées, telle que $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial E}{\partial t} = 0$.
   Préciser la signification physique de P.
3. Une corde de mase linéique μ_1 est raccordée en $x = 0$ à une corde de masse linéique μ_2. La première occupe la demi-droite $]-\infty,0]$; la seconde occupe la demi-droite $]0,+\infty[$.
   (a) Écrire les conditions aux limites imposées à $y(x,t)$ en $x = 0$.
   (b) Y a-t-il d'autres conditions aux limites à exprimer en $x = 0$?
   (c) Sur la corde 1, on envoie une onde incidente $f(t - x/v_1)$.
   Définir et calculer les coefficients de réflexion et de transmission à la séparation des deux cordes.

Exercice 15 Échelle de perroquet

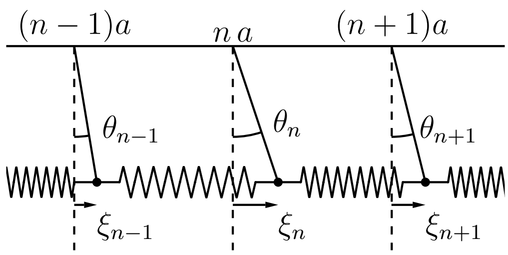
Une échelle de perroquet, suspendue au plafond, est constituée de barreaux identiques, de moment d'inertie J par rapport à leur axe vertical de rotation. Les barreaux sont liés deux à deux par des fils de torsion de longueur a, de constante de torsion C. Soit θ_n l'angle de rotation du $n$ième barreau par rapport à sa position d'équilibre.



1. Quelle est l'équation de propagation d'une onde de torsion le long de l'échelle de perroquet ?
2. Que devient-elle dans l'approximation des milieux continus ?

Exercice 16 Équation de Klein-Gordon

On étudie la propagation d'onde le long d'une chaîne de pendules simples, identiques, de masse m et de longueur ℓ, couplés par des resorts de raideur k. On pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.



1. Quelle est l'équation de propagation liant les petits déplacements $\xi_n \simeq \ell\,\theta_n$, ξ_{n-1} et ξ_{n+1} des extrémités des pendules ?
2. Que devient-elle dans l'approximation des milieux continus ?
3. Quelle est la relation de dispersion caractérisant cette propagation ?
   Tracer la courbe de dispersion $k = f(\omega)$
4. Déteminer vitesses de phase et de groupe en fonction de la pulsation.

Exercice 17 Lignes en parallèle

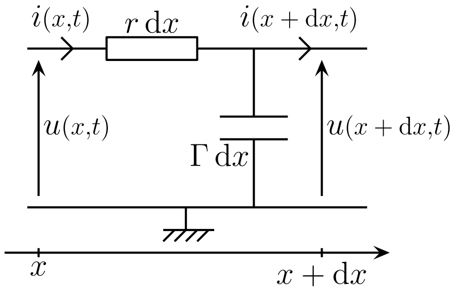
Une ligne électrique, sans pertes, d'impédance caractéristique Z_c, de longueur ℓ est alimentée par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω.

La ligne est fermée sur une impédance réelle Z_0 différente de Z_c. À une distance d de l'extrémité de la ligne, est placée en parallèle une seconde ligne identique fermée sur un court-circuit.

1. Écrire les conditions de continuité pour le potentiel $\underline{V}$ et le courant $\underline{I}$ à la jonction des deux lignes.
   En déduire la condition correspondante pour les impédances.
2. Déterminer les longueurs d et ℓ pour que, vue du générateur, la ligne principale semble fermée sur son impédance caractéristique.
3. Calculer les plus petites longueurs d et ℓ qui conviennent pour $Z_\text{c} = 50~\Omega$, $Z_0 = 175~\Omega$ et une longueur d'onde $\lambda = 10$ cm.

Exercice 18 Lignes bifilaire dissipative

Une ligne bifilaire est modélisée par une résistance linéique r et une capacité linéique Γ.



1. Établir l'équation de propagation dont est solution la tension $u(x,t)$.
   Citer un phénomène solution d'une équation analogue.

2. Chercher les solutions stationnaires de la forme $u(x,t) = f(t)\,g(x)$.
   Montrer que si on court-circuite la ligne de longueur L en ses extrémités de telle sorte que $v(0,t) = v(L,t) = 0$, seuls des modes repérés par un entier n peuvent exister.
3. À l'instant $t = 0$, les condensateurs sont chargés avec une tension $v(x,0) = 4\,A\,\sin^3\left(\dfrac{\pi\,x}{L}\right)$ et on court-circuite les extrémités de la ligne.
   Déterminer $v(x,t)$, faire apparaître une durée caractéristique et commenter.