Diffraction

Exercice 1 Diffraction et image géométrique

On considère dans un plan Oxy une pupille de tranparence réelle :

➜ $T(x) = -1$ si $x \in \left[-\dfrac{a}{2},0\right]$

➜ $T(x) = +1$ si $x \in \left[0,\dfrac{a}{2}\right]$

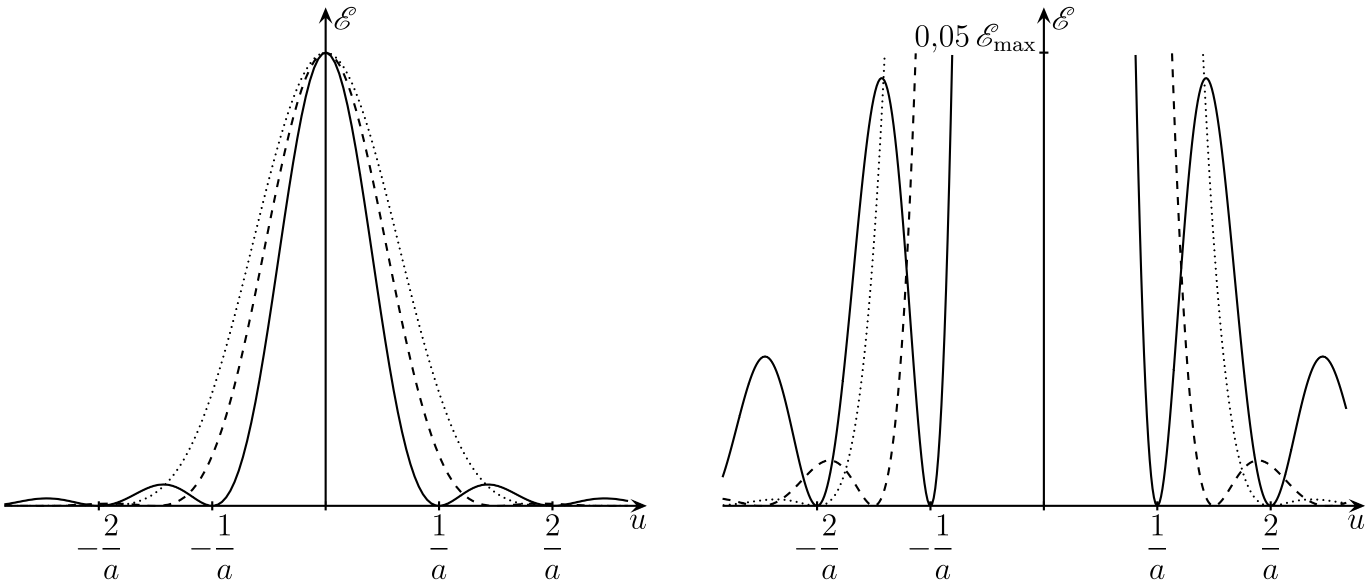
➜ $T(x) = 0$ ailleurs

1. Calculer et interpréter la figure de diffraction à l'infini quand elle est éclairée par une onde plane de plan d'onde Oxy.
   Qualifier cette pupille diffractante.
2. Où est l'image géométrique ? Pouvait-on le prévoir ?
3. Comment réaliser une telle pupille ?

Exercice 2 Apodisation par un écran absorbant

Une fente de centre O, de largeur a suivant Oz et de longueur $b \gg a$ suivant l'axe Oy, porte une diapositive de fonction de transparence réelle $t(x)$. Elle est éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ_0.

1. Exprimer l'amplitude $\underline{a}(\theta)$ de la lumière diffracctée dans la direction faisant un angle θ avec la normale au plan de la fente sous la forme d'une intégrale.
2. On dispose de deux diapositives de fonctions de transparence :
   $$t_1(x) = \cos\left(\frac{\pi\,x}{a}\right) \qquad \text{et} \qquad t_2(x) = \cos^2\left(\frac{\pi\,x}{a}\right)$$
   Représenter graphiquement ces fonctions de transparence.
   Calculer dans chaque cas l'éclairement diffracté en fonction de $u = \dfrac{\sin\theta}{\lambda_0}$.
3. On donne ci-dessous, avec deux échelles verticales différentes, les courbes de $\dfrac{\mathscr{E}(\theta)}{\mathscr{E}_{\max}}$ (où $\mathscr{E}_{\max}$ est l'éclairement maximal) en fonction de u pour les deux fonctions de transparence précédentes ainsi que pour la fente sans diapositive.

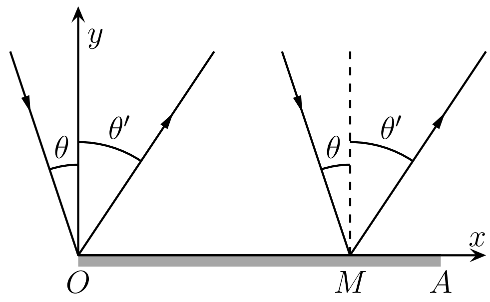


Identifier les courbes en comparant les largeurs à la base des pics principaux.

Que remarque-t-on pour le premier pic secondaire ?

Exercice 3 Diffraction de Fraunhofer par un miroir

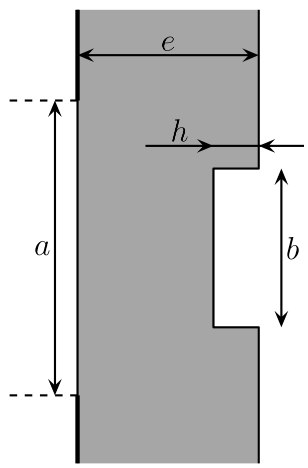
Un miroir métallique rectangulaire de largeur $OA = a$ et de longueur $b \gg a$ est éclairé par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ_0 arrivant sous l'angle d'incidence θ.



1. Justifier le fait qu'on restreigne l'étude du phénomène de diffraction au plan de figure Oxy.
2. Établir l'expression de la différence de marche optique entre les deux ondes qui interfèrent à l'infini dans une direction quelconque θ', l'une étant diffractée au point O et servant de référence, l'autre étant diffractée au point M de coordonnée s.
3. En déduire l'éclairement de la lumière diffractée par le miroir à l'infini dans la direction θ' en notant $\mathscr{E}_{\text{max}}$ sa valeur maximale.
   Dans quelle direction θ' l'éclairement est-il maximal ? Commenter ce résultat.
4. Imaginer un montage, comportant une lame semi-réfléchissante, qui permette d'observer cette figure de diffraction.

Exercice 4 Diffraction une lame présentant un défaut

Une source ponctuelle monochromatique est placée au foyer d'une lentille convergente. On observe la figure de diffraction à l'infini donnée par une fente de largeur a obstruée par une lame de verre d'indice n, d'épaisseur e et présentant un défaut : un creux de largeur b et d'épaisseur h avec $b \gg h$.



1. Déterminer l'amplitude diffractée dans le plan d'observation.
2. Que devient cette amplitude diffractée lors que h est suffisamment petit devant la longueur d'onde ?
   Que vaut alors l'intensité diffractée ?

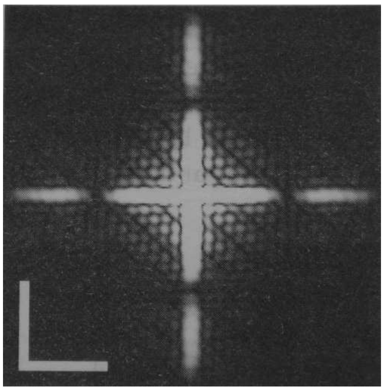
Exercice 5 Aspect énergétique de la diffraction

On considère la diffractiond e Fraunhofer par une pupille rectangulaire de dimensions a selon $\vec{u}_x$ et b selon $\vec{u}_y$. La pupille est éclairée en incidence normale par un faisceau parallèle et monochromatique de longueur d'onde λ_0 de lumière cohérente. L'écran est placé dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale image f' et de foyer image F'.

1. Retrouver l'expression de l'éclairement diffracté en un point M de coordonnées (x,y) de l'écran dans le repère $(F'xy)$. On notera $\mathscr{E}_{\text{max}}$ l'éclairement maximal.
2. Exprimer la puissance lumineuse totale reçue par l'écran en fonction de $\mathscr{E}_{\text{max}}$, λ_0, f', a et b. On rappelle que l'éclairement est égal à la puissance reçue par unité de surface et on donne l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 u \,\mathrm{d}u = \pi$.
3. En déduire l'expression de $\mathscr{E}_{\text{max}}$ en fonction de l'éclairement $\mathscr{E}_1$ de l'onde reçu par la pupille, de λ_0, f', a et b.

   Commenter la manière dont $\mathscr{E}_{\text{max}}$ varie en fonction de ces différents paramètres.

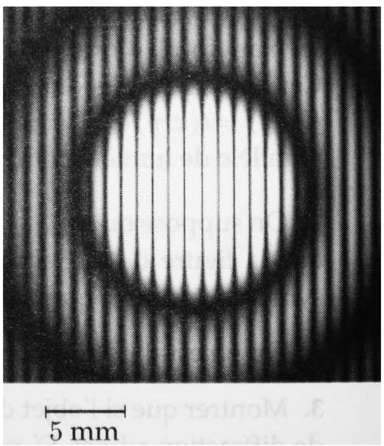
Exercice 6 Figure de diffraction d'un « L » et d'un « Z »



1. La figure ci-dessus, obtenue par simulation numérique, représente la figure de diffraction à l'infini de l'ouverture en forme de « L » représenté dans le coin inférieur gauche de la figure.

   Décrire et interpréter cette figure.
2. Quelle est l'allure de la figure de diffraction d'une ouverture analogue en forme de « Z » (la brache oblique faisant un angle de 45 degrés avec les branches horizontales) ?

Exercice 7 Diffraction par deux ouvertures



La figure ci-dessus représente l'intensité diffractée dans le plan focal image d'une lentille de distance focale $f' = 50$ cm par une pupille percée de deux ouvertures identiques éclairées par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 633$ nm.

Interpréter cette figure. Déterminer en particulier la forme des ouvertures, leur dimension et la distance les séparant.

Exercice 8 Holographie élémentaire

Derrière deux points sources identiques S_1 et S_2 **cohérents** et en phase, on place une lentille convergete $\mathscr{L}$ de distance focale f'. La distance des sources est $S_1S_2 = a$ et la longueur d'onde qu'elles émettent est λ_0.

On place sur le trajet de l'onde venant de S_1 une lame qui a pour effet de diminuer notablement son amplitude et d'augmenter son retard de phase de la quantité ψ (fig. ①). Les ondes issues des deux sources ont alors au niveau de l'écran des amplitudes respectives A_1 et A_2 telles que $A_1 \ll A_2$.

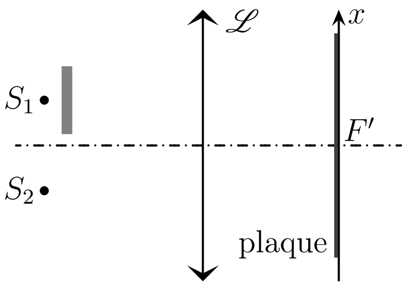


figure ①

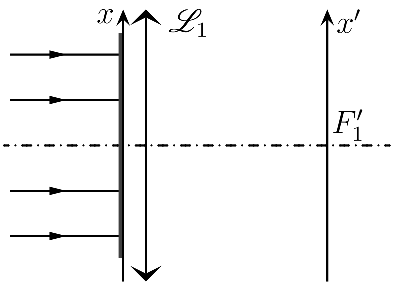


figure ②

1. Déterminer l'éclairement dans le plan focal de $\mathscr{L}$ rapporté à un repère $F''xy$ où F' est le foyer image de $\mathscr{L}$ et $f'x$ est parallèle à S_1S_2.

   Donner une expression approchée de l'éclairement à l'ordre un en $\dfrac{A_1}{A_2}$. On note $\Delta\varphi$ le déphasage des deux ondes qui interfèrent en un point de l'écran.
2. On place dans le plan focal de $\mathscr{L}$ une plaque photographique. Celle-ci, après développement, éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde quelconque et d'amplitude complexe $\underline{a_0}$, transmet en chaque point où elle avait reçu un éclairement $\mathscr{E}$ une amplitude $\underline{a_{\text{t}}} = \alpha\,\mathscr{E}^{-g/2}\,\underline{a_0}$ où α et g sont des constantes caractéristiques de l'émulsion photographique.

   Calculer, en faisant un développement limité au premier ordre en $\dfrac{A_1}{A_2}$, l'amplitude $\underline{a_{\text{t}}}$ des ondes trasnmisees par la plaque en fonction de A_1, A_2, $\underline{a_0}$, α, g et $\Delta\varphi$.
3. La plaque ainsi obtenue est éclairée par un faisceau parallèle (fig. ②). Ce faisceau est de même longueur d'onde λ_0 que celle utilisée pour impressionner la plaque.
   (a) En négligeant le déphasage introduit par la plaque, montrer que l'on obtient dans le plan situé juste derrière la plaque une amplitude complexe correspondant à la somme de trois ondes planes.

   En déduire sans calculs supplémentaire que l'on a, après la plaque, trois ondes planes dont deux sont déphasées par rapport à l'onde incidente.

   (b) Montrer alors que ces deux ondes vont converger après une lentille $\mathscr{L}_1$ de même distance focale que $\mathscr{L}$ en deux points S'_1 et S'_2 du plan focal image de $\mathscr{L}_1$.

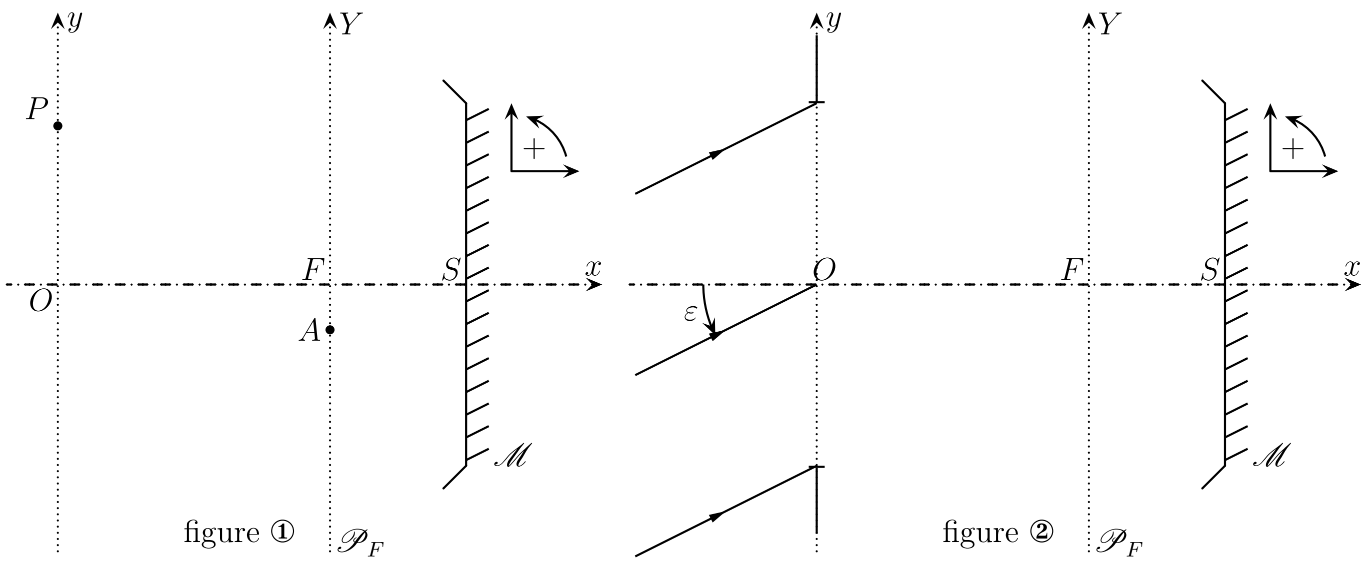
   Déterminer la distance d de chacun des points S'_1 et S'_2 à l'axe optique de la lentille $\mathscr{L}_1$.

   (c) Que devient la distance d si on éclaire la plaque avec une longueur d'onde λ'_0 différente de λ_0 ?

Exercice 9 Pouvoir séparateur d'un télescope

Ce problème étudie les deux principaux phénomènes qui limitent l'aptitude d'un télescope à fournir des images distinctes de deux astres rapprochés. Les perturbations atmosphériques jouent un rôle essentiel ; on les traite ici de manière très schématique, voire simpliste, mais en faisant apparaître des ordres de grandeur corrects. Le télescope est modélisé par un simple miroir sphérique concave $\mathscr{M}$ de sommet S, de foyer F, de distance focale $\overline{FS} = f$. On se propose de décrire certaines phénomènes observés dans le plan de section du miroir passant par son axe de révolution. Cependant la symétrie de révolution ne conduit pas à des calculs simples. C'est pourquoi on schématisera l'ouverture du télescope par une fente rectangulaire de très grande longueur. Une telle schématisation fournit des ordres de grandeur corrects.

Dans tout le problème, la lumière est toujours supposée monochromatique et de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 0{,}50\ \mu$m.



1. On considère la schématisation présentée figure ①.
   (a) P étant un point quelconque et A un point du plan focal $\mathscr{P}_F$ du miroir.
   Construire le trajet d'un rayon issu de P et passant, après réflexion sur le miroir, par A.
   (b) Soit O la projection de P sur l'axe du miroir. On pose $y = \overline{OP}$ et $Y = \overline{FA}$. On imagine que deux sources ponctuelles placées en O et P, cohérentes et en phase, émettent des vibrations lumineuses vers $\mathscr{M}$.
   Montrer que la différence de marche entre les rayons issus de O et de P et parvenant en A est $\delta = -y\,\theta$ où θ est l'angle que font les rayons incidents avec l'axe du miroir (angle orienté dans le sens donné sur la figure).
   Relier θ et Y.
2. Pour tenir compte de la diffraction introduite par les dimensions finies du miroir, on utilise la schématisation de la figure ② : le miroir possède des dimensions très grandes par lui même et n'introduit pas de diffraction notable mais on suppose placée devant lui une ouverture en forme de fente très grande et de largeur a.
   (a) Le dispositif reçoit la lumière émise par une source ponctuelle située à l'infini dans une direction faisant un petit angle ε avec l'axe.
   Décrire la répartition de l'éclairement dans le plan focal image $\mathscr{P}_F$ du miroir.
   Quelle est la demi-largeur angulaire de la tâche de diffraction ?

(b) Le dispositif reçoit maintenant de la lumière émise par deux sources ponctuelles de même longueur d'onde λ_0 mais incohérentes entre elles, situées à l'infini dans le plan de la figure ci-dessus mais dans des directions symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe du miroir et faisant des petits angles $\dfrac{\varepsilon}{2}$ et $-\dfrac{\varepsilon}{2}$ avec celui-ci. Ceci schématise les conditions d'observation d'une étoile double dont les deux composantes ont la même luminosité. On admet qu'un observateur peut séparer les images des deux composantes de l'étoile double si la distance entre les pics de diffraction qu'elles forment est supérieure ou égale à leur demi-largeur commune.

Quel est l'écart angulaire le plus petit que l'observateur peut ainsi mettre en évidence (*pouvoir séparateur théorique* du télescope) ?

A.N. : $a = 6{,}0$ m (grand télescope du mont Semirodriki dans le Caucase)

3. Dans tout ce qui précède on a négligé les perturbations introduites par les turbulence atmosphériques. On se propose d'en rendre compte de manière très simplifiée. Ces perturbations sont dues à des inhomogénéités d'indice de réfraction localisées dans des « cellules » de dimensions variables (entre quelques dizaines de centimètres et quelques mètres), de configuration très complexe et d'évolution très rapide (temps caractéristique de l'ordre de 10 ms). On cherchera à décrire l'aspect du plan focal image $\mathscr{P}_F$ *à un instant donné.*

(a) On représente l'effet des turbulences atmosphériques par une petite perturbation de la phase de l'onde parvenant au plan de l'ouverture, à laquelle on donne la forme $\delta\varphi(y) = \alpha \cos\left(\dfrac{2\,\pi\,y}{\ell}\right)$ où $\alpha \ll 1$ et où ℓ est une constante égale à la dimension moyenne des cellules pertubatrices. On suppose $a \gg \ell$.

Donner sous forme d'une intégrale l'expression de l'amplitude complexe de la vibration observée en un point A de $\mathscr{P}_F$ et provenant d'un point source situé à l'infini dans une direction faisant le petit angle ε avec l'axe du miroir.

Effectuer le calcul de cette intégrale en tenant compte de l'hypothèse $\alpha \ll 1$.

(b) On admet que le résultat du calcul précédent fournit encore une approximation acceptable même si ce α devient de l'ordre de l'unité.

Montrer que dans ce cas la figure observée dans le plan $\mathscr{P}_F$ est constitué principalement de trois pics d'importance comparables et bien distincts.

Quelle est la demi-largeur angulaire d'un de ces pics ?

Quel est leur écartement angulaire ?

A.N. : $\ell = 50$ cm et $a = 6{,}0$ m.

(c) La présence de ces pics supplémentaires dus aux perturbations atmosphériques serait-elle, dans le cas étudié, un obstacle à la séparation des deux composantes d'une étoile double ?

4. En réalité, les perturbations de phase ne peuvent pas être considéré comme petites, elles ne sont pas non plus périodiques mais distribuées au hasard. On peut alors montrer que la figure observée dans le plan $\mathscr{P}_F$, avec un seul point source situé à l'infini, est constitué d'un très grand nombre de pics disjoints qui semblent distribués au hasard dans une zone entourant l'image géométrique de la source ; la demi-largeur angulaire de cette zone étant peu différente de l'écartement angulaire entre les pics calculés à la question 3b. Les intensités des pics décrits sont maintenant comparables et leur demi-largeur reste celle calculée au 3b. Le phénomène ainsi décrit est appelé *speckle*[1].

(a) Peut-on séparer les composantes d'une étoile double aussi facilement que s'il n'y avait pas de turbulence atmosphérique ?

1. En français : mouchetures, tavelures, granulation.

Définir un *pouvoir séparateur pratique* du télescope.

Le calculer à l'aide des valeurs numériques fournies antérieurement.

Quelle serait l'ouverture a' d'un télescope dont le pouvoir séparateur théorique serait égal au pouvoir séparateur pratique du télescope d'ouverture $a = 6{,}0$ m ?

(b) Quel est alors l'intérêt de la construction de télescope de grand diamètre d'ouverture ?

Remarque. pour améliorer le pouvoir séparateur d'un télescope au sol, on dispose de la technique de l'optique adaptative qui consiste à redresser les surfaces d'ondes perturbées par la turbulence atmosphérique à l'aide d'un miroir déformable dont la forme est constamment ajustée en temps réel.