

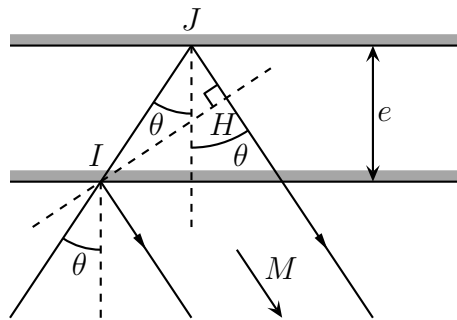
## Interférences

### ✿ Exercice 1

Aucune difficulté dans cet exercice : il s'agit ni plus ni moins que d'un geste technique (un calcul de différence de marche) sans considération physique.

Rappelons juste que, physiquement, il y a deux rayons qui arrivent, un sur chaque miroir et que la construction des marches des deux rayons sur un même schéma ne doit pas laisser penser que le premier miroir est « un peu » transparent car il ne l'est pas du tout ! Tout cela vient du fait que le MICHELSON a été déplié.

Utilisons les notations ci-dessous.



En utilisant le principe de retour inverse et le théorème de MALUS, nous pouvons dire

$$(HM) = (IM)$$

Il reste donc  $\delta = (IJ) + (JH)$ .

Or, géométriquement

$$IJ = \frac{e}{\cos \theta} \quad \text{et} \quad JH = IJ \cos(2\theta) = e \frac{\cos(2\theta)}{\cos \theta}$$

Nous avons ainsi, avec la formule de trigonométrie idoine

$$\delta = n_{\text{air}} e \frac{1 + \cos(2\theta)}{\cos \theta} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\delta = 2 n_{\text{air}} e \cos \theta}$$

### ✿ Exercice 2

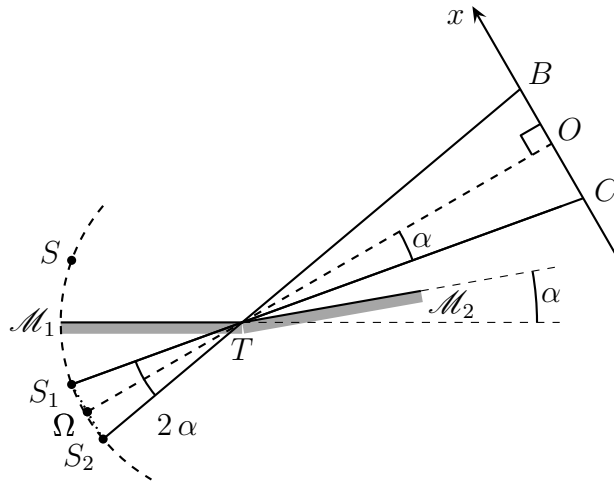
*Analyse physique.* Ici nous avons affaire à une seule source ponctuelle. Elle peut donc engendrer des interférences si deux rayons qui en sont issus peuvent, par des chemins géométriques différents, se recouper en un endroit. C'est le cas ici avec les deux rayons représentés. Comme les rayons qui interfèrent sont distincts dès le départ de la source, nous pouvons dire qu'il s'agit là d'un interféromètre à division du front d'onde. Étant donné qu'il s'agit de deux rayons faisant parti d'onde sphérique, nous allons avoir, dans le champ des interférences, des franges rectilignes si l'écran est parallèle aux sources fictives ou des anneaux si l'écran est orthogonal à la droite passant par les deux sources.

*Analyse technique.* Pas très utile ici puisque le sujet nous guide à trouver où se situent les deux sources fictives. Il faut bien voir qu'une fois trouvées ces deux sources, nous pourrions ressortir toutes nos connaissances sur l'interférence à deux ondes sphériques.

**1.** Nous sommes en présence de deux systèmes optiques (les deux miroirs), nous pouvons donc dire que, pour l'écran, tout se passe comme si la lumière provenait des **images** de  $S$  données par les miroirs.

Comme ce sont des miroirs **plans**, cela signifie que les sources fictives qui interfèrent sont  $S_1$  et  $S_2$  images de  $S$  par rapport aux deux miroirs  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ .

☞ *Remarque.* cela revient à déplier les miroirs.



Géométriquement, nous pouvons donc dire que  $S_1$  et  $S_2$  sont donc situées sur le cercle de centre  $T$  et de rayon  $TS$  (car  $TS_1 = TS = TS_2$ ).

Le recouvrement des rayons lumineux issus de  $S_1$  passant par  $\mathcal{M}_1$  et de ceux issus de  $S_2$  passant par  $\mathcal{M}_2$  se trouve donc dans la zone  $BTC$  : c'est la zone d'interférence dans laquelle l'écran sera placé perpendiculairement à  $\Omega T$ .

Notons  $O$  le centre de cette zone.

L'angle  $\alpha$  étant petit, nous avons  $S_1 S_2 = 2 \alpha ST$ .

☞ *Remarque.* expérimentalement le point  $O$  n'est pas déterminable *a priori*. Ce n'est qu'une fois le montage réalisé et la figure obtenue que le point  $O$  sera défini comme celui étant au centre de la figure.

[2.] La largeur du champ d'interférence est donc  $BC$  ce qui donne, ici, compte tenu de  $\alpha \ll 1$  :

$$BC = 2 \alpha D = \underline{6,28319 \text{ mm}}$$

[3.] Il s'agit désormais d'une situation analogue à une situation de référence (donc vue en cours) : l'interférence de deux sources ponctuelles distantes de  $a$  sur un écran sur un écran à une distance  $\ell$ .

Ici nous avons  $a = S_1 S_2$  et  $\ell = D + ST$ .

Nous pouvons donc dire, sans refaire les calculs, que la différence de marche en un point  $M$  de l'écran vaut  $\delta = \frac{ax}{\ell}$ .

L'intensité en un point de l'écran vaut :

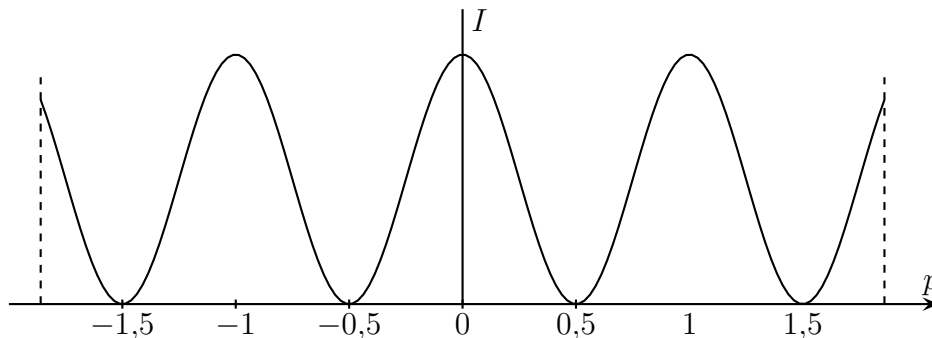
$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2} (1 + \cos \Delta\varphi) \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad \rightsquigarrow \quad I(x) = \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 \ell} \right) \right]$$

☞ *Remarque.* la démonstration de  $\delta = \frac{ax}{\ell}$  est à savoir refaire mais si elle est à refaire dans ce genre d'exercice, il est plus que fort judicieux d'utiliser les deux sources fictives  $S_1$  et  $S_2$  avec des rayons lumineux droits plutôt que la *seule* source  $S$  avec des rayons lumineux qui sont réfléchis.

[4.] L'interfrange s'écrit (cf. démo en cours)  $i = \frac{\lambda_0 \ell}{a} = \underline{1,68736 \text{ mm}}$  (numériquement  $a = \underline{0,698132 \text{ mm}}$ ).

Ainsi, en notant  $x_{\max}$  les abscisses extrêmes du champ d'interférence, nous peut y calculer l'ordre d'interférence, ce qui donne  $p = \frac{ax}{\ell \lambda} = \underline{1,86184}$ .

Voir ci-dessous la représentation de l'intensité observée sur l'écran. En dehors de la zone d'interférence, l'intensité est soit constante si l'écran est éclairé par la source S, soit nulle si l'écran se trouve dans une zone d'ombre.



5. Les longueurs d'ondes éteintes sont celles qui correspondent à des ordres d'interférence demi-entier.

Pour  $x = 3,0$  mm, nous avons  $1,30900 \leq p \leq 2,61800$  ce qui implique qu'il y a deux longueurs d'onde éteintes :

→ pour  $p = 1,5$  nous trouvons  $\lambda = 698,132$  nm (rouge)

→ pour  $p = 2,5$  nous trouvons  $\lambda = 418,879$  nm (bleu)

### ✿ Exercice 3

1. *Analyse physique.* Il s'agit d'un interféromètre à division d'amplitude. La grande question va être de savoir si les interférences sont des interférences d'ondes planes (source à l'infini) ou d'ondes sphériques (source à distance finie) et si ces interférences se font à distance infinie (projection dans le plan focal d'une lentille) ou ailleurs. Notons tout d'abord que comme la source est ponctuelle, il n'y aura pas de problème de cohérence.

Ici nous pouvons voir que tant la source que l'écran sont à distance finie. Autrement dit nous avons affaire avec des interférences de deux ondes sphériques, reste à déterminer précisément lesquelles.

*Analyse technique.* Au lieu de nous préoccuper du trajet exact de chaque rayon, nous allons chercher les sources fictives équivalentes. Pour cela nous devons voir qu'il y a deux trajets possibles pour les rayons lumineux :

$$S \xrightarrow{\text{séparatrice}} S' \xrightarrow{\mathcal{M}_1} S_1 \quad \text{et} \quad S \xrightarrow{\text{séparatrice}} S' \xrightarrow{\mathcal{M}_2} S_2$$

Ce sont après  $S_1$  et  $S_2$  qui éclairent, de manière cohérente, l'écran. Maintenant, « yapuka » trouver les images  $S_1$  et  $S_2$ , car après nous serons ramené à une situation classique.

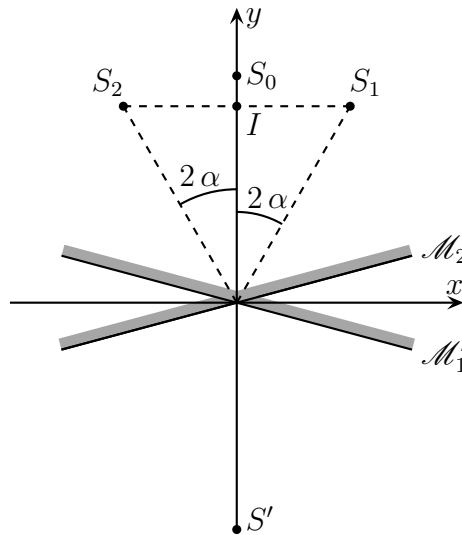
Utilisons le système équivalent suivant :

- $S'$  est l'image de  $S$  par la séparatrice
- $\mathcal{M}'_1$  est l'image de  $\mathcal{M}_1$  par la séparatrice
- $S_1$  est l'image de  $S'$  par le miroir  $\mathcal{M}'_1$
- $S_2$  est l'image de  $S'$  par le miroir  $\mathcal{M}'_2$

Pour déterminer  $S_1$  et  $S_2$  de manière simple, nous pouvons imaginer l'image  $S_0$  que donnerait un miroir plan sur l'axe ( $Ox$ ).

Ensuite, nous savons que lorsqu'un miroir tourne d'un angle  $\alpha$ , les rayons réfléchis, donc l'image, tourne d'un angle double  $2\alpha$ . Nous en déduisons alors  $S_1$  et  $S_2$ .

Sur le schéma ci-dessous, l'angle  $\alpha$  est bien évidemment exagéré.



Comme  $OO_1 = L$  et  $OS = 2L$  nous avons  $OS_1 = OS_2 = 3L$  et ainsi, compte tenu du fait que  $\alpha \ll 1$  :

$$a = S_1S_2 = 12L\alpha = \underline{3,0 \text{ mm}}$$

La distance entre les sources et l'écran vaut donc  $D = IE = 8L = \underline{2,0 \text{ m}}$ .

**2.** Le dispositif est équivalent à celui vu en cours : l'interférence de deux ondes sphériques cohérentes à grande distance des sources dans un plan parallèle aux sources.

Nous avons donc un système de franges rectilignes orthogonales à  $Ox$  d'interfrange

$$i = \frac{\lambda_0 D}{a} = \underline{0,422 \text{ mm}}$$

#### ✿ Exercice 4

Il s'agit ici d'un exercice qui demande à exploiter ce que nous savons de l'interféromètre de MICHELSON. Nous n'allons donc pas redémontrer les différentes expressions connues, mais les utiliser à bon escient.

**1.** L'écran doit être placé (à l'infini), i.e. dans le plan focal image d'une lentille convergente.

**2.** La différence de marche pour un rayon lumineux d'incidence  $\theta$  vaut  $2n_{\text{air}}e \cos \theta$  avec  $\theta$  l'angle à la fois d'incidence et d'observation.

Nous pouvons le réécrire  $\delta = \delta_0 \cos \theta$  en notant  $\delta_0$  la différence de marche au centre.

L'ordre d'interférence au centre vaut donc  $p_0 = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda_0} = \underline{4028,66620}$  et les ordres d'interférence des deux premiers anneaux brillants sont donc  $p_1 = 4028$  et  $p_2 = 4027$  ce qui amène à  $p_1 = p_0 \cos \theta_1$  et  $p_2 = p_0 \cos \theta_2$  ou encore, puisque l'image se fait à une distance  $f'$  de la lentille et en notant  $p_1 = p_0 - \delta p_1$  :

$$\rho_1 = f' \tan \theta_1 = f' \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_1} - 1} = f' \sqrt{\frac{p_0^2}{p_1^2} - 1} = f' \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{\delta p_1}{p_0}\right)^2} - 1} \stackrel{\text{DL}}{=} f' \sqrt{1 + 2\frac{\delta p_1}{p_0} - 1}$$

Ainsi nous trouvons :

$$\boxed{\rho_1 = f' \sqrt{2 \frac{\delta p_1}{p_0}} = \underline{16,7658} \text{ mm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\rho_1 = f' \sqrt{2 \frac{\delta p_2}{p_0}} = \underline{27,8845} \text{ mm}}$$

Ce sont des rayons largement mesurables.

REMARQUE

Le nombre de chiffres significatif pour  $p_0$  est bien plus grand que celui des données parce que l'épaisseur de la lame est bien mieux connue, sur un Michelson qu'au dixième de millimètre : avec un enregistreur, il est parfaitement possible d'atteindre la précision d'une longueur d'onde, *i.e.* une précision de position de l'ordre du demi micromètre.

Les ordres d'interférence peuvent paraître élevés mais ne le sont pas tant que cela. En effet, avec  $\Delta\lambda = 0,1 \text{ nm}$ , nous trouvons une longueur de cohérence de  $L_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \simeq 3 \text{ mm}$  ce qui est bien supérieure à la différence de marche au centre ( $2e \simeq 2 \text{ mm}$ )

**3.** Lorsque  $e$  diminue, le dispositif rapproche du contact optique et nous savons alors que :

les anneaux disparaissent vers le centre

Le premier anneau disparaît lorsque le nouvel ordre d'interférence au centre  $p'_0 = \frac{2e'}{\lambda_0}$  correspond à celui de l'anneau considéré, ici  $p_1$ .

Il faut donc  $e' = \frac{p_1 \lambda_0}{2} = \underline{1,0998454} \text{ mm}$  : il suffit de frôler la vis de chariotage de  $\mathcal{M}_1$  pour que l'anneau disparaisse (sans que SAURON ne puisse rien faire, une fois de plus).

Le premier anneau brillant correspond à un ordre d'interférence  $p_2$ .

Pour déterminer son rayon sur l'écran, nous pouvons reprendre la formule précédente en faisant attention que l'ordre au centre vaut maintenant  $p_1$  et que le  $\delta p$  vaut 1, cela donne :

$$\rho'_1 = f' \sqrt{2 \times \frac{1}{p_1}} = \underline{22,2828} \text{ mm}$$

☞ *Remarque.* comparer  $\rho_1$  et  $\rho'_1$  n'a pas d'intérêt puisque ces deux anneaux ne sont pas obtenus dans les mêmes conditions, à savoir un ordre d'interférence entier au centre.

**4.** Le diamètre de la tâche lumineuse étant  $d$ , l'angle maximal d'incidence des rayons formant la tâche vaut  $\theta_{\max} = \frac{d}{2f'}$ .

Il n'y a qu'une tâche sur l'écran, donc entre l'ordre d'interférence au centre  $p_0$  et celui au bord  $p_{\text{bord}}$  il y a moins de 1, ce que nous pouvons écrire  $p_{\text{bord}} = p_0 - \delta p$ .

De plus comme le réglage est tel que l'intensité est maximale au centre,  $p_0$  est entier.

Avec la formule de l'éclairement pour un dispositif interférentiel à deux ondes nous pouvons écrire :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos(2\pi p_{\text{bord}}))$$

La condition d'éclairement s'écrit donc  $0,9 \mathcal{E}_0 \leq \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos(2\pi p_{\text{bord}}))$ , ce qui donne :

$$\cos(2\pi p_{\text{bord}}) \geq 0,8 \quad \rightsquigarrow \quad \cos(2\pi (p_0 - \delta p)) \geq 0,8 \quad \rightsquigarrow \quad p_0 - p_{\text{bord}} \leq \frac{\arccos(0,8)}{2\pi}$$

En remarquant ensuite que  $\delta = 2e \cos \theta = p \lambda$  et  $2e = p_0 \lambda$ , nous avons :

$$p_0 (1 - \cos \theta_{\max}) \leq \frac{\arccos(0,8)}{2\pi} \rightsquigarrow p_0 \leq \frac{\arccos(0,8)}{2\pi (1 - \cos \theta_{\max})}$$

Ce qui donne 
$$e \leq \frac{\arccos(0,8)}{2\pi (1 - \cos \theta_{\max})} \times \lambda_0 = \underline{44,7530 \mu\text{m}}.$$

## REMARQUE

Une épaisseur de 44  $\mu\text{m}$  est un réglage est relativement mauvais car cela correspond à un ordre d'interférence au centre de près de 100!

Pour mieux régler le michelson, il est donc nécessaire de regarder un anneau bien plus grand que 10 cm de diamètre sur un écran situé dans le plan focal d'une lentille de focale  $f' = 1,0$  m de manière à observer davantage d'angles  $\theta$ .

Ainsi, en regardant un cercle de 10 cm de diamètre mais, cette fois, projeté sur un écran situé dans le plan focal d'une lentille de focale  $f' = 10$  cm, nous trouvons (même formule que ci-dessus, mais en changeant  $\theta_{\max}$ ) :  $e \leq 0,5 \mu\text{m}$ ! Et là, la précision de la longueur d'onde est atteinte.

## ✿ Exercice 5

*Il s'agit d'un exercice faisant appel aux connaissances des lois de fonctionnement du michelson plus qu'à leur établissement.*

*Analyse physique. Ici il s'agit d'un michelson est réglé en lame d'air donc qui permet de créer des interférence à deux ondes observables à l'infini.*

La différence de marche occasionnant les interférences s'écrivant  $\delta = 2e \cos i$  où  $i$  est la direction d'observation.

Ici l'observation (le capteur) est au foyer d'une lentille (expérimentalement parlant au centre des anneaux) donc  $i = 0$  et  $\delta = 2e$ .

Comme il y a des cuves sur les bras du michelson, cela occasionne une différence de marche supplémentaire de  $2(n_{\text{air}} - 1)h$ .

De plus une oscillation sur l'enregistrement correspond à une variation de différence de marche de  $\lambda_0$ .

Donc 
$$N = \frac{2(n_{\text{air}} - 1)h}{\lambda_0} \text{ soit } \boxed{n_{\text{air}} = 1 + \frac{N\lambda_0}{2h} = 1 + 2,91 \cdot 10^{-4} \pm 3 \cdot 10^{-6}}.$$

## REMARQUE

Il est quasiment impossible de construire deux cuves suffisamment identiques pour qu'elles puissent compenser parfaitement les chemins optiques sur les deux bras du michelson et ce d'autant plus que cela dépend de l'inclinaison de la cuve par rapport aux rayons.

Toutefois le but n'est pas ici de compenser exactement la différence de marche entre les deux rayons, mais de les compenser suffisamment pour qu'il y ait encore interférence au niveau du détecteur : avec des parois de verre  $\ell = 3$  mm, un rayon passant par une cuve a une différence de chemin optique supplémentaire de près de  $\delta_{\text{supp}} = 2(n_{\text{verre}} - 1) \times 2\ell$  (4 parois sont traversées) ce qui donne  $\delta_{\text{supp}} \simeq 6$  mm, ce qui peut être très gênant.

Notons aussi que le fait que la source soit ponctuel n'a aucun intérêt expérimentalement ici.

✿ **Exercice 6**

1. Notons  $\rho = \frac{1-n}{1+n}$  et  $\tau = \frac{2}{1+n}$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude dans le sens air-verre et  $\rho' = \frac{n-1}{n+1}$  et  $\tau' = \frac{2n}{1+n}$  les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude dans le sens verre-air.

rapport des amplitudes	$\frac{A_1}{A_0}$	$\frac{A_2}{A_0}$	$\frac{A_3}{A_0}$	$\frac{A_4}{A_0}$
expression littérale	$\rho$	$\tau \rho' \tau'$	$\tau \rho'^3 \tau'$	$\tau \rho'^5 \tau'$
valeur numérique	-0,2156863	0,2056524	$9,567068 \times 10^{-3}$	$4,450654 \times 10^{-4}$

Entre les rayons  $i$  et  $i+1$ , pour  $i \geq 1$ ,  $A_{i+1} = A_i \times \rho'^2$  : les amplitudes décroissent très rapidement. Nous constatons alors que seuls les deux premiers rayons ont une amplitude non négligeable d'une part et quasiment égales d'autre part : ce seront les seuls à considérer pour des interférences.

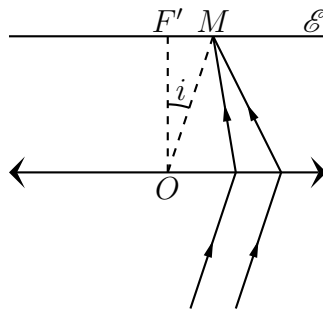
2. Le calcul de la différence de marche à l'infini a été fait en cours.

Nous trouvons  $\delta = 2 n e \cos r - \frac{\lambda_0}{2}$ , ce qui correspond à un déphasage  $\varphi = \frac{4 \pi n e \cos r}{\lambda_0} - \pi$ .

☞ *Remarque.* le déphasage de  $\pi$  est du à la réflexion air-verre.

3. Les deux rayons réfléchis par la lame à faces parallèles se rencontrent à l'infini, *i.e.* dans le plan focal de la lentille.

Le point  $M$  où s'intersectent les deux rayons est tel que  $(OM)$  forme l'angle  $i$  avec l'axe optique de la lentille.



Comme les angles considérés sont petits (approximation de GAUSS obligatoire avec les lentilles minces) nous avons  $F'M = f' i$ .

4. Le déphasage en  $M$  dépend seulement de  $r$  donc de  $i$  puisque les deux angles sont liés par la loi de SNELL – DESCARTES et, finalement, de  $F'M$ .

L'éclairement est donc constant pour  $F'M = C^{te}$  ce qui correspond à des anneaux de centre  $F'$ .

L'ordre d'interférence au centre est  $p_0 = \frac{\delta(i=0)}{\lambda_0}$  soit  $p_0 = \frac{2 n e}{\lambda_0} - \frac{1}{2}$ .

Pour un angle  $i$  quelconque nous avons  $p = \frac{2 n e \cos r}{\lambda_0} - \frac{1}{2}$ .

☞ *Remarque.* attention de ne pas confondre  $i$  et  $r$ .

5. Le centre du système de frange est sombre, ce qui signifie que  $p_0$  est demi-entier.

Nous pouvons alors l'écrire sous la forme  $p_0 = m - \frac{1}{2}$ .

Le  $k$ -ième anneau sombre correspond à l'ordre d'interférence  $p_k = m_0 - k - \frac{1}{2}$  (car  $p$  diminue quand  $i$  augmente) et donc à un angle  $r_k$  tel que  $\cos r_k = 1 - k \frac{\lambda_0}{2 n e}$ .

Comme cet angle est petit, nous pouvons écrire  $\cos r_k = 1 - \frac{r_k^2}{2}$  ce qui donne  $r_k = \sqrt{\frac{k \lambda_0}{n e}}$ .

De plus, les angles étant petit la loi de SNELL – DESCARTES donne  $i_k = n r_k$  donc  $i_k = \sqrt{\frac{k n \lambda_0}{e}}$ .

Finalement le rayon du  $k$ -ième anneau sombre est  $R_k = f' i_k = \sqrt{k} \times f' \sqrt{\frac{n \lambda_0}{e}}$ .

Numériquement :  $e = \frac{f'^2 n \lambda_0}{R_1^2} = \underline{4,06444 \text{ mm}}$

## ✿ Exercice 7

1. La différence de marche, au niveau du détecteur est  $\delta = 2 V t$ ; celui-ci délivre un signal proportionnel à l'éclairement qu'il reçoit, donné par :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2 \pi \delta}{\lambda_0} \right) \right] = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{4 \pi V t}{\lambda_0} \right) \right]$$

C'est un signal périodique de période  $T = \frac{\lambda_0}{2 V}$ .

Pour avoir  $T = 1,0 \text{ s}$ , il faut une vitesse  $V = \underline{0,3164 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-11}}$ , *i.e.* une demi-longueur d'onde du laser He-Ne par seconde ! C'est une vitesse extrêmement lente mais expérimentalement pas si difficile à réaliser en utilisant des démultiplicateur (comme la boîte de vitesse dans les voitures).

2. Il suffit de substituer dans les deux définitions :

$$d\mathcal{E}_0(\nu) = K dP(\nu) = K P_\nu(\nu) \quad \text{et} \quad d\mathcal{E}_0(\nu) = E_{0\nu}(\nu) d\nu \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) = K P_\nu(\nu)}$$

3. Le déphasage au niveau du détecteur des ondes de fréquence  $\nu$ , donc de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ , est  $\varphi = \frac{2 \pi \delta}{\lambda_0} = \frac{2 \pi \nu \delta}{c} = 2 \pi \nu \tau$ .

D'après la loi des interférences à deux ondes, l'éclairement du détecteur dû à l'émission de la source dans la bande de fréquence  $[\nu, \nu + d\nu]$  s'écrit  $d\mathcal{E} = 2 \mathcal{E}_{0\nu} [1 + \cos(2 \pi \nu \tau)]$  car  $\mathcal{E}_{0\nu}$  représente l'éclairement pour un rayon lumineux.

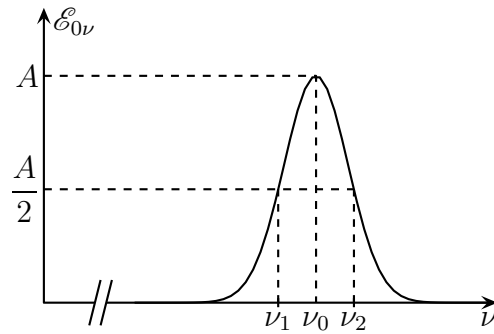
L'éclairement total du détecteur est la somme des éclaircissements car les différentes radiations ne sont pas cohérentes entre elles, ce qui donne le résultat attendu :

$$\boxed{\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{E}_{0\nu} [1 + \cos(2 \pi \nu \tau)] d\nu}$$

4.  $\mathcal{E}_{0\nu}(\nu) = \frac{A}{2}$  pour  $\nu_1 = \nu_0 - a \sqrt{\ln 2}$  et  $\nu_2 = \nu_0 + a \sqrt{\ln 2}$ .

Nous avons donc  $\boxed{\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 2 a \sqrt{\ln 2}}$ .





5. Avec l'approximation proposée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= 2 A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{a^2}\right) [1 + \cos(2\pi\nu\tau)] d\nu \\
 &= 2 A a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} [1 + \cos(2\pi(\nu_0 + a u)\tau)] du \\
 &= 1 A a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} [1 + \cos(2\pi\nu_0\tau) \cos(2\pi a u \tau) - \sin(2\pi\nu_0\tau) \sin(2\pi a u \tau)] du \\
 &= 2\sqrt{\pi} A a (1 + e^{-\pi^2 a^2 \tau^2} \cos(2\pi\nu_0\tau))
 \end{aligned}$$

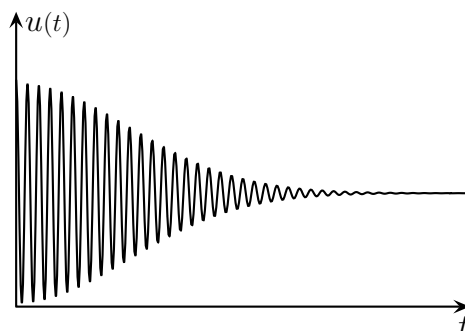
Ce qui est bien de la forme :

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_m [1 + \gamma(\tau) \cos(2\pi\nu_0\tau)]} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathcal{E}_m = 2\sqrt{\pi} A a} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma(\tau) = e^{-\pi^2 a^2 \tau^2}}$$

6. Nous avons  $\tau = \frac{\delta}{c} = \frac{2Vt}{c}$ .

La tension  $u(t)$  oscille avec la période  $T' = \frac{c}{2V\nu_0}$  entre les courbes d'équations  $1 + \gamma\left(\frac{2Vt}{c}\right)$  et  $1 - \gamma\left(\frac{2Vt}{c}\right)$ .

Le contraste  $\gamma\left(\frac{2Vt}{c}\right)$  est divisé par deux au bout de la durée  $\tau' = \frac{c\sqrt{\ln 2}}{2\pi V a}$  qui est très supérieure à  $T'$  puisque  $a$  est très inférieur à  $\nu_0$ .



## ✿ Exercice 8

*Analyse physique.* Ici nous avons deux sources ponctuelles incohérentes puisque physiquement distinctes. Par conséquent, si interférence il y a, elles seront créées par une source et les interférences des deux sources se superposeront sans interférer elles-mêmes. Ici, il peut y avoir des interférences créées par  $S$  en envisageant deux rayons, l'un passant au-dessus de  $\mathcal{E}$  et se réfléchissant sur  $\mathcal{M}_1$  et l'autre passant en-dessous de  $\mathcal{E}$  et se réfléchissant sur  $\mathcal{M}_2$ . Les grandeurs pertinentes seront  $\lambda$  (radiation lumineuse),  $a$ ,  $\ell$  et  $D$  (description géométrique du dispositif).

*Analyse technique.* Plutôt qu'étudier les rayons issus de  $S$  et réfléchis par  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , nous allons chercher les sources fictives  $S_1$  et  $S_2$  associées à  $S$  et qui interfèrent sur l'écran. Nous serons alors ramenés à l'étude d'interférences d'ondes sphériques, cas que nous connaissons. Nous pourrions alors en déduire l'intensité  $I(x)$  sur l'écran. Nous ferons pareil pour déterminer  $I'(x)$  et sommerons les deux intensités.

$S$  a pour images  $S_1$  et  $S_2$  par les deux miroirs plans.

$S_1$  et  $S_2$  sont des sources fictives, cohérentes, situées à une distance  $D$  de l'écran, distantes de  $4\ell$  (si, si, que le lecteur sceptique le vérifie) et symétriques par rapport au plan d'abscisse  $-a$ .

En reprenant les résultats des interférences de deux ondes sphériques, nous pouvons dire que l'interfrange sur l'écran est  $i = \frac{\lambda D}{4\ell}$ , la frange centrale est en  $-a$  et l'intensité s'écrit :

$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{8\pi(x+a)}{\lambda D} \right) \right]$$

Le raisonnement est le même pour la source  $S'$ , ce qui donne une interfrange sur l'écran de  $i = \frac{\lambda D}{4\ell}$ , une frange centrale en  $+a$  et une intensité :

$$I'(x) = \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{8\pi(x-a)}{\lambda D} \right) \right]$$

Comme les deux sources  $S$  et  $S'$  sont incohérentes, nous devons sommer les intensités, et cela donne, avec l'aide d'une petite formule de trigonométrie :

$$I(x) = I_{\max} \left[ 1 + \Gamma \cos \left( \frac{8\pi \ell x}{\lambda D} \right) \right] \quad \text{où} \quad \Gamma = \cos \left( \frac{8\pi \ell a}{\lambda D} \right)$$

$\Gamma$  est le contraste des franges.

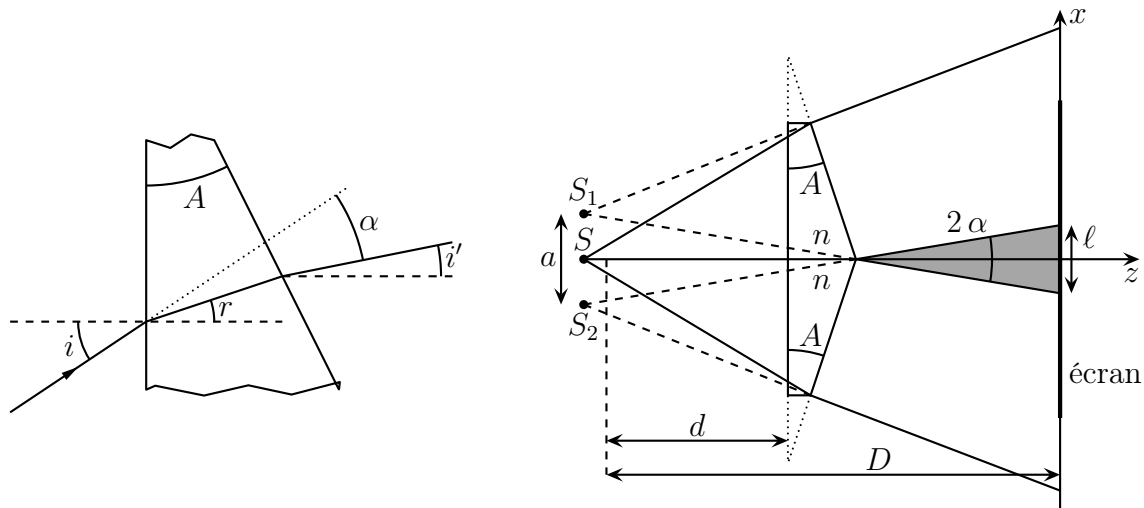
## ✿ Exercice 9

**1.** Ici, nous avons clairement affaire à de l'optique géométrique. Il s'agit du prisme, c'est quelque chose de connu.

En considérant le schéma ci-dessous, nous avons (puisque les angles sont petits) :  $i = nr$  à la traversée du premier dioptre.

Pour la 2<sup>e</sup> réfraction, l'angle d'incidence est  $r - A$  et l'angle de réfraction est  $i' - A$ , ce qui donne  $n(r - A) = i' - A$ .

Comme l'angle de déviation vaut  $\alpha = |i - i'|$ , nous trouvons, en substituant :  $i - i' = A(1 - n)$  puis  $\alpha = A(n - 1)$ .



2. Finalement, tout se passe comme si le faisceau qui arrive sur le prisme tournait « en bloc » de  $\alpha$ , ce qui conduit à la représentation du champ d'interférence ci-dessus.

3. Les interférences sont celles de deux ondes sphériques dont les sources sont séparées de  $a$  et observée à une distance  $D$ .

La frange centrale est en  $x = 0$  et l'interfrange est  $i = \frac{\lambda A}{a}$ .

L'intensité est donc 
$$I(x) = \frac{I_{\max}}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi a x}{\lambda D} \right) \right].$$

4. La largeur  $a$  du champ d'interférence vaut  $\ell = (D - d) \times 2\alpha = 2(D - d)(n - 1)A = 15,7080$  mm et l'interfrange vaut  $i = 0,337472$  mm.

Il y a ainsi 23 franges brillantes de part et d'autre de la frange centrale, soit 47 franges en tout.

✿ **Exercice 10**

1. Ici, pas de difficulté particulière, la question étant essentiellement technique : déterminer un rapport d'amplitude. Pour cela, nous pouvons constater qu'il s'agit des amplitudes d'ondes planes. Il va juste rester la question du point de référence, c'est-à-dire du point où les deux ondes planes sont en phase.

Les ondes planes sont déviées d'un angle  $\pm\alpha$  avec  $\alpha = (n - 1)A$  (cf. exercice sur le biprisme de Fresnel ou le cours de sup sur le prisme).

Les trois ondes qui interfèrent sont planes de vecteur d'onde (avec  $\alpha \ll 1$ ) :

$$\vec{k}_1 = k(\cos\alpha \vec{u}_z - \sin\alpha \vec{u}_x) = k\vec{u}_z - k\alpha \vec{u}_x; \quad \vec{k}_2 = k\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{k}_3 = k\vec{u}_z + k\alpha \vec{u}_x$$

Ces trois ondes s'écrivent donc

$$\underline{s}_1 = \underline{s}_{10} e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}}; \quad \underline{s}_2 = \underline{s}_{20} e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}}; \quad \underline{s}_3 = \underline{s}_{30} e^{-j\vec{k}_3 \cdot \vec{r}}$$

Pour relier  $\underline{s}_1$  à  $\underline{s}_2$ , nous allons traduire le fait qu'elles sont en phase en  $P$ , i.e. qu'elles ont la même amplitude complexe.

Comme  $\vec{OP} = -d\vec{u}_z + \frac{h}{2}\vec{u}_x$ , cela donne :

$$\underline{s}_1(P) = \underline{s}_2(P) \quad \rightsquigarrow \quad \underline{s}_{10} e^{-j(kd - k\alpha h/2)} = \underline{s}_{20} e^{-jk d}$$

Tt ainsi  $\underline{s}_{10} = \underline{s}_{20} e^{jk\alpha h/2}$ .

Nous avons donc :

$$\frac{\underline{s}_1(M)}{\underline{s}_1(M)} = \frac{\underline{s}_{10} e^{-j \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}}}{\underline{s}_{20} e^{-j \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}}} = \frac{\underline{s}_{10}}{\underline{s}_{20}} e^{j(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OP}} = e^{j k \alpha h/2} e^{j k \alpha x} \rightsquigarrow \boxed{\frac{\underline{s}_1(M)}{\underline{s}_2(M)} = e^{j(k \alpha x + k h/2)}}$$

Nous trouvons de même  $\boxed{\frac{\underline{s}_3(M)}{\underline{s}_2(M)} = e^{j(-k \alpha x + k h/2)}}$

**2.** *Analyse physique. Ici les trois ondes sont cohérentes. Ce sont donc les amplitudes complexes qui s'addionnent.*

Sommons les amplitudes complexe. Cela donne :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M) &= \underline{s}_1(M) + \underline{s}_3(M) + \underline{s}_3(M) = \underline{s}_2(M) \left( e^{j(k \alpha x + k h/2)} + 1 + e^{j(-k \alpha x + k h/2)} \right) \\ &= \underline{s}_2(M) \left[ 1 + e^{j(k h/2)} \left( e^{j k \alpha x} + e^{-j k \alpha x} \right) \right] = \underline{s}_2(M) \left( 1 + 2 e^{j(k h/2)} \cos(k \alpha x) \right) \end{aligned}$$

L'intensité vaut alors :

$$\begin{aligned} I(M) &= \underline{s}(M) \underline{s}^*(M) = \underline{s}_2(M) \left( 1 + 2 e^{j(k h/2)} \cos(k \alpha x) \right) \times \underline{s}_2^*(M) \left( 1 + 2 e^{-j(k h/2)} \cos(k \alpha x) \right) \\ &= \underline{s}_2(M) \underline{s}_2^*(M) \left( 1 + 4 \cos^2(k \alpha x) + 2(e^{j(k h/2)} + e^{-j(k h/2)}) \cos(k \alpha x) \right) \end{aligned}$$

Soit, finalement  $\boxed{I(M) = I_0 \left( 1 + 4 \cos \left( \frac{k h}{2} \right) \cos(k \alpha x) + 4 \cos^2(k \alpha x) \right)}$ .

☞ *Remarque.* il faut que  $d$  soit suffisamment grand pour que les trois ondes puissent se superposer. Avec  $d$  trop petit, les interférences ne seraient qu'à deux ondes.

## ✿ Exercice 11

**1.** Le premier rayon réfléchi n'interfère pas avec les autres car lors de la traversée de la lentille la différence de marche avec les rayons 1 (ou 2) est bien plus grande que la longueur de cohérence du train d'onde.

Nous pouvons de plus négliger les autres rayons réfléchis qui ont une amplitude négligeable devant les deux premiers (cf. applications numériques dans l'exercice « Interférence avec une lame de verre »).

**2.** Il s'agit ici des interférences analogues à celles se faisant sur un coin d'air.

Le plan où se font les interférences est donc le plan de la lame de verre sur lequel se réfléchit le rayon 2.

**3.** La différence de marche entre les deux rayons lumineux vaut  $\delta = 2 n_{\text{air}} e + \frac{\lambda}{2}$  où  $e$  est l'épaisseur de la lame d'air au niveau de la réflexion et  $\frac{\lambda}{2}$  le déphasage dû à la réflexion air-verre.

Étant donné la symétrie du dispositif, les franges obtenues sont des anneaux.

Notons  $S$  le sommet du dioptre sphérique en contact avec la lame de verre,  $O$  son centre (à une distance  $R$  à la verticale de  $S$ ) et considérons un point  $M$  de la lame de verre à la distance  $r$  de  $S$ .

L'épaisseur de la lame d'air en ce point vaut donc  $R(1 - \cos \theta)$  où  $\theta = \widehat{MCS}$ .

Cet angle étant très petit nous pouvons écrire  $\theta = \frac{r}{R}$  et  $\cos \theta = \frac{\theta^2}{2}$  ce qui donne, finalement :

$$\delta = \frac{r^2}{2R} + \frac{\lambda}{2}$$

L'anneau central est donc sombre et les anneaux brillants sont de rayons  $r_m$  tels que :

$$r_m = \sqrt{\lambda R (2m - 1)}$$
 pour  $m$  entier positif

### ✿ Exercice 12

1. (a) Il s'agit ici d'un problème ondulatoire usuel. L'analyse physique est déjà faite par l'énoncé : il n'y a pas d'onde réfléchie dans le milieu incident. Reste 4 ondes à déterminer ou plutôt 3 coefficients de proportionnalité puisque le dispositif est linéaire. Pour cela il faut trois conditions aux limites.

Les conditions aux limites (*i.e.* en  $x = 0$  et  $x = e$ ) s'écrivent :

$$\underline{s}_B(0,t) = t_{12} \underline{s}_A(0,t) + r_{12} \underline{s}_C(0,t) ; \quad \underline{s}_C(e,t) = r_{21} \underline{s}_B(e,t) ; \quad \underline{s}_D(e,t) = t_{21} \underline{s}_B(e,t)$$

De plus la propagation de l'onde dans la lame donne (attention au sens de propagation) :

$$\underline{s}_B(e,t) = \underline{s}_B(0,t) e^{j\varphi/2} \quad \text{et} \quad \underline{s}_C(0,t) = \underline{s}_C(e,t) e^{j\varphi/2}$$

En remplaçant successivement, nous obtenons :

$$\underline{s}_D(e,t) = r_{21} \underline{s}_B(e,t) = r_{21} e^{j\varphi/2} \underline{s}_B(0,t) = (\dots) = t_{21} t_{12} e^{j\varphi/2} \underline{s}_A(0,t) + r_{12} r_{21} e^{j\varphi} \underline{s}_B(e,t)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\underline{s}_D(e,t)}{\underline{s}_A(0,t)} = \frac{t_{21} t_{12} e^{j\varphi/2}}{1 - r_{12} r_{21} e^{j\varphi}} \quad \text{et} \quad G = \frac{\underline{s}_D \underline{s}_D^*}{\underline{s}_A \underline{s}_A^*} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

Et ainsi 
$$G = \frac{1}{1 + \frac{4R}{T} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

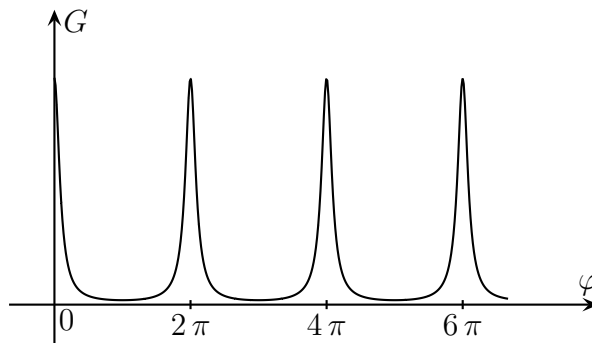
☞ *Remarque.* la dernière condition aux limite était celle permettant d'annuler l'onde retour dans le milieu incident.

1. (b) L'incidence n'est plus uniquement normale et va présenter une symétrie de révolution autour de l'axe normal : nous allons donc observer des anneaux d'interférence.

1. (c) Les pics sont centrés en  $\varphi = 2m\pi$ , *i.e.* pour  $n_2 = \frac{m}{2e\sigma} = \frac{m\lambda_0}{2e}$ .

À mi-hauteur, nous avons  $\frac{4R}{T^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$  ce qui donne  $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{T^2}{4R}$  puis, puisque  $\varphi$  est petit :

$$\varphi = \frac{T}{2\sqrt{R}} \simeq \frac{T}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta n_2 = \frac{T \lambda_0}{4\pi e}$$



2. Les radiations sont résolues, *i.e.* sont distinctes si, pour une même valeur de  $m$  l'écart entre les deux pics est supérieur à leur largeur, ce qui donne  $m \frac{\Delta\lambda}{2e} = \frac{2n_2 e}{\lambda_0} \frac{\Delta\lambda}{2e} > \frac{T \lambda_0}{4\pi e}$ .

Comme  $n_2 = 1$ , la condition s'écrit  $\Delta\lambda > \frac{T \lambda_0^2}{4\pi e}$ .

Il s'agit d'un spectromètre qui peut avoir une excellente résolution pour une épaisseur  $e$  suffisante.

REMARQUE

Ici nous n'avons étudié les interférences dans une seule direction, celle normale à l'interféromètre.

Une étude plus complète, basée sur les interférences faisant suite aux réflexions multiples dans une lame à faces parallèle et très analogue au niveau technique à ce qui précède permettrait de déterminer l'intensité observée dans une direction quelconque.

Notez que les résultats restent qualitativement les mêmes : l'interféromètre de PÉROT – FABRY est un excellent interféromètre. La raison est toujours la même : c'est parce qu'il permet de faire interférer un grand nombre d'ondes.

### ✿ Exercice 13

1. Il y a division d'amplitude. On peut donc utiliser une source large si on observe les interférences à l'infini.

2. Quelle que soit la face argenté provoquant la réflexion du rayon lumineux (*i.e.* que cela soit la face tournée vers  $S$  ou celle tournée vers  $\mathcal{M}_2$ ), les deux rayons subissent deux réflexions sur la séparatrice et deux traversées. Une compensatrice n'est donc pas nécessaire.

3. *C'est dans ce genre de question qu'il est possible d'apprécier toute la puissance de la mathématique. En posant les étapes élémentaire doucement et après en mélangeant tout sans chercher à comprendre, nous arrivons à un résultat qu'il nous reste à interpréter.*

*Autrement dit nous allons traduire de manière formelle les différentes transformation géométrique de dépliement des miroirs de manière à pouvoir déterminer  $S_1$  et  $S_2$  facilement. Ici étant donné la position de la séparatrice, mieux vaut décrire un point dans le repère  $(Oxy)$ .*

Notons  $\underline{z} \stackrel{\text{not}}{=} x + jy$  l'affixe d'un point dans le repère  $Oxy$  associé et  $\underline{z}_0$  celle de  $S$ .

L'image d'un point par la séparatrice est d'affixe  $\underline{z}'$  telle que  $\underline{z}' = \underline{z}^*$ .

L'image d'un point par une réflexion sur  $\mathcal{M}_1$  puis sur  $\mathcal{M}_2$  correspond à une rotation de centre  $A$  et d'angle  $+\frac{\pi}{2}$  (rotation d'angle double l'angle formé par les droite) ce qui se traduit techniquement par  $\underline{z} - \underline{z}_A = (\underline{z} - \underline{z}_A) \times j$ .

De même l'image d'un point par une réflexion d'abord sur  $\mathcal{M}_2$  puis sur  $\mathcal{M}_1$  correspond à une rotation de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$  ce qui  $\underline{z} - \underline{z}_A = (\underline{z} - \underline{z}_A) \times (-j)$ .

$S_1$  est l'image de  $S$  par réflexion sur  $\mathcal{M}_2$  puis sur  $\mathcal{M}_1$ , nous avons donc :

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_A - j(\underline{z}_0 - \underline{z}_A)$$

$S_2$  est l'image de  $S$  par :

- réflexion sur la séparatrice
- réflexion sur  $\mathcal{M}_1$  puis sur  $\mathcal{M}_2$
- réflexion sur la séparatrice

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\underline{z}_2 = \left( \underline{z}_A + j(\underline{z}_0^* - \underline{z}_A) \right)^* = \underline{z}_A^* - j(\underline{z}_0 - \underline{z}_A^*)$$

Finalement :  $\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (1 + j)(\underline{z}_A - \underline{z}_A^*) = 2y_a(1 + j)$ .

Autrement dit  $S_1$  et  $S_2$  sont séparées par une translation de longueur  $2a$  et de direction  $OY$ .

4. Les deux sources fictives étant dans la direction d'observation, nous avons ici des franges circulaires.
5. Tout comme pour l'interféromètre de MICHELSON, la différence de marche à l'infini ne dépend que de la direction d'observation et non de la position initiale de la source donc nous pourrions utiliser une source large.