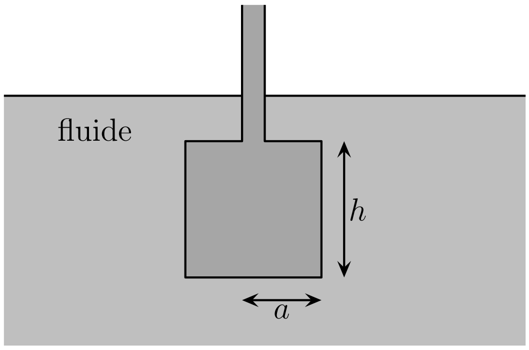
Phénomènes de diffusion

Exercice 1 Temps de réponse d'un thermomètre au mercure

On souhaite mesurer la température d'un liquide avec un thermomètre à mercure. La partie utile du thermomètre est un cylindre de rayon a et de hauteur H qui a une masse volumique moyenne ρ et une capacité thermique massique moyenne c. Le transfert thermique entre le thermomètre et le fluide suit la loi de Newton : $\varphi_{\text{fluide}\to\text{thermomètre}} = h\,(T_{\text{fluide}} - T)$ où T est la température du thermomètre et h une constante. On immerge le thermomètre à l'instant $t = 0$, sa température initiale étant T_0.

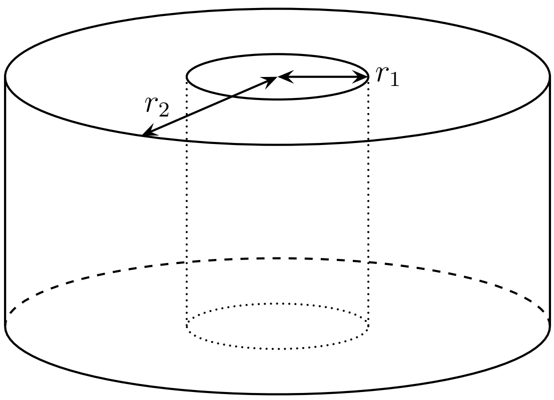


On suppose que la température à l'intérieur du mercure est uniforme et que le tube qui sort du réservoir n'a aucune influence sur la température.

1. Préciser et justifier l'hypothèse « le tube qui sort du réservoir n'a aucune influence sur la température ».
   D'autres hypothèses sont-elles sous-entendues ?
2. Écrire l'équation différentielle pour $T(t)$.
   Au bout de combien de temps la différence $T(t) - T_{\text{fluide}}$ a-t-elle été divisée par 100 ?
3. **A.N. :** $H = 1{,}5$ cm ; $a = 3{,}0$ mm ; $\rho = 13{,}6.10^3$ kg.m^{-3} ; $c = 140$ J.kg^{-1}.K^{-1} ;
   $h = 28{,}4$ W.m^{-2}.K^{-1}.

Exercice 2 Barre de combustible nucléaire

Le combustible d'un réacteur nucléaire se présente sous forme de barres solides de rayon r_1, de très grande longueur et de conductivité thermique λ_1, à l'intérieur desquelles les réactions nucléaires dégagent une puissance volumique $\mathscr{P}$. Chaque barre est entourée d'une couche protectrice, sans activité nucléaire, de rayon intérieur r_1, de rayon extérieur r_2 et de conductivité thermique λ_2, sont la surface extérieure est maintenue à la température T_2 par circulation du liquide.



Données : $r_1 = 6{,}0$ mm ; $r_2 = 9{,}0$ mm ; $\lambda_1 = 2{,}0$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\lambda_2 = 25$ W.m^{-1}.K^{-1} ;
$\mathscr{P} = 2{,}0.10^8$ W.M^{-3} ; $T_2 = 500$ K.

On s'intéresse à la température $T(r)$ à l'intérieur d'une barre et de son enveloppe en régime permanent à distance r de l'axe de symétrie d'une barre. On note $T_1 \overset{\text{not}}{=} T(r_1)$.

1. Montrer que la résistance thermique de la couche protectrice d'une barre de longueur L se met sous la forme $R_{\text{th}} = \dfrac{\alpha}{L}$.
   Calculer numériquement α.
2. Exprimer T_1 en fonction de T_2, $\mathscr{P}$, r_1 et α.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$ pour $r < r_1$.
   Exprimer $T(0)$ en fonction de T_2, $\mathscr{P}$, λ_1, r_1 et α.
   Calculer numériquement $T(0)$.

Exercice 3 BILAN ENTROPIQUE À UNE DIMENSION

On considère un solide homogène, de masse volumique μ, de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ. On suppose qu'il n'y a pas de production d'énergie dans le matériau. La température locale ne dépend que de x et de t.

1. Établir rapidement l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T(x,t)$.
2. Soit le cylindre situé entre les plans d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, de section Σ.
   (a) Déterminer en fonction de λ, T, $\dfrac{\partial T}{\partial x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}$, Σ, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$, l'entropie échangée par ce cylindre entre t et $t + \mathrm{d}t$.
   (b) Exprimer la variation d'entropie $\mathrm{d}S$ de ce même système entre t et $t + \mathrm{d}t$. On pourra introduire l'entropie massique locale $s(x,t)$ que l'on exprimera en fonction de c et de $T(x,t)$.
   (c) Effectuer le bilan entropique et exprimer l'entropie créée s_{cr} par unité de temps et de volume.
   Conclure.

Exercice 4 FUSIBLE

Un fusible est constitué d'un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire S, de longueur utile L, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Il possède une conductivité électrique γ et une conductivité thermique K. il est traversé par un courant électrique continu d'intensité I. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les température en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant.

Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes, données dans le système international d'unité (SI) : $K = 65$ SI, $\gamma = 1{,}2.10^6$ SI, $c = 460$ SI, $\mu = 2{,}7.10^3$ kg.m^{-3}, $T_0 = 290$ K, $L = 2{,}5$ cm.

On rappelle que la résistance R d'un conducteur cylindrique de conductivité γ, de longeur h, de section S, parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti et parallèle à son axe est $R = \dfrac{h}{\gamma\, S}$.

On se place en régime permanent.

1. Établir l'équation différentielle liant la température T, x, S et les données.
   Donners l'expression littérale de $T(x)$ et représenter graphiquement T en fonction de x.

2. Le matériau constituant le fil fond à $T_{\mathrm{F}} = 390$ K. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{\mathrm{max}} = 16$ A.

   Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{max}.

   Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir.

   Faire l'application numérique.

3. On fixe $I = 10$ A. Le fil a une section S trouvée à la question précédente.

   Évaluer littéralement puis numériquement la puissance thermique $\mathscr{P}_{\mathrm{th}}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$.

   Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil.

   Même question pour la puissance thermique $\mathscr{P}_{\mathrm{th}}(L)$ transférée en $x = L$.

   Quelle relation a-t-on entre $\mathscr{P}_{\mathrm{th}}(0)$, $\mathscr{P}_{\mathrm{th}}(L)$ et la puissance électrique $\mathscr{P}_{\mathrm{e}}$ fournie à l'ensemble du fil ?

   Commenter.

4. On désire faire un bilan entropique du fil sur une durée Δt. Évaluer :
   ➜ la variation d'entropie ΔS du fil pendant cette durée ;
   ➜ les expressions littérales des termes d'échange S_{e} et de création S_{cr} pendant cette durée.

   En déduire l'expression littérale puis numérique de l'entropie créée dans le fil par unité de temps.

   Commenter.

Exercice 5 AILETTE DE REFROIDISSEMENT

Une ailette de refroidissement est constituée par un cylindre d'axe Ox, de rayon r, de longueur L, fixé par sa base $x = 0$ à une paroi dont la température est T_1 et en contact sur le reste de sa surface avec l'air ambiant à la température T_{e}. Le flux surfacique passant de l'aillette à l'air ambiant est donné par la loi de NEWTON $\varphi_{\text{ailette}\to\text{air}} = h\,(T - T_{\mathrm{e}})$ où T est la température locale de l'ailette. On se place en régime permanent et on suppose que la température locale dans l'ailette ne dépend que de x.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.

2. Montrer que $T(x)$ peut se mettre sous la forme $T(x) = A\,\mathrm{e}^{x/\delta} + B\,\mathrm{e}^{-x/\delta} + T_{\mathrm{e}}$ où δ est une constante à déterminer.

   Quelles sont les conditions aux limites du problème ?

   En déduire le système de deux équations à deux inconnues vérifiée par A et B.

   Montrer que :

$$A = \frac{(T_1 - T_{\mathrm{e}})\,\alpha\,\mathrm{e}^{-2\,L/\delta}}{1 + \alpha\,\mathrm{e}^{-2\,L/\delta}} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{T_1 - T_{\mathrm{e}}}{1 + \alpha\,\mathrm{e}^{-2\,L/\delta}} \qquad \text{où} \qquad \alpha = \frac{\lambda - h\,\delta}{\lambda + h\,\delta}$$

3. Déterminer la puissance thermique $\mathscr{P}_{\text{ailette}\to\text{air}}$ passant de l'ailette à l'air puis la puissance $\mathscr{P}_{\text{paroi}\to\text{ailette}}$ en gardant A et B dans les calculs sans les remplacer par leurs expressions.

   Conclure.

4. Calculer le rapport de la puissance $\mathscr{P}_{\text{paroi}\to\text{ailette}}$ à la puissance que la paroi évacuerait à travers la surface $\pi\,r^2$ en l'absence de l'ailette (on supposera que le coefficient h est le même pour la paroi et pour l'ailette.)

   Quel est l'intérêt de l'ailette ?

Exercice 6 ÂGE DE LA TERRE SELON LORD KELVIN

La Terre est assimilée à un milieu semi-infini occupant tout le demi-espace $z > 0$. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z (comptée positivement) et du temps t. La planète a une conductivité λ, une masse volumique ρ et une capacité thermique massique c, toutes trois uniformes. On note $q(z,t)$ la densité de courant thermique.

1. Établir rapidement l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $q(z,t)$ (équation ①). On notera D la diffusivité thermique $D = \dfrac{\lambda}{\mu\, c}$.

Au milieu du XIX[e] siècle, Lord KELVIN a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément sa surface a été soumise à la température T_S. Depuis ce temps là, la planète se refroidirait. Lord KELVIN a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

2. Dans l'hypothèse de Lord KELVIN, quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers 0 et lorsqu'il tend vers l'infini ?
   Quelle doit être la densité de courant thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers 0 et lorsqu'il tend vers l'infini ?
3. On **admet** que la fonction $f(z,t) = -\dfrac{1}{\sqrt{D\,t}}\,\exp\left(-\dfrac{z^2}{4\,D\,t}\right)$ est solution de l'équation ①.
   Vérifier que la solution proposée par Lord KELVIN $q(z,t) = -\dfrac{A}{\sqrt{D\,t}}\,\exp\left(-\dfrac{z^2}{4\,D\,t}\right)$ où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est bien la bonne.
   Dessinez schématiquement la valeur absolue de la densité de courant thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.
4. On suppose que $A = a\,(T_0 - T_\text{S})^\alpha\,\lambda^\beta\,\rho^\gamma\,c^\delta$ où α, β, γ, δ sont des exposants éventuellement nuls et a une constante réelle.
   Calculer α, β, γ, δ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord KELVIN.
5. On peut montrer que $a = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.
   Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\dfrac{\partial T}{\partial z}$.
   Lord KELVIN a admis que $T_0 - T_\text{S}$ était de l'ordre de 1 000 à 2 000 K et que D est proche de 10^{-6} m^2.s^{-1}. L'augmentation de la température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de 30 K.km^{-1}.
   Quel âge de la Terre Lord KELVIN a-t-il déduit de son modèle ?
6. Que pensez-vous de l'estimation précédente de l'âge de la Terre ?
   Quel est (ou quels sont) le (ou les) ingrédients physiques que Lord KELVIN n'aurait pas dû négliger ?
   Pourquoi l'a-t-il (ou les a-t-il) négligé(s) ?

Exercice 7 SÉDIMENTATION

On disperse N molécules identiques, sphériques, de rayon R, de masse volumique μ dans un bécher de section S, rempli d'un liquide de masse volumique $\mu' < \mu$ et de viscosité η. Les particules sont soumises à leur poids et à une force de frottement, due à la viscosité de l'eau, dont l'expression est donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\,\pi\,\eta\,R\,\vec{v} = -h\,\vec{v}$.

On notera (Oz) l'axe verival ascendant et g la norme du champ de pesanteur terrestre.

1. Justifier que le mouvement des particules, observé expérimentalement, est rectiligne descendant. Déterminer la vitesse limite $\vec{v}_\ell$ des particules supposée atteinte très rapidement.
   Quelle est la durée caractéristique d'établissement du régime permanent ? On fera apparaître la masse « apparente » des particules : $m^\star = \left(1 - \dfrac{\mu'}{\mu}\right) m$.
2. Exprimer le vecteur densité de courant de particules associé à ce mouvement, $\vec{\jmath}_{\text{conv}}$ en fonction de la densité $c(z)$ des particules et de la vitesse $\vec{v}_\ell$.
3. Justifier, par la loi de Fick, qu'il existe un courant de particules ascendant. On note D le coefficient de diffusion.
4. Calculer la densité de particules $c(z)$ à l'altitude z en régime permanent.
   Commenter. On notera c_0 la densité de particules en $z = 0$.
5. L'ensemble étant en équilibre thermique à la température T, $c(z)$ est donnée par la loi de Boltzmann $c(z) = c_0 \exp\left(-\dfrac{m^\star\, g\, z}{k_\text{B}\, T}\right)$ où k_B est la constante de Boltzmann.
   Quelle relation simple a-t-on entre D et h ?
6. Définir et calculer la distance caractéristique d'évolution de $c(z)$ pour deux molécules de même masse volumique $\mu = 1{,}3.10^3$ kg.m^{-3} et de masse molaire différente : urée ($M_{\text{urée}} = 60$ g.mol^{-1} et $D_{\text{urée}} = 10^{-9}$ m^2.s^{-1}) et hémoglobine ($M_{\text{hémoglobine}} = 68\,000$ g.mol^{-1} et $D_{\text{hémoglobine}} = 5.10^{-11}$ m^2.s^{-1}) dans l'eau à 20 °. Conclure.
   On donne $\mathscr{N}_\text{A} = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1}, $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, $\mu' = 1{,}0.10^3$ kg.m^{-3} et $\eta = 10^{-3}$ Pl.

Exercice 8 Réacteur nucléaire unidimensionnel

On étudie un réacteur nucléaire à une dimension : la densité volumique de neutrons est $n(x,t)$. En moyenne, $\dfrac{n}{\tau}$ neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume, et, pour un neutron absorbé, K neutrons sont produits ($K > 1$). Enfin, leur diffusion dans le milieu satisfait à la loi de Fick, le coefficient de diffusion étant D. Le réacteur est situé entre les plans d'abscisses $x = -a$ et $x = a$. On impose $n(a,t) = n(-a,t) = 0$.

1. Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $n(x,t)$ (équation ①).
2. Dans cette question, on se place en régime permanent. Déterminer $n(x)$ sachant que $n(0) = n_0$.
3. On se place en régime quelconque. On cherche une solution de l'équation ① sous la forme $n(x,t) = f(x)\, g(t)$.
   Déterminer $n(x,t)$ et discuter de la stabilité de réacteur suivant les valeurs de la longueur $L = 2\,a$ du réacteur.

Exercice 9 Évaporation de l'éther

Un tube cylindrique de hauteur totale L est rempli sur une hauteur h d'éther liquide. À la surface de l'éther, la pression partielle d'éther est égale à la pression de vapeur saturante de l'éther à la température ambiante $T_0 = 293$ K. À la sortie du tube, la pression partielle de l'éther est négligeable.

On donne les grandeurs suivantes :

➜ masse molaire de l'éther : $M = 74{,}1$ g.mol^{-1} ;
➜ masse volumique de l'éther : $\mu = 626$ kg.m^{-3} ;
➜ coefficient de diffusion de l'éther dans l'air : $D = 1{,}5.10^{-5}$ m^2.s^{-1} ;
➜ pression de vapeur saturante de l'éther à 293 K : $P_{\text{sat}} = 0{,}583$ bar.

1. On suppose que la durée caractéristique de variation de hauteur $h(t)$ est beaucoup plus lente que la durée caractéristique de diffusion de l'éther dans l'air, de telle sorte que l'on puisse considérer que la diffusion de l'éther dans l'air se fait en régime quasi-permanent.

   En déduire la densité moléculaire $n(z,t)$ de la vapeur d'éther dans l'air en fonction de L, $h(t)$, z et de données. L'axe Oz sera pris dirigé vers le bas avec son origine en haut du tube.
2. Exprimer le nombre de molécules d'éther qui s'évaporent entre t et $t + \mathrm{d}t$.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la hauteur d'éther $h(t)$.

   En déduire la durée nécessaire à l'évaporation de l'éther contenu sur une hauteur de 15 cm dans un tube de 20 cm.
4. Vérifier l'hypothèse de régime quasi-stationnaire effectuée à la première question.