

Optique

Chapitre 2

Interférences

Interférences

Après le chapitre préparatoire ayant introduit quelques notions fondamentales dans l'étude de l'optique ondulatoire, nous allons commencer par nous intéresser au phénomène des interférences.

Comme nous le verrons, ces interférences ne sont qu'une « simple » conséquence quasi-immédiate de l'aspect ondulatoire de la lumière associé au caractère linéaire du milieu de propagation. Le caractère faussement étrange voire magique qui est souvent associé aux interférences ne provient que des ordres de grandeurs temporels mis en jeu. Rappelons d'ores et déjà que la lumière est une onde de fréquence d'environ 10^{15} Hz ce qui va bien au delà de l'humainement imaginable.

Pour appréhender les interférences, nous commencerons par nous pencher sur le cas le plus simple, celui des interférences à deux ondes. Cela nous mènera, au passage, à parler d'un système interférométrique bien connu, l'interféromètre de MICHELSON.

Dans une deuxième partie, nous étudierons un peu plus précisément ce qui se passe lorsque les conditions sont presque mais pas totalement réunies pour qu'il y ait observation du phénomène d'interférence. Il s'agira alors de s'intéresser à ce que nous appellerons la *cohérence* des sources.

Table des matières

Biographies succinctes	5
I Interférences à deux ondes	6
I-1 Condition d'existence : cas de deux OPPM	6
I-1·i que sont les interférences?	6
I-1·ii superposition de deux ondes planes	6
situation	6
première version de l'éclairement	7
I-1·iii interférences	8
I-1·iv éclairement	9
réécriture	9
ondes de même amplitude	9
interprétation	10
I-1·v figure d'interférence pour deux OPPM	10
résultat	10
construction des plans de lumière	11
distance	13
I-2 Interférences de deux ondes sphériques	14
I-2·i miroir de LLOYD	14
situation	14
analyse	14
interférences	15
I-2·ii différence de marche	15
réécriture de l'éclairement	15
expression de la différence de marche	15
expression finale de l'éclairement	18
I-2·iii figure d'interférence	18
représentation	18
ordre d'interférence	19
interfrange	20
loi phénoménologique	20
I-2·iv cas général d'interférence de deux OSPM	21
deux sources cohérentes	21
figure d'interférence	21
représentation	22
deux cas d'observation	22
I-3 Interféromètre de MICHELSON	23
I-3·i c'est une version réduite	23
I-3·ii fonctionnement qualitatif de l'interféromètre idéal	24
première simplification	24
schématisation et nouvelle simplification	24
I-3·iii système équivalent	26
I-3·iv réglages	27
lame d'air	27
coin d'air	27
I-3·v utilisation en lame d'air éclairée par une onde sphérique	27
observation des interférences	27
figure d'interférence	28

	I-3·vi	utilisation en coin d'air éclairée par une onde plane en incidence quasi normale	33
		situation	33
		figure d'interférence	34
I-4	Bilan		34
	I-4·i	type d'interféromètre	34
	I-4·ii	interféromètre à deux ondes	35
	I-4·iii	à quoi servent les interférences ?	35
II	Problèmes de cohérence		37
II-1	Origine des incohérences		37
II-2	Cohérence spatiale		37
	II-2·i	idoinoton	37
		situation	37
		approche qualitative	38
		éclairage	39
		interprétation	40
	II-2·ii	le miroir de LLOYD éclairé par une fente large – fonction sinus cardinal	41
		agrandir la source dans le sens des franges	41
		agrandir la source dans le sens orthogonal aux franges	41
	II-2·iii	le contraste	45
	II-2·iv	le michelson en lame d'air	45
	II-2·v	le michelson en coin d'air	46
		simulation	46
		retrouver la différence de marche	47
		interfrange	48
II-3	Cohérence temporelle		48
	II-3·i	le problème, l'idée	48
	II-3·ii	le michelson en lame d'air	49
		expression de l'éclairage	49
		mesurer $\Delta\lambda$	51
	II-3·iii	miroir de LLOYD	52
		spectre carré	52
		éclairage	52
		interprétation	53
	II-3·iv	l'interféromètre de MICHELSON	54
		des conclusions identiques en coin d'air	54
		spectre cannelé en lame d'air	55
II-4	Bilan		56
	II-4·i	éclairage et cohérence	56
	II-4·ii	localisation des interférences	56
	II-4·iii	l'interféromètre de MICHELSON	57
	II-4·iv	à quoi ça sert ?	57
	Fiche de révision		58

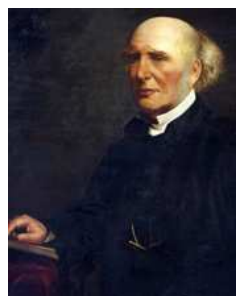
Biographies succinctes



Augustin FRESNEL

(1788 Broglie (France) – 1827 Paris)

Polytechnicien, Augustin FRESNEL commence sa carrière comme ingénieur des Ponts et Chaussée. Son côté royaliste le conduit en prison lorsque Napoléon revient de l'île d'Elbe. Réhabilité en 1818 il reprend du service comme préparateur à l'école Polytechnique. Il travaille beaucoup sur l'optique et notamment sur la théorie ondulatoire de la lumière ce qui lui vaut d'être très contesté sur le plan scientifique malgré des contributions utiles comme « les lentilles de FESNEL ». Il est atteint de la tuberculose mais fait face grâce à sa foi. Il meurt à 39 ans.



Humphrey LLOYD

(1800 Dublin – 1881)

Fils de Bartholomew LLOYD (doyen du Trinity collège de Dublin de 1831 à 1867), Humphrey LLOYD décroche la médaille d'or lors de l'obtention de son diplôme en 1820. Une bourse lui est accordée 4 ans plus tard et succède à son père en tant que professeur de philosophie naturelle et expérimentale en 1831. Après être devenu maître enseignant en 1843, il est nommé doyen en 1867 pour succéder là aussi à son père. Il a beaucoup étudié l'optique et le magnétisme terrestre.



Albert Abraham MICHELSON

(1852 Strelno (Prusse) – 1931)

Américain fils d'émigré polonais, Albert MICHELSON enseigne la physique dès 1880. Il s'intéresse particulièrement à la mesure de la vitesse de la lumière en améliorant tout au long de sa vie l'interféromètre qui porte son nom. Aidé en 1887 par Edward MORLEY (1838 – 1923) sur une version améliorée du dispositif interférométrique, le résultat reste encore négatif mais deviendra ainsi l'un des fondements de la relativité restreinte d'Albert EINSTEIN (1879 – 1955). Albert MICHELSON reçoit le prix Nobel de physique en 1907.

I – Interférences à deux ondes

I.1 – Condition d'existence : cas de deux OPPM

I.1.i – que sont les interférences ?

◇ Posons tout d'abord une définition.

Nous parlons d'*interférence* lorsque l'éclairement de deux ondes n'est **pas** égale à la somme des éclairements de ces deux ondes.

◇ Il s'agit d'une définition pour des interférences à deux ondes facilement généralisable à N ondes.

Pour qu'il y ait interférence entre deux ondes, il **faut** :

- qu'elles aient la même pulsation (condition de synchronisme) ;
- qu'elles soient issues du même train d'onde (condition de cohérence).

◇ Nous allons expliquer ces deux conditions *nécessaires* dans la suite.

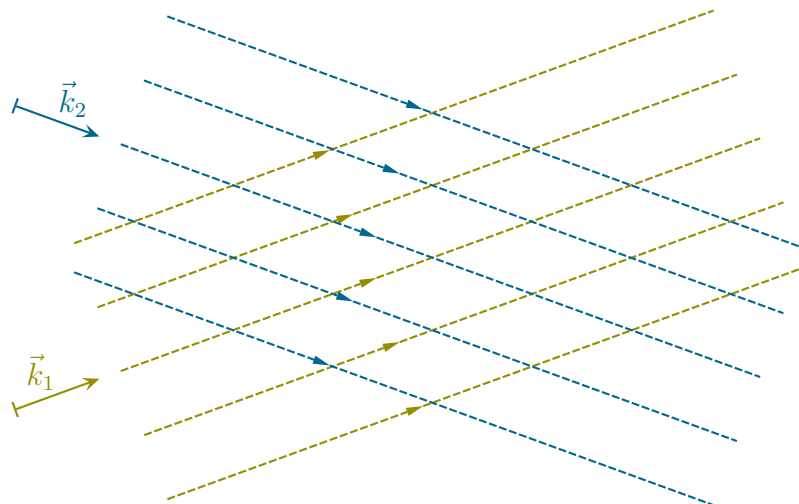
I.1.ii – superposition de deux ondes planes

★ **situation**

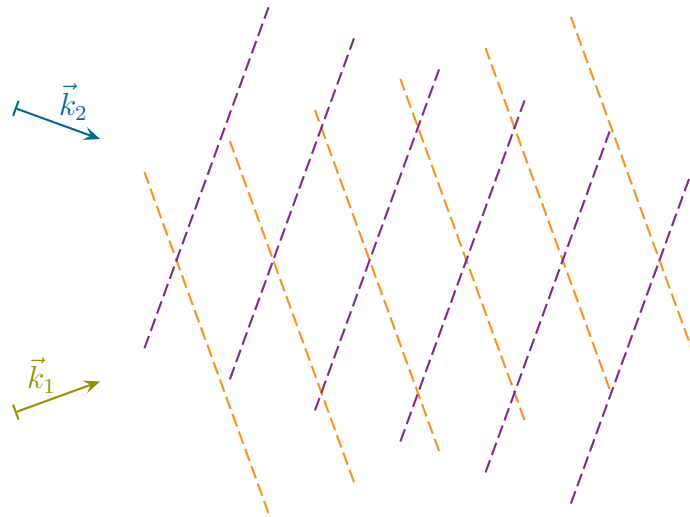
🕒 **représentation**

◇ Imaginons deux ondes planes qui se superposent.

◇ En terme de rayons lumineux, la situation est la suivante.



◇ En terme ondulatoire, avec les plans de phase, la situation est la suivante.



◇ Insistons : les deux situations sont parfaitement identiques mais vues sous deux angles différents.

🌀 amplitudes scalaires

◇ Intéressons-nous à l'onde ①.

◇ Chaque train d'onde peut s'écrire sous la forme

$$s_1(M,t) = a_1(M) \cos \left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM} - ?_1 \right)$$

◇ Le $?_1$ représente la phase à l'origine de l'onde.

◇ La phase à l'origine $?_1$ dépendant du train d'onde et les trains d'onde se succédant sans cesse, nous pouvons réécrire l'amplitude de l'onde arrivant en un point M sous la forme

$$s_1(M,t) = a_1(M) \cos \left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM} - ?_1(t) \right)$$

◇ Cette fois $?_1(t)$ est une fonction du temps dont les valeurs varient sans cesse (sur une durée de l'ordre de la durée de cohérence) et sont totalement aléatoires.

◇ De même l'amplitude scalaire de la 2^e onde s'écrit

$$s_2(M,t) = a_2(M) \cos \left(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OM} - ?_2(t) \right)$$

★ première version de l'éclairement

◇ L'éclairement en un point M s'écrit, par définition

$$\mathcal{E}(M) = \left\langle s^2(M,t) \right\rangle$$

◇ Cela donne, en développant

$$s^2(M,t) = s_1^2(M,t) + s_2^2(M,t) + 2 s_1(M,t) \times s_2(M,t)$$

◇ La moyenne étant un opérateur linéaire, nous avons

$$\left\langle s^2(M,t) \right\rangle = \left\langle s_1^2(M,t) \right\rangle + \left\langle s_2^2(M,t) \right\rangle + \left\langle 2 s_1(M,t) \times s_2(M,t) \right\rangle$$

◇ Et en identifiant avec les éclaircements

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + \underbrace{\langle 2 s_1(M,t) \times s_2(M,t) \rangle}_{(*)}$$

◇ Le terme $(*)$ est donc le terme responsable des interférences :

- s'il est nul quel que soit M il n'y a pas d'interférence ;
- sinon il y a interférence.

◇ Réécrivons ce terme interférentiel avant de poursuivre.

$$2 s_1(M,t) \times s_2(M,t) = 2 a_1(M) \cos \left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_1(t) \right) \times a_2(M) \cos \left(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_2(t) \right)$$

avec la formule trigonométrique $\cos a \times \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

$$= a_1(M) a_2(M) \left[\cos \left((\omega_1 + \omega_2) t - (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \cos \left((\omega_1 - \omega_2) t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \right) \right]$$

◇ En prenant la valeur moyenne temporelle, le premier terme est obligatoirement de valeur moyenne nulle puisque du type $\langle \cos(\omega t) \rangle$ et il reste ainsi

$$\langle 2 s_1(M,t) \times s_2(M,t) \rangle = a_1(M) a_2(M) \left\langle \cos \left((\omega_1 - \omega_2) t - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \right) \right\rangle$$

I.1.iii – interférences

◇ Rappelons que même pour un détecteur rapide (temps de réponse en 10^{-9} s), les fréquences optiques sont telles (10^{15} Hz) qu'il « voit » au moins 10^6 oscillations, *i.e.* il n'en perçoit que la *moyenne*.

◇ Ici pour que le terme interférentiel soit non nul, il *faut* que la moyenne d'un cosinus soit non nulle.

◇ Or pour qu'un $\cos(\omega t + \varphi)$ soit de moyenne non nulle il est *nécessaire* que son argument soit indépendant du temps.

◇ Ici l'argument du cosinus se décompose en trois termes.

- « $(\omega_1 - \omega_2) t$ » ne peut être indépendant du temps que si $\omega_1 = \omega_2$. Nous retrouvons là la condition de synchronisme.
- « $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OM}$ » ne dépend que de la géométrie et de l'espace. C'est indépendant du temps, ce terme ne pose donc pas de problème.
- « $-\varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ » ne peut être indépendant du temps que si $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ car les fonctions $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ non seulement sont totalement aléatoires mais en plus sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Or la condition $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ implique que les ondes viennent du *même* train d'onde, c'est la condition de cohérence.

Deux points sources physiquement différents ne peuvent pas engendrer d'interférences.

◇ C'est la raison pour laquelle dans la vie courante il est rare de voir des interférences car il faut un montage particulier ou au moins une situation particulière pour éviter que la lumière ne se mélange

de trop. Les manifestations les plus fréquentes d'interférences dans la vie courante sont les irisations des bulles de savon (ou de flaque d'huile).

I.1.iv – éclaircissement

★ réécriture

◇ Supposons désormais que les conditions d'interférences soient remplies, *i.e.* que nous avons

$$\omega_1 = \omega_2 \quad \text{et} \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

◇ L'éclaircissement s'écrit donc

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + a_1(M) a_2(M) \left\langle \cos \left((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OM} \right) \right\rangle$$

◇ Comme le cosinus est constant (nous avons tout fait pour!), sa valeur moyenne est égale à lui-même

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + a_1(M) a_2(M) \cos \left((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OM} \right)$$

◇ Pour l'onde ① nous avons

$$\mathcal{E}_1(M) = \left\langle a_1^2(M) \left(\omega_1 t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OM} - \varphi_1(t) \right) \right\rangle \rightsquigarrow \mathcal{E}_1(M) = \frac{a_1^2(M)}{2} \rightsquigarrow a_1(M) = \sqrt{2 \mathcal{E}_1(M)}$$

◇ Et ainsi l'éclaircissement s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2 \sqrt{\mathcal{E}_1(M) \mathcal{E}_2(M)} \cos \left((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OM} \right)$$

FORMULE DE FRESNEL

Pour deux ondes qui interfèrent, quelles que soient leurs natures, l'éclaircissement s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2 \sqrt{\mathcal{E}_1(M) \mathcal{E}_2(M)} \times \cos(\Delta\varphi) \quad \text{où :}$$

$\Delta\varphi$ est la différence de phase entre les ondes ondes au point M .

★ ondes de même amplitude

Pour deux ondes de même amplitude qui interfèrent, quelles que soient leurs natures, l'éclaircissement s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos(\Delta\varphi)) \quad \text{où :}$$

$\Delta\varphi$ est la différence de phase entre les ondes ondes au point M .

◇ En effet, avec $\mathcal{E}_1(M) = \mathcal{E}_2(M) = \mathcal{E}_0$ nous obtenons

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0 + 2 \mathcal{E}_0 \cos(\Delta\varphi)$$

◇ D'où le résultat avec $\mathcal{E}_{\max} = 4 \mathcal{E}_0$.

- ◇ L'intérêt de la notation \mathcal{E}_{\max} est de normaliser la fonction « éclairement » par sa valeur maximale.
- ◇ Insistons : cette loi n'est valable que pour l'interférence de **deux** ondes.
- ◇ À partir de trois ondes, il faut (presque) tout recommencer : partir des amplitudes complexes, les sommer et calculer $|\underline{s}(M)|^2$. La seule chose qu'il ne soit pas nécessaire de refaire c'est de retrouver les conditions d'interférence à savoir la condition de synchronisme et la condition de cohérence.

★ interprétation

- ◇ Nous pouvons constater que :

- si $\Delta\varphi \sim 0$ alors $\mathcal{E} > 2 \mathcal{E}_0$ voire $\mathcal{E} = 4 \mathcal{E}_0$;
- si $\Delta\varphi \sim \pi$ alors $\mathcal{E} < 2 \mathcal{E}_0$ voire $\mathcal{E} = 0$.

L'interférence est dite *constructive* (resp. *destructive*) lorsque l'éclairement obtenu est supérieur (resp. inférieur) à la somme des éclairements des deux ondes.

- ◇ Il existe aussi une définition plus courante.

L'interférence de deux ondes est dite *constructive* lorsque l'éclairement est maximale et elle est dite *destructive* lorsque l'éclairement est nul.

L'interférence de deux ondes est :

- constructive lorsque les deux ondes sont en phase ($\Delta\varphi = 2p\pi$ avec p entier) ;
- destructive lorsque les deux ondes sont en opposition de phase ($\Delta\varphi = \pi + 2p\pi$ avec p entier).

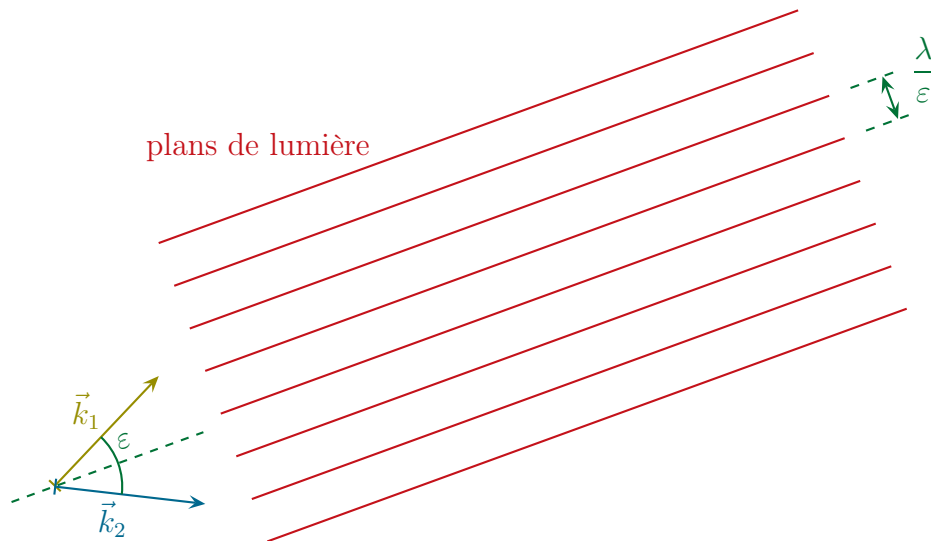
- ◇ Cette dernière interprétation est fondamentale puisque c'est celle qui sera à la base de l'exploitation des figures d'interférence.

I.1.v – figure d'interférence pour deux OPPM

★ résultat

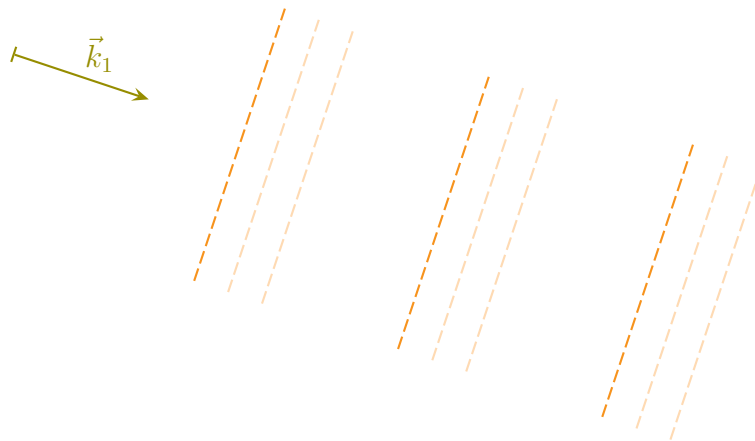
La *figure d'interférence* est l'éclairement reçu par un écran de l'interférence d'ondes lumineuses.

L'interférence de deux OPPM faisant un angle $\varepsilon \ll 1$ entre elles forme des plans de lumière parallèles entre eux, dans la direction moyenne des deux OPPM et distants de $\frac{\lambda}{\varepsilon}$

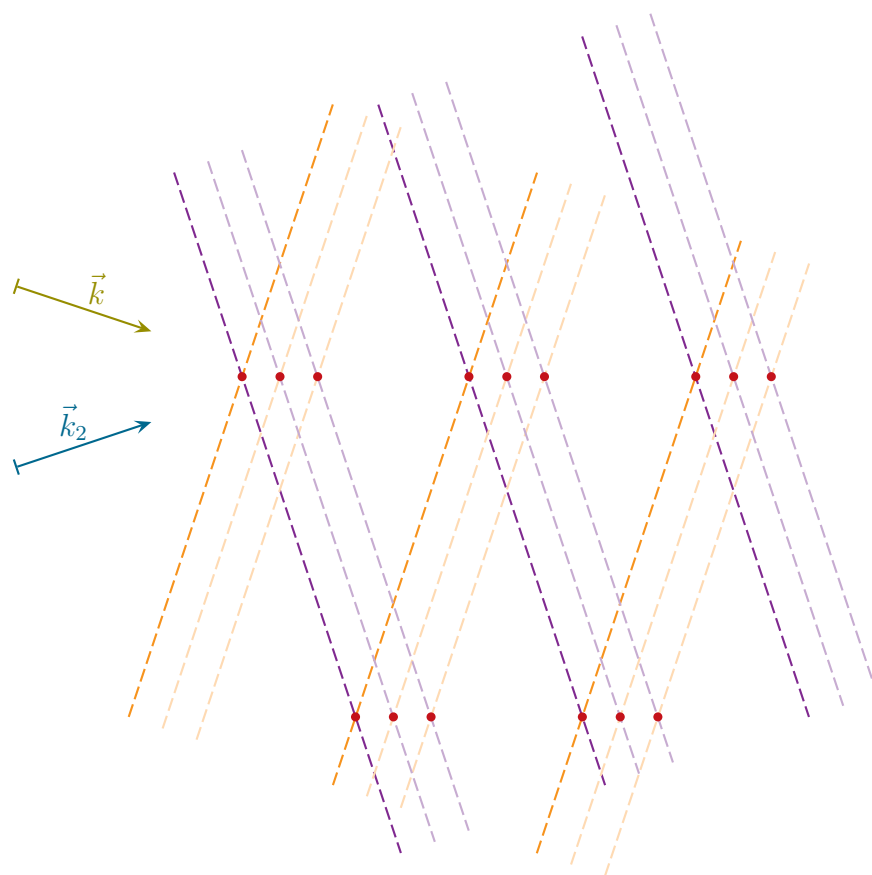


★ construction des plans de lumière

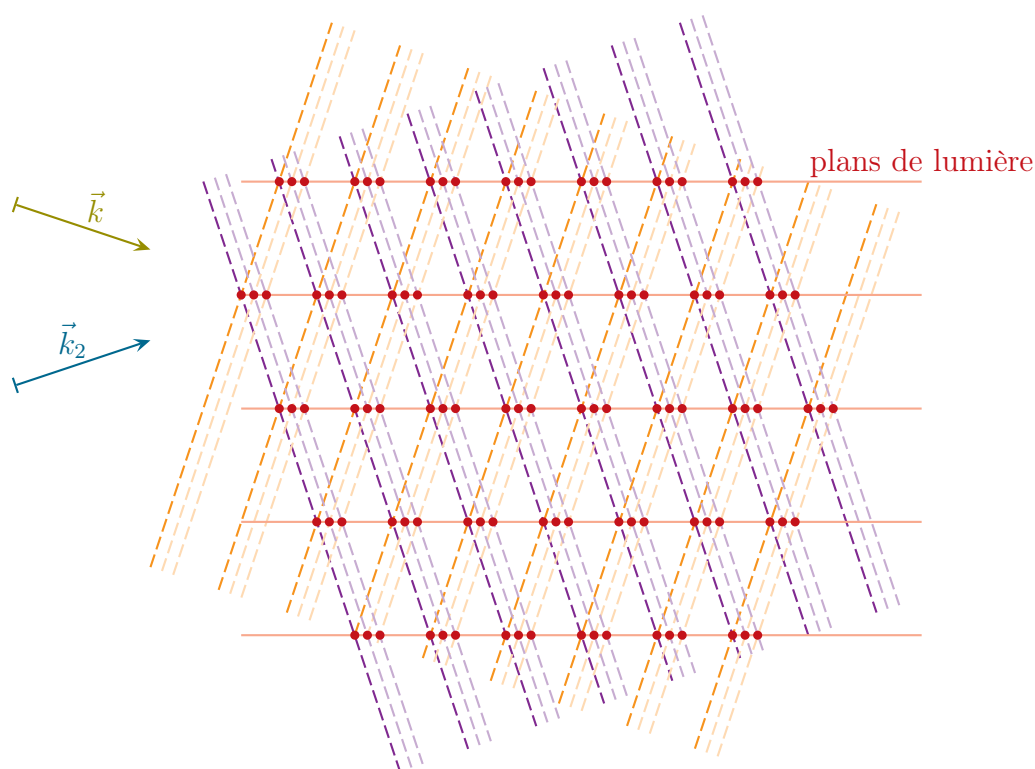
- ◇ Regardons une onde plane et représentons à t (couleur soutenue), à $t + \delta t$ et $t + 2\delta t$ (couleur claire) les plans de phase. Par convention, nous représentons les maxima de phase.



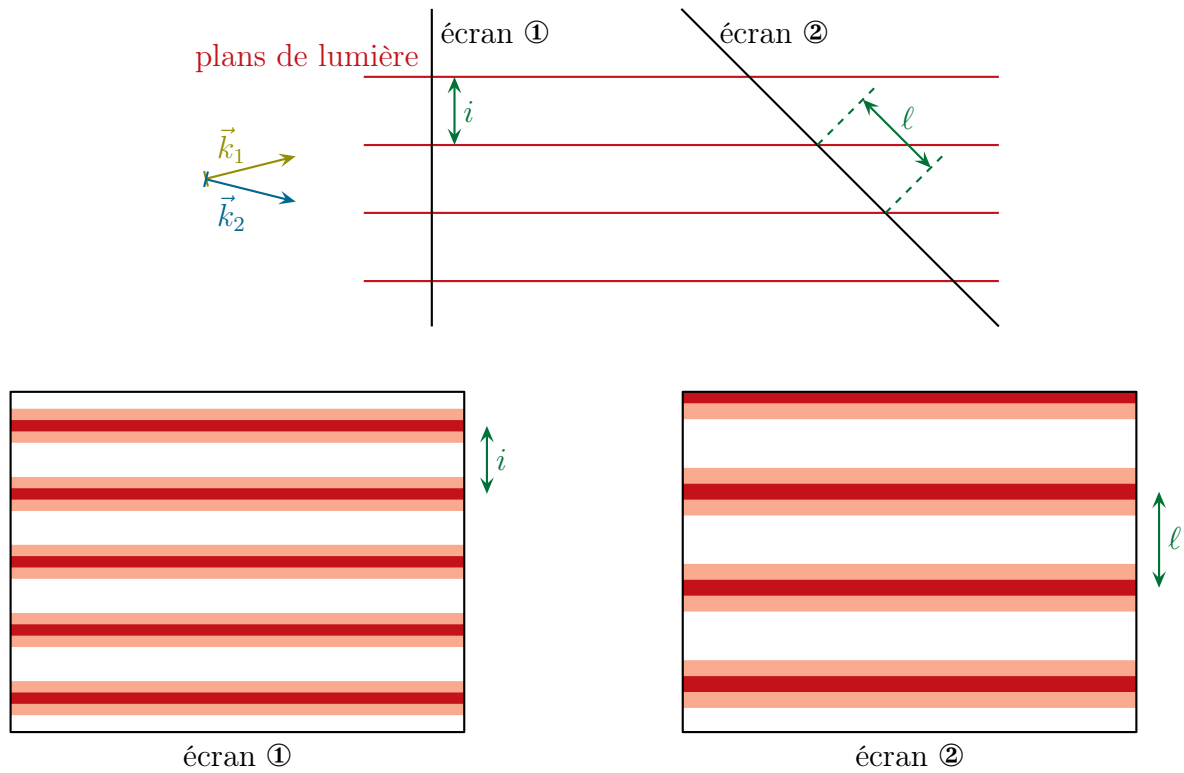
- ◇ Les plans avancent dans le sens et la direction de \vec{k} .
- ◇ Lorsqu'il y a deux ondes il y a interférences constructive (points rouges) au niveau des intersections à t , $t + \delta t$ et $t + 2\delta t$.



◇ Il faut bien imaginer que les points où il y a interférence « bougent » extrêmement vite. Si vite que nous ne voyons plus un point mais une ligne de lumière.

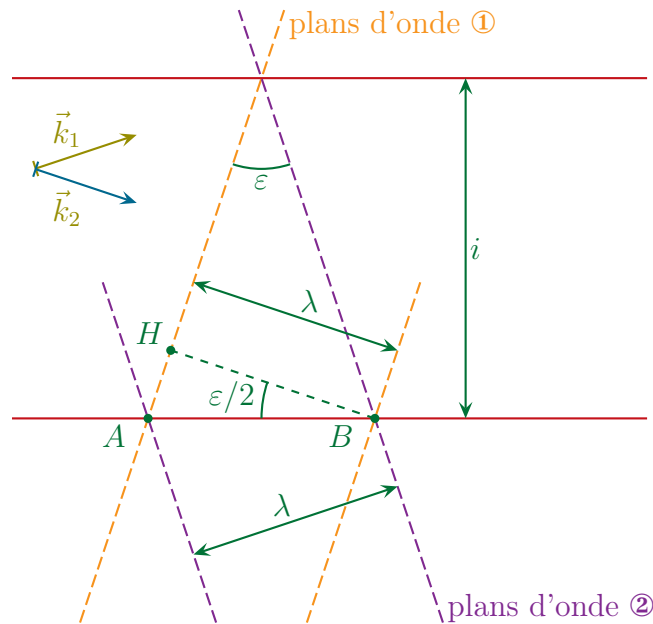


◇ Nous pouvons alors interposer un écran sur ces lignes de lumière, nous verrions alors des bandes lumineuses espacées différemment suivant l'inclinaison de l'écran.



★ distance

◇ Regardons de près deux bandes lumineuses sans oublier que les plans représentés sont des plans où la phase des ondes sont maximales donc sont séparés de λ .



◇ Nous avons

$$HB = \lambda \quad AB = \frac{\lambda}{\cos(\epsilon/2)} \quad \text{et} \quad \tan \frac{\epsilon}{2} = \frac{AB/2}{i}$$

◇ Cela nous conduit à

$$i = \frac{AB}{2 \tan \frac{\epsilon}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad i = \frac{\lambda}{2 \cos \frac{\epsilon}{2} \tan \frac{\epsilon}{2}}$$

◇ Et pour $\varepsilon \ll 1$ nous avons bien

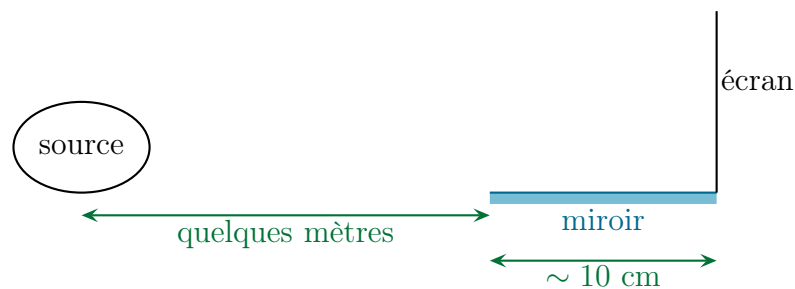
$$i = \frac{\lambda}{2 \times 1 \times \frac{\varepsilon}{2}} \quad \rightsquigarrow \quad i = \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

I.2 – Interférences de deux ondes sphériques

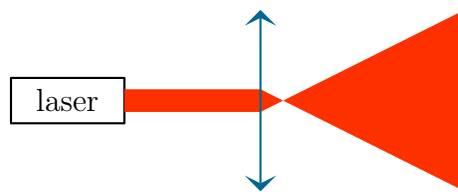
I.2.i – miroir de LLOYD

★ situation

◇ Considérons le montage suivant.



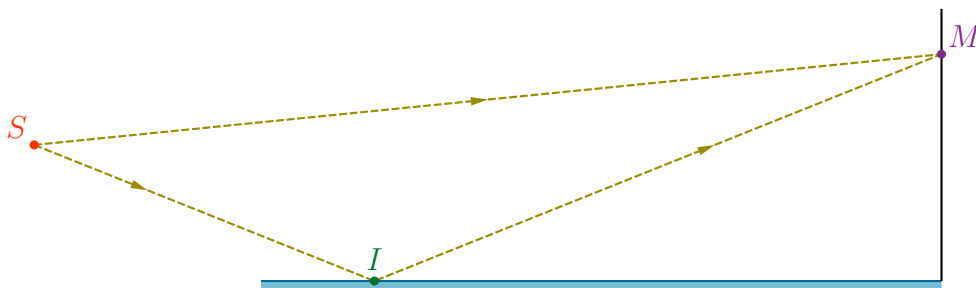
◇ La source, ponctuelle et monochromatique, est réalisée grâce à un laser traversant une lentille convergente.



★ analyse

◇ Comme nous pouvons le constater sur le schéma ci-dessous, en prenant un point M quelconque de l'écran, nous voyons que deux chemins de lumière y conduisent :

- celui qui va directement de S à M ;
- celui qui se réfléchit en I sur le miroir conformément aux lois de SNELL-DESCARTES.



◇ Nous avons donc bien deux ondes qui :

- ont la même pulsation (source monochromatique) ;
- sont issus du même train d'onde (il n'y a qu'un seul point source, il ne pourrait pas en être autrement).

◇ Nous avons donc affaire à des interférences.

★ interférences

- ◇ En considérant que les deux ondes qui parviennent en un point de l'écran sont de même amplitude, nous pouvons utiliser la version simplifiée de la formule de FRESNEL

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos(\Delta\varphi))$$

- ◇ Reste à déterminer $\Delta\varphi$...

I.2.ii – différence de marche

★ réécriture de l'éclairement

- ◇ Nous avons

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{où} \quad \varphi_1 = k_0 (SM)_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (SM)_2$$

- ◇ Remarquons au passage que prendre $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ou $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ne change rien à l'éclairement puisque la fonction cosinus est paire.
- ◇ Nous avons ainsi

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} ((SM)_2 - (SM)_1) \quad \rightsquigarrow \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

- ◇ Nous voyons apparaître la différence de marche.

Pour deux ondes, la différence de phase s'écrit

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

- λ_0 la longueur d'onde dans le vide, même si le dispositif n'est pas le vide ;
- δ la différence de marche entre les ondes qui interfèrent.

- ◇ Rappelons que l'énorme avantage de la différence de marche par rapport à la différence de phase est que la première est une notion *géométrique* mesurable avec une règle sur un schéma dessiné alors que la seconde est une notion *temporelle* mesurable avec un chronomètre lors de la projection d'une vidéo.

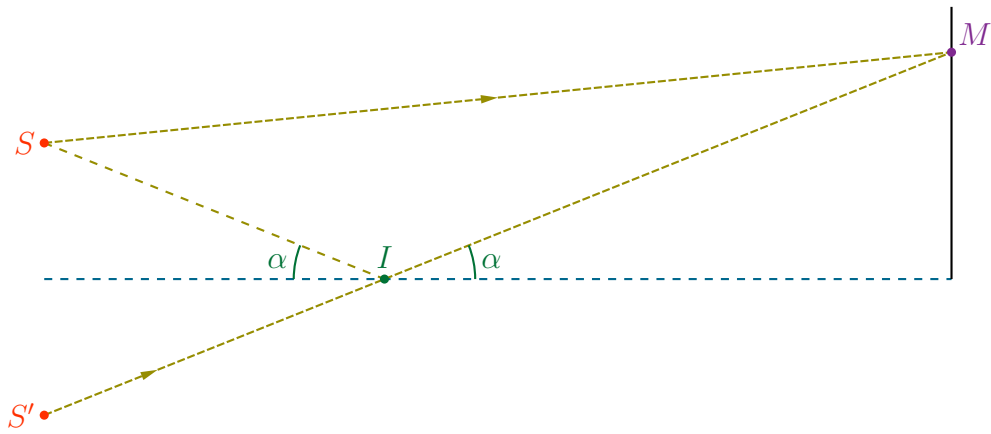
★ expression de la différence de marche

🕒 préparation

- ◇ Nous devons donc déterminer la différence de marche entre les chemins de lumière ① et ②.

$$(SM)_2 - (SM)_1 = n_{\text{air}} SM - n_{\text{air}} (SI + IM) + \frac{\lambda_0}{2}$$

- ◇ Commençons par déplier le miroir plan de manière à faire apparaître une source fictive S' .



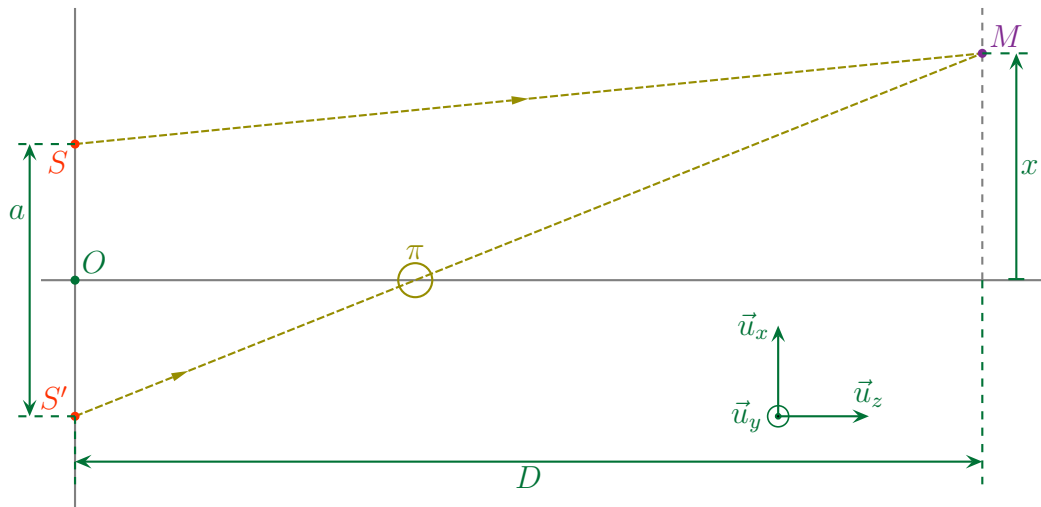
Le respect des lois de la réflexion imposent S', I et M alignés d'où

$$SI + IM = S'I + IM \quad \rightsquigarrow \quad SI + IM = S'M$$

Finalement avec $n_{\text{air}} = 1,000$

$$\delta = SM - S'M + \frac{\lambda_0}{2}$$

Redessinons le schéma avec uniquement les points intéressants (n'oublions pas le miroir avec son déphasage exceptionnel) et profitons-en pour poser un repérage.



Les coordonnées des points S, S' et M sont

$$S \begin{pmatrix} +a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S' \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ D \end{pmatrix}$$

action

Pour exprimer SM commençons par exprimer $SM^2 = \overrightarrow{SM}^2$.

$$\overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} x - a/2 \\ y \\ D \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overrightarrow{SM}^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$

◇ De même pour $S'M$

$$\overrightarrow{S'M} = \begin{pmatrix} x + a/2 \\ y \end{pmatrix} D \quad \rightsquigarrow \quad \overrightarrow{S'M}^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$

◇ Comme D est très grand devant x , y et a , nous pouvons faire un développement limité

$$\begin{aligned} SM &= \left(D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \right)^{1/2} = D \left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2} \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{DL}}{=} D \times \left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D^2} \right) \end{aligned}$$

◇ De même pour $S'M$

$$S'M = D \left(1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2} \right)^{1/2} \stackrel{\text{DL}}{=} D \times \left(1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D^2} \right)$$

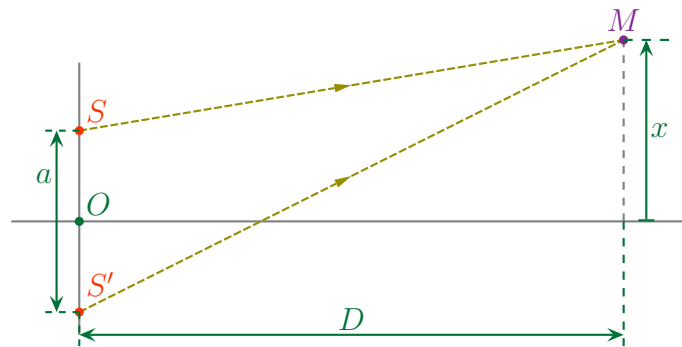
◇ Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} S'M - SM &= D \times \left[\chi + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D^2} - \chi - \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D^2} \right] \\ &= \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - y^2}{2D} \\ &= \frac{\left(x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}\right) \left(x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}\right)}{2D} \\ &= \frac{ax}{D} \end{aligned}$$

◇ C'est un résultat (simple) que nous aurons l'occasion de réutiliser.

🌀 conclusion

Dans la situation suivante où S et S' interfèrent nous avons $S'M - SM = \frac{ax}{D}$



- a est la distance entre les deux sources cohérentes ;
- x est compté à partir du plan médiateur des sources ;
- D est la distance entre les sources et l'écran.

◇ Nous pouvons remarquer que ce résultat est indépendant de y , chose qui n'a rien d'évident *a priori*.

👉 *Remarque.* Ce calcul est à savoir refaire !

★ expression finale de l'éclairement

◇ Finalement, pour ce dispositif, la différence de marche s'écrit

$$\delta = \frac{ax}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

I-2-iii – figure d'interférence

★ représentation

◇ Commençons par ne pas oublier que l'écran est l'ensemble des points $M(x,y,D)$.

◇ Autrement dit, comme l'éclairement est « fonction de M », l'éclairement doit être une fonction de x et y .

◇ Ici, pour le miroir de LLOYD, il s'agit d'interférence de deux ondes de même amplitude donc nous avons

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

◇ En remplaçant la différence de marche par son expression nous obtenons

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + \pi \right) \right) \rightsquigarrow \mathcal{E}(x,y) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right)$$

◇ Rappelons qu'il n'y a d'écran que pour $x \geq 0$.

◇ La figure obtenue est donc un ensemble de bandes parallèles à l'axe (Ox) .

◇ Voici ce que donne une simulation¹ très réaliste.

1. Toutes les simulations de ce cours ont été réalisées avec le logiciel Diffint créé et utilisé à l'oral du concours Centrale – Supélec et disponible à l'adresse <http://www.lgép.supelec.fr/index.php?page=scm-logiciels>.



★ ordre d'interférence

◇ Nous voyons un motif se dessiner sur l'écran, un motif régulier.

Une *frange brillante* est une bande de lumière sur un écran où il y a des interférences.
 Une *frange sombre* est une bande où il n'y a pas de lumière.

◇ Ces franges sombres et brillantes dépendent de l'interférence.

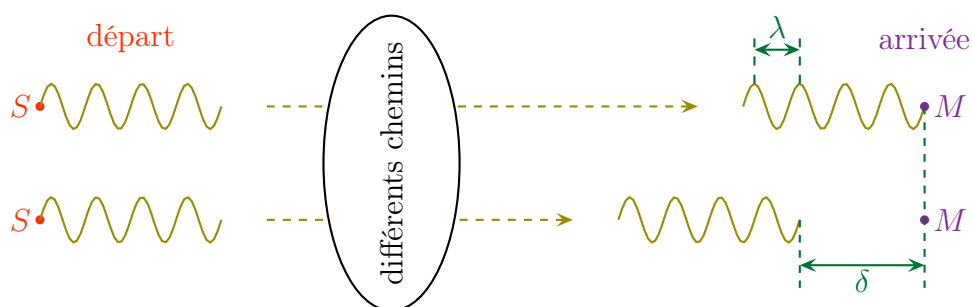
Une frange brillante (resp. sombre) correspond à une interférence constructive (resp. destructive).

◇ Pour déterminer l'emplacement de ces franges, nous allons utiliser la notion d'ordre d'interférence.

L'*ordre d'interférence* au point M est le nombre réel p défini par

$$p = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$$

◇ Concrètement, l'ordre d'interférence représente le décalage δ entre deux ondes, décalage compté en « unité de longueur d'onde ».



◇ Dans ces conditions, nous avons le résultat suivant

Si l'ordre d'interférence p est entier au point M :

- les deux ondes arrivent en phase, l'interférence est constructive ;
- M appartient à une frange brillante.

Si l'ordre d'interférence p est demi-entier au point M :

- les deux ondes arrivent en opposition de phase, l'interférence est destructive ;
- M appartient à une frange sombre.



Rappelons que le vocable « demi-entier » est très mal choisi car trompeur. Un nombre demi-entier n'est pas un nombre moitié d'un entier mais un nombre entier ajouté d'un demi comme 5,5 ou 27,5.

★ interfrange

- ◇ Lors d'expérience d'interférence, le résultat est la figure d'interférence qu'il faut alors interpréter.
- ◇ Pour cela nous allons nous intéresser à sa structure (ici sa périodicité) et la relier aux sources.

L'*interfrange* est la distance entre deux franges de même nature.



- ◇ Il arrive parfois que l'interfrange est constante comme c'est le cas ici. Ce résultat n'a rien d'universel.
- ◇ Pour chercher l'interfrange, nous allons chercher l'abscisse x_k correspondant à la frange d'ordre k .

$$\frac{\delta(x_k)}{\lambda_0} = k \quad \rightsquigarrow \quad \frac{a x_k}{\lambda_0 D} + \frac{1}{2} = k \quad \rightsquigarrow \quad x_k = \frac{\lambda_0 D}{a} \times k + \frac{\lambda_0 D}{2a}$$

- ◇ L'interfrange noté en général i vaut donc

$$i = x_{k+1} - x_k \quad \rightsquigarrow \quad i = \frac{\lambda_0 D}{a} \times (k+1) + \frac{\lambda_0 D}{2a} - \frac{\lambda_0 D}{a} \times k - \frac{\lambda_0 D}{2a} \quad \rightsquigarrow \quad i = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

★ loi phénoménologique

- ◇ Nous pouvons constater que l'interfrange est directement fonction de a , c'est-à-dire des sources.
- ◇ C'est là tout l'intérêt des interférences : permettre de remonter à certaines caractéristiques géométriques des sources à partir de mesures macroscopiques.
- ◇ Nous pouvons aussi constater un phénomène important.

Plus les causes sont petites, plus les conséquences sont grandes.

- ◇ Cela se voit dans le fait que plus a est petit, plus i est grand.
- ◇ Prenons un exemple. $D = 3,0$ m, $\lambda_0 = 632,8$ nm et $i = 0,20$ mm alors

$$a = \frac{\lambda_0 D}{i} \quad \rightsquigarrow \quad a = 9,5 \text{ mm}$$

I.2.iv – cas général d'interférence de deux OSPM

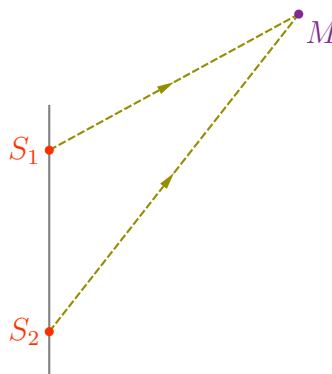
★ deux sources cohérentes

- ◇ Reprenons le dispositif précédent en le dépliant de manière à faire apparaître les deux points source.



- ◇ Nous voyons qu'il est possible d'envisager l'existence de deux points sources distincts mais pouvant interférer. Cela nécessite, certes, un montage, mais c'est tout à fait possible.
- ◇ Dans la suite nous allons donc considérer ces deux points sans nous soucier de la manière dont ils ont été créés.

★ figure d'interférence



- ◇ En un point M quelconque il y a *a priori* interférences à deux ondes de même amplitude.
- ◇ Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos \Delta\varphi) \quad \text{où} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \quad \text{avec} \quad \delta = (S_1M) - (S_2M)$$

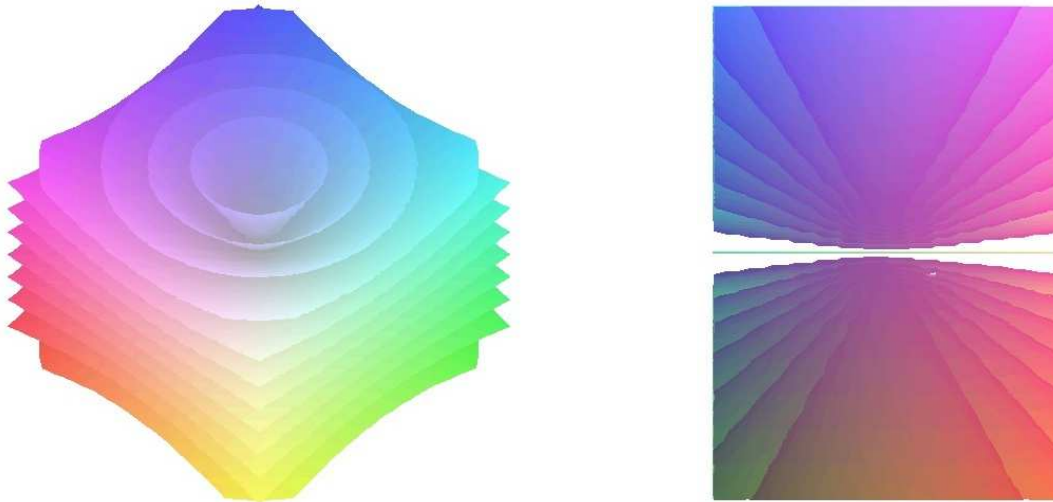
- ◇ Pour trouver la figure d'interférence, nous allons chercher les zones d'« isoéclairement ».
- ◇ Les zones iso \mathcal{E} correspondent donc à des zones iso δ soit à des zones telles que (avec $n = 1$)

$$\delta = (S_1M) - (S_2M) = C^{\text{te}} \quad \rightsquigarrow \quad S_1M - S_2M = C^{\text{te}}$$

- ◇ Il s'agit de l'équation vérifiée par des hyperboloïdes de révolution.

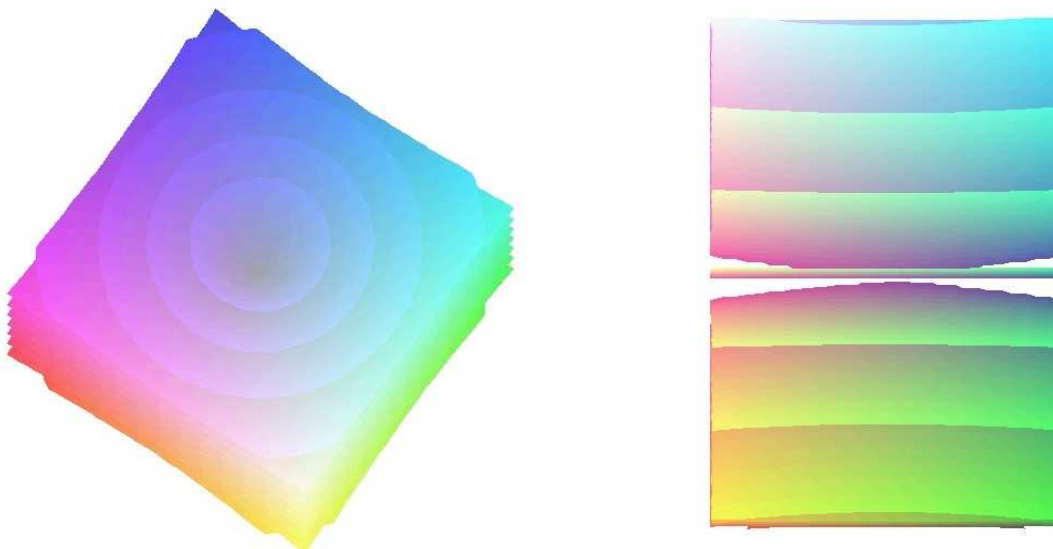
★ représentation

◇ Voici la représentation des hyperboloïdes par MAPLE. La première c'est une vue de haut, la seconde c'est une vue dans le plan un plan de coupe contenant les deux points sources.



◇ Et voici deux autres vues :

- l'une un peu plus dans l'axe des deux sources, nous permettant de mieux « voir » les cercles concentriques ;
- l'autre dans un plan parallèle aux sources et loin des sources, nous permettant de « voir » les franges rectilignes.



★ deux cas d'observation

◇ Suivant le lieu où est placé l'écran d'observation, nous ne verrons pas la même chose.

◇ Mathématiquement :

- si l'écran est parallèle à S_1S_2 et proche des sources, nous voyons des franges hyperboliques ;
- si l'écran est parallèle à S_1S_2 et loin des sources, nous voyons des franges rectilignes ;
- si l'écran est orthogonal à S_1S_2 , nous voyons des franges circulaires.

◇ En pratique il n'est pas possible d'être proche des sources, en particulier il n'est pas possible d'observer sur un écran les interférences entre les deux sources.

◇ Nous retiendrons donc les résultats suivants.

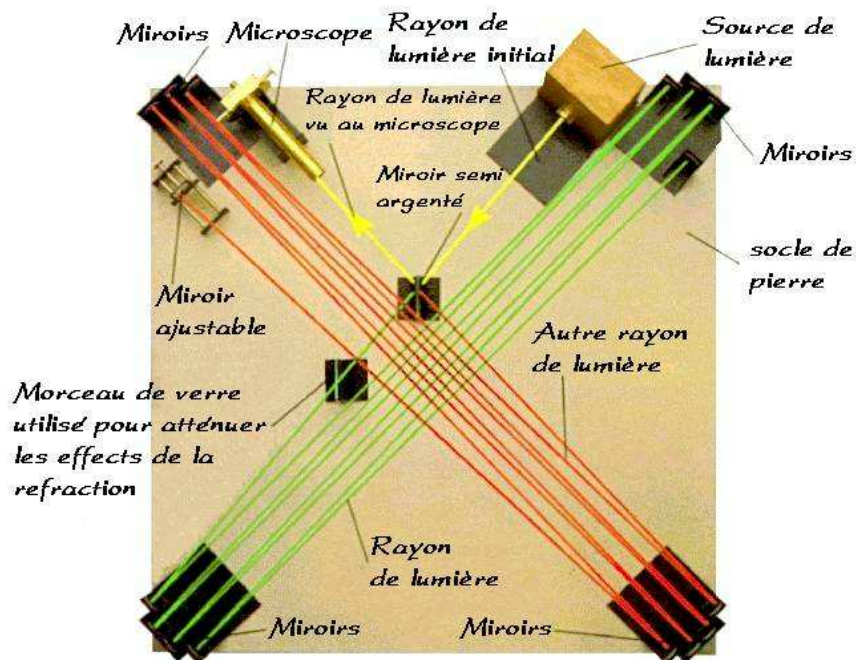
Lorsque deux sources sphériques S_1 et S_2 interfèrent :

- si l'observation se fait sur un écran parallèle à S_1S_2 et loin des sources, les franges sont rectilignes ;
- si l'observation se fait sur un écran orthogonal à S_1S_2 , les franges sont circulaires.

I.3 – Interféromètre de MICHELSON

I.3.i – c'est une version réduite

- ◇ Initialement l'interféromètre de MICHELSON a été inventé pour mesurer de manière précise la différence de vitesse de la lumière dans deux directions différentes.
- ◇ Le résultat négatif de l'expérience a été une des bases de la relativité restreinte.
- ◇ Comme le montre le schéma ci-dessous², l'interféromètre était complexe avec ses 16 miroirs à régler, nous utiliserons, pour notre part, une version plus simple.



- ◇ Nous nous utiliserons une version avec seulement deux miroirs et qui tient sur une paillasse de TP

2. Schéma extrait du site <http://membres.multimania.fr/nazgul9>.



- ◇ Le but d'un interféromètre de MICHELSON est :
- de séparer une onde en deux ;
 - de faire faire deux chemins différents par ces deux ondes ;
 - de rassembler les deux ondes pour les faire interférer.

I-3·ii – fonctionnement qualitatif de l'interféromètre idéal

★ première simplification

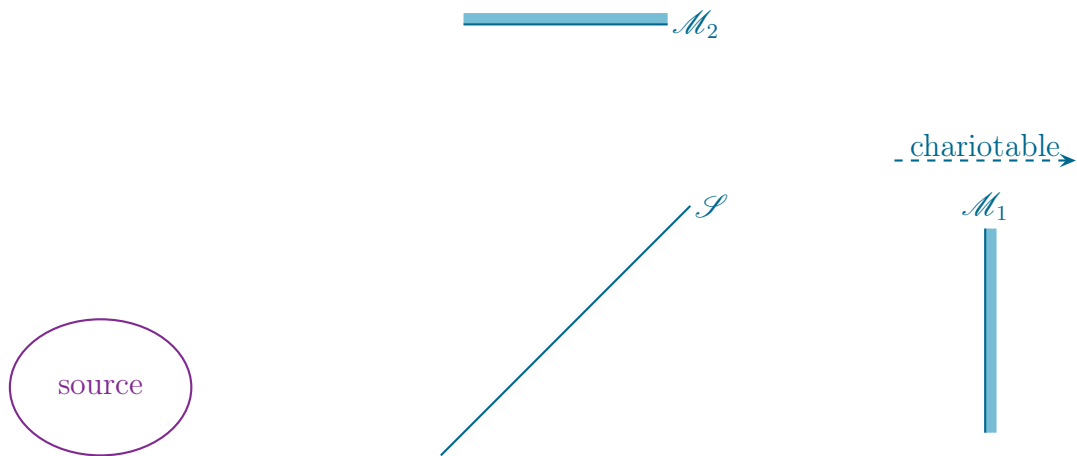
- ◇ Regardons de dessus un Michelson



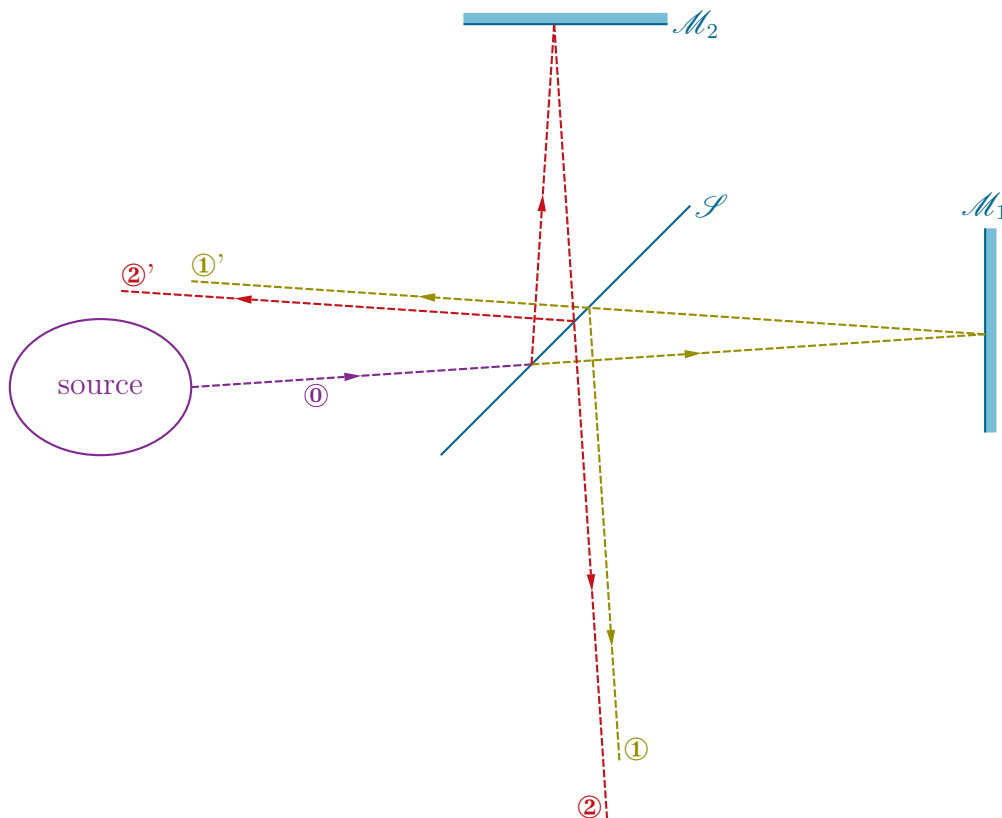
- ◇ Les deux lames inclinées à 45 degrés permettent :
- pour l'une, la séparatrice, de séparer puis rassembler les autres ;
 - pour l'autre, la compensatrice, de compenser le chemin optique introduit par la séparatrice.
- ◇ Comme la compensatrice a pour rôle de compenser l'épaisseur de la séparatrice, nous allons, pour nous simplifier la vie et nous concentrer sur la phénoménologie, l'oublier et représenter la séparatrice par un simple trait.

★ schématisation et nouvelle simplification

- ◇ Finalement l'interféromètre peut se représenter de la manière suivante.



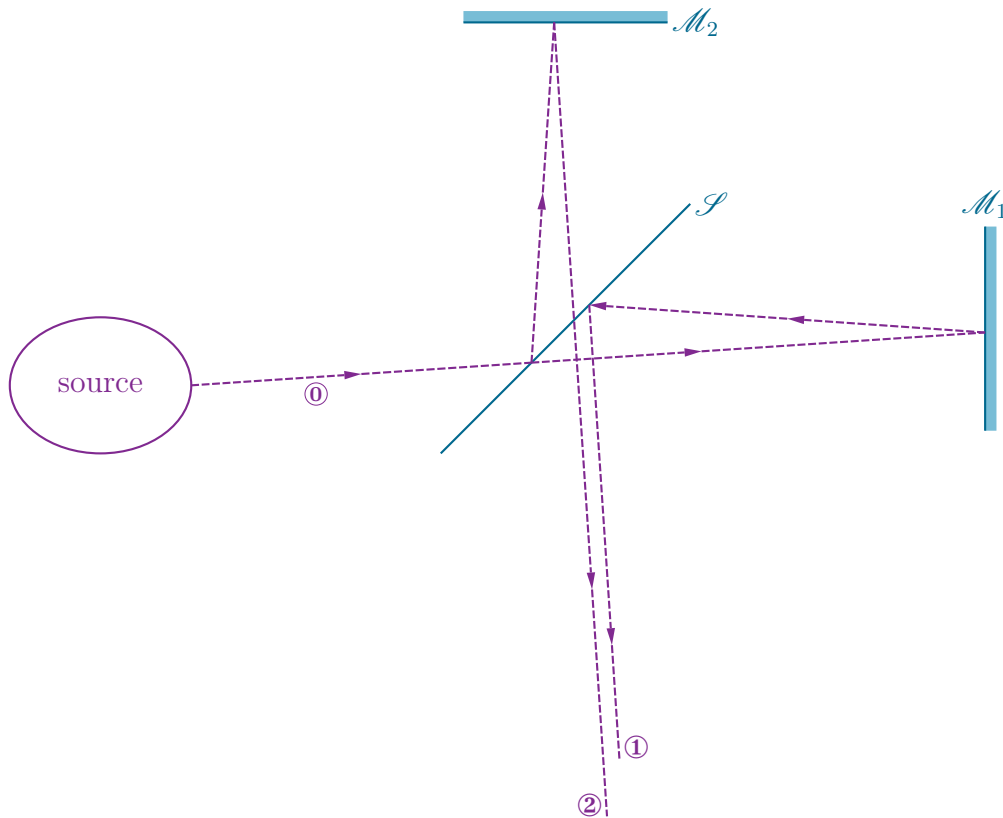
◇ Suivons le trajet d'un rayon lumineux ① émis par la source.



◇ Le rayon lumineux :

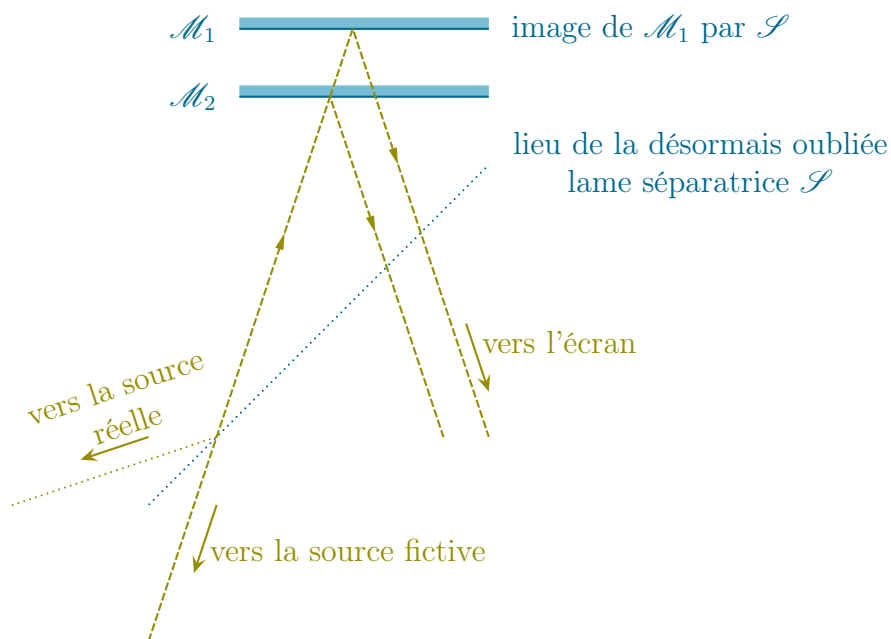
- est d'abord séparé par la lame semi-réfléchissante semi-transparente en deux rayons, l'un se dirigeant vers \mathcal{M}_1 et l'autre vers \mathcal{M}_2 ;
- le rayon se dirigeant vers \mathcal{M}_1 s'y réfléchit puis retourne vers la lame semi-réfléchissante semi-transparente où il est séparé en deux rayons ① et ①' ;
- de même le rayon se dirigeant vers \mathcal{M}_2 s'y réfléchit puis est séparé en deux rayons ② et ②' par la lame semi-réfléchissante semi-transparente ;
- les rayons ①' et ②' retournent vers la source et sont perdus pour l'observateur ;
- les rayons ① et ② vont interférer.

◇ Finalement, comme les rayons ①' et ②' ne nous intéressent pas, nous représenterons la situation de la manière suivante



I-3.iii – système équivalent

- ◇ Comme il n'est pas simple de voir et d'appréhender ce qui se passe avec autant de réflexions qu'en génère l'interféromètre, nous allons le « déplier », *i.e.* le représenter sans la séparatrice.
- ◇ Pour cela nous allons faire les images de la source et de M_1 par la séparatrice de manière à arriver au schéma équivalent suivant.



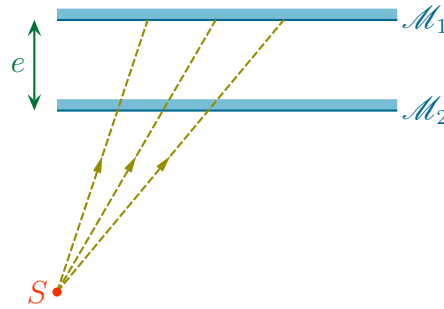
- ◇ Il faut bien comprendre que ce schéma est un schéma équivalent et qu'aucun rayon ne traverse en réalité M_2 dans la zone entourée de rouge.
- ◇ Dans la suite nous ne représenterons plus la position de la séparatrice.

I-3.iv – réglages

◇ Pour parler des réglages, nous regarderons uniquement les deux miroirs équivalents \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .

★ lame d'air

Lorsque dans le système optique équivalent à l'interféromètre de MICHELSON les deux miroirs sont parallèles, l'interféromètre est dit réglé en *lame d'air* d'épaisseur e .

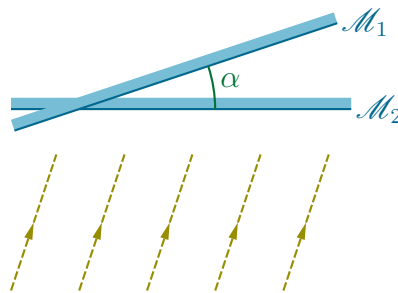


Lors d'un réglage en lame d'air, l'interféromètre est éclairé par une onde sphérique.

◇ Pourquoi? Nous allons l'expliquer dans la suite mais il vaut mieux dès à présent commencer à l'apprendre.

★ coin d'air

Lorsque dans le système optique équivalent à l'interféromètre de MICHELSON les deux miroirs ne sont pas parallèles, l'interféromètre est dit réglé en *coin d'air* d'angle α .



Lors d'un réglage en lame d'air, l'interféromètre est éclairé par une onde plane.

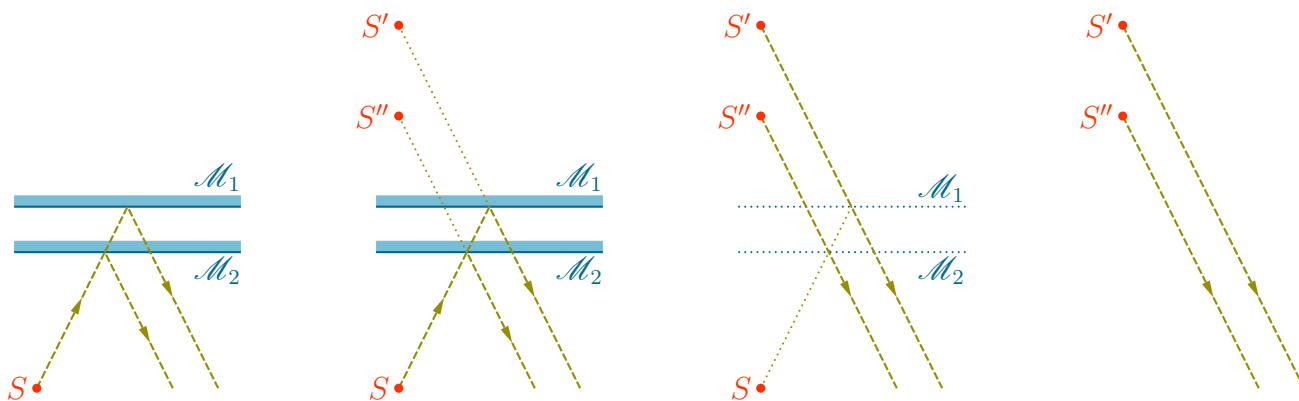
◇ Cela aussi sera expliqué dans la suite.

I-3.v – utilisation en lame d'air éclairée par une onde sphérique

★ observation des interférences

◇ Considérons une source ponctuelle à distance finie.

◇ Nous pouvons trouver le système optique équivalent avec les deux sources S' et S'' fictives en « dépliant » à nouveau S par rapport aux miroirs.

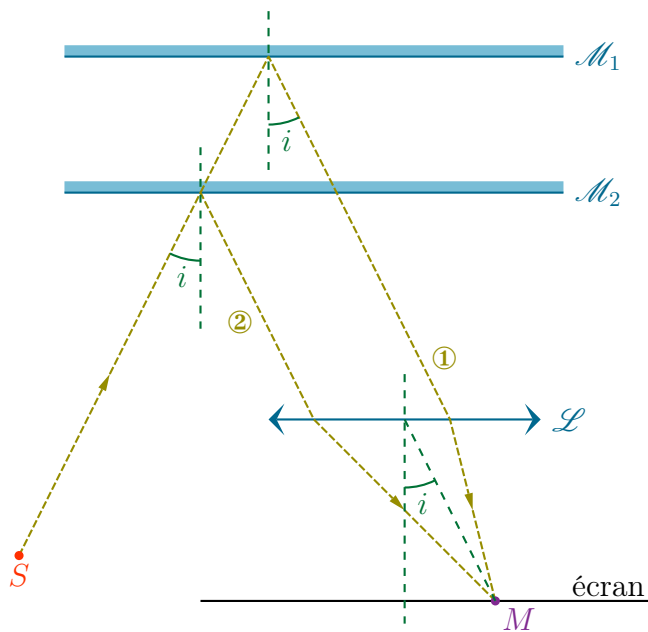


◇ Nous nous retrouvons alors dans le cas précédent, celui de l'interférence de deux ondes sphériques avec observation dans un plan orthogonal aux sources.

Dans le cas d'un réglage en lame d'air, la figure d'interférence observée est un ensemble de franges circulaires concentriques.

◇ Comme nous le justifierons dans la 2^e partie de ce chapitre, l'observation expérimentale des interférences se fait à l'infini.

◇ L'infini optique est très facilement réalisé par la projection dans le plan focal d'une lentille convergente.



★ figure d'interférence

🔦 éclaircement

◇ Comme nous avons affaire ici à l'interférence de deux ondes de même amplitude donc l'éclaircement s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos \Delta\varphi)$$

◇ Ici, la différence de phase s'écrit

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \quad \text{avec} \quad \delta = (SM)_1 - (SM)_2$$

◇ Reste à calculer la différence de marche.

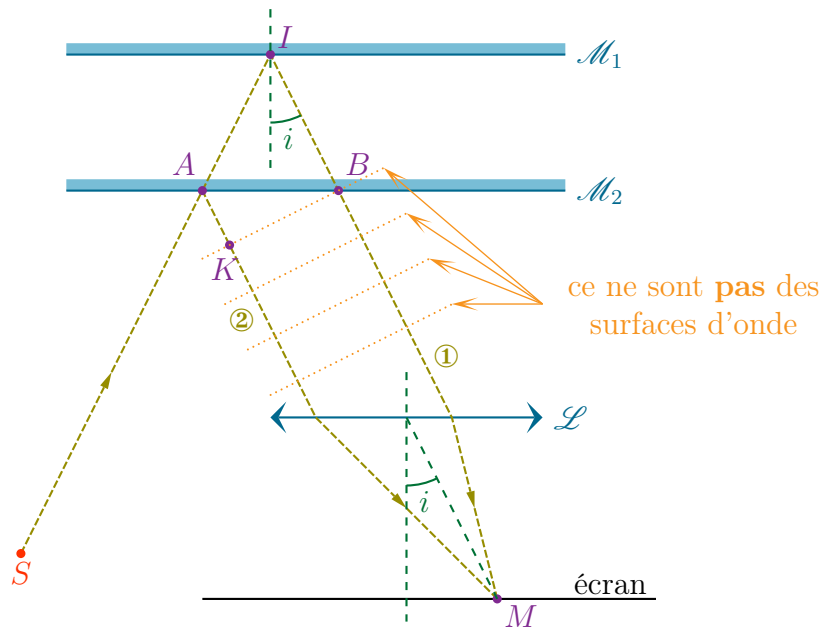
🕒 **différence de marche**

Dans le cas d'un réglage en lame d'air d'épaisseur e la différence de marche s'écrit

$$\delta = 2e \cos i \quad \text{où}$$

i est l'angle d'incidence du rayon issu de la source.

◇ Pour commencer, faisons un schéma clair.



◇ Simplifions la différence de marche en considérant $n_{\text{air}} = 1$

$$\begin{aligned} \delta &= (SM)_1 - (SM)_2 \\ &= \cancel{(SA)} + (AM) - \left(\cancel{(SA)} + (AI) + (IB) + (BM) \right) \\ &= (AM) - (AI + IB + (BM)) \end{aligned}$$

◇ Remarquons que les chemins optiques (AM) et (BM) ne sont pas égaux à AM et BM à cause de la lentille.

◇ Pour continuer à simplifier, utilisons le raisonnement suivant

- d'après le principe de retour inverse de la lumière, M peut être considérée comme une source engendrant les chemins de lumière (MA) et (MB) ;
- en voyant M comme une source, le théorème de MALUS nous assure que $(MK) = (MB)$ car K et B serait sur un plan d'onde ;
- par conséquent nous pouvons dire que $(KM) = (BM)$.

◇ Il s'en suit que

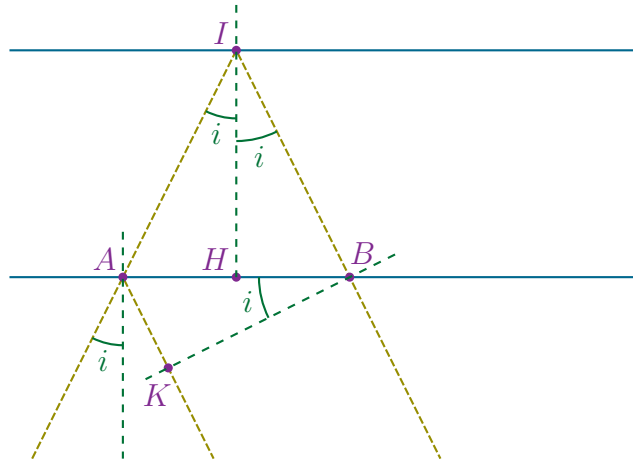
$$(AM) = (AK) + (KM) \quad \rightsquigarrow \quad \delta = (AK) + \cancel{(KM)} - (AI + IB + \cancel{(BM)})$$

◇ Et finalement

$$\delta = AK - (AI + IB)$$

⊛ Erreur fréquente. K et B ne sont **pas** sur un plan de phase ou, ce qui revient au même, les ondes réfléchies sur les miroirs \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 n'engendrent pas une onde plane! Ce n'est pas parce que nous considérons uniquement deux chemins de lumière qu'il s'agit d'une onde plane. Nous disons juste que **si** M était une source, alors B et K *seraient* sur un plan d'onde.

◇ Désormais c'est de la géométrie. Faisons le schéma en plus gros.



◇ Nous avons

$$AI + IB = 2 AI = \frac{2e}{\cos i}$$

◇ De plus

$$AK = 2 AH \times \sin i = 2e \tan i \times \sin i = 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i}$$

◇ En regroupant

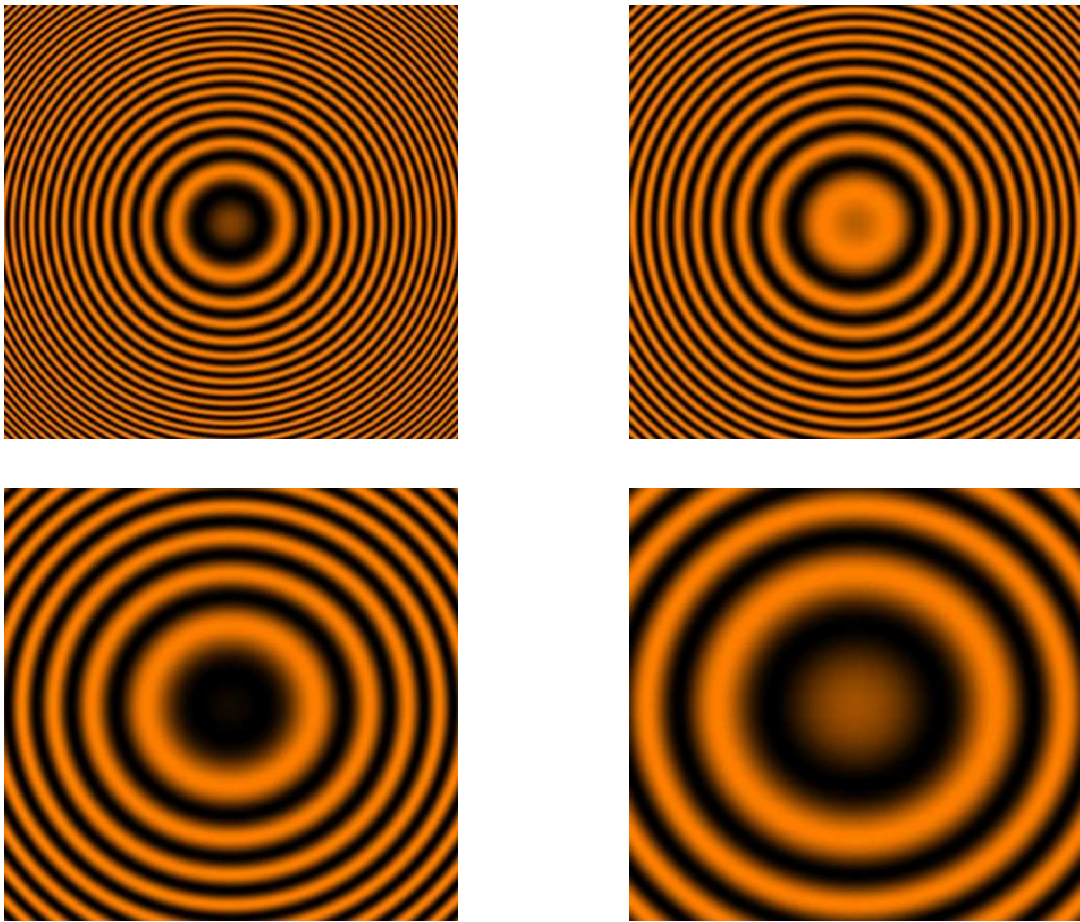
$$\delta = AK - (AI + IB) = 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} - \frac{2e}{\cos i} = 2e \times \frac{1 - \sin^2 i}{\cos i} = 2e \cos i$$

🕒 interprétation

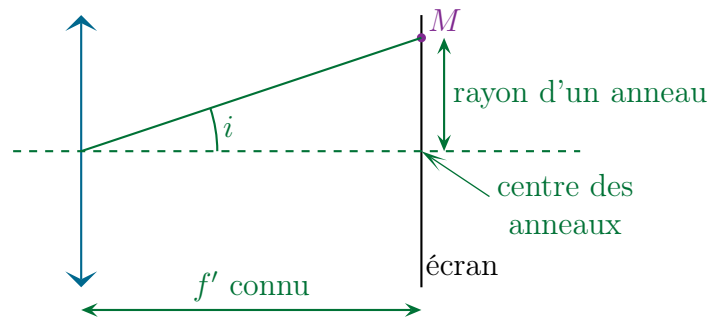
- ◇ Comme nous pouvons le constater, la différence de marche ne dépend **que** de i c'est-à-dire de l'angle d'incidence du rayon.
- ◇ De plus la nature de l'interférence ne dépendant que de i , la figure obtenue sera symétrique par rotation autour de l'axe optique et nous verrons des cercles.

Les franges observées suite aux interférences créées par l'interféromètre de MICHELSON réglé en lame d'air sont appelées *franges d'égale inclinaison*.

◇ Voici des simulations réalistes d'interférences pour des épaisseurs **décroissantes** de lames d'air.



◇ L'angle d'incidence se voit aussi sur l'écran car il correspond à l'angle ci-dessous, facilement accessible expérimentalement.



🌀 ordre au centre

◇ Regardons la différence de marche au centre ($i = 0$) et déterminons l'ordre d'interférence p_0 associé

$$\delta(i = 0) = 2e \quad \rightsquigarrow \quad p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$$

◇ Numériquement, pour $e = 0,50$ mm avec $\lambda_0 = 589$ nm nous obtenons

$$p_0 = 1,6 \cdot 10^3$$

◇ Remarquons qu'aux chiffres significatifs près il n'est pas possible de donner la valeur suffisamment exacte de l'ordre d'interférence permettant d'interpréter la frange au centre comme étant sombre ou brillante.

🌀 rayon des premiers anneaux anneaux

- ◇ Malgré cette incertitude sur l'ordre au centre, nous allons pouvoir déterminer assez précisément le rayon des première franges lumineuse.
- ◇ Supposons que p_0 soit entier pour pouvoir poser les calculs. Au centre nous avons donc une frange brillante.
- ◇ Remarquons que la différence de marche est maximale en $i = 0$.
- ◇ Les premières franges autour de celle au centre correspondent donc à des différences de marche plus petites donc à des ordres d'interférence plus petits.
- ◇ Ainsi la k -ième frange brillante aura un ordre d'interférence de $p_0 - k$ et correspondra à l'incidence i_k telle que

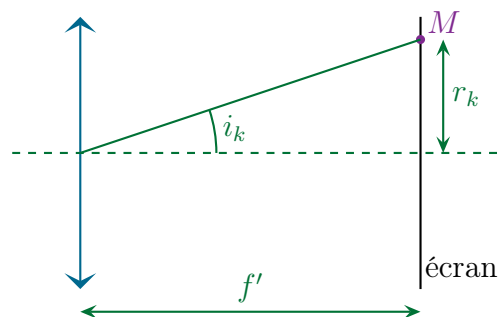
$$\frac{\delta(i_k)}{\lambda_0} = p_0 - k \quad \text{et} \quad p_0 = \frac{2e}{\lambda_0} \quad \rightsquigarrow \quad 2e \cos i_k = 2e - k \lambda_0$$

- ◇ Ce qui mène à, compte-tenu de l'approximation des petits angles

$$1 - \frac{i_k^2}{2} = 1 - \frac{k \lambda_0}{2e} \quad \rightsquigarrow \quad i_k = \sqrt{\frac{k \lambda_0}{e}}$$

- ◇ Comme le montre la figure ci-dessous et compte-tenu de l'approximation de GAUSS, le rayon r_k du k -ième anneau brillant s'écrit

$$r_k = f' i_k \quad \rightsquigarrow \quad r_k = f' \sqrt{\frac{k \lambda_0}{e}}$$



- ◇ Nous pouvons constater que :

- à e constant, plus k est grand, plus l'anneau est grand (normal!);
- à même k , plus e est petit, plus l'anneau est grand.

STOP Raisonner à k constant ne permet pas de suivre une frange fixée en changeant e puisque k correspond à l'ordre d'interférence $p_0 + k$ qui, lui-même, dépend de e .

Pour un interféromètre de MICHELSON réglé en lame d'air, diminuer l'épaisseur fait mourir les anneaux au centre de la figure d'interférence.

- ◇ Pour le montrer, raisonnons à frange fixée, *i.e.* à différence de marche fixée.
- ◇ Nous avons alors :
 - $\delta = 2e \cos i = C^{\text{te}}$;
 - si e diminue alors $\cos i$ augmente ;
 - si $\cos i$ augmente, i diminue.
- ◇ Ce qui prouve bien le résultat.

🌀 contact optique

L'interféromètre de MICHELSON est dit *au contact optique* lorsque le système optique équivalent correspond à une lame d'air d'épaisseur nulle.

🔹 Pour une lame d'air d'épaisseur nulle la différence de marche vaut $\delta = 0$ partout !

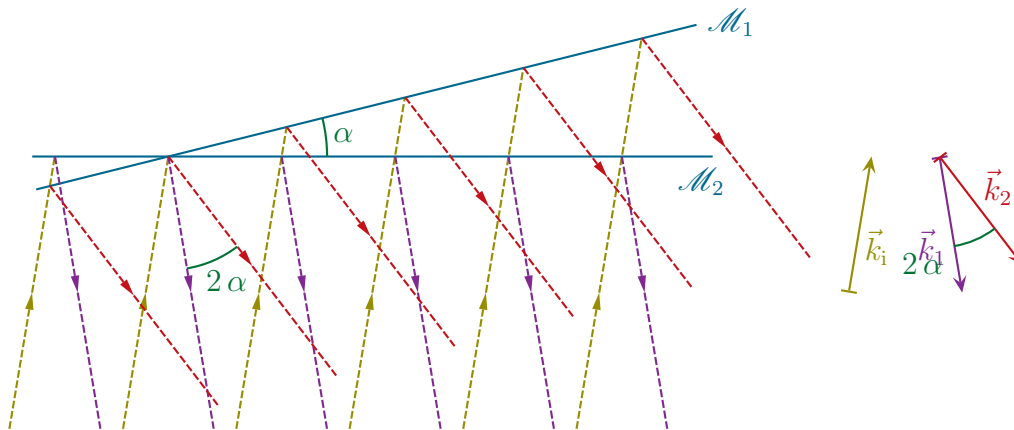
Au contact optique, l'éclairement observé est uniforme.

👉 *Remarque.* Suivant le traitement des lames séparatrice et compensatrice, il peut arriver que la lame d'épaisseur nulle corresponde à un éclairement nul partout suite à un déphasage de π lors d'une réflexion.

I-3.vi – utilisation en coin d'air éclairée par une onde plane en incidence quasi normale

★ **situation**

🔹 Regardons ce qui se passe au niveau des miroirs.

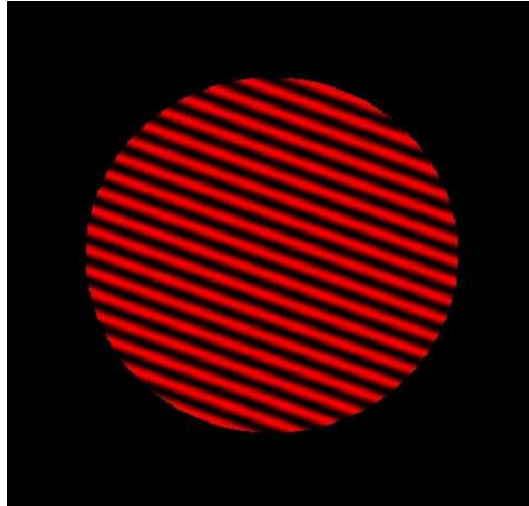


- 🔹 Chaque miroir renvoie une OPPM, nous avons donc ici affaire à l'interférence de deux OPPM.
- 🔹 De plus comme le miroir \mathcal{M}_1 peut être vu comme le miroir \mathcal{M}_2 tourné de α , l'onde réfléchi a tourné, elle, de 2α .

À onde incidente fixée, lorsqu'un miroir plan tourne d'un angle θ , l'onde réfléchi tourne d'un angle 2θ .

🔹 Nous pouvons alors utiliser les résultats précédents.

L'interféromètre de MICHELSON réglé en coin d'air d'angle α et éclairé par une onde plane crée une figure d'interférence constituée de franges parallèles distantes de $\frac{\lambda}{2\alpha}$.



★ figure d'interférence

I.4 – Bilan

I.4.i – type d'interféromètre

◇ Nous avons vu deux types d'interféromètres :

- le miroir de LLOYD ;
- l'interféromètre de MICHELSON.

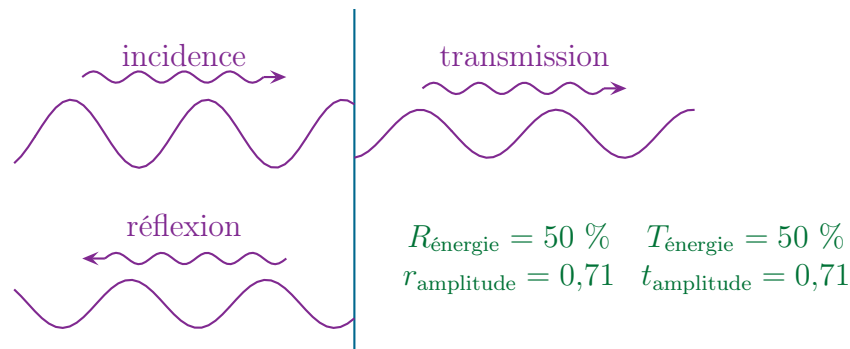
◇ Ces deux interféromètres sont de natures différentes.

Un interféromètre *à division du front d'onde* est un interféromètre où les ondes qui interfèrent ont été séparées au niveau de la source.

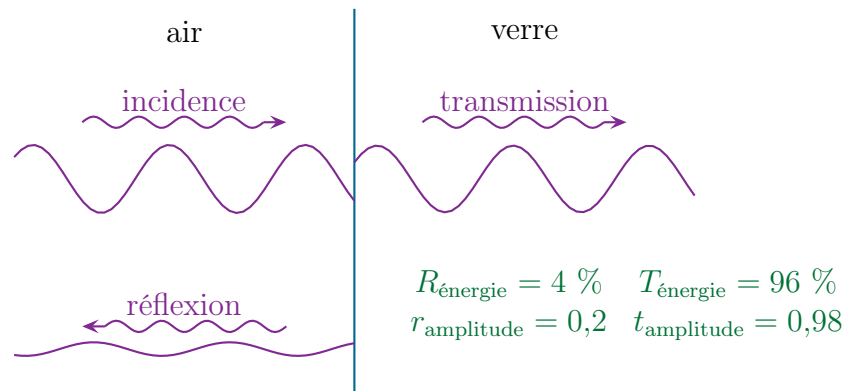
◇ C'est le cas du miroir de LLOYD.

Un interféromètre *à division d'amplitude* est un interféromètre où les ondes qui interfèrent ont été séparées après la source, souvent par un dispositif partiellement transparent et partiellement réfléchissant.

◇ C'est le cas de l'interféromètre de MICHELSON pour lequel 50 % de l'énergie est réfléchi et 50 % est transmise.



◇ Ce n'est pas la seule manière de séparer l'énergie. Un simple morceau de verre permet aussi de séparer l'énergie.



- ◇ Finalement peu importe le type d'interféromètre pour les calculs, l'avantage des interféromètres à division d'amplitude c'est qu'ils sont en général plus lumineux.
- ◇ Notons enfin qu'il est nécessaire de connaître l'interféromètre en entier pour pouvoir l'associer à un certain type.

I-4.ii – interféromètre à deux ondes

◇ Rappelons que lorsqu'il y a interférences à deux ondes de même amplitudes nous pouvons écrire directement

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos \Delta\varphi) \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad \text{et} \quad \delta = (SM)_1 - (SM)_2$$

◇ De plus, en terme d'interprétation :

- si l'ordre d'interférence est entier en M , alors M appartient à une frange brillante ;
- si l'ordre d'interférence est « demi-entier » en M , alors M appartient à une frange sombre.

I-4.iii – à quoi servent les interférences ?

- ◇ Les interférences, ou plutôt l'exploitation des figures d'interférence, permettent de lier trois choses :
- les caractéristiques géométriques de la source ;
 - les caractéristiques optiques de la source ;
 - les caractéristiques de l'interféromètre.

◇ Ainsi dans $i = \frac{\lambda D}{a}$ pour le miroir de LLOYD, il est facile de connaître D (par construction) et i par mesure. Nous pouvons alors en déduire $\frac{\lambda}{a}$.

- ◇ Si nous connaissons la source a , nous pouvons *mesurer* la longueur d'onde λ et réciproquement.
- ◇ Dans le cas de l'interféromètre de Michelson, avec un interféromètre utilisé en TP il est possible :

- de mesurer précisément des longueurs d'onde ;
 - de trouver le profil d'une raie d'émission d'une lampe ;
 - de mesurer l'indice de l'air ;
 - de mesurer l'épaisseur d'une lame de verre.
- ◇ Avec des interféromètres plus professionnelle, il est possible de mesurer des variations de distance extrêmement faibles. Un des plus grands interféromètre construit sur Terre a des bras de plus de 2,0 km de long !

II – Problèmes de cohérence

II.1 – Origine des incohérences

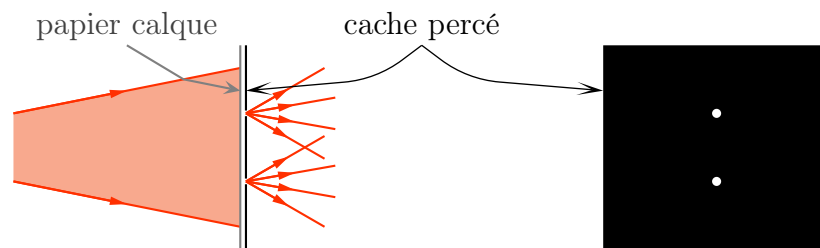
- ◇ Dans la première partie nous avons considéré des dispositifs éclairés par une source ponctuelle et monochromatique.
- ◇ Les deux conditions nécessaires aux interférences étant dès lors obligatoirement vérifiées, il ne pouvait qu'y avoir interférence.
- ◇ En pratique les choses sont un peu plus complexe parce que les sources peuvent être soit non ponctuelles (donc étendues) soit non monochromatiques soit ... étendues et non monochromatiques.
- ◇ Nous allons regarder un peu plus précisément ce qui se passe dans ces conditions.

II.2 – Cohérence spatiale ou de l'utilisation d'une source large

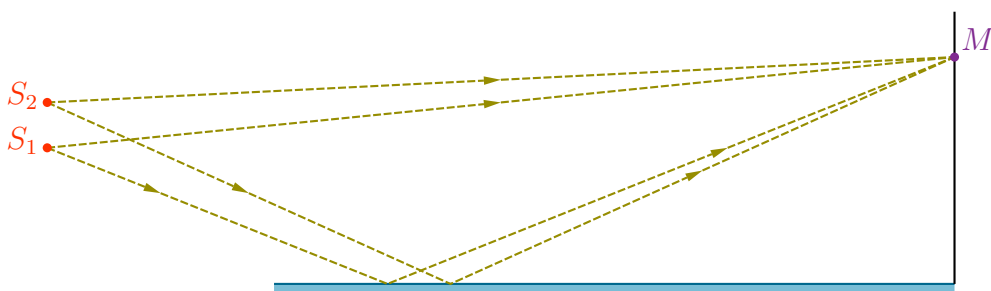
II.2.i – idoinoton

★ situation

- ◇ Commençons par le cas le plus simple de source non ponctuelle : une source constituée de *deux* points source.
- ◇ Il est possible de réaliser une telle source en éclairant un papier diffusant derrière un cache constitué de deux petits trous.



- ◇ Utilisons cette source étendue dans le montage du miroir de LLOYD et cherchons les chemins de lumière qui peuvent arriver jusqu'en M .



- ◇ En M nous voyons qu'arrive 4 ondes :
 - les deux ondes issues de S_1 interfèrent entre elles ;
 - les deux ondes issues de S_2 interfèrent entre elles ;
 - **mais** les ondes issues de S_1 n'interfèrent pas avec celles issues de S_2 .
- ◇ Utilisons un corrolaire de la notion d'interférence.

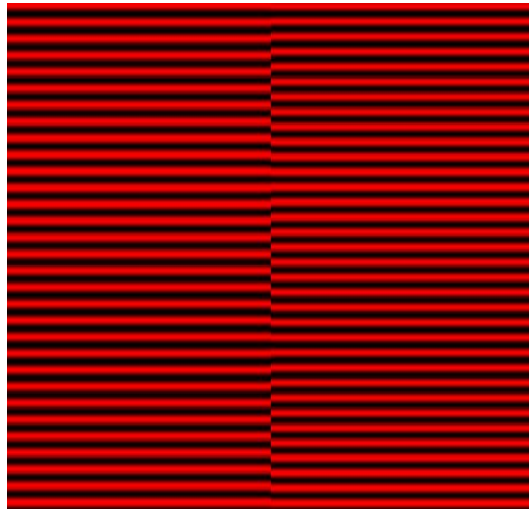
Lorsque deux (ou plusieurs) sources n'interfèrent pas, l'éclairement résultant est la somme des éclairements séparés.

- ◇ En d'autres termes nous allons exprimer l'éclairement $\mathcal{E}_1(M)$ créé par la source S_1 *comme si elle était seule*, puis nous ferons de même en exprimant l'éclairement $\mathcal{E}_2(M)$ créé par la source S_2 *comme si elle était seule aussi* et nous sommerons les deux pour avoir l'éclairement total.

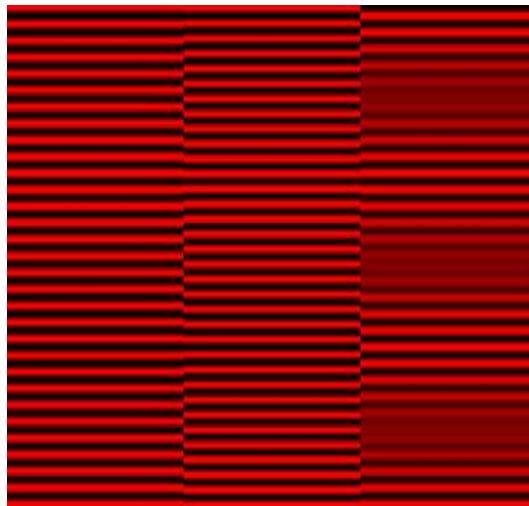
$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$$

★ **approche qualitative**

- ◇ Comme nous pouvons le voir *a priori* les deux points sources ne vont pas engendrer le même système de franges : l'un des deux étant plus loin de l'axe de référence que l'autre, ses franges vont être plus resserrées.
- ◇ Juxtaposons les deux systèmes de franges obtenus.



- ◇ Nous voyons alors que, parfois, l'un éclaire dans une zone sombre de l'autre et réciproquement alors qu'ailleurs les zones éclairées et sombres se superposent.
- ◇ Dans ces conditions nous allons voir des zones parfois complètement éclairées et parfois présentant un système de franges.



- ◇ Les zones floues obtenues sont appelées *zone de brouillage*.

Lorsqu'il y a superposition de deux systèmes de franges, il y a brouillage lorsque les deux systèmes de franges sont décalés d'une demi-franges.

★ **éclairage**🕒 **expression (presque) générale**

✧ Ici, comme l'éclairage du à la source S_1 n'est autre que des interférences à deux ondes de même amplitude, nous pouvons écrire directement

$$\mathcal{E}_1(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max 1}}{2} (1 + \cos \Delta\varphi_1)$$

✧ De même

$$\mathcal{E}_2(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max 2}}{2} (1 + \cos \Delta\varphi_2)$$

✧ En prenant le cas fréquent $\mathcal{E}_{\max 1} = \mathcal{E}_{\max 2} \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{E}_{\max}$

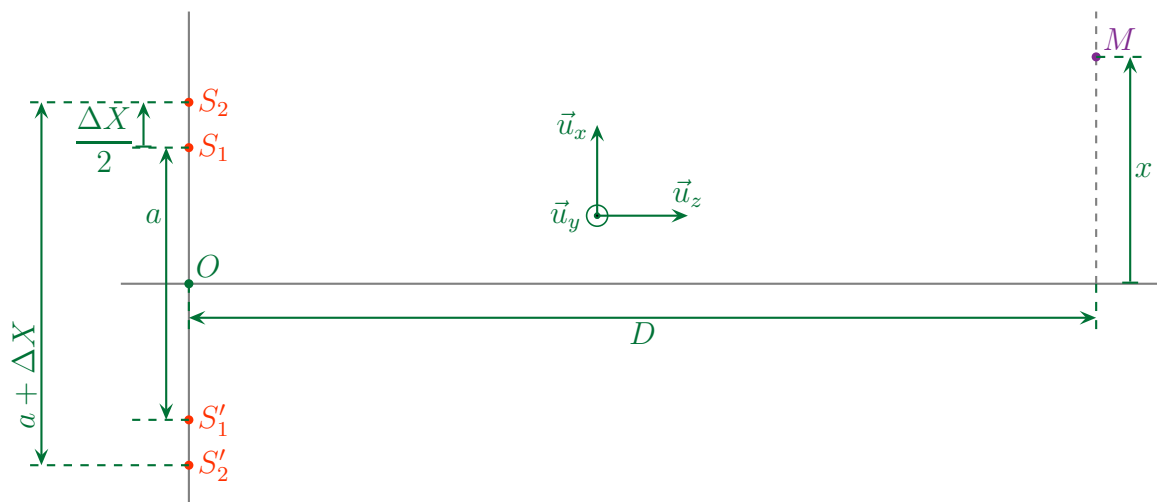
$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \cos \Delta\varphi_1 + 1 + \cos \Delta\varphi_2) \\ &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(2 + 2 \cos \left(\frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

✧ Et avec les différences de marche

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{\lambda_0} (\delta_1 + \delta_2) \right) \cos \left(\frac{\pi}{\lambda_0} (\delta_1 - \delta_2) \right) \right)$$

🕒 **expression particulière**

✧ Représentons uniquement les points intéressants, à savoir M , S_1 , S_2 et leurs sources fictives associées (respectivement S'_1 et S'_2).



✧ Dans ces conditions nous avons, pour la source S_1

$$S_1 S'_1 = a \quad \rightsquigarrow \quad \delta_1 = \frac{a x}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

✧ De même pour S_2

$$S_2 S'_2 = a + \Delta X \quad \rightsquigarrow \quad \delta_1 = \frac{(a + \Delta X)x}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

◇ En remplaçant dans l'expression de l'éclairement nous obtenons

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \times \frac{2ax + x\Delta X}{D} + \pi \right) \cos \left(\frac{\pi x \Delta X}{\lambda_0 D} \right) \right)$$

◇ Nous pouvons supposer $\Delta X \ll a$ ce qui permet de simplifier l'expression en

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \cos \left(\frac{\pi x \Delta X}{\lambda_0 D} \right) \right)$$

★ interprétation

◇ L'éclairement peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \cos \left(\frac{2\pi x}{\ell} \right) \right) \quad \text{où} \quad i = \frac{\lambda_0 D}{a} \quad \text{et} \quad \ell = \frac{2\lambda_0 D}{\Delta X}$$

◇ Comme $\Delta X \ll a$, nous avons $\ell \gg i$ et donc l'éclairement s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} (1 - \text{terme de variation rapide en } i \times \text{terme de variation lente en } \ell)$$

◇ Le terme de variation rapide est un terme en cosinus : c'est le terme de frange.

◇ Le terme de variation lente est un terme qui va « moduler » l'amplitude des oscillations d'éclairement que sont les franges : c'est le terme de contraste.

◇ Visuellement nous avons quelque chose comme la simulation suivante




◇ Nous voyons que la présence d'un deuxième point source brouille les franges obtenues ; les interférences sont moins visibles.


II.2.ii – le miroir de LLOYD éclairé par une fente large – fonction sinus cardinal

★ agrandir la source dans le sens des franges

- ◇ Comme nous pouvons le voir dans le terme de contraste, la « cause » du brouillage est le décalage ΔX entre les deux sources.
- ◇ Comme la figure d'interférence ne dépend pas de y , si les deux sources sont décalées sur cet axe de ΔY , cela engendrera deux systèmes de franges qui se superposeront exactement.
- ◇ Il n'y aura donc pas de véritable brouillage puisque la figure observée restera la même.
- ◇ Dans ces conditions la luminosité sera augmentée ce qui est très appréciable.

Dans le cas d'interférences donnant des bandes parallèle, prendre une fente source dans la direction des bandes permet d'augmenter la luminosité dans créer de brouillage.

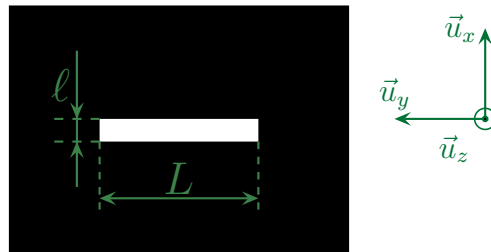
 Il faut bien que le système interférentiel crée des bandes !

 Avec les *fentes* d'YOUNG, ça ne marche pas puisque la figure obtenue n'est pas constituée de bandes parallèles.

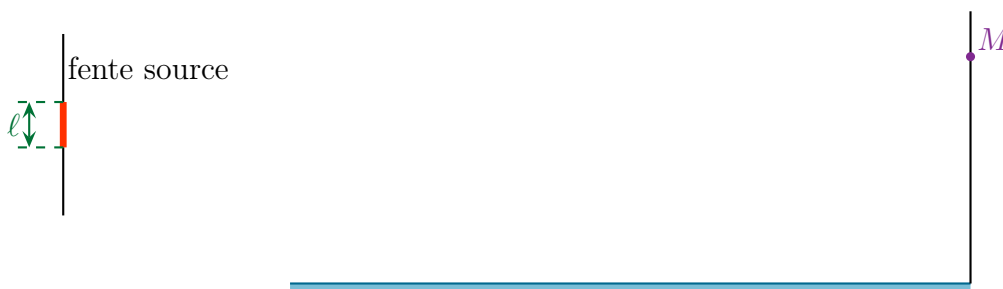
★ agrandir la source dans le sens orthogonal aux franges

🌀 décomposition

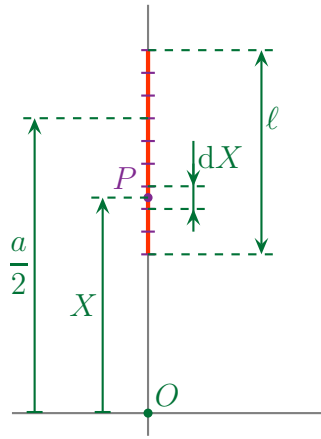
- ◇ Regardons ce qui se passe lorsque le miroir de LLOYD est éclairé par une source large sur \vec{u}_x .



- ◇ Sur le schéma ci-dessous ne nous préoccupons pas de la longueur L de la source sur \vec{u}_y dont nous venons vu juste de voir qu'elle n'intervenait pas sur la figure d'interférence.



- ◇ Pour traiter ce problème, nous allons simplement décomposer la source en une multitude de points sources créant chacun une figure d'interférence.
- ◇ Nous allons décomposer la source de la manière suivante.



- ◇ Chaque point source sera repéré par son abscisse X telle que $\frac{a}{2} - \frac{\ell}{2} \leq X \leq \frac{a}{2} + \frac{\ell}{2}$.
- ◇ Comme aucun des points sources n'interfère avec son voisin, nous allons sommer les éclairissements créés par chacun de ses points sources

$$\mathcal{E}(M) = \sum d\mathcal{E}(M)$$

- ◇ Techniquement, la somme s'écrit $\mathcal{E}(M) = \int d\mathcal{E}(M)$, mais ce n'est qu'un détail de calcul.
- ◇ Cherchons $d\mathcal{E}(M)$.

🕒 éclairage par une portion de source

- ◇ $d\mathcal{E}(M)$ est l'éclairissement créé par la portion de source en $\begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de largeur dX .
- ◇ Comme cette source crée des interférences à deux ondes de même amplitude, nous pouvons écrire

$$d\mathcal{E}(M) = \frac{d\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta(X,x)}{\lambda_0} \right)$$

- ◇ En ce qui concerne $d\mathcal{E}_{\max}$, en considérant la source uniforme en intensité, nous pouvons dire que si la largeur ℓ éclaire à \mathcal{E}_{\max} alors la largeur dX éclaire à

$$d\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_{\max} \times \frac{dX}{\ell}$$

- ◇ Pour la différence de marche, nous pouvons reprendre les résultats de la première partie.
- ◇ Comme la source fictive qui interfère avec le point source considéré est à une distance $2X$ de celle-ci, la différence de marche s'écrit

$$\delta(X,x) = \frac{(2X)x}{D} + \frac{\lambda_0}{2}$$

- ◇ Finalement, un point source de largeur dX crée l'éclairissement

$$d\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\ell} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi 2Xx}{D\lambda_0} + \pi \right) \right) dX \rightsquigarrow d\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\ell} \left(1 - \cos \frac{2\pi 2Xx}{D\lambda_0} \right) dX$$

🔗 éclaircissement total

✧ Maintenant, ce n'est que du calcul, il suffit de sommer en faisant attention aux bornes

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(M) &= \int_{a/2-\ell/2}^{a/2+\ell/2} d\mathcal{E}(M) \\
 &= \int_{a/2-\ell/2}^{a/2+\ell/2} \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\ell} \left(1 - \cos \frac{2\pi 2Xx}{D\lambda_0} \right) dX \\
 &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\ell} \left[\int_{a/2-\ell/2}^{a/2+\ell/2} 1 dX - \int_{a/2-\ell/2}^{a/2+\ell/2} \cos \frac{2\pi 2Xx}{D\lambda_0} dX \right] \\
 &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\ell} \left[\ell - \frac{\left[\sin \frac{2\pi 2Xx}{D\lambda_0} \right]_{a/2-\ell/2}^{a/2+\ell/2}}{\frac{2\pi 2x}{D\lambda_0}} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\ell} \left[\ell - \frac{\sin \frac{2\pi x(a+\ell)}{D\lambda_0} - \sin \frac{2\pi x(a-\ell)}{D\lambda_0}}{\frac{2\pi 2x}{D\lambda_0}} \right]
 \end{aligned}$$

✧ Et avec $\sin a - \sin b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$ nous obtenons

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\ell} \left[\ell - 2 \times \frac{\ell \sin \frac{2\pi x\ell}{D\lambda_0}}{\frac{2\pi 2x\ell}{D\lambda_0}} \times \cos \frac{2\pi xa}{D\lambda_0} \right]$$

✧ Nous voyons apparaître une fonction que nous rencontrons souvent : $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$.

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left[1 - \text{sinc} \left(\frac{2\pi x\ell}{D\lambda_0} \right) \times \cos \frac{2\pi xa}{D\lambda_0} \right]$$

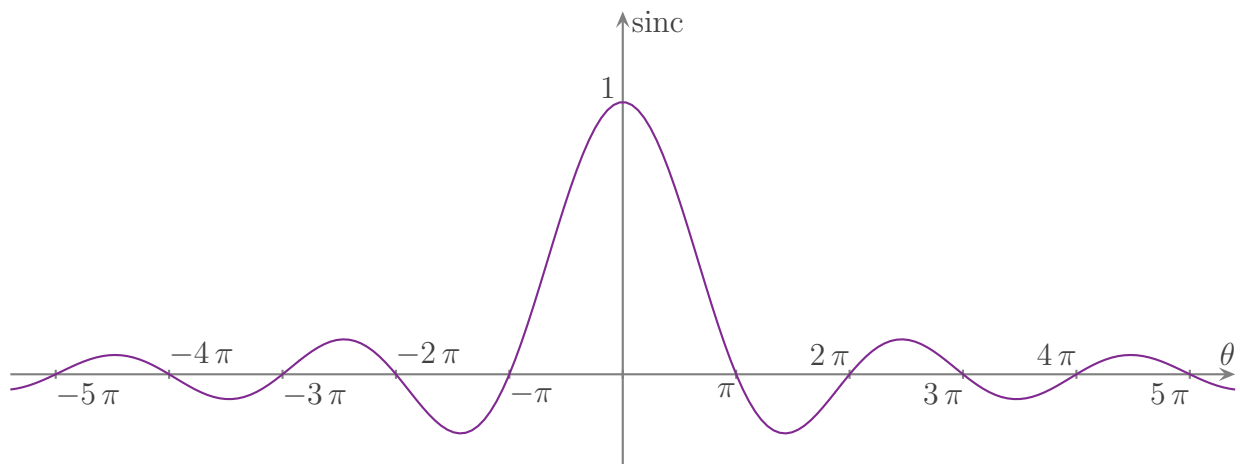
🔗 fonction sinus cardinal

La fonction *sinus cardinal* est définie par

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

👉 *Remarque.* Comme ce n'est pas une « vraie » fonction mathématique, il est possible de rencontrer d'autres définition du sinus cardinal.

◇ Graphiquement elle ressemble à



La fonction $\text{sinc}(x)$ est nulle pour les x qui annulent $\sin x$ sauf pour $x = 0$ pour laquelle $\text{sinc}(0) = 1$.

- ◇ Peu importe les positions et les valeurs « exactes » des maxima secondaires : nous ne les mesurons jamais.
- ◇ En revanche, il faut bien se rappeler que $\text{sinc}(x)$ a une décroissance en $\frac{1}{x}$ qui est « lente ».

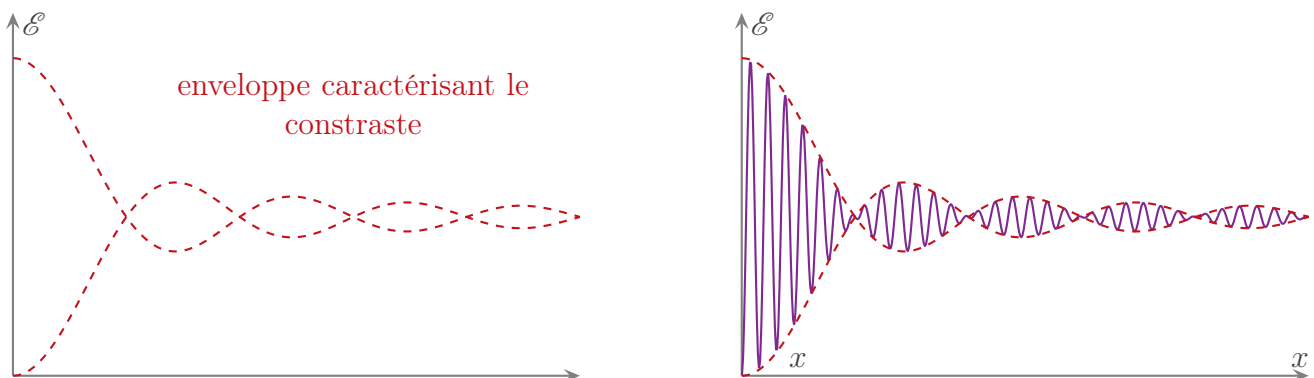
Un sinus cardinal diminue globalement lentement.

🕒 interprétation

- ◇ Revenons à l'éclairement obtenu avec une fente large pour le miroir de LLOYD.
- ◇ Comme précédemment, nous pouvons écrire le terme d'éclairement sous la forme

terme de variation rapide de frange en \cos × terme de variation lente de contraste en sinc

◇ Graphiquement l'éclairement est le suivant :



◇ Cela correspond à la simulation ci-dessous :



II.2.iii – le contraste

- ◇ Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, lorsque les sources ne sont plus ponctuelles il peut y avoir brouillage au sens où les franges obtenues ne sont plus parfaitement contrastées.

Le *contraste* Γ est proportion de l'amplitude locale des oscillations d'éclairement par rapport à l'éclairement maximal.

- ◇ Techniquement cela signifie que, pour des interférences à deux ondes

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} (1 + \text{contraste} \times \cos(\text{frange}))$$

Le contraste peut dépendre du point considéré.

- ◇ Il est possible aussi de calculer le contraste de la manière suivante

$$\Gamma = \frac{\mathcal{E}_{\text{frange brillante}} - \mathcal{E}_{\text{frange sombre d'à côté}}}{\mathcal{E}_{\text{frange brillante}} + \mathcal{E}_{\text{frange sombre d'à côté}}}$$

- ◇ Normalement le contraste est une grandeur positive ce qui fait que nous devrions prendre en toute rigueur la valeur absolue du facteur devant le cosinus correspondant aux franges.
- ◇ En pratique nous ne le ferons pas car nous nous préoccupons principalement des situations pour laquelle le contraste est nul ce qui rend inutile la notion de signe.
- ▲ De plus le caractère négatif du contraste est interprété dans le cas des fentes d'YOUNG éclairés par une source large.

II.2.iv – le michelson en lame d'air

- ◇ Considérons l'interféromètre de MICHELSON et regardons ce qui se passe lorsque se superposent les éclairissements dus à deux points sources, éclairement observé à l'infini.
- ◇ Reprenons pour cela la relation trouvée dans le cas (presque) général du miroir de LLOYD éclairé par deux points sources.

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{\lambda_0} (\delta_1 + \delta_2) \right) \cos \left(\frac{\pi}{\lambda_0} (\delta_1 - \delta_2) \right) \right)$$

- ◇ Or ici $\delta_1 = \delta_2 = 2e \cos i$ indépendant du point source !
- ◇ En effet choisir un point M d'observation sur l'écran c'est choisir un angle de réflexion *donc* un angle d'incidence i et ce **quel que soit** le point source.
- ◇ Nous obtenons alors

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \right)$$

- ◇ La figure d'interférence obtenue est la même.
- ◇ La différence c'est qu'avant l'éclairement maximal était \mathcal{E}_{\max} alors qu'avec deux points source c'est $2\mathcal{E}_{\max}$.

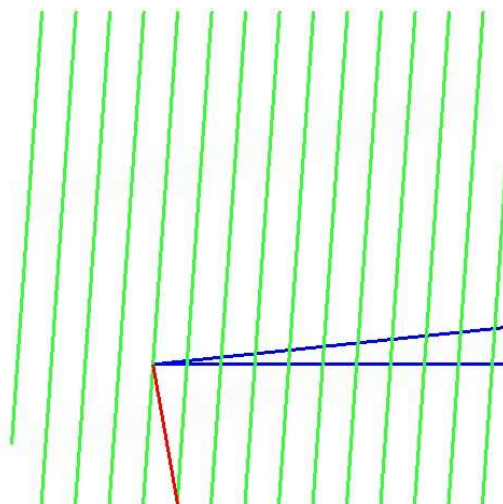
Il n'y a **aucun** problème de cohérence spatiale pour un interféromètre de MICHELSON réglé en lame d'air avec observation à l'infini optique.

- ◇ Il s'agit là en fait d'une des principales raisons qui font que cet interféromètre est très pratique, il est très lumineux et c'est plus qu'utile en TP.
- ◇ Il s'agit là d'un cas exceptionnel, n'en doutons pas !
- 👉 *Remarque.* En revanche quand l'infini optique n'est pas rigoureux, il peut y avoir brouillage, c'est normal. L'auteur ne doute pas un seul instant avoir l'occasion de le répéter en TP.

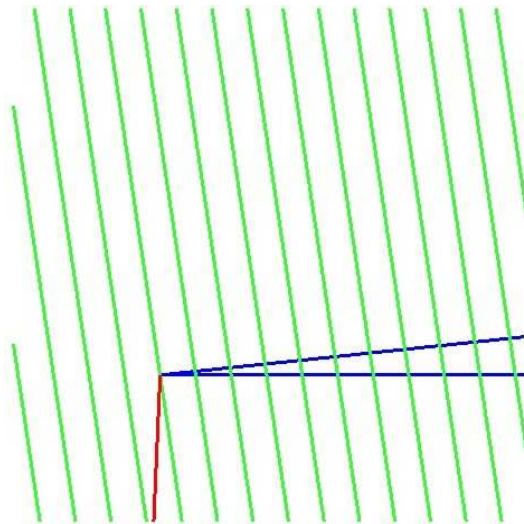
II.2.v – le michelson en coin d'air

★ simulation

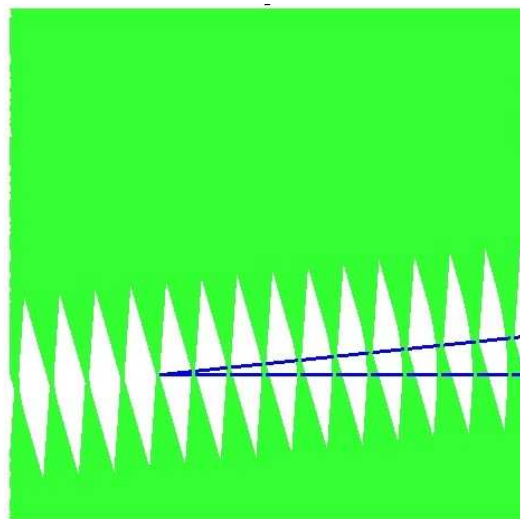
- ◇ Imaginons une onde plane dont un des rayons incident est représenté ci-dessous (en rouge).



- ◇ Les plans verts sont les plans d'éclairement maximal retrouvés géométriquement.
- ◇ Si une onde plane arrive avec un angle légèrement différent, les plans d'éclairement maximal n'auront pas la même direction.



- ◇ Si maintenant nous superposons « beaucoup » d'ondes planes incidentes avec des angles d'incidence différents, nous voyons que l'espace tout entier est éclairé.



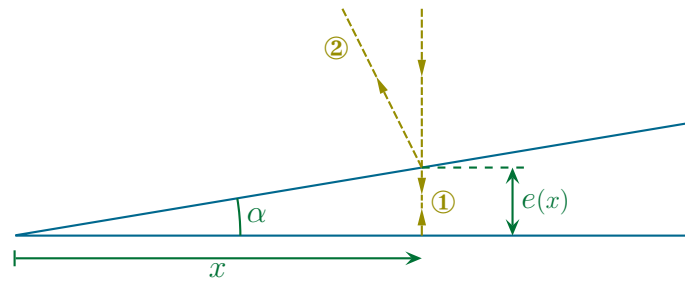
- ◇ Tout entier? Non. Près des miroir il reste une zone épargnée par les plans de lumière, il reste des zones d'ombre autrement dit il reste des franges.

Dans le cas de l'interféromètre de MICHELSON réglé en coin d'air et éclairé par une source large en incidence quasi-normale, il y a brouillage partout sauf au niveau des miroirs.

- ◇ Ceci explique pourquoi lorsque nous avons présenté une simulation d'interférence en coin d'air il n'y avait d'interférences que dans un cercle : c'est parce que nous avons simulé l'image des miroirs.

★ retrouver la différence de marche

- ◇ Dans le cas de l'interféromètre de MICHELSON coin d'air, il est possible de retrouver rapidement l'interfrange sans repasser par l'interférence de deux ondes planes.
- ◇ Pour cela, il faut commencer par **sachant que** les interférences se font :
- au niveau des miroirs ;
 - en incidence quasi-normale.
- ◇ Nous pouvons représenter les ondes qui interfèrent de la manière suivante



◇ La différence de marche est immédiate : il s'agit du chemin optique parcouru par l'onde ② « à l'intérieur » du coin.

◇ Géométriquement, comme α est petit nous avons

$$\delta = 2e(x) \quad \rightsquigarrow \quad \delta = 2\alpha x$$

◇ L'interfrange se retrouve alors rapidement en commençant par chercher la position x_k de la frange d'ordre k .

$$\delta = 2\alpha x_k = k\lambda_0 \quad \rightsquigarrow \quad x_k = k \times \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

◇ Puis l'interfrange est obtenue par

$$i = x_{k+1} - x_k \quad \rightsquigarrow \quad i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

★ interfrange

Pour un interféromètre de MICHELSON réglé en coin d'air, l'interfrange **sur les miroirs** vaut $\frac{\lambda_0}{2\alpha}$.

◇ Insistons sur le fait qu'il s'agit là d'interfrange au niveau des miroirs, car, en TP, ces franges seront toujours observées à l'aide d'une projection réalisée par une lentille convergente.

◇ Pour mesurer l'angle α il faudra alors tenir compte du grandissement de la lentille, grandissement qu'il faudra mesurer.

II.3 – Cohérence temporelle ou de l'utilisation d'une source non monochromatique

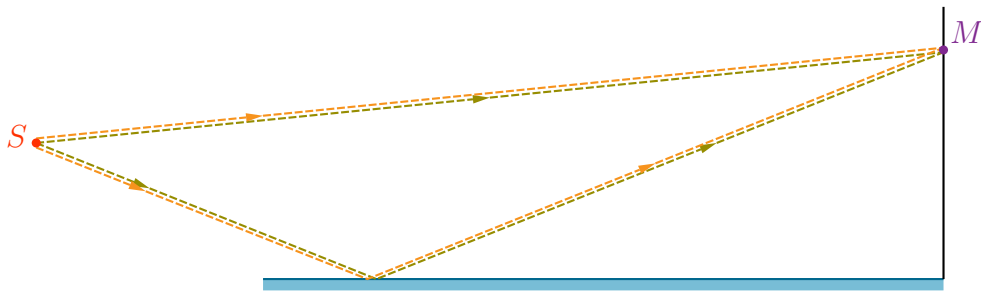
II.3.i – le problème, l'idée

◇ Rappelons qu'une source n'est jamais parfaitement monochromatique car la durée d'émission τ_c d'un train d'onde est liée à la largeur fréquentielle $\Delta\nu$ par

$$\tau \times \Delta\nu \sim 1$$

◇ Même si les lasers ne sont pas parfaitement monochromatiques, il s'en rapprochent beaucoup.

◇ Ainsi si nous considérons *un* point source émettant plusieurs radiations, nous n'aurons « qu' » à sommer les éclaircissements obtenus.



- ◇ Comme cela ne se voit pas très bien sur le schéma ci-dessus, il y a 4 ondes qui arrivent en M :
 - deux ondes de longueur d'onde λ_1 qui interfèrent en M ;
 - deux ondes de longueur d'onde λ_2 qui interfèrent en M ;
 - **mais** les ondes de longueur d'onde λ_1 n'interfèrent pas avec celle de longueur d'onde λ_2 .
- ◇ L'énorme avantage par rapport à la cohérence spatiale c'est que, cette fois, la différence de marche est la même quelles que soient les radiations envisagées.

II-3-ii – le michelson en lame d'air

★ expression de l'éclairement

🕒 situation et première expression

- ◇ Supposons l'interféromètre de MICHELSON :
 - réglé en lame d'air ;
 - observé à l'infini optique ;
 - éclairé par une lampe à vapeur de sodium présentant le doublet $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm.
- ◇ Dans ces conditions nous pouvons sommer les éclaircissements dus aux deux radiations.

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$$

- ◇ Comme chaque radiation engendre des interférences à deux ondes de même amplitude, nous pouvons écrire

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max 1}}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) + \frac{\mathcal{E}_{\max 2}}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right)$$

- ◇ En considérant que les deux éclaircissements sont les mêmes³ nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(2 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \\ &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left[2 + 2 \cos \left(\pi\delta \times \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \times \cos \left(\pi\delta \times \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

- ◇ Rappelons, et ce n'est pas anodin, que la différence de marche δ est la même quelle que soit la radiation envisagée et pas seulement parce qu'il s'agit de l'interféromètre de MICHELSON.

3. Cece n'est pas tout à fait vrai pour le doublet du sodium.

🔗 simplification

✧ Étant donné les ordres de grandeurs mis en jeu, nous pouvons écrire

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda \quad \text{avec} \quad \Delta\lambda \ll \lambda_1$$

✧ Dans ces conditions nous pouvons simplifier les expressions en $\frac{1}{\lambda}$ au premier ordre non nul.

✧ Cela donne d'abord l'ordre 0 pour

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\lambda_1}$$

✧ En revanche, pour l'autre terme il faut aller jusqu'à l'ordre 1

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{1}{1 + \Delta\lambda/\lambda_1} \right) \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2}$$

✧ En remplaçant ces expressions dans l'éclairement nous obtenons.

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) \times \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_1^2}\right) \right]$$

🔗 interprétation

✧ Une fois de plus (!) nous voyons apparaître un éclairement sous la forme

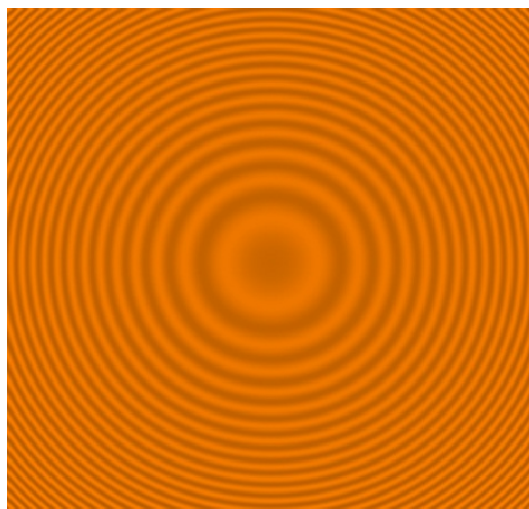
variation rapide de frange en $1/\lambda_1 \times$ variation lente de contraste en $\Delta\lambda/\lambda_1^2$

✧ Ainsi :

→ si $\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_1^2}\right) \ll 1$ l'éclairement est quasi-uniforme, il y a *brouillage* ;

→ si $\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_1^2}\right) \sim 1$ l'éclairement est très contrasté, nous pouvons voir des franges d'égale inclinaison.

✧ Voici ci-dessous une simulation réaliste d'un brouillage obtenu avec une lampe à vapeur de sodium.



✧ Remarquons que le repérage des brouillages successifs en fonction de e permet de remonter à $\Delta\lambda$.

★ mesurer $\Delta\lambda$

- ◇ Pour simplifier, et parce que l'expérience montre que le contraste est à peu près uniforme, raisonnons sur $i = 0$.

🕒 avec les mains

- ◇ Supposons que l'épaisseur e_0 engendre un brouillage et notons $e_0 + \Delta e$ l'épaisseur **suivante** qui engendre un brouillage.
- ◇ Pour l'épaisseur e_0 les systèmes de frange de λ_1 de λ_2 sont décalés d'une demi-frange de sorte que le maximum de l'un apporte de la lumière lorsque l'autre est à son minimum.
- ◇ Pour l'épaisseur $e_0 + \Delta e$ les systèmes de frange sont aussi décalé d'une demi-frange ce qui implique que si l'ordre au centre de λ_1 est passé de p_0 à $p_0 + k$ alors celui de λ_2 est passé de p'_0 à $p'_0 + k - 1$.
- ◇ Nous avons donc

$$2\Delta e = k\lambda_1 \quad \text{et} \quad 2\Delta e = (k-1)\lambda_2 \quad \text{ou} \quad 2\Delta e = (k-1)(\lambda_1 + \Delta\lambda)$$

- ◇ Nous avons ainsi

$$2\Delta e + \lambda_1 + \Delta\lambda = k(\lambda_1 + \Delta\lambda) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{2\Delta e + \lambda_1 + \Delta\lambda}{2\Delta e} = k(\lambda_1 + \Delta\lambda)k\lambda_1$$

- ◇ Nous en déduisons

$$1 + \frac{\lambda_1 + \Delta\lambda}{2\Delta e} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}$$

- ◇ Et comme $\Delta\lambda \ll \lambda_1$ nous obtenons

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1^2}{2\Delta e}$$

🕒 avec l'expression de l'éclairement

- ◇ Les épaisseurs e_k correspondant à des brouillages sont telles que

$$\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_1^2}\right) = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = 2e_k$$

- ◇ Ce qui donne

$$\frac{\pi 2e_k\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightsquigarrow \quad e_k = \frac{\lambda_1^2}{4\Delta\lambda} + k\frac{\lambda_1^2}{2\Delta\lambda}$$

- ◇ La différence d'épaisseur Δe entre deux brouillages successifs s'écrit donc

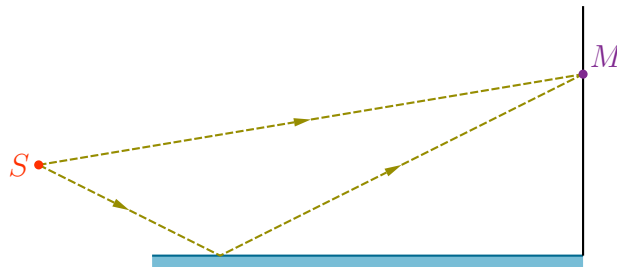
$$\Delta e = \frac{\lambda_1^2}{2\Delta\lambda} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_1^2}{2\Delta e}$$

- ◇ Ce qui est bien évidemment le même résultat que précédemment.

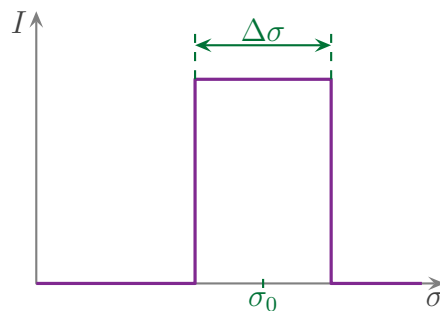
II-3-iii – miroir de LLOYD

★ spectre carré

◇ Considérons le miroir de LLOYD éclairé par une source ponctuelle non monochromatique.



◇ Représentons le spectre de la source non pas fréquentiellement mais en fonction du nombre d'onde.



◇ Comme représenté ci-dessus, nous pouvons décomposer cette source polychromatique en source quasi-monochromatique de nombre d'onde σ et de largeur $d\sigma$.

◇ Avec une intensité totale \mathcal{E}_{\max} émise par la bande ΔX , nous pouvons dire que la petite portion « quasi-monochromatique » de largeur $d\sigma$ possède une intensité

$$d\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_{\max} \times \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

★ éclaircissement

◇ Comme pour les problèmes de cohérence spatiale, nous allons simplement sommer les éclaircissements produits par chaque source quasi-monochromatique.

◇ Comme chacune de ces sources engendre des interférences à deux ondes de même amplitude nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= \int d\mathcal{E}(M) \\ &= \int_{\sigma_0 - \Delta\sigma/2}^{\sigma_0 + \Delta\sigma/2} \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\Delta\sigma} (1 + \cos(2\pi\delta\sigma)) d\sigma \end{aligned}$$

◇ Rappelons ici que la différence de marche δ ne dépend pas de la radiation puisqu'il n'y a qu'un seul point source.

◇ Remarquons aussi l'intérêt de représenter la source en terme de nombre d'onde : l'intégration n'en est que plus facile car primitiver $\cos \frac{\delta}{x}$ par rapport à x pose quelques soucis.

◇ Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(M) &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2 \Delta \sigma} \times \left[\int_{\sigma_0 - \Delta \sigma / 2}^{\sigma_0 + \Delta \sigma / 2} 1 \, d\sigma + \int_{\sigma_0 - \Delta \sigma / 2}^{\sigma_0 + \Delta \sigma / 2} \cos(2 \pi \delta \sigma) \, d\sigma \right] \\
 &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2 \Delta \sigma} \times \left(\Delta \sigma + \frac{[\sin(2 \pi \delta \sigma)]_{\sigma_0 - \Delta \sigma / 2}^{\sigma_0 + \Delta \sigma / 2}}{2 \pi \delta} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2 \Delta \sigma} \times \left(\Delta \sigma + \frac{\sin((2 \pi \delta (\sigma_0 + \Delta \sigma / 2))) - \sin((2 \pi \delta (\sigma_0 - \Delta \sigma / 2)))}{2 \pi \delta} \right)
 \end{aligned}$$

◇ Et avec une formule trigonométrique

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(M) &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2 \Delta \sigma} \times \left(\Delta \sigma + \frac{2 \times \cos(2 \pi \delta \sigma_0) \times \sin(\pi \delta \Delta \sigma)}{2 \pi \delta} \right) \\
 &= \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2 \Delta \sigma} \times \left(\Delta \sigma + \Delta \sigma \times \frac{\sin(\pi \delta \Delta \sigma)}{\pi \delta \Delta \sigma} \times \cos(2 \pi \delta \sigma_0) \right)
 \end{aligned}$$

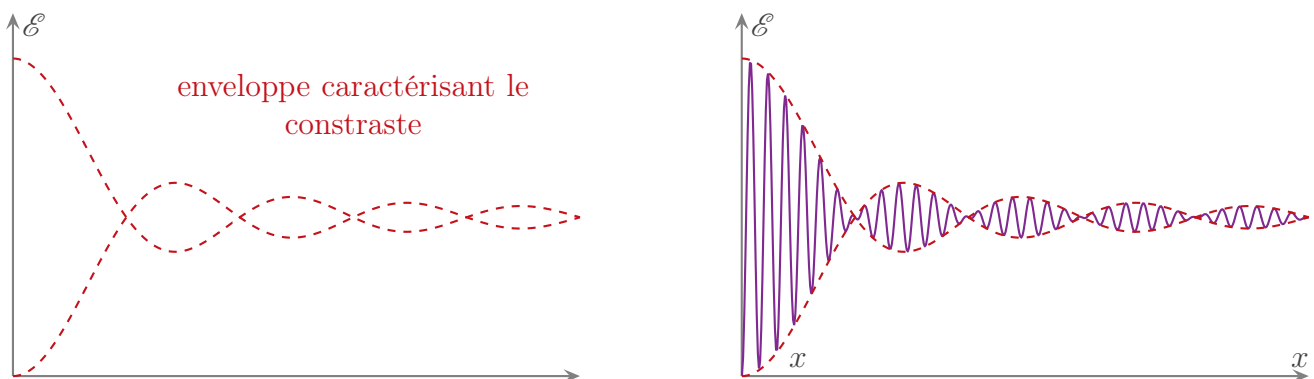
◇ Nous voyons apparaître à nouveau la fonction sinus cardinal (ce n'est pas la dernière fois!)

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \times (1 + \text{sinc}(\pi \delta \Delta \sigma) \times \cos(2 \pi \delta \sigma_0))$$

★ interprétation

◇ Nous avons une fois de plus un système de frange dont la visibilité est non uniforme : il y a des zones de brouillage.

◇ Qualitativement la fonction éclairément est la suivante



◇ Une simulation de telles inférence donne le résultat suivant.



- ◇ Nous pouvons tout d'abord remarque que nous obtenons strictement la même chose que lorsque le brouillage était du à une incohérence spatiale.
- ◇ Faisons l'approximation que le contraste est nul dès lors que $\text{sinc}(x)$ est faible soit dès que $x \geq 5\pi$.
- ◇ Cette approximation implique que $|\text{sinc}(x)| < \frac{1}{5\pi} \sim 7\%$ ce qui est une approximation raisonnable.
- ◇ Nous avons alors

$$\pi \delta \Delta\sigma \geq 5\pi \quad \rightsquigarrow \quad \delta > \frac{5}{\Delta\sigma}$$

- ◇ Or nous avons

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \quad \rightsquigarrow \quad \sigma = \frac{\nu}{c} \quad \rightsquigarrow \quad \Delta\sigma = \frac{\Delta\nu}{c}$$

- ◇ De plus, en notant τ_c la durée d'émission d'un train d'onde, nous savons déjà que

$$\tau_c \times \Delta\nu \sim 1 \quad \text{et} \quad \ell_c = c\tau_c \quad \rightsquigarrow \quad \Delta\nu \sim \frac{c}{\ell_c}$$

- ◇ en remplaçant le tout nous obtenons qu'il y a brouillage pour

$$\delta > 5\ell_c$$

Il y a brouillage à cause de l'incohérence temporelle dès lors que la différence de marche entre les ondes qui interfèrent sont plus grande que la longueur de cohérence d'un train d'onde.

- ◇ En repensant doucement aux différentes notions que cela implique, un résultat contraire aurait été surprenant !

II.3.iv – l'interféromètre de MICHELSON

★ des conclusions identiques en coin d'air

- ◇ Nous pouvons tout de suite reprendre les mêmes conclusions : il y aura brouillage dès lors que $\delta > \ell_c$.
- ◇ Dans le cas du coin d'air $\delta = 2\alpha x$ où x est compté sur le miroir à partir de l'arrête.
- ◇ Pour ne pas voir de brouillage sur un miroir de $d = 4$ cm de diamètre, en imaginant que l'arrête soit au bord, cela donne

$$\alpha < \frac{\ell_c}{2d}$$

◇ Pour la lampe à vapeur de sodium, $\ell_c \sim 2$ mm ce qui conduit à

$$\alpha_{\max} \sim \frac{2 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-2}} \sim 10^{-2} \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \alpha_{\max} \sim 1^\circ$$

◇ 1° en optique, c'est énorme! Nous verrons donc toujours des franges avec un interféromètre de MICHELSON réglé en coin d'air et éclairé par une lampe à vapeur de sodium ... pourvu que l'observation soit suffisamment proche de l'arrête.

◇ Pour la lumière blanche, $\ell_c \sim 1 \mu\text{m}$ ce qui conduit à

$$\alpha_{\max} \sim \frac{1 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-2}} \sim 10^{-5} \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \alpha_{\max} \sim 1''$$

◇ Cette valeur étant très faible nous n'observerons jamais des interférences sur toute la surface des miroirs à moins d'avoir réalisé un réglage exprès pour.

◇ En pratique l'angle du coin d'air sera supérieur et nous verrons des interférences sur une portion de la surface seulement pourvu là aussi d'être assez proche de l'arrête.

Lorsqu'il y a brouillage dans un dispositif interférentiel éclairé par de la lumière blanche, le blanc obtenu est appelé *blanc d'ordre supérieur*.

★ spectre cannelé en lame d'air

◇ Imaginons l'interféromètre de MICHELSON réglé en lame d'air et éclairé par une source « blanche ».

◇ Regardons de plus près la lumière au centre de la figure d'interférence.

◇ Au centre de la figure d'interférence la différence de marche vaut $2e$ quelle que soit la radiation.

◇ Et chaque radiation de longueur d'onde telle que $2e = (p + 1/2)\lambda$ avec p entier sera éteinte puisque présentant une frange sombre en ce point.

◇ Comme il y a toutes les longueurs d'onde possibles entre 400 et 800 nm, cela peut faire de nombreuses radiations éteintes.

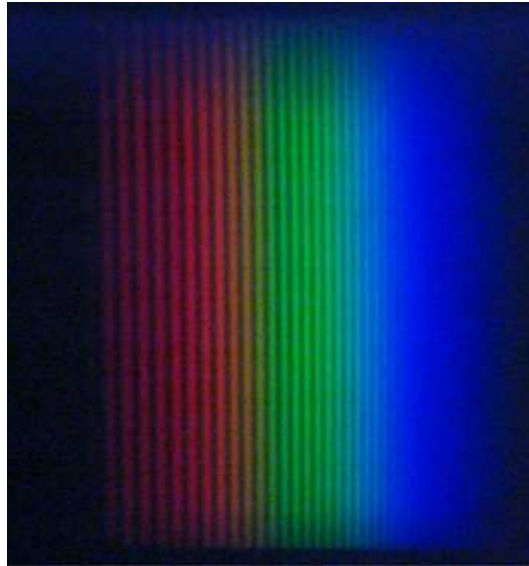
◇ Le spectre obtenu est alors dit « cannelé ».


◇ Nous pouvons nous convaincre très simplement que plus e est grand plus le nombre de radiations éteintes est grand puisque que ce nombre correspond au nombre d'entier p qui vérifient

$$\frac{2e}{800 \text{ nm}} - \frac{1}{2} < p < \frac{2e}{400 \text{ nm}} - \frac{1}{2}$$

◇ Voici la photo d'un spectre cannelé⁴.

4. Photo extraite d'un TP issu de <http://physique-eea.ujf-grenoble.fr/intra/Organisation/CESIRE/OPT>. Précisons que le spectre cannelé n'a pas été réalisé avec un interféromètre de MICHELSON.



 Le spectre cannelé est dû à des interférences mais ce n'est **pas** une figure d'interférence. En particulier :

Le spectre d'un blanc d'ordre supérieur est un spectre cannelé.

II.4 – Bilan

II.4.i – éclairage et cohérence

◇ Lorsqu'il y a interférence à deux ondes de même amplitude l'éclairement s'écrit

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

◇ Le terme de frange fait intervenir le rapport $\frac{\delta}{\lambda_0}$:

- si à un point M donné δ varie, nous sommes confronté à des problèmes de cohérence spatiale ;
- si à un point M donné λ varie, nous sommes confronté à des problèmes de cohérence temporelle ;

◇ Même si, physiquement, les problèmes de cohérence ont des causes de nature très différentes, les conséquences sont similaires puisqu'elles impliquent le même terme, le terme de frange.

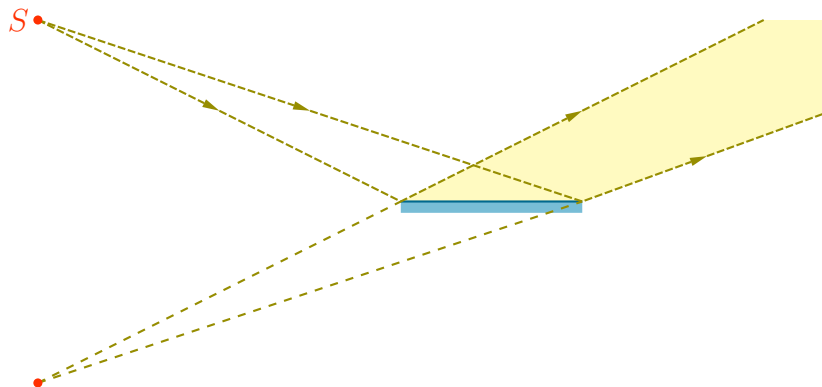
II.4.ii – localisation des interférences

La *zone d'interférence* est la portion de l'espace où il est possible d'observer des interférences quand il n'y a pas de problème de cohérence.

La zone d'interférence est le lieu de l'espace où les ondes peuvent se croiser.

◇ Bien sûr la zone d'interférence dépend du dispositif interférométrique envisagé.



◇ Par exemple pour le miroir de LLOYD, la zone d'interférence est représentée ci-dessous.



Les interférences sont dites *localisées* quand, à cause de problèmes de cohérence, elles ne sont visibles que dans une portion restreinte de la zone d'interférence.

II-4.iii – l'interféromètre de MICHELSON

◇ Résumons ce que nous avons vu sur l'interféromètre de MICHELSON dans un tableau.

réglage	source	interférences	franges
lame d'air	ponctuelle pas à l'infini	non localisée	
	large pas à l'infini	localisée à l'infini	
coin d'air	ponctuelle à l'infini	non localisée	
	large à l'infini	localisée sur les miroirs	

II-4.iv – à quoi ça sert ?

- ◇ Les problèmes de cohérence spatiale permettent de remonter aux grandeurs géométriques de la source.
- ◇ Dans une utilisation astronomique cela permet, par exemple, d'estimer le diamètre d'une étoile « proche » ou la distance entre deux étoiles plus éloignées.
- ◇ Les problèmes de cohérence temporelle permettent de remonter au spectre *fin* de la source.
- ◇ La connaissance précise d'un spectre permet de comprendre certains mécanisme d'émission de lumière.

Interférences

Au niveau du cours

★ Programme concerné

- ◇ Programme de 2^e année :
 - I.D.2. Interférences.

★ Les définitions

- ◇ Sont à savoir :
 - synchronisme ;
 - zone d'interférence ;
 - dispositif à division de front d'onde, à division d'amplitude ;
 - déphasage, différence de marche, ordre d'interférence ;
 - franges, interfrange ;
 - interféromètre de MICHELSON, séparatrice ;
 - coin d'air, lame à faces parallèles, lame d'air ;
 - franges d'égale inclinaison, franges d'égale épaisseur ;
 - contact optique ;
 - cohérence spatiale, cohérence temporelle.

★ Les grandeurs

- ◇ Connaître les petites relations suivantes ainsi que leur interprétation :
 - $\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda_0}$.
- ◇ Connaître les valeurs de :
 - longueurs d'onde du laser He-Ne, longueur d'onde du doublet du sodium.

★ Les lois

- ◇ Sont à connaître :
 - expression de l'éclairement de l'interférence entre deux ondes de même amplitude ;
 - expression de la différence de marche entre deux rayons issus de deux sources ponctuelles ;
 - expression de la différence de marche pour un coin d'air.

★ la phénoménologie

- ◇ Savoir :
 - décrire le dispositif interférentiel du miroir de LLOYD ;
 - interpréter l'éclairement en termes de franges sombres et claires ;
 - interpréter les franges claires et sombres en terme d'ordre d'interférence ;
 - décrire l'interféromètre de MICHELSON ;
 - interpréter le brouillage lors d'un élargissement spatial de la source ;
 - interpréter le brouillage lors d'un élargissement fréquentiel de la source.

Au niveau de l'analyse

★ Analyse physique

◇ Savoir :

- savoir reconnaître un dispositif interférentiel à division du front d'onde d'un dispositif interférentiel à division d'amplitude.

Au niveau des savoir-faire

★ petits gestes

◇ Savoir :

- savoir trouver les plans de lumière pour deux OPDM ;
- savoir tracer le système optique équivalent pour l'interféromètre de MICHELSON ;
- savoir décrire le système d'interférence pour l'interféromètre de MICHELSON réglé en lame d'air ;
- savoir décrire le système d'interférence pour l'interféromètre de MICHELSON réglé en coin d'air.

★ exercices classiques

◇ Savoir :

- retrouver la différence de marche entre deux rayons pour une lame d'air à faces parallèle ;
- retrouver les rayons des anneaux d'égale inclinaison pour le MICHELSON réglé en lame d'air ;
- retrouver la figure d'interférence pour le MICHELSON réglé en lame d'air avec une source non monochromatique.