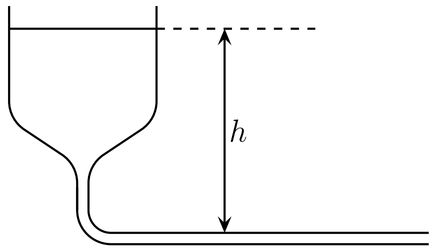
Écoulements de fluides

Exercice 1 VISCOSIMÈTRE

Un récipient cylindrique vertical, de diamètre $D = 5$ cm est terminé par un tube horizontal de diamètre $d = 1$ mm et de longueur $L = 40$ cm.



Un liquide visqueux et incompressible s'écoule lentement. Sa hauteur h passe de 5 cm à 2,5 cm en une heure et quart.

On admet que le débit dans le tube horizontal est donné par la loi de POISEUILLE

$$D_v = \frac{\Delta P}{128\,\eta\,L}\,\pi\,d^4$$

où ΔP lest la différence de pression entre les deux extrémités du tube.

Déterminer la viscosité cinématique du liquide.

Exercice 2 ÉCOULEMENT DU SANG DANS LE SYSTÈME ARTÉRIEL

On peut représenter de manière très schématique l'écoulement dans le système artériel par un réseau de tubes qui se subdivisent de plus en plus à partir de l'aorte jusqu'aux plus fins capillaires. Si on classe les vaisseaux en cinq étages de ramifications, le nombre n de vaisseaux à chaque étage, le diamètre moyen d, la section totale $S = n\,\pi\,\dfrac{d^2}{4}$, le volume total $V = S\,L$ et la longueur moyenne de chaque vaisseau sont donnés dans le tableau ci-dessous.

étage	N	d (cm)	S (cm^2)	V (cm^3)	L (cm)
aorte	1	2,6	5,3	180	34
grosses artères	40	0,8	20	250	12,5
branches artérielles	7100	0,06	20	250	12,5
artérioles	$1{,}6.10^8$	0,002	500	125	0,25
capillaires	$5{,}5.10^9$	0,0009	3500	300	0,086

L'écoulement du sang à la sortie du cœur est caractérisé par la fréquence f qui est la pulsation cardiaque que l'on supposera égale à 60 battements par minute. On assimilera le sang à un fluide newtonien, de viscosité cinématique égale à 3 mm^2.s^{-1}, de masse volumique égale à celle de l'eau.

On appelle écoulement de POISEUILLE cylindrique l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans un tuyau de rayon R et de longueur L, provoqué par une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie, tel que les effets de la viscosité se fassent ressentir dans tout l'écoulement. Le débit volumique D_v est donné par la loi de POISEUILLE : $D_v = \dfrac{\Delta P}{8\,\eta\,L}\,\pi\,R^4$.

1. Quelle est, en ordre de grandeur, la distance δ sur laquelle la quantité de mouvement diffuse pendant une durée égale à la période des battements cardiaques ?

2. Au cours du cycle cardiaque, le sang est brusquement éjecté dans l'aorte.
   À partir de quel étage peut-on considérer que l'écoulement est un écoulement de POISEUILLE ?
3. En supposant que l'écoulement dans tout le système artériel est un écoulement de POISEUILLE, calculer la différence de pression entre la partie terminale de l'aorte et l'extrémité des capillaires. Le débit sanguin moyen est de 5 litres par minute.
   Calculer le nombre de REYNOLDS dans chaque partie du système artériel et commenter.

Exercice 3 FORMULE DE STOKES

On reprend les hypothèses et les notations de l'exercice précédent. On se place en régime permanent et on suppose que la vitesse est suffisamment faible pour négliger le terme quadratique d'accélération convective (approximation linéaire).

1. Quelles sont dans ce cas les conditions imposées sur le champ des vitesses par :
   (a) l'incompressibilité du fluide,
   (b) la présence de la sphère,
   (c) la compatibilité avec l'approximation linéaire de l'équation locale de la dynamique.
   On donne le champ des vitesses :

$$\left\{\begin{array}{l} v_r = V_0\,\cos\theta\left(1-\dfrac{3\,R}{2\,r}+\dfrac{R^3}{2\,r^3}\right) \\ v_\theta = -V_0\,\sin\theta\left(1-\dfrac{3\,R}{4\,r}-\dfrac{R^3}{4\,r^3}\right) \\ v_\varphi = 0 \end{array}\right.$$

On rappelle que :

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r^2\,a_r}{\partial r}+\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial \sin\theta\,a_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\sin\varphi}\,\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

et que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \vec{\Delta}\,\vec{a}$.
Dans le cas du champ de vitesses étudié, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{3\,V_0\,R\,\cos\theta}{r^3} \\ -\dfrac{3\,V_0\,R\,\sin\theta}{2\,r^3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Vérifier que le champ des vitesses proposé vérifie les conditions imposées au problème.
   Caractériser cet écoulement par un ou plusieurs des mots suivants : rotationnel, irrotationnel, laminaire, turbulent, potentiel, stationnaire.
2. (a) Déduire de l'équation locale de la dynamique des fluides linéarisée la valeur de la pression en tout point de la surface de la sphère.

(b) Calculer la résultante des forces de pression sur la sphère.

On donne : $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2\theta\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}$.

3. On admet que la force de cisaillement exercée par le fluide sur un élément de surface de la sphère est donnée par :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{cis}} = -\frac{3\,\eta\,V_0\,R\,\sin^2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\theta$$

Justifier cette expression par analogie avec l'étude menée à l'exercice précédent.

Calculer la résultante des forces de cisaillement sur la sphère.

On donne : $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}$.

4. Vérifier que la force de traînée sur la sphère est donnée par la formule de STOKES

$$\vec{f} = 6\,\pi\,\eta\,R\,V_0\,\vec{u}_z$$

et que ce résultat est compatible avec la courbe donnant le coefficient de traînée vue dans l'exercice précédent.

Exercice 4 JET D'EAU ISSU D'UN ROBINET

Le jet d'eau provenant d'un robinet a une diamètre moins important au fur et à mesure qu'il tombe.

Expliquer pourquoi.

Exprimer ce diamètre en fonction de la distance d par rapport au robinet (celui-ci a un diamètre D et l'eau sort à la vitesse v_0).

Effectuer l'application numérique en donnant des valeurs raisonnables aux grandeurs qui interviennent.

Pourquoi le filet d'eau ne devient-il jamais extrêmement fin mais se rompt-il en goutelettes ?

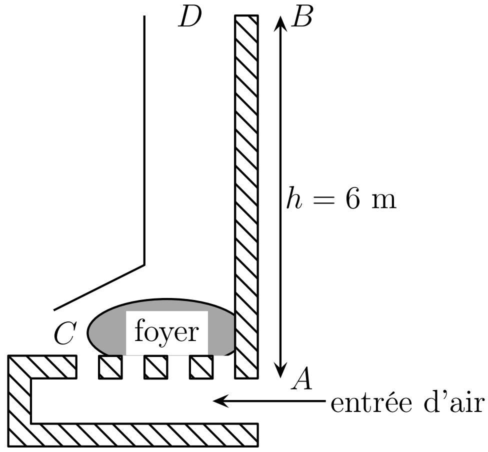
Exercice 5 COLLISION DE DEUX NAVIRES

Deux navires animés d'un même mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse v suivent des routes parallèles en restant à la même hauteur.

Expliquer pourquoi il y a risque de collision.

Exercice 6 ÉTUDE D'UNE CHEMINÉE

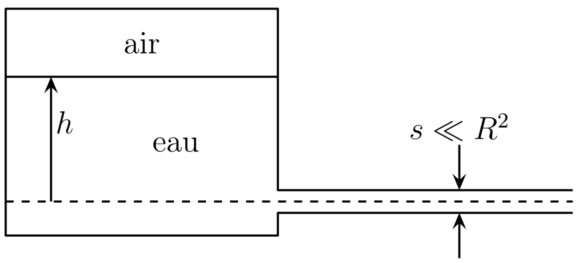
On étudie l'écoulement de l'air dans une cheminée. La température à l'intérieur du conduit est supposé constante, égale à 150 °C. La température extérieure est de 10 °C, la pression extérieure est de 1 bar. L'air est assimilé à une gaz parfait.



1. Calculer $p_A - p_B$ où A est un point dans l'entrée d'air et B un point en haut de la cheminée.
2. Exprimer puis calculer la vitesse v_D à la sortie D du conduit en supposant que la vitesse de l'air est nulle en C.
3. En réalité la vitesse est plus faible. Pourquoi ?

Exercice 7 Vidange d'une bouteille fermée

On perce une bouteille d'eau minérale d'un petit trou dans lequel on place une paille. La bouteille est assimilée à un cylindre de rayon R parfaitement diatherme. La paille est horizontale, sa section s est très petite devant celle de la bouteille.



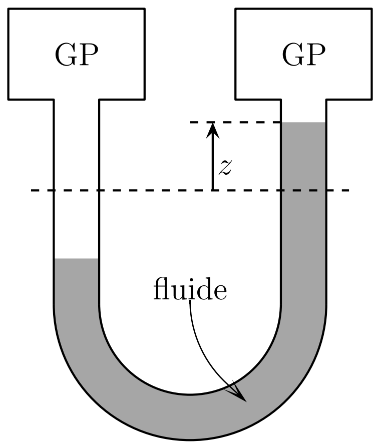
La pression extérieure P_0 est constante, la température extérieure T_0 aussi. La hauteur initiale d'eau est h_0. L'air de la bouteille est à chaque instant en équilibre thermique avec l'extérieur. ;

Calculer la vitesse d'éjection de l'eau.

Déterminer l'équation vérifiée par h_f, hauteur d'eau à la fin de la vidange.

Exercice 8 Oscillation d'un liquide dans un tube en U

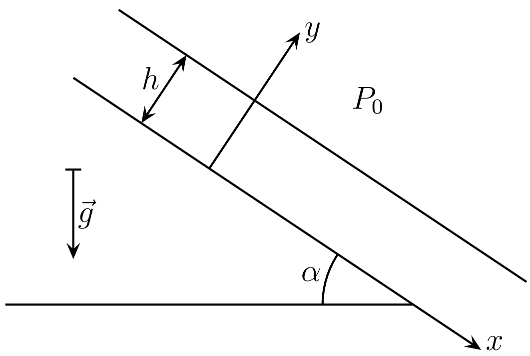
Le tube en U, vertical, de section constante S, est rempli d'un fluide parfait et incompressible sur une longueur L. Il est surmonté dans les deux récipients d'un gaz parfait ($\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$ constant). Quand le fluide est à l'équilibre, le volume de chaque compartiment est V_e, la pression du gaz est P_e. On suppose que, dans chaque compartiment, le gaz subit une transformation adiabatique réversible.



Déterminer la période des petites oscillations.

Exercice 9 Écoulement d'un fluide visqueux

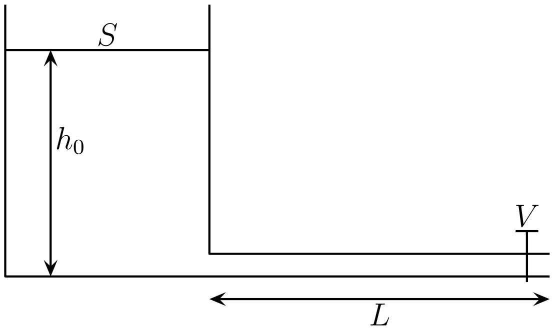
Un fluide de masse volumique ρ de viscosité η est en écoulement incompressible et permanent le long d'un plan incliné par rapport à l'horizontale d'un angle α. Le champ des vitesses s'écrit $\vec{v} = v(y)\,\vec{u}_x$.



1. Déterminer le champ de pression et celui des vitesses.
2. Calculer le débit à travers une largeur ℓ et la vitesse moyenne.
3. Comment peut-on définir le nombre de Reynolds de cet écoulement ?
   Pour l'eau on trouve Re = 1 000 et pour l'huile Re = 1.
   Pour quel fluide le modèle est-il adapté ?

Exercice 10 Vidange d'un réservoir

1. On considère un réservoir d'eau (fluide supposé parfait et incompressible), de section S dans lequel le niveau de l'eau est h_0. On ouvre une vanne de section $s \ll S$ située au bas du réservoir.
   En supposant l'évoulement quasi-permanent, donner l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ la résoudre et en déduire le temps que mettra le réservoir pour se vider.
   Montrer *a posteriori* que les termes de dérivées temporelles étaient bien négligeables.
2. On ajoute maintenant au réservoir un conduit horizontal, rectiligne, de longueur ℓ, de section s très petite par rapport à celle du réservoir, terminé par une vanne V (voir figure ci-dessous). Celui-ci est rempli sur une hauteur h_0 dont on négligera les variations au cours du temps. Le fluide est initialement au repos, à $t = 0$, on ouvre la vanne V.



(a) Donner l'équation régissant l'évolution de la vitesse du fluide dans le tuyau.

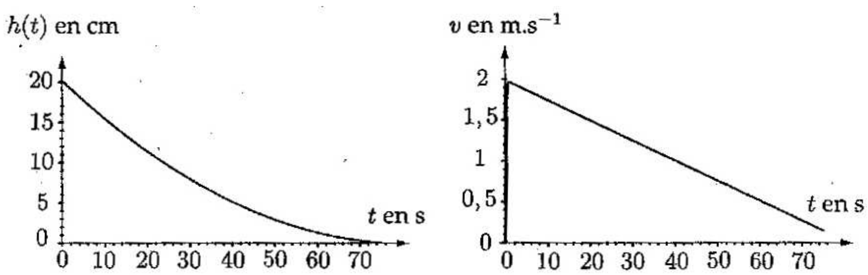
Déterminer puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par cette vitesse. On posera $v_\infty = \sqrt{2\,g\,h_0}$.

(b) La distribution d'eau en ville se fait sous la pression de 6 bar. Si la longueur du tuyau de connexion au réseau principal du robinet de votre lavabo est de 10 m, quelle est la durée caractéristique du régime transitoire lorsque vous ouvrez le robinet ?

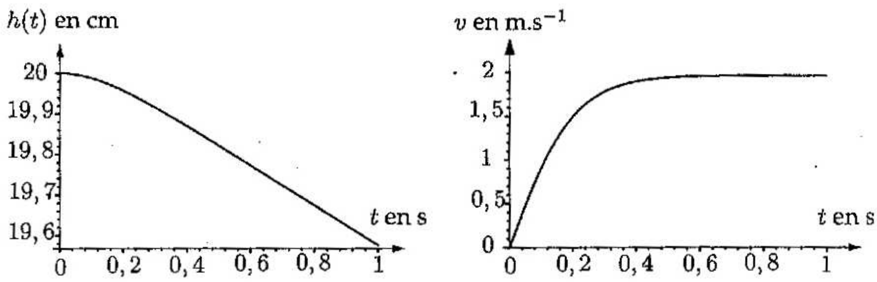
3. On se place dans le cas d'un récipient cylindrique, de rayon $R = 20$ cm, prolongé par un tuyau de rayon $r = 1$ cm, de longueur $\ell = 20$ cm, rempli initialement sur une hauteur $h_0 = 20$ cm.

   Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ si on ne néglige plus ses variations au cours du temps ?

   La résolution numérique de cette équation donne les graphes représentés ci-dessous :



Agrandissement du début des courbes :



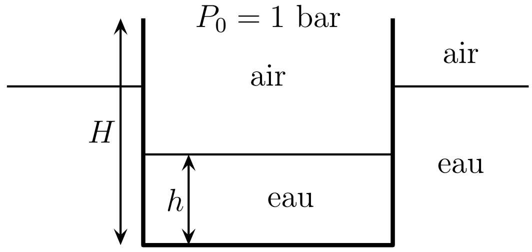
   Commenter ces courbes.

   Distinguer en particulier les deux régimes étudiés aux questions 1 et 2 et déterminer les valeurs numériques intéressantes (durées, longueurs, vitesses caractéristiques, ...)

   Vérifier la validité des hypothèses faites dans les questions 1 et 2.

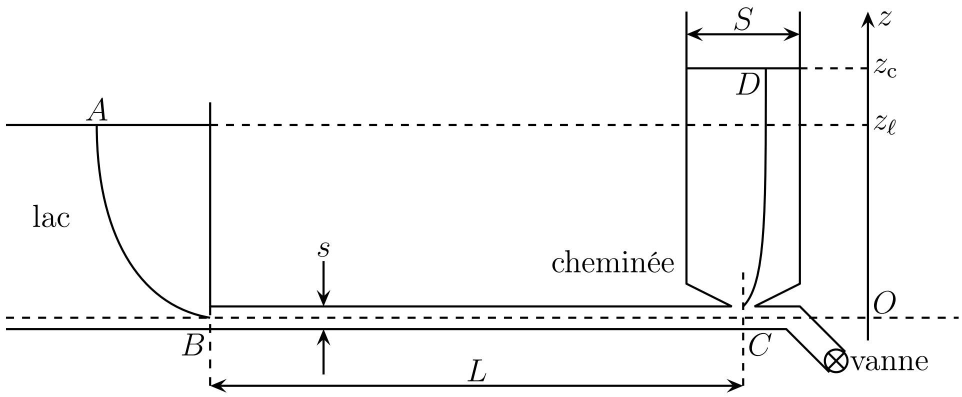
Exercice 11 Naufrage d'un bateau

On étudie un bateau qui coule dans la mer considérée comme un fluide parfait incompressible, de masse volumique ρ. On note $H = 20$ m la hauteur du bateau, $M = 50\,000$ tonne sa masse et $S = 8\,500$ m^2 sa surface de base :



1. On considère que le bateau est rempli d'eau sur une hauteur h.
   Quelle est la hauteur h_{m} à partir de laquelle le bateau coule ?
2. On considère maintenant que le bateau est initialement vide et qu'il se remplit par un petit trou de surface $s = 1{,}0$ m$^2 \ll S$ situé dans la coque à une hauteur $\ell = 4$ m du fond.
   (a) Décrire les différentes étapes du remplissage.
   (b) Déterminer $h(t)$ pendant la première phase et calculer sa durée t_1.
   (c) Déterminer $h(t)$ pour $t > t_1$.
   (d) Quelle est la durée totale du naufrage ?

Exercice 12 Cheminée de déversement



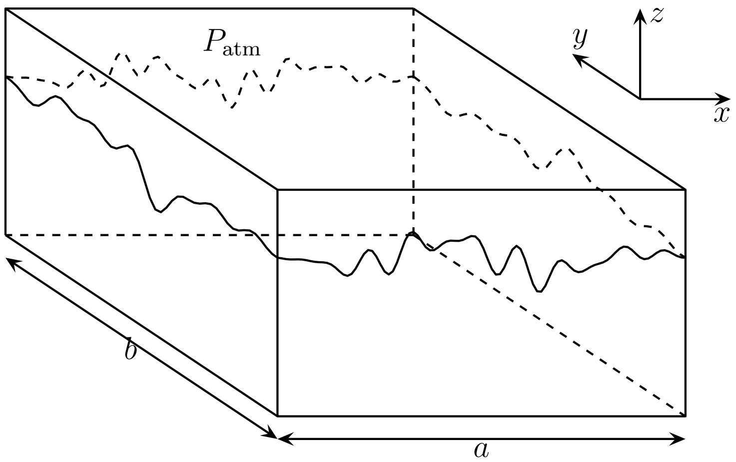
Un barrage hydraulique est constitué d'une galerie d'aménagement de longueur $L = 10$ km et de section $s = 10$ m^2 reliée à une retenue d'eau (un lac de superficie assez grande pour que l'on puisse y négliger les variations de niveau) et à une cheminée d'équilibre verticale de section $S = 100$ m^2. Une vanne immédiatement en aval de la cheminée alimente les turbines de la centrale électrique. L'eau sera considérée comme un fluide non visqueux, incompressible. La galerie considérée débit 30 m^3.s^{-1}. L'axe Oz est un axe vertical ascendant dont l'origine est au niveau de la vanne. On appelle z_ℓ la position de la surface du lac et z_{c} celle de l'eau dans la cheminée. On pose $h = z_{\mathrm{c}} - z_\ell$ (h est une valeur algébrique).

1. La vanne est ouverte. Pour cet écoulement, l'eau est un fluide parfait incompressible en écoulement permanent.
   Déterminer la dénivellation h_0.
2. (a) On ferme brusquement la vanne à l'instant $t = 0$. On s'intéresse au mouvement du fluide une fois la vanne fermée. L'écoulement n'est plus supposé stationnaire.
   En utilisant des hypothèses simplificatrices liées aux valeurs numériques de l'énoncé, établir l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
   La résoudre en utilisant les conditions initiales.
   (b) À quelle hauteur maximale $h_{\max}$ s'élève l'eau dans la cheminée ?

3. En réalité la cheminée a une hauteur $h_1 = 20$ m au dessus du niveau du lac.
   (a) Déterminer le temps t_1 écoulé entre la fermeture de la vanne et le déversement.
   (b) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse V de l'eau dans la galerie en fonction du temps quand l'eau déborde de la cheminée.
   La résoudre.
   (c) Déterminer la durée de déversement $t_2 - t_1$ ainsi que la vitesse V_1 de l'eau dans la galerie à l'instant où la hauteur atteint 20 m.
   (d) En déduire le volume déversé en fonction de s, L, g, h_1 et V_1.
4. Comment évolue $h(t)$ une fois le déversement ?
   En réalité, que se passe-t-il ? On justifiera la réponse par des arguments physiques.
5. Si on ne plaçait pas de cheminée, que se passerait-il ? Justifier.

Exercice 13 ONDES DE GRAVITÉ DANS UNE CUVE

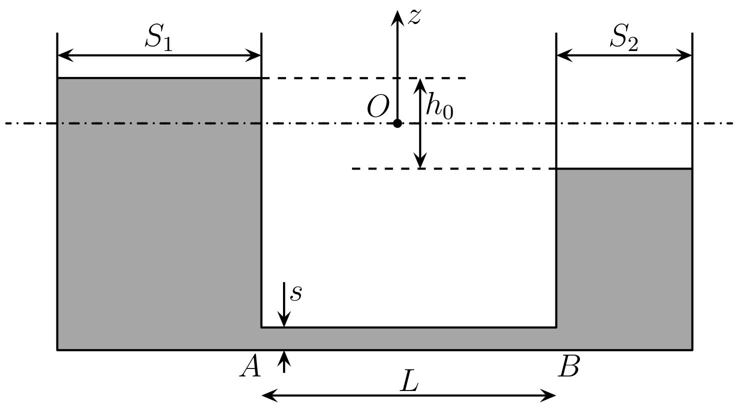
On considère un bassin parallélépipédique rempli d'eau sur une hauteur moyenne h. L'eau est un fluide parfait et incompressible, de masse volumique μ. Une onde se propage dans le bassin, l'amplitude de la vibration étant très inférieure à h. La vitesse des particules d'eau se met sous la forme $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi$ avec $\varphi(x,y,z,t) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\,t}$. Un point de la surface du fluide, situé en (x,y,h) au repos se trouve en $(x,y,h+\xi(x,y,t))$ quand le fluide est en mouvement.



1. Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\varphi(x,y,z,t)$ traduisant l'incompressibilité du fluide ?
   En déduire la forme des fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ (on introduira deux entiers n_x et n_y) puis celle de $Z(z)$.
2. Montrer que, à la surface du fluide, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{P_{\text{atm}}}{\mu} + g\,\xi(x,y,t) = C(t)$ où $C(t)$ est une fonction du temps seul.
   Montrer que l'on peut choisir $C(t) = 0$ sans modifier l'expression du champ des vitesses.
3. Trouver la relation de dispersion et en déduire la plus petite pulsation pouvant se propager dans le bassin (on supposera $b < a$).

Exercice 14 Oscillations d'un liquide entre deux récipients

Deux récipients cylindriques de section S_1 et S_2 sont reliés par un tube cylindrique de section s de longueur L. On suppose que $s \ll S_1$ et $s \ll S_2$ et que L est «suffisamment grande ». À l'instant initial, il existe une dénivellation h_0 entre les niveaux des deux récipients et le fluide est au repos. Le fluide est supposé incompressible, de masse volumique uniforme μ_0.



L'origine de l'axe Oz est prise au milieu des positions initiales des surfaces libres.

1. Dans cette question, on néglige les effets dus à la viscosité du fluide.
   (a) Montrer que la vitesse, à un instant donné, est uniforme dans le tube. On la note $v(t)$. Déterminer la différence de pression $P_B - P_A$ aux extrémités du tube.
   (b) Établir l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$ par deux méthodes différentes. En déduire la dénivellation $z(t)$.
2. On tient maintenant compte des effets dus à la viscosité : on suppose qu'ils sont essentiellement sensibles dans le tube et qu'ils se traduisent par une perte de puissance dans tout le tube égale à $\mathscr{P} = 8\,\pi\,\eta\,L\,v_{\mathrm{m}}^2$ où v_{m} est la vitesse moyenne du fluide dans le tube. On rappelle la répartition des vitesses dans le tube, donnée par la relation établie dans le cours dans le cadre de l'écoulement de Poiseuille cylindrique :

$$v(r) = \frac{P_B - P_A}{4\,\eta\,L}\,(r^2 - a^2)$$

   où a est le rayon du tube et r la distance à l'axe du tube.
   Établir l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ en effectuant un bilan énergétique.
   Pourquoi ne tient-on compte de la viscosité que dans le tube ?
3. En faisant $\eta \to 0$ pour l'équation trouvée en 2, retrouve-t-on l'équation trouvée en 1b ? Pourquoi ?