

Phénomènes de diffusion

✱ Exercice 1

1. Comme l'évolution de la température est un bilan de trois termes (variation, échange, production), dire que le tube n'a aucune influence sur la température implique trois choses :

- ce n'est pas lui qui va faire varier la température, *i.e.* nous pouvons considérer que sa capacité thermique est nulle
- ce n'est pas lui qui va réaliser des échanges thermiques, *i.e.* nous pouvons dire que tout se passe comme si ses parois étaient adiabatiques (et uniquement les siennes)
- ce n'est pas lui qui va produire de l'énergie (d'un autre côté, qui a déjà vu un thermomètre à mercure nucléaire ?)

Il y a d'autres hypothèses, importantes à repérer qui sont largement suggérées par l'énoncé et par les questions qui suivent :

- la température du mercure est uniforme (mais évolue dans le temps)
- la capacité thermique des parois en verre qui entourent le mercure n'est pas à prendre en compte

Autant la première hypothèse est tout à fait justifiable (les transferts thermiques sont rapides dans les métaux donc nous pouvons considérer que l'évolution de la température est quasistatique), autant la seconde l'est moins puisque la capacité thermique des phases condensées (liquide ou solide) sont toutes du même ordre de grandeur.

2. Ici, étant donné les hypothèses, nous n'avons pas besoin de nous intéresser à ce qui se passe au niveau mésoscopique puisque la température du mercure est uniforme. Par conséquent un bilan énergétique global, comme au bon vieux temps du premier principe de sup, suffira largement.

Le flux thermique total reçu par le thermomètre de la part du fluide est $\Phi = \varphi_{f \rightarrow t} \times S = h S (T_f - T)$ avec $S = 2\pi a H + 2\pi a^2$ (ne pas oublier les bases du cylindre qui est plongé dans le liquide).

Le premier principe appliqué au cylindre entre les instants t et $t + dt$ s'écrit $dU = \delta Q = \Phi dt$.

Comme le thermomètre est une phase condensée, nous pouvons écrire

$$dU = c dm dT = c \rho \times \pi a^2 H \times dT$$

En rassemblant le tout, il vient :

$$\boxed{\frac{dT(t)}{dt} + \frac{2h(H+a)}{\rho c a H} T(t) = \frac{2h(H+a)}{\rho c a H} T_f}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Nous pouvons donner la solution directement : $\boxed{T(t) = (T_0 - T_f)e^{-t/\tau} + T_f}$ avec $\boxed{\tau = \frac{\rho c a H}{2h(H+a)}}$.

En notant t_0 l'instant pour laquelle la différence $T - T_f$ a été divisé par 100, alors t_0 obéit à l'équation :

$$T(t_0) - T_f = \frac{T_0 - T_f}{100} \quad \rightsquigarrow \quad (\dots) \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{t_0 = \tau \ln 100}$$

3. Numériquement : $\boxed{\tau = 83,8028 \text{ s}}$ et $\boxed{t_0 = 385,926 \text{ s}}$.

✱ Exercice 2

Cet exercice est très guidé et ne présente guère de problème d'analyse physique. Ceci dit, nous aurions pu dire, au niveau de l'analyse physique qu'étant donné la symétrie et les suggestions de l'énoncée, toutes les grandeurs associées (\vec{j} et T) ne dépendront que de r la distance à l'axe, *i.e.* il y aura une symétrie

cylindrique. Cela suppose en fait que le barreau est très long devant son rayon, ou (cela revient au même) que les effets de bord sont négligés.

Il est important de voir qu'il y a là deux milieux diffusifs : le barreau radioactif et la couche protectrice et qu'ils sont tous les deux en régime stationnaire.

1. Voir cours. Nous trouvons $\alpha = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \pi \lambda_2} = 2,58127 \text{ W}^{-1} \cdot \text{K} \cdot \text{m}$.

☞ Remarque. ici nous pouvons utiliser la notion de résistance thermique car nous avons bien un milieu diffusif en régime stationnaire et sans terme de production.

2. Analyse technique. Ici puisque nous cherchons à relier deux températures correspondant aux extrémités d'un milieu diffusif en régime stationnaire et sans terme de production, autant utiliser la notion de résistance thermique et ce d'autant plus qu'elle a été calculée à la question précédente. En fait la seule chose à véritablement faire ici c'est de déterminer le flux évacué par la couche protectrice. Et pour ça, rien de tel qu'un bilan global!

La barre étant en régime permanent, toute l'énergie créée à l'intérieur de la barre radioactive doit être évacuée par la couche protectrice.

Et, avec la définition de la résistance thermique de la couche protectrice, cela donne :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{R_{\text{th}}} (T_1 - T_2) = \mathcal{P} \times \pi r_1^2 L \quad \rightsquigarrow \quad T_1 = T_2 + \pi r_1^2 \alpha \mathcal{P} = 558,3870 \text{ K}$$

3. Analyse technique ; Le dispositif étudié est en régime permanent avec une puissance produite uniforme : il est, dès lors, pratique d'utiliser la méthode du bilan global.

Faisons un bilan énergétique sur tout le cylindre de rayon r_1 .

La puissance produite $\mathcal{P} \pi r^2 L$ est égale à la puissance évacuée à travers la surface $j(r) 2 \pi r L$.

En utilisant la loi de FOURIER projetée sur \vec{u}_r , $j(r) = -\lambda_1 \frac{dT(r)}{dr}$, nous trouvons :

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\mathcal{P} r}{2 \lambda_1} \quad \rightsquigarrow \quad T(r) = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{4 \lambda_1} (r_1^2 - r^2)$$

Nous avons ainsi $T(0) = T_1 + \frac{\mathcal{P} r_1^2}{4 \lambda_1} = 1458,39 \text{ K}$.

☛ Exercice 3

1. Voir cours. On trouve $\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$.

2. (a) Il n'y a pas de difficulté particulière dans cette question : au lieu de faire un bilan énergétique, nous allons faire (et de manière guidée de surcroît) un bilan entropique du style « variation = échange + production » sur un volume mésoscopique.

En ce qui concerne le terme d'échange, il faut juste bien faire attention qu'il y a deux surfaces à travers lesquelles il y a du transfert thermique : la surface en x et la surface en $x + dx$.

L'entropie s'échange à travers la surface. L'expression vaut $\delta^2 S_{\text{éch}} = \frac{\delta^2 Q}{T_{\text{surf}}}$.

→ Pour la surface en x . L'énergie reçue par le système vaut :

$$\delta^2 Q = j_{\text{th}}(x,t) \Sigma dt \quad \rightsquigarrow \quad \delta^2 S_{\text{éch}}(x,t) = \frac{j_{\text{th}}(x,t) \Sigma dt}{T(x,t)}$$

→ Pour la surface en $x + dx$. L'énergie reçue par le système vaut :

$$\delta^2 Q = -j_{\text{th}}(x+dx, t) \Sigma dt \quad \rightsquigarrow \quad \delta^2 S_{\text{ech}}(x+dx, t) = -\frac{j_{\text{th}}(x+dx, t) \Sigma dt}{T(x+dx, t)}$$

→ *Rassemblement.* En sommant les deux termes et en utilisant la loi de FOURIER :

$$\delta^2 S_{\text{ech}} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{\text{th}}}{T}\right)_{(x,t)}\right) \Sigma dx dt = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x}\right) \Sigma dx dt$$

En développant la dérivée du produit :

$$\delta^2 S_{\text{ech}} = \left(-\frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \frac{\lambda}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \Sigma dx dt.$$

2. (b) Comme le système entre x et $x+dx$ est homogène, nous pouvons utiliser l'identité thermodynamique : $dU = T dS + P dV$.

Comme la transformation est isochore (dilatation négligée) $dV = 0$ et qu'il s'agit d'une phase condensée $dU = dm c dT = \mu c \Sigma \frac{\partial T}{\partial t} dt$, nous arrivons à $d^2 S = \mu c \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \Sigma dx dt$.

☞ *Remarque.* la notation $dS \rightarrow d^2 S$ est utilisée pour respecter le fait qu'il s'agit d'un infinitésimal du second ordre (en volume et en temporel).

2. (c) Le bilan entropique s'écrit : $d^2 S = \delta^2 S_{\text{ech}} + \delta^2 S_{\text{cr}}$.

En rassemblant les expressions de $d^2 S$ et $\delta^2 S_{\text{ech}}$ et avec l'équation de diffusion thermique, nous arrivons à :

$$\delta^2 S_{\text{cr}} = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 \Sigma dx dt.$$

L'entropie créée par unité de temps et de volume s'écrit alors :

$$s_{\text{cr}} = \frac{\lambda}{T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2.$$

Nous constatons que l'entropie créée par unité du volume du fait de la diffusion est bien strictement positive ce qui ne fait que confirmer le fait qu'il s'agit là d'un processus irréversible.

✿ Exercice 4

Analyse physique. L'énoncé modélise déjà beaucoup la situation : le fil est parcouru par un courant donc sera le siège de production énergétique, la résistance est considérée comme uniforme, constante et indépendante de T , les échanges thermique à travers les parois latérales sont négligées, la température ne dépend que de x et, enfin, le régime permanent continu est atteint.

1. *Analyse technique.* Le régime est stationnaire, une approche de bilan globale est à penser. Ici elle ne conviendra pas puisqu'il va être impossible de définir un volume dont les surfaces limites sont en un seul x variable et en un autre où le flux serait connu. Encore, nous aurions une condition sur le flux en $x=0$, nous pourrions utiliser cette approche, mais là ce n'est pas le cas. Nous devons alors nous rabattre sur une approche mésoscopique classique.

Faisons un bilan énergétique pour la tranche comprise entre x et $x+dx$.

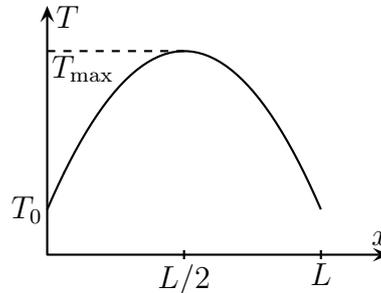
Comme le fusible est en régime permanent, la variation d'énergie est nulle et il reste : échange + production = 0.

Le terme d'échange s'écrit $\delta^2 Q_{\text{ech}} = j_{\text{th}}(x, t) S dt - j_{\text{th}}(x+dx) S dt = -\frac{dj_{\text{th}}(x)}{dx} S dx dt$.

Le terme de création s'écrit $\delta^2 Q_{\text{cr}} = d\mathcal{P} dt$ avec $dP = \delta R I^2 = \frac{dx}{\gamma S} I^2$.

En rassemblant le tout et en utilisant la loi de FOURIER $j_{\text{th}}(x,t) = -K \frac{dT(x)}{dx}$, nous arrivons, compte tenu des conditions aux limites $T(0) = T(L) = T_0$, à :

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = -\frac{I^2}{K \gamma S^2} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{T(x) = T_0 + \frac{I^2 L^2}{2 \gamma S^2 K} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right)}$$



2. La température est maximale au milieu (ce qui se prouve soit avec l'expression du polynôme, soit en remarquant que la situation énergétique est symétrique par rapport à $L/2$).

Pour que le matériau fonde, il faut donc $T(L/2) = T_F$, ce qui conduit à la relation

$$\boxed{S = I_{\text{max}} L \sqrt{\frac{1}{8 K \gamma (T_F - T_0)}} = \underline{1,60128 \text{ mm}^2}$$

3. Par définition du flux thermique surfacique, la puissance thermique transférée vers les x croissants (donc reçue par le fusible) vaut : $P_{r,\text{th}}(0) = j_{\text{th}}(0) S = -K \frac{dT}{dx}(0) S = -\frac{I^2 L}{2 \gamma S} < 0$.

Étant donné que le résultat est négatif, cela signifie que c'est le fusible qui fournit effectivement de l'énergie à l'extérieur.

Pour $x = L$, la puissance transférée vers les x croissants (donc fournie par le fusible) vaut $\mathcal{P}_{f,\text{th}}(L) = j_{\text{th}}(L) S = -K \frac{dT}{dx}(L) S = \frac{I^2 L}{2 \gamma S} > 0$.

Le résultat positif s'interprète en disant qu'en ce point, c'est le fusible qui fournit de l'énergie à l'extérieur.

La puissance électrique fournie au fusible, puissance considérée du point de vue thermique comme étant créée vaut $\mathcal{P}_e = R I^2$ avec $R = \frac{L}{\gamma S}$.

En faisant attention aux signes, nous trouvons bien que $\mathcal{P}_{r,\text{th}}(0) + \mathcal{P}_{r,\text{th}}(L) + \mathcal{P}_e = 0$.

4. En régime permanent, la variation temporelle sur la durée Δt de l'entropie du fusible est nulle : $\Delta S = 0$.

Le bilan entropique s'écrit alors $\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} = 0$.

L'entropie échangée s'échange uniquement en $x = 0$ et en $x = L$, ce qui donne (attention au signe) :

$$S_{\text{éch}}(0) = \frac{Q(0)}{T_{\text{surf}}} = \frac{\mathcal{P}_{r,\text{th}}(0) \Delta t}{T_0} = -\frac{I^2 L}{2 \gamma S T_0} \Delta t \quad \text{et} \quad S_{\text{éch}}(L) = \frac{Q(L)}{T_{\text{surf}}} = \frac{\mathcal{P}_{r,\text{th}}(L) \Delta t}{T_0} = -\frac{I^2 L}{2 \gamma S T_0} \Delta t$$

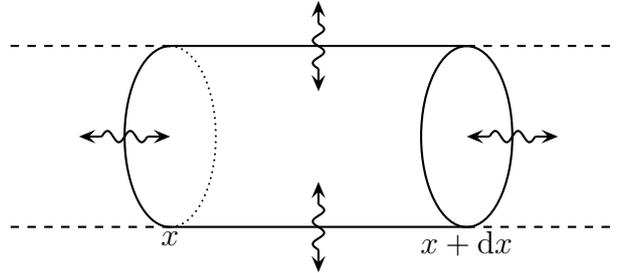
Avec le bilan entropique, nous en déduisons $\boxed{S_{\text{cr}} = -S_{\text{éch}} = \frac{I^2 L}{\gamma S T_0} \Delta t > 0}$.

L'entropie créée étant strictement positive, cela corrobore bien le fait que le processus est irréversible.

✱ Exercice 5

1. Bien que nous soyons en régime permanent, nous ne pouvons pas utiliser la méthode de bilan global car nous ne pouvons pas définir un volume macroscopique où seul un flux serait inconnu. Nous devons donc utiliser une approche mésoscopique.

Éeffectuons un bilan énergétique pour la tranche située entre x et $x + dx$.



Comme le régime est permanent et continu (donc stationnaire) la variation d'énergie est nulle et qu'il n'y a pas de création d'énergie, il reste : échange = 0.

Nous pouvons voir qu'il y a trois flux énergétiques reçus :

- conductif à travers la surface en x : $\Phi_1 = j_{th}(x) \pi r^2 dt$;
- conductif à travers la surface en $x + dx$: $\Phi_2 = -j_{th}(x+dx) \pi r^2 dt$;
- conducto-convectif à travers la surface latérale : $\Phi_3 = -h(T(x) - T_0) 2 \pi r dx dt$.

En écrivant qu'au premier ordre en dx nous avons $j_{th}(x) - j_{th}(x+dx) = -\frac{dj_{th}(x)}{dx} dx$, nous trouvons

en rassemblant et en utilisant la loi de FOURIER $j(x) = -\lambda \frac{dT(x)}{dx}$: $\boxed{\frac{d^2T(x)}{dx^2} = \frac{2h}{\lambda r} (T(x) - T_e)}$.

2. La solution est du type $T(x) = A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}$ avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{r \lambda}{2h}}}$.

Les conditions aux limites sont :

- continuité de la température en $x = 0$: $T(0) = T_1$;
- continuité du flux en $x = L$: $j_{th}(L) = h(T(L) - T_e)$ ce qui donne $-\lambda \frac{dT}{dx}(L) = h(T(L) - T_e)$.

Nous avons alors :

$$\begin{cases} A + B = T_1 - T_e \\ -\frac{\lambda A}{\delta} e^{L/\delta} + \frac{\lambda B}{\delta} e^{-L/\delta} = h(A e^{L/\delta} + B e^{-L/\delta}) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A + B = T_1 - T_e \\ -A e^{L/\delta} + B \alpha e^{-L/\delta} = 0 \end{cases}$$

Système dont les solutions sont bien celles proposées :

$$\boxed{\begin{cases} A = \frac{(T_1 - T_e) \alpha e^{-2L/\delta}}{1 + \alpha e^{-2L/\delta}} \\ B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \alpha e^{-2L/\delta}} \end{cases}}$$

3. La puissance perdue vers l'extérieur est perdue tout le long de la surface latérale et à l'extrémité $x = L$. Cela donne :

$$\mathcal{P}_{\text{aillette} \rightarrow \text{air}} = \left(\int_0^L \varphi(x) dS \right) + \Phi(L) S = \int_0^L h(T(x) - T_e) 2 \pi r dx + h(T_L - T_e) \times \pi r^2$$

Tous calculs faits, nous arrivons à $\boxed{\mathcal{P}_{\text{aillette} \rightarrow \text{air}} = 2 \pi r h \delta (B - A)}$.

Le flux thermique passant du matériau à l'ailette vaut $\mathcal{P}_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}} = +j(0) \pi r^2 = -\lambda \frac{dT}{dx}(0) \pi r^2$, ce qui donne, là aussi tous calculs faits : $\boxed{\mathcal{P}_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}} = 2 \pi r h \delta (B - A)}$.

Nous constatons que $\boxed{\mathcal{P}_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}} = \mathcal{P}_{\text{aillette} \rightarrow \text{air}}}$, ce qui ne fait que traduire le bilan énergétique à l'ailette en régime permanent.

4. Le rapport recherché vaut :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{paroi} \rightarrow \text{ailette}}}{h \pi r^2 (T_1 - T_e)} = \frac{2 \delta}{r} \times \frac{B - A}{T_1 - T_e} \quad \text{puis} \quad \boxed{\eta = 2 \sqrt{\frac{2hr}{\lambda}} \frac{1 - \alpha e^{2L/\delta}}{1 + \alpha e^{-2L/\delta}}}$$

Si $\eta > 1$, l'ailette permet d'évacuer plus d'énergie que si elle n'était pas là ce qui permet, globalement, d'augmenter le flux conducto convectif et, donc, d'éviter que la température de la paroi n'augmente de trop.

Il s'agit typiquement du mode de refroidissement utilisé sur les microprocesseurs : un système d'ailettes est fixé sur ce dernier et un ventilateur souffle sur la pièce métallique afin d'augmenter le flux conducto-convectif. C'est un système de refroidissement très efficace.

REMARQUE

Au delà des microprocesseurs, il existe des ailettes naturelles : les doigts.

C'est la raison pour laquelle, en hiver et par grand froid, il est indispensable de se couvrir les mains car elles peuvent, plus que les autres parties du corps, se refroidir.

✿ Exercice 6

1. La différence entre la question de cours classique et cette question est qu'ici il est demandé de trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $q(x,t)$, ici par la densité volumique de courant thermique.

L'équation de la diffusion (à savoir retrouver) s'écrit $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$.

En dérivant cette équation par rapport à x et en utilisant la loi de FOURIER, qui s'écrit ici $q(x,t) = -\lambda \frac{\partial x}{\partial t} T$, nous arrivons à $\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}$: il s'agit aussi d'une équation de diffusion.

REMARQUE

Notons qu'ici la Terre est considérée comme plate et non comme sphérique étant donné que la dépendance fonctionnelle est (x,t) . Cela n'a pas grande importance si les phénomènes étudiés sont surfaciques à l'échelle de la planète. En revanche, ce modèle serait à revoir dans le cas où des distances de l'ordre de plusieurs milliers de kilomètres (en profondeur) seraient envisagés.

2. Comme il n'y a pas de terme de production dans l'équation de diffusion, nous pouvons dire que, en $t \rightarrow \infty$, la température s'uniformise à la température de contrainte (ici T_S), ce qui implique

$$\boxed{q(z,t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ quel que soit } z}$$

En $t = 0$, la température subit une discontinuité en $z = 0$, ce qui donne, d'après la loi de FOURIER

$$\boxed{q(0,0) \rightarrow \infty}$$

Comme ailleurs dans le sol, il n'y a pas de discontinuité de température, nous pouvons dire

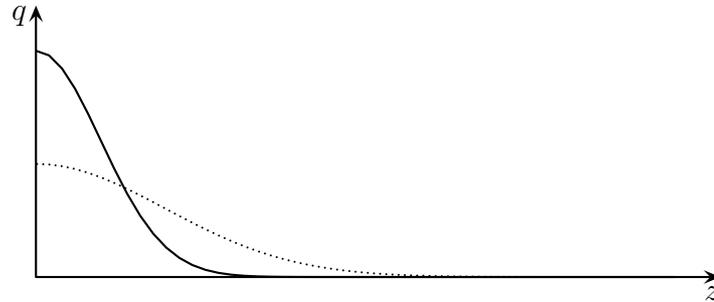
$$\boxed{q(z,0) = 0 \text{ pour } z \neq 0}$$

3. Comme la fonction vérifie l'équation de diffusion par hypothèse de l'énoncé, il ne reste qu'à vérifier qu'elle vérifie aussi les conditions aux limites.

Pour $z = 0$, $q(0,t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}}$. Nous avons donc bien $q(0,0) = \infty$ et $q(z,\infty) = 0$.

Pour $z \neq 0$, nous avons $q(z,0) = 0$ et $q(z,\infty) = 0$.

La solution proposée par Lord KELVIN a l'allure ci-dessous : la courbe pleine correspond à un instant t_1 alors que la courbe en pointillés correspond à un instant $t_2 > t_1$.



4. Pour ce genre de question, il faut poser les choses doucement.

Nous avons q en W.m^{-2} , D en $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ donc A s'exprime en $\text{W.m}^{-1} = \text{kg.m.s}^{-2}$.

D'autre part λ s'exprime en $\text{kg.m.s}^{-3}.\text{K}^{-1}$ et c en $\text{m}^2.\text{s}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Nous en déduisons :

$$\text{M.L.T}^{-3} = \Theta^\alpha \times (\text{M.L.T}^{-3}.\Theta^{-1})^\beta \times (\text{M.L}^{-3})^\gamma \times (\text{L}^2.\text{T}^{-2}.\Theta^{-1})^\delta$$

D'où :

$$\begin{cases} \alpha - \beta - \delta = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 1 \\ -3\beta - 2\delta = -3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = \delta = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{A = a(T_0 - T_S)\lambda}$$

5. Comme (loi de FOURIER) $\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{q(z,t)}{\lambda}$ nous avons tout de suite $\frac{\partial T}{\partial z}(0) = \frac{T_0 - T_S}{\sqrt{\pi D t}}$.

Donc, finalement, l'âge de la Terre est égal à $t = \frac{(T_0 - T_S)^2}{\pi D} \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial z}(0)\right)^2}$.

L'application numérique donne un âge de 11 à 45 millions d'années.

6. L'âge de la Terre est en fait de l'ordre de 4,5 milliards d'années : l'estimation de Lord KELVIN est donc loin de la réalité. En fait Lord KELVIN avait négligé la production interne d'énergie à partir de la radioactivité naturelle, tout simplement parce que le phénomène n'était pas connu.

✿ Exercice 7

1. Une particule est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède (résultante des forces de pression) et à la force de frottement.

Toutes ces forces sont verticales, la particule ayant une vitesse initiale nulle, son mouvement sera vertical et comme la particule est de masse volumique plus importante que celle de l'eau, son mouvement sera descendant.

Le PFD appliqué à la particule s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{4}{3} \pi R^3 (\mu - \mu') \vec{g} - 6 \pi \eta R \vec{v} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6 \pi \eta R}{m} \vec{v} = \frac{4}{3 m} \pi R^3 (\mu - \mu') \vec{g}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constant de durée caractéristique $\tau = \frac{m}{6 \pi \eta R}$.

Lorsque la vitesse limite est atteinte :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}_\ell = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 (\mu - \mu') \vec{g}}{6 \pi \eta R} \rightsquigarrow \boxed{\vec{v}_\ell = \frac{m^*}{6 \pi \eta R} \vec{g} = \frac{m^*}{h} \vec{g}}$$

2. Avec un bilan de particules, nous arrivons à $\boxed{\vec{j}_{\text{conv}} = c(z) \vec{v}_\ell}$.

3. La chute des particules entraîne une inhomogénéité de concentration et, donc, l'apparition de diffusion de bas en haut donc la densité volumique de courant particulaire est donnée par la loi de

$$\text{FICK : } \boxed{\vec{j}_{\text{diff}} = -D \frac{dc(z)}{dz} \vec{u}_z}$$

4. En régime permanent, il y a autant de particules qui tombent en raison de la gravité que de particules qui montent en raison de la diffusion, ce qui donne $\vec{j}_{\text{conv}} + \vec{j}_{\text{diff}} = \vec{0}$ ou encore :

$$\frac{dc(z)}{dz} + \frac{v_\ell}{D} c(z) = 0 \quad \text{d'où} \quad c(z) = c_0 \exp\left(-\frac{v_\ell}{D} z\right)$$

5. Par identification des deux expressions, nous obtenons $\boxed{k_B T = h D = 6 \pi \eta R D}$

6. La distance caractéristique est $H = \frac{D}{v_\ell} = \frac{h D}{m^* g}$.

Pour faire l'application numérique, il manque le rayon R des particules.

Nous pouvons l'obtenir en écrivant la masse d'une particule de deux manières différentes : $m = \frac{M}{\mathcal{N}_A} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu$.

$$\text{Nous trouvons alors } H = \frac{3 \eta D 6^{1/3} \pi^{2/3}}{\left(\frac{M}{\mathcal{N}_A \mu}\right)^{2/3} (\mu - \mu') g}$$

Numériquement : $\boxed{H_{\text{urée}} = 22 \text{ km}}$ et $\boxed{H_{\text{hémoglobine}} = 10 \text{ m}}$.

La sédimentation naturelle de l'urée ne peut pas se faire, quant à celle de l'hémoglobine elle nécessite une installation d'une dizaine de mètres de hauteur.

Pour diminuer cette hauteur caractéristique, il est possible d'utiliser des centrifugeuses qui permettent d'obtenir des accélérations g très élevées.

✿ Exercice 8

1. Aucune difficulté dans cette question, il suffit juste de trouver l'équation de diffusion. Comme il ne s'agit pas là d'un cas particulier (régime stationnaire par exemple), nous allons faire comme usuellement à savoir une approche mésoscopique.

Le bilan de neutrons sur la tranche entre x et $x + dx$ et entre t et $t + dt$ s'écrit :

$$\ll \text{variation} = \text{échange} + \text{production} \gg$$

Cela donne :

$$\rightarrow \text{terme de variation (temporelle)} : n(x, t + dt) S dx - n(x, t) S dx = S \frac{\partial n}{\partial t}(x, t) dx dt$$

→ terme d'échance : $j(x,t) S dt - j(x+dx,t) S dt = -\frac{\partial j}{\partial x}(x,t) S dx dt$

→ terme de création : $-\frac{n(x,t)}{\tau} S dx dt$ (absorption des neutrons incidents) et $K \frac{n(x,t)}{\tau} S dx dt$ (production de neutrons par fission).

En rassemblant nous obtenons une équation que nous pouvons transformer avec la loi de FICK :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} + (K-1) \frac{n}{\tau} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(x,t) + \frac{K-1}{\tau} n(x,t) = \frac{\partial n}{\partial t}(x,t)}$$

2. En régime permanent, l'équation devient $\frac{d^2 n}{dx^2}(x) + \alpha^2 n(x) = 0$ où $\alpha^2 \stackrel{\text{not}}{=} \frac{K-1}{D\tau}$.

La solution s'écrit ($\alpha > 0$) : $n(x) = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x)$.

Les conditions aux limites $n(a) = n(-a) = 0$ donnent

$$\begin{cases} A \cos(\alpha a) + B \sin(\alpha a) = 0 \\ A \cos(\alpha a) - B \sin(\alpha a) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2A \cos(\alpha a) = 0 \\ 2B \sin(\alpha a) = 0 \end{cases}$$

Ce système a une solution triviale nulle ... et inintéressante.

La première équation $2A \cos(\alpha a) = 0$ donne (pour $A \neq 0$) $\alpha = \left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) \frac{1}{a}$ et (en remplaçant cette condition dans l'autre équation) $B = 0$.

Nous remarquons que lorsque $p \neq 0$, la concentration $n(x)$ prend des valeurs négatives ce qui n'est physiquement pas possible. Il reste alors $\boxed{n(x) = n_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$.

La deuxième équation $2B \sin(\alpha a) = 0$ donne (pour $B \neq 0$) $\alpha = \frac{p\pi}{a}$ et (en remplaçant cette condition dans l'autre équation) $A = 0$.

Nous remarquons alors que, pour tout p la concentration $n(x)$ prend des valeurs négatives ce qui n'est physiquement pas possible : il n'y a pas de solution dans ces conditions.

3. En remplaçant $n(x,t)$ par $f(x)g(t)$ dans l'équation de diffusion, nous obtenons :

$$g'(t) f(x) = D f''(x) g(t) + \frac{K-1}{\tau} f(x) g(t) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{g'(t)}{g(t)} = D \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{K-1}{\tau}$$

Les variables t et x étant indépendantes, les deux membres de l'égalité sont constants.

En notant λD cette constante, il vient alors deux équations différentielles :

$$g'(t) = \lambda D g(t) \quad \text{et} \quad f''(x) + \left(\frac{K-1}{\tau D} - \lambda\right) f(x) = 0$$

La première équation se résout en $\boxed{g(t) = \beta \exp(\lambda D t)}$ ($\beta = \text{C}^{\text{te}}$ dépend des conditions initiales).

La deuxième équation a une solution formellement identique à celle de la précédente ($\gamma = \text{C}^{\text{te}}$ dépend des conditions initiales) :

$$\boxed{f(x) = \gamma \cos(kx)} \quad \text{avec} \quad k \stackrel{\text{not}}{=} \sqrt{\frac{K-1}{\tau D} - \lambda}$$

D'après la question précédente, nous devons avoir $k = \frac{\pi}{2a}$, ce qui donne la relation :

$$\boxed{\lambda = \frac{K-1}{\tau D} - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2}$$

La fonction $g(t)$ tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$ si $\lambda < 0$ donc si $L = 2a < \pi \sqrt{\frac{D\tau}{K-1}} \stackrel{\text{not}}{=} L_0$: dans ce cas, le réacteur s'éteint.

Si $L > L_0$, la fonction $g(t)$ diverge, le réacteur s'emballe et, même en courant vite ...

Pour que le réacteur puisse fonctionner il faut $L = L_0$.

✿ Exercice 9

Pas trop de difficulté dans ce problème étant donné que le modèle est en grande partie admis. Ici nous sommes face à un problème en régime quasi-stationnaire, i.e. tel que la répartition des molécules suit une loi linéaire suivant l'axe vertical.

1. L'axe z est dirigé vers le bas et l'origine est prise en haut du tube.

La densité moléculaire d'éther suit dans l'air une loi linéaire (régime quasi-stationnaire) donc :

$$n(z,t) = a(t)z + b \quad \text{avec} \quad n(0,t) = 0$$

À l'interface entre l'éther et l'air, la pression de l'éther est égale à la pression de vapeur saturante donc en assimilant la vapeur d'éther à un gaz parfait :

$$n(L-h(t),t) = \frac{P_{\text{sat}} \mathcal{N}_A}{RT} \quad \rightsquigarrow \quad n(z,t) = \frac{P_{\text{sat}} \mathcal{N}_A}{RT} \frac{z}{L-h(t)}$$

2. Le nombre de molécules d'éther qui s'évaporent entre t et $t+dt$ n'est autre que le flux de densité volumique de courant particulaire à l'interface (attention au signe : j est dirigé vers les z croissants) :

$$dN_{\text{vap}} = -j(L-h(t),t)S \quad \rightsquigarrow \quad dN_{\text{vap}} = \frac{D P_{\text{sat}} \mathcal{N}_A S}{RT} \frac{1}{L-h(t)}$$

3. Le volume d'éther évaporé entre t et $t+dt$ est $dV_{\text{vap}} = \frac{M}{\mu} \mathcal{N}_A dN_{\text{vap}} = -S dh$ (attention au signe : h diminue).

Tous calculs faits, nous arrivons à :

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{D M P_{\text{sat}}}{\mu R T} \frac{1}{L-h(t)} \quad \rightsquigarrow \quad (L-h(t)) dh(t) = \frac{D M P_{\text{sat}}}{\mu R T} dt$$

Cela s'intègre en (attention, intermédiaires de maple-calcul non explicités) :

$$h(t) = L + (h_0 - L) \sqrt{1 + \frac{t}{\tau}} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{\mu R T_0 (h_0 - L)^2}{2 P_{\text{sat}} D M}$$

$$\text{L'éther est entièrement évaporé à la date } t_f = \tau \left(\left(\frac{L}{L-h_0} \right)^2 - 1 \right) = 4,41 \cdot 10^5 \text{ s} = 122 \text{ h } 30 \text{ min}$$

soit un peu plus de 5 jours.

4. La durée caractéristique de diffusion sur une distance L vaut $\tau_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D} \simeq 44 \text{ min} \ll t_f$, l'hypothèse est donc vérifiée : le régime est bien quasi-stationnaire.