Description de fluides en mouvement

Exercice 1 Écoulement stationnaire

On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ des vitesses est de la forme :

$$\vec{v}(M,t) = -k\,x\,\vec{u}_x + k\,y\,\vec{u}_y$$

1. Déterminer les trajectoires des particules de fluide et les lignes de courant.
2. Calculer l'accélération d'une particule de fluide à partir d'une vision lagrangienne et à partir d'une vision eulérienne.
3. Dessiner l'évolution de la particule de fluide élémentaire entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$.
   Montrer que, au premier ordre en $\mathrm{d}t$, sa surface ne change pas.
   Était-ce prévisible ?

Exercice 2 Géométrie cylindrique

On étudie l'écoulement d'un fluide caractérisé par le champ des vitesses en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M,t) = \left(\alpha\,r + \frac{\beta}{r}\right)\vec{u}_\theta \qquad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes}$$

1. Caractériser cet écoulement : est-il stationnaire ? compressible ? tourbillonaire ?
2. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.

Exercice 3 Écoulement radial

On s'intéresse dans cet exercice à l'écoulement radial d'un fluide associé aux variations du rayon $R(t)$ d'une bulle sphérique, le champ des vitesses étant de la forme $\vec{v}(M,t) = v(r,t)\,\vec{u}_r$. Le fluide est considéré comme parfait, incompressible de masse volumique μ.

1. En utilisant l'équation de conservation de la masse, donner l'expression de $v(r,t)$ en fonction de r, du rayon de la bulle $R(t)$ et de sa dérivée.
2. Déterminer le champ des accélérations.
   On rappelle que $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,v^2 + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$

Exercice 4 Parachutisme

La masse d'un parachutiste avec son équipement est de 120 kg. Le coefficient de traînée du parachute ouvert est de 1,2 et son diamètre de 6 m.

1. Quelle est la vitesse limite de descente du parachutiste ?
2. Ce parachutiste doit se poser sur l'aéroport de La Paz en Bolivie, à 4 200 m d'altitude.
   Peut-il garder le même parachute ?

Exercice 5 Écoulement laminaire, écoulement turbulent

1. Un écoulement laminaire peut-il être :
   - ➜ compressible ou incompressible ?
   - ➜ visqueux ou non visqueux ?
   - ➜ tourbillonnaire ou non tourbillonnaire ?
   - ➜ permanent ou non permanent ?

2. Un écoulement turbulent peut-il être :
   - ➜ compressible ou incompressible ?
   - ➜ visqueux ou non visqueux ?
   - ➜ tourbillonnaire ou non tourbillonnaire ?
   - ➜ permanent ou non permanent ?

Pour chaque réponse affirmative, donner un exemple. Expliquer toute réponse négative.

Exercice 6 Modèle de la houle

Un fluide au repos occupe tout le demi-espace z négatif (l'axe Oz est vertical ascendant). La propagation d'une onde de gravité (la houle) engendre un mouvement du fluide dont le champ des vitesses est, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v}(M,t) = a\,\omega\,\mathrm{e}^{k\,z}\,\cos(\omega\,t - k\,x)\,\vec{u}_x - a\,\omega\,\mathrm{e}^{k\,z}\,\sin(\omega\,t - k\,x)\,\vec{u}_z$$

Le niveau de la surface libre est donné par $\xi(x,t) = a\,\cos(\omega\,t - k\,x)$.

1. Montrer que ce champ des vitesses correspond à un écoulement incompressible et irrotationnel.

   Déterminer le potentiel des vitesses.

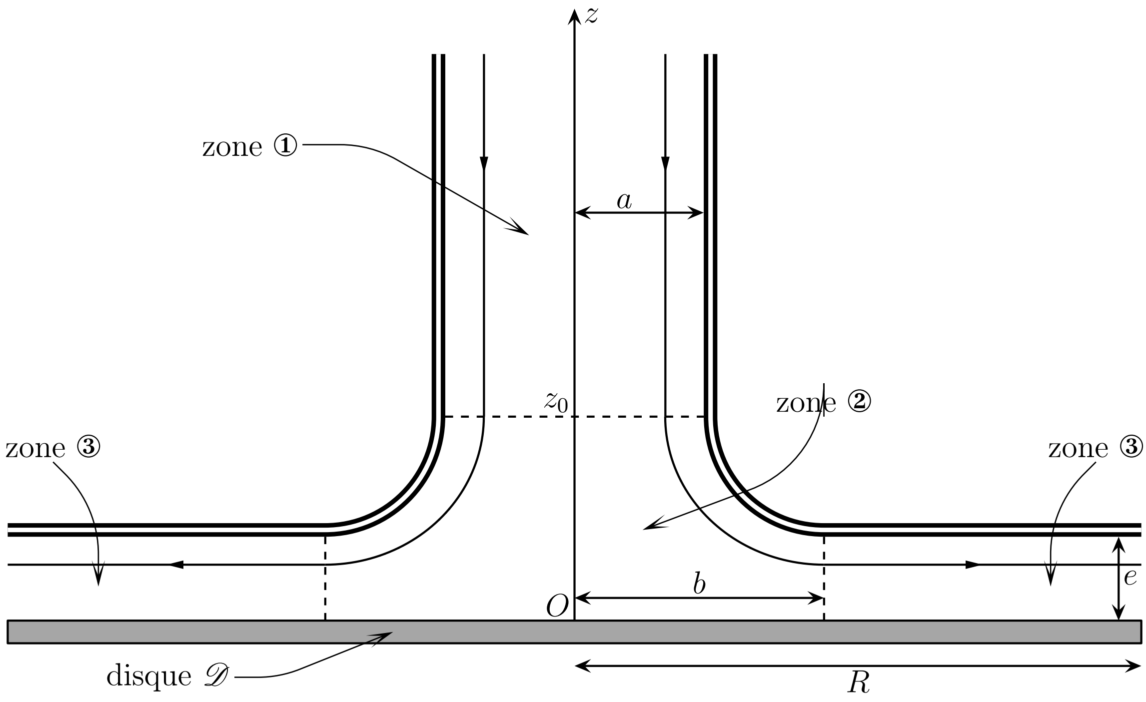
2. Établir l'équation des lignes de courant.

   Dessiner leur allure à l'instant $t = 0$.

3. Déterminer les trajectoires des particules de fluide. On supposera que chaque particule s'éloigne peu de sa position moyenne (X_0,Z_0), ce qui permettra de négliger les variations spatiales du champ des vitesses devant ses variations temporelles.

Exercice 7 Écoulement canalisé au dessus d'une plaque

On envisage l'écoulement permanent et incompressible d'un gaz considéré comme un fluide de masse volumique $\mu = 1{,}3$ kg.m^{-3}. L'écoulement présente la symétrie de révolution autour de l'axe Oz, le gaz est canalisé par les parois :



On décrit le champ des vitesses de la façon suivante, en coordonnées cylindriques (v_θ est toujours nul ici) :

➜ zone ① (tuyau d'arrivée) pour $z > z_0$: $v_r = 0$ et $v_z = -v_0$ (constante)
➜ zone ② (zone intermédiaire) pour $z < z_0$ et $r < b$: $v_r = A\,r$ et $v_z = B\,z$
➜ zone ③ (écoulement radial) pour $b < r < R$: v_r indépendant de z et $v_z = 0$.

On donne la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

L'écoulement étant parfait, permanent et incompressible, on peut utiliser la relation de Bernoulli (cf. chapitre 5 et 6 de mécanique) qui stipule que, *le long du ligne de courant*, la grandeur $\dfrac{P}{\mu} + \dfrac{v^2}{2} + g\,z$ est constante (P est la pression).

1. Exprimer v_r dans la zone ③ en fonction de r, e, a et v_0.
2. Déterminer les constantes A et B.
   Expliciter A, B et b en fonction de v_0, z_0, a et e.
   Donner l'équation de la génératrice $z = f(r)$ qui, par rotation autour de l'axe Oz, engendre la ligne de courant qui épouse parfaitement la paroi qui canalise le gaz (pour $e < z < z_0$ et $a < r < b$).
3. Déterminer la pression $P(r)$ dans la zone ③ sachant que $P(R) = P_0$ (pression atmosphérique).
4. Déterminer la pression pour $r < b$ au niveau du plan $z = 0$.
5. Calculer la force de pression exercée par le fluide sur la face $z = 0$ du disque $\mathscr{D}$ ($0 < r < R$) en fonction de P_0, R, μ, v_0, a, e et e_0.
   En déduire la force totale subie par le disque en prenant en compte la pression atmosphérique sur l'autre face.
6. On donne $v_0 = 10$ m.s^{-1}, $a = 5$ mm, $e = 1$ mm, $z_0 = 1$ cm et $R = 15$ cm.
   Calculer numériquement la force subie par le disque et préciser le sens de cette force.
   Commenter.

Dans le cas où l'axe Oz est vertical ascendant, peut-on envisager l'équilibre du disque sous l'action de son poids et des forces de pression ?

Quelle devrait être alors la masse surfacique du disque ? (On ne se préoccupera pas de la stabilité de cet équilibre).

Exercice 8 Étude cinématique de deux écoulements particuliers

Dans tout le problème, l'air sera considéré comme un fluide incompressible de masse volumique ρ en écoulement stationnaire.

Les obstacles solides introduits dans cet écoulement seront à géométrie cylindrique (de base *a priori* quelconque), avec des génératrices parallèles à l'axe Oz. On se limitera à une étude bidimensionelle dans le plan xOy perpendiculaire à Oz, les phénomènes étant supposés invariants par translation selon Oz.

1. **Écoulement tourbillonaire**

   On considère un écoulement orthoradial d'axe polaire Oz appelé tourbillon tel que :
   - ➜ pour $r < a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M) = \gamma\,\vec{u}_z$ où γ est une constante algébrique ;
   - ➜ pour $r > a$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}(M) = \vec{0}$

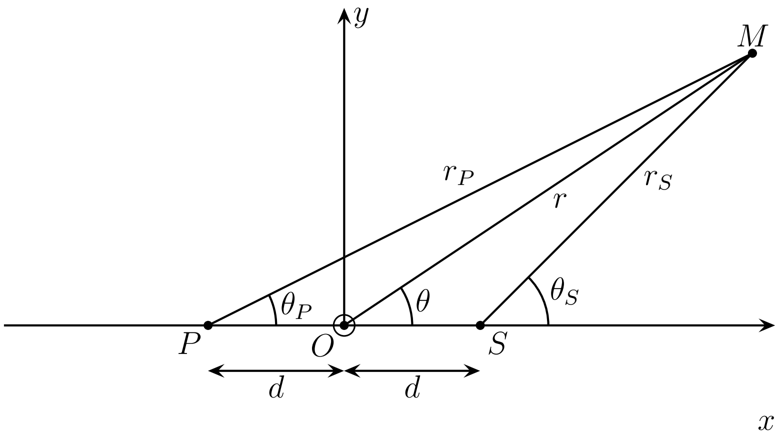
   Ce tourbillon est dit ponctuel dans le plan xOy si l'on considère que si $a \to 0$ et $\gamma \to \infty$, le produit $\gamma\,\pi\,a^2$ demeure égal à la valeur finie Γ que l'on nomme intensité du tourbillon.

   Établir l'expression de $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires, pour $r > a$, avec Γ comme paramètre.

   À quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet élément ?

2. **Écoulement d'un doublet**

   On considère un écoulement engendré par un doublet résultat de l'association d'une source et d'un puits :



   (a) La source se situe le long de l'axe Sz, le point S ayant pour coordonnées dans le plan xOy $(d,0)$ avec $d > 0$. L'écoulement s'effectue radialement de façon homogène avec un débit volumique par unité de longueur D. L'exemple d'un tel écoulement pourrait être donné par un fin tuyau poreux dans lequel on fait circuler de l'eau sous pression.

   Établir l'expression de la vitesse $\vec{v}_S(M)$ du fluide en coordonnées cylindriques (r_S,θ_S,z_S) d'axe polaire Sz ainsi que le potentiel $\varphi_S(M)$ associé, défini par $\vec{v}_S(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi_S(M)$.

   (b) Le puits se situe le long de l'axe Pz, le point P ayant pour coordonnées dans le plan xOy $(-d,0)$. Dans ce puits, le fluide arrive avec une répartition radiale uniforme dont le débit volumique par unité de longueur est également D.

   Donner, sans démonstration (mais en justifiant), l'expression de la vitesse $\vec{v}(M)$ du fluide en coordonnées polaires (r_P,θ_P,z_P) d'axe polaire Pz ainsi que le potentiel φ_P associé.

(c) Soit $\varphi(M)$ le potentiel des vitesses dans le cas où on associe la source et le puits pour former un doublet pour lequel $d \to 0$ et $D \to \infty$ de sorte que le produit $2\,d\,D$ demeure égal à la valeur finie H que l'on nommera intensité du doublet.

En coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe polaire Oz, montrer que :

$$\varphi(M) = -\frac{H}{2\,\pi}\,\frac{\cos\theta}{r}$$

En déduire l'expression en coordonnées cylindrique de la vitesse $\vec{v}(M)$ créée par ce doublet avec H comme paramètre.

(d) À quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer ce doublet ?

Exercice 9 Écoulement autour d'un cylindre en rotation

Cet exercice est la suite du précédent.

Un cylindre à base circulaire de rayon R et en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de son axe Oz est placé dans l'air dont l'écoulement loin de cet obstacle se fait à la vitesse $\vec{U} = U\,\vec{u}_x$.

Pour étudier l'effet du cylindre sur le fluide, nous utiliserons une méthode de superposition qui consiste à introduire à l'extérieur de l'obstacle des singularités telles que son contour soit une ligne de courant de l'écoulement. Ces singularités sont les suivantes :

➜ un doublet d'axe Oz et d'intensité H qui engendre un champ de vitesse $\vec{v}_{\mathrm{d}}(M)$;

➜ un tourbillon également d'axe Oz et d'intensité Γ qui engendre un champ de vitesse $\vec{v}_{\mathrm{t}}(M)$.

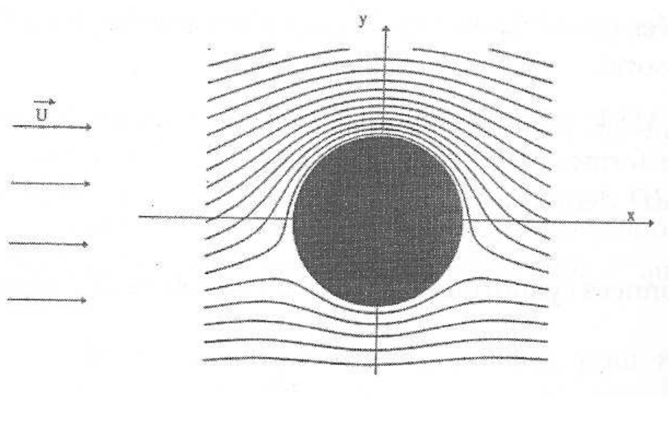
L'écoulement étant parfait, permanent et incompressible, on peut utiliser la relation de Bernoulli (cf. chapitre 5 et 6 de mécanique) qui stipule que, *le long du ligne de courant*, la grandeur $\dfrac{P}{\mu} + \dfrac{v^2}{2} + g\,z$ est constante (P est la pression).

1. Les coordonnées polaires de la vitesse $\vec{v}$ de cet écoulement ont pour expression :

$$v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad \text{et} \qquad v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\,\pi\,r}$$

En s'appurant sur les résultats de l'exercice précédent, justifier ces expressions en explicitant le paramètre H en fonction de R et U.

2. On donne ci-dessous le tracé des lignes de courant pour des valeurs particulières de U, R et Γ :



(a) Comparer qualitativement le module v de la vitesse du fluide pour les points situés sur l'axe Oy selon que $y > R$ ou $y < R$.

(b) Indiquer le signe de Γ et préciser si le sens de rotation du cylindre est horaire ou anti-horaire.

(c) En exploitant le tracé ci-dessus, justifier l'existence de point d'arrêt du fluide à la surface du cylindre.

Donner $|\Gamma|$ en fonction de U, R et du sinus d'un angle géométrique θ_{a} dont on précisera la valeur numérique approchée en degrés (< 90 °).

3. Le cylindre est initialement immobile dans l'air. On le soumet alors à une accélération angulaire pour lui communiquer finalement la vitesse angulaire constante ω et arriver au régime d'écoulement décrit ci-dessus.

   Cela est-il compatible avec les hypothèses faites dans cet exercice ? Expliquer.
4. On note $\vec{F}$ la résultante de l'action de l'air sur le cylindre.

   Donner sans calcul, mais en les justifiant, les valeurs de la composante F_x et celle du moment par rapport à l'axe Oz de cette action. La réalité confirme-t-elle ce résultat ?
5. Exprimer la pression $P(\theta)$ à la surface du cylindre avec U, ρ, R, Γ et P_0 (pression au loin) comme paramètres.
6. Le cylindre ayant une hauteur h, établir l'expression de la composante F_y pour les valeurs numériques suivantes : $U = 15$ m.s^{-1} ; $R = 1$ m ; $h = 3$ m ; $\rho = 1{,}3$ kg.
7. Comment les lignes de courant sont-elles modifiées si on prend en compte la viscosité η de l'air qui est de l'ordre de 10^{-5} Pl ? Quel paradoxe lève-t-on ?