Mouvements de fluides

Exercice 1 CYLINDRE FLOTTANT

Un demi-cylindre de rayon R et de longueur h flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ (l'axe du cylindre étant parallèle à la surface de l'eau).

1. À l'équilibre, il est enfoncé de $\dfrac{R}{2}$ dans celui-ci. Quelle est sa masse m ?
2. Quelle est la période des petites oscillations verticales de l'objet

Exercice 2 ÉTUDE D'UN BALLON ATMOSPHÉRIQUE

Le modèle de l'atmosphère à gradient thermique constant permet d'établir qu'entre 0 et 11 km d'altitude, la pression et la température atmosphériques varient en fonction de l'altitude z suivant les relations :

$$P(z) = P_0\,(1 - A\,z)^{\alpha} \quad \text{et} \quad T(z) = T_0\,(1 - A\,z) \qquad \text{avec} \qquad A = \mathrm{C^{te}} \quad \text{et} \quad \alpha = \mathrm{C^{te}}$$

Un ballon sonde gonflé à l'hydrogène est assimilé à une sphère *indéformable* de diamètre D. La masse totale de l'enveloppe (non gonflée), de la nacelle et des appareils est m et cet ensemble a un volume négligeable devant celui de la sphère.

Par ailleurs l'hydrogène est constamment en équilibre thermique avec l'air atmosphérique. À l'altitude $z = 0$, les masses volumiques de l'air et de l'hydrogène, assimilés tous deux à des gaz parfaits sont respectivement ρ_0 (sous la pression P_0) et ρ'_0 (sous une pression de gonflage P'_0).

1. Exprimer la masse volumique $\rho(z)$ de l'air en fonction de l'altitude z.
2. Exprimer la résultante des actions qui s'exercent sur le ballon en fonction de l'altitude et en déduire :
   (a) la masse maximale M_0 que le ballon peut élever du sol ;
   (b) la masse maximale M_1 que le ballon peut élever à une altitude de 11 km.

   Données : $P_0 = 1{,}013.10^5$ Pa ; $\rho_0 = 1{,}225$ kg.m^{-3} ; $P'_0 = 1{,}127.10^5$ Pa ; $\rho'_0 = 0{,}094$ kg.m^{-3} ; $A = 2{,}26.10^{-5}$ m^{-1} ; $\alpha = 5{,}25$; $D = 4{,}0$ m ; $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, indépendant de z.
3. Un ballon sonde identique au précédent est équipé d'une soupape différentielle qui maintient constante la différence $\Delta P = \Delta P_0$ entre la pression P' de l'hydrogène et la pression P de l'air atmosphérique, toutes les autres données sont inchangées.
   (a) Exprimer la différence de pression qui s'exerce sur l'enveloppe du ballon en fonction de l'altitude.
   (b) Exprimer la masse volumique ρ' de l'hydrogène en fonction de l'altitude z à partir de ρ'_0, P_0, ΔP et des constantes A et α.
   (c) Résoudre pour ce nouveau ballon les questions posées en 2a et 2b.
   (d) Quelle masse d'hydrogène a du être dégazée pour élever la masse maximale à l'altitude de 11 km ?

Exercice 3 GÉNÉRALITÉ SUR LES ONDES SONORES

On étudie des ondes sonores planes dans l'air, de masse volumique au repos ρ_0 dans les conditions de l'expérience.

Dans un plan d'abscisse x, la pression totale P_t peut se mettre sous la forme $P_\mathrm{t} = P_\mathrm{s} + p(x,t)$ où P_s est la pression statique et $p(x,t)$ la surpression acoustique, solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad c = \sqrt{\gamma\,\frac{P_\mathrm{s}}{\rho_0}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

1. (a) Pourquoi dit-on que l'onde est plane ?
   (b) Quelles sont les conditions de validité de l'équation précédente ?
2. (a) Que représente la grandeur c ?
   (b) Pourquoi le coefficient γ intervient-il ?
   (c) Déterminer l'expression de c en fonction de la température absolue T pour un gaz parfait de masse molaire M.
   (d) Pour l'air assimilé à un gaz parfait, on prend $M = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$.
   Calculer numériquement c pour une température $\theta = 18\ \ ^\circ\mathrm{C}$.
   Comparer cette vitesse à la vitesse du son dans un solide ou dans un liquide. On prendra $R = 8{,}32\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$ et $\gamma = \dfrac{7}{5}$.
3. On appelle $u(x,t)$ la vitesse particulaire. Les grandeurs $p(x,t)$ et $u(x,t)$ sont liées par la relation :

   $$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

   Quelle est l'origine de cette équation ?
4. On étudie des solutions en ondes planes progressives harmoniques :

   $$\underline{p}(x,t) = \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\,t + k\,x)} + \underline{p_2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)} \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

   (a) Quelle est la signification de chacun des deux termes de cette expression ?
   (b) Comment s'écrit alors $\underline{u}(x,t)$? On ne tiendra pas compte des termes constants qui apparaissent lors de l'intégration.

Exercice 4 INTENSITÉ SONORE

1. Deux ondes sonores, dont l'une a une fréquence égale au double de la fréquence de l'autre, ont des amplitudes de déplacement égales.
   Laquelle de ces ondes correspond à la surpression de plus grande amplitude ?
   Dans quel rapport ?
   Quel est le rapport de leur intensité ?
2. Si l'amplitude d'une onde sonore est triplée, de combien de décibels l'intensité sonore augmente-t-elle ?
3. Quelle est l'intensité sonore en décibels d'une onde sonore se propageant dans l'air pour laquelle l'amplitude de déplacement des particules de fluide est de 0,1 mm à 180 Hz ?
4. Si deux pétards, qui explosent en même temps produisent une intensité sonore de 90 dB, quelle serait l'intensité sonore si un seul des deux pétards explosait ?

Exercice 5 TUYAU D'ORGUE

Un tuyau d'orgue est assimilable à un cylindre de longueur $\ell = 1{,}0$ m fermé à une de ses extrémités, ouvert à l'autre. Dans le tuyau, les conditions de l'air au repos dont $P_0 = 1{,}013$ bar, $T_0 = 290$ K, $\mu_0 = 1{,}22$ kg.m^{-3}. L'air est assimilé à un gaz parfait de constante $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = 1{,}4$.

1. Déterminer les fréquences du fondamental (N_0) et de la première harmonique (N_1).
2. À la fréquence N_1, l'amplitude maximale des déplacements de l'air vaut $a_0 = 1$ mm.
   En déduire les amplitudes maximales de la vitesse, de la surpression et des écarts de température. Commenter.

Exercice 6 MESURE EXPÉRIMENTALE D'UN COEFFICIENT D'ABSORPTION

On reprend le dispositif de l'exercice précédent mais la plaque d'aluminium est remplacée par une plaque de mousse.

Dans le tuyau, l'onde sonore est de la forme : $\underline{p}(x,t) = \underline{p_1}(x,t) + \underline{p_2}(x,t)$ avec

$$\underline{p_1}(x,t) = \underline{p_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t+k\,x)} \qquad \text{et} \qquad \underline{p_2}(x,t) = \underline{p_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t-k\,x)}$$

On définit le coefficient de réflexion du matériau par $\underline{r} = \dfrac{\underline{p_2}(0,t)}{\underline{p_1}(0,t)} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$.

1. Montrer que le microphone délivre une tension V de la forme :

$$V = K\,\sqrt{1 + r^2 + 2\,r\,\cos(2\,k\,x - \varphi)}$$

2. L'expérimentateur réalise plusieurs expériences dont les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous. Il note la position x_1 du premier minimum de tension rencontré à partir de $x = 0$ ainsi que cette du i-ème minimum x_i. Les valeurs lues sur le voltmètre V_{min} et V_{max} correspondent aux valeurs minimales et maximales de la tension.

f (Hz)	x_1 (cm)	x_i (cm)	i	V_{min} en mV	V_{max} en mV
460	26,6	101,5	3	1,50	6,80
750	13,2	58,8	3	1,10	5,40
845	10,6	51,1	3	1,25	6,30
1016	8,0	41,7	3	0,80	4,05
1042	7,3	40,1	3	1,60	8,35
1185	5,5	49,0	4	0,80	3,95
1400	3,7	28,1	3	1,00	5,05

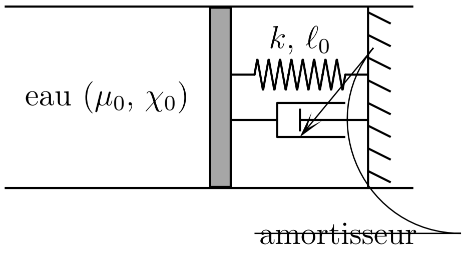
   (a) On pose $\alpha = \dfrac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}$.
   Déterminer r en fonction de α.
   (b) Déterminer l'expression de φ en fonction de x_1 et de la longueur d'onde λ.
   (c) Calculer pour chaque fréquence les valeurs de r et de φ.
   Commenter les résultats obtenus.

3. On définit l'impédance acoustique par $\underline{Z}(x) = \dfrac{\underline{p}(x,t)}{\underline{u}(x,t)}$.
   (a) Donner l'expression de $\underline{Z}(0)$ en fonction de ρ_0, c et $\underline{r}$.
   (b) On appelle impédance réduite $\underline{Z'}(0)$ le rapport $\dfrac{\underline{Z}(0)}{-\rho_0\,c}$.
   Justifier cette appellation.
   Déterminer les expressions des parties réelle et imaginaire de $\underline{Z'}(0)$ en fonction de r et φ.

(c) Calculer les valeurs des parties réelle et imaginaire de $\underline{Z'}(0)$ pour chaque fréquence.

Exercice 7 ADAPTATION D'IMPÉDANCE

On envoie une onde acoustique dans l'eau vers le piston de masse m, relié à un amortisseur de coefficient de frottement fluide λ. Le tuyau est un cylindre d'axe Oz, de section S.



1. On définit l'impédance acoustique de l'eau pour une onde plane progressive harmonique par $\underline{Z_{\mathrm{a}}} = \dfrac{\underline{p}(z,t)}{\underline{u}(z,t)}$.
   Calculer l'impédance acoustique pour l'onde incidente et pour l'onde réfléchie.
   Définir de manière analogue l'impédance mécanique $\underline{Z_{\mathrm{m}}}$ du piston en fonction de m, k, S, λ et ω.
   À quelle(s) condition(s) y a-t-il adaptation d'impédance ?
2. Exprimer dans le cas général le coefficient de réflexion en fonction de $\underline{Z_{\mathrm{m}}}$ et de $\underline{Z_{\mathrm{a}}}$.
   Retrouver le cas de la première question.
3. Établir le bilan énergétique.

Exercice 8 AMORTISSEMENT DU SON PAR CONDUCTION

Dans l'étude des ondes sonores, l'hypothèse d'une transformation adiabatique est une approximation car il existe toujours un léger transfert thermique entre tranches de gaz comprimés ($T > T_0$) et dilatées ($T < T_0$) par le passage de l'onde sonore.

Le fluide considéré est un gaz parfait de conductivité thermique λ et $T_1 = T - T_0$ représente l'écart de température par rapport à la situation au repos.

On suppose que l'onde est une OPPM que l'on écrit avec la notation complexe :

$$\underline{p_1} = \underline{p_{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)}\ ; \qquad \underline{\mu_1} = \underline{\mu_{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)}\ ; \quad \underline{T_1} = \underline{T} - T_0 = \underline{T_{10}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\,t - k\,x)}$$

k étant éventuellement complexe.

L'état de repos est caractérisé par p_0, μ_0 et T_0.

1. En écrivant, dans le cadre de l'approximation acoustique, le PFD pour une particule de fluide et l'équation locale de conservation de la masse, établir l'expression de $\dfrac{\underline{p_{10}}}{\underline{\mu_{10}}}$.
2. Donner deux expressions différentes du transfert thermique massique δQ_{mas} reçu par l'unité de masse d'un gaz parfait pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$ l'une avec c_V, capacité thermique massique à volume constant, en variables T et μ, l'autre avec c_P, capacité thermique massique à pression constante, en variables T et p.
3. Montrer que le transfert thermique volumique δQ_{vol} fournie à l'unité de volume de fluide pendant $\mathrm{d}t$ est reliée à la température par l'équation $\delta Q_{\mathrm{vol}} = K\,\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}t$.

4. Établir la relation :

$$\frac{\underline{\underline{p_{10}}}}{\underline{\underline{\mu_{10}}}} = \frac{p_0}{\mu_0} \times \frac{c_P - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}{c_V - \mathrm{i}\,k^2\,\dfrac{\lambda}{\mu_0\,\omega}}$$

5. Déduire de ce qui précède la relation entre k et ω en introduisant c_0, vitesse de propagation du son sans amortissement.

   Que traduisent physiquement les cas limites $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$?

   Que vaut la célérité du son dans chacun des deux cas ?

6. On pose $k = k_1 - \mathrm{i}\,\alpha$. On suppose que l'influence de la conduction thermique est faible, *i.e.* que :

$$\frac{\lambda\,|k|^2}{\mu_0\,\omega} \ll c_V \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda\,|k|^2}{\mu_0\,\omega} \ll c_P$$

   Déterminer k_1 et α en fonction de λ, γ, c_P, c_0 et ω.

   En déduire l'expression de la surpression $p(x,t)$.

   Interpréter la forme obtenue.

   Comment varie l'absorption quand la fréquence augmente ?

   A.N. : calculer α pour l'air à 20 °C aux fréquences $f = 1$ kHz puis $f = 40$ Hz et en déduire dans chaque cas la distance d sur laquelle l'onde est amortie d'un facteur exp(1). Commenter.

   Données : $\lambda = 2{,}5.10^{-2}$ W.m^{-1}.K^{-1}, $\mu_0 = 1{,}2$ kg.m^{-3}, $c_0 = 340$ m.s^{-1}, $c_P = 10^3$ J.K^{-1}.kg^{-1}, $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = 1{,}4$.

Exercice 9 Efforts sur un tuyau coudé

Un tuyau cylindrique de section circulaire de diamètre d est coudé à angle droit. Il est posé sur un plan horizontal et contient de l'eau, assimilé à un fluide parfait incompressible s'écoulant avec le débit volumique D_v. La pression de l'eau dans le tube est P_1. L'air extérieur est à la pression P_0.

Calculer la résultante des efforts s'exerçant sur le coude.

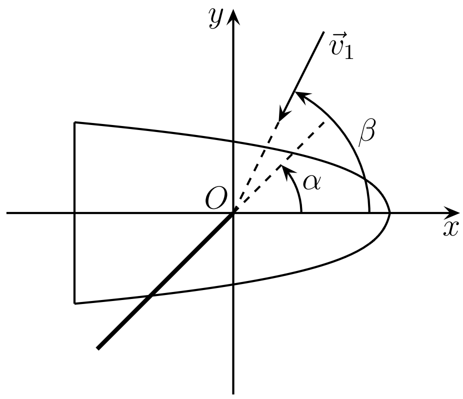
A.N. : $d = 0{,}20$ m ; $D_v = 0{,}16$ m^3.s^{-1} ; $P_1 = 6$ bar ; $P_0 = 1$ bar.

Exercice 10 Modèle sommaire d'un voilier

On considère un bateau se déplaçant à vitesse constante. On se place dans le référentiel (Oxy) lié au bateau. La surface totale de la voile sera notée S. Le plan de la voile est incliné d'un angle α par rapport à la direction du bateau. Le vent arrive sur la voile avec une vitesse $\vec{v}_1$ selon la direction définie par l'angle β (voir figure).

On support que le vent se réfléchit sur la voile selon les lois de Descartes en ne perdant pratiquement pas de vitesse en module.

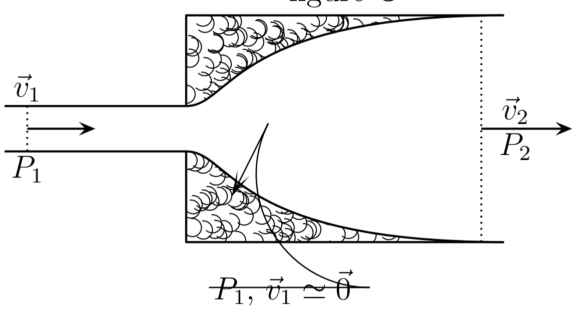
On supposera que la pression de l'air est uniforme et on notera μ sa masse volumique.

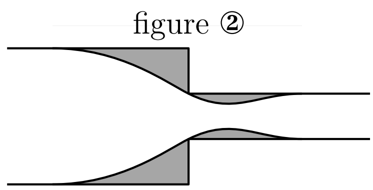


Calculer la force, projetée suivant $\vec{u}_x$ qui s'applique sur la voile.

Exercice 11 PERTE DE CHARGE

Un fluide incompressible, de mass volumique μ, s'écoule en régime permanent dans une conduite horizontale, cylindrique, de section S_1. Dans cette conduite la vitesse du fluide est $\vec{v}_1$, la pression P_1. La conduite subit une brusque variation de rayon, l'aire de la section droite devenant $S_2 > S_1$ (cf. figure ①)





Il se produit alors un décollement des lignes de courant et la création d'une zone d'eau morte dans laquelle l'écoulement est trubulent mais reste à la pression P_1. Loin de l'élargissement, la vitesse du fluide est $\vec{v}_2$, sa pression P_2. L'air extérieur est à la pression P_1.

1. En effectuant un bilan de quantité de mouvement pour un système à définir soigneusement, montrer que la différence de pression entre lamont et l'aval de l'élargissement est

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \mu\, v_2\,(v_1 - v_2)$$

2. Le théorème de BERNOULLI est-il utilisable ici ? Justifier votre réponse.
   Montrer que l'élargissement à provoqué une « perte de charge » dont on précisera la signification :

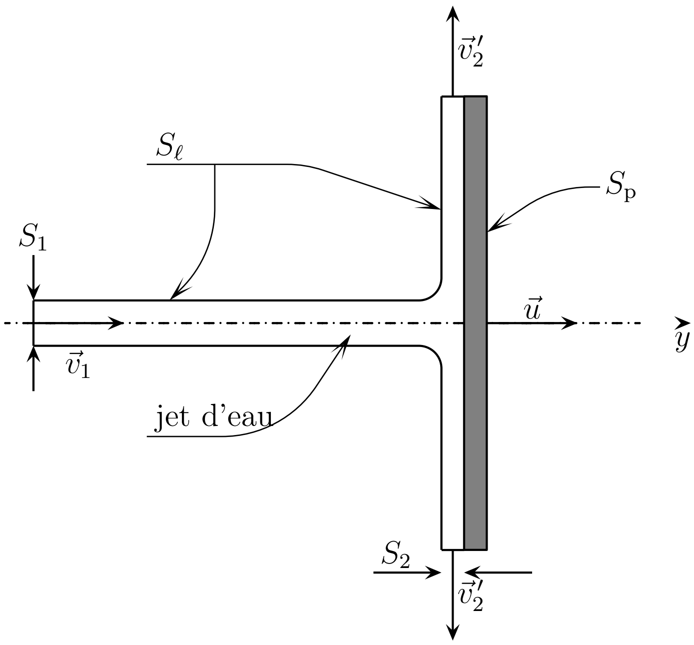
$$\left(P_2 + \frac{1}{2}\,\mu\,{v_2}^2\right) - \left(P_1 + \frac{1}{2}\,\mu\,{v_1}^2\right)$$

   à exprimer en fonction de μ, v_1, S_1 et S_2.

3. Dans le cas d'un rétrécissement brusque, les lignes de courant ont l'allure représenté figure ②. Expliquer pourquoi les résultats précédents ne sont pas applicables.

Exercice 12 Jet d'eau sur une plaque en mouvement

Un jet d'eau cylindrique, de révolution, d'axe horizontal Oy, vient frapper une plaque schématisée par un disque d'axe (Oy), de centre C. Dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$, la vitesse de l'eau dans le jet est $\vec{v}_1 = v_1\,\vec{u}_y$. Dna sce référentiel, la plaque est animée d'une vitesse uniforme $\vec{u} = u\,\vec{u}_y$ avec $0 < u < v_1$. L'eau est un fluide parfait incompressible de masse volumique μ.

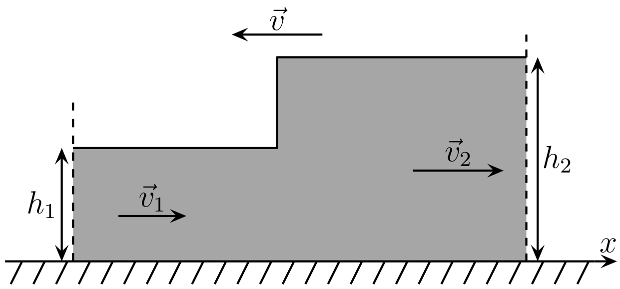


On note S_1 l'aire de la section droite du jet incident, S_2 l'aire de la surface de sortie du jet, S_ℓ l'air de la surface libre du jet et S_p l'aire de la plaque. La pression de l'air ambiant est P_0. On néglige les effets de la pesanteur.

1. Déterminer la vitesse $\vec{v}_2$ du fluide en un point de la surface de sortie dans le référentiel $\mathscr{R}$. On mettra cette vitesse sous la forme $\vec{v}_2 = u\,\vec{u}_y + v_2'\,\vec{u}_r$ et on exprimera v_2' en fonction de v_1 et u.
2. Déterminer la résultante des forces subies par la plaque de la part de l'eau et de l'air ambiant.
3. Calculer, en fonction de μ, S_1, v_1 et u dans $\mathscr{R}_0$:
   (a) la puissance mécanique $\mathscr{P}_\mathrm{m}$ reçue par la plaque ;
   (b) le débit d'énergie cinétique $\mathscr{P}_\mathrm{c1}$ de l'eau à travers S_1 ;
   (c) le débit d'énergie cinétique $\mathscr{P}_\mathrm{c2}$ de l'eau à travers S_2.
4. Expliquer pourquoi $\mathscr{P}_\mathrm{c1} \neq \mathscr{P}_\mathrm{c2} + \mathscr{P}_\mathrm{m}$.
   Établir l'expression du rendement $\eta = \dfrac{\mathscr{P}_\mathrm{m}}{\mathscr{P}_\mathrm{c1}}$.
   A.N. : calculer ces trois puissances et le rendement pour $v_1 = 120\ \mathrm{m.s^{-1}}$; $u = 40\ \mathrm{m.s^{-1}}$ et $S_1 = \pi\,r^2$ avec $r = 1$ cm.
5. Montrer que $\mathscr{P}_\mathrm{m}$ peut être calculée en effectuant un bilan énergétique dans le référentiel $\mathscr{R}_0$.

Exercice 13 Mascaret

On appelle mascaret une vague solitaire remontant l'estuaire de certains fleuves au moment de la marée montante. On adopte un modèle à une dimension. Le fleuve, de largeur constante L s'écoule vers la mer dans la direction Ox dirigée de l'amont vers l'aval avec une vitesse constante v_1 et une hauteur d'eau h_1 en amont du mascaret. Le mascaret a un profil rectangulaire et remonte l'axe Ox avec une vitesse constante v. La vitesse du fleuve et la hauteur d'eau assez loin en aval du mascaret sont respectivement v_2 et h_2. L'eau est un fluide parfait incompressible de masse volumique μ. On peut mesurer v_1, h_1 et h_2. On se propose de calculer v et v_2.



1. On se place dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}_{\mathrm{m}}$ qui se déplace avec le front du mascaret.
   Effectuer un bilan de masse dans ce référentiel et en déduire une relation entre v et v_2.
   Retrouver cette relation en travaillant dans le référentiel fixe (lié au sol).
2. En effectuant un bilan de quantité de mouvement, dans le référentiel $\mathscr{R}_{\mathrm{m}}$, pour une masse d'eau « à cheval » sur le front du mascaret, établie une relation entre v, v_1, v_2, h_1 et h_2.
3. (a) Exprimer v en fonction de v_1, h_1 et h_2.
   La vitesse du mascaret est-elle la plus rapide au moment des basses eaux ou au moment des crues du fleuve ?

   (b) Exprimer v_2 en fontion de v_1, h_1 et h_2.
   Interpréter le changement de signe de v_2 quand h_2 augmente. Commenter.