

Limites phénoménologiques

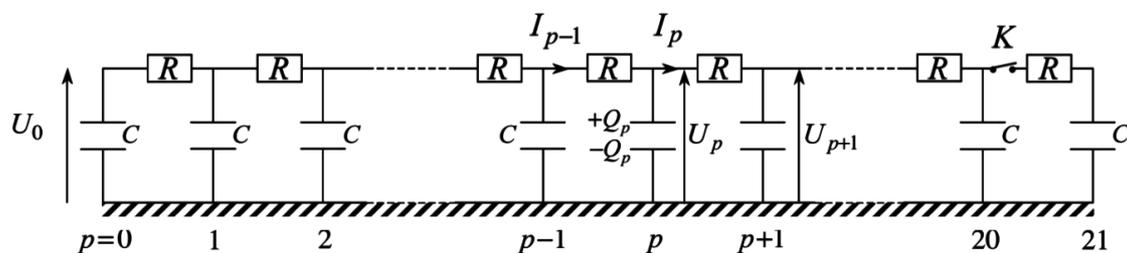
Le but de ce TP est d'approcher, sur deux expériences simples, des limites de phénomènes connus. C'est ainsi que, dans la première partie, un modèle discret de milieu permettra d'étudier, à certaines fréquences, la diffusion. La deuxième partie aura pour rôle de s'intéresser à l'analogie entre la propagation des ondes lumineuse et celles des ondes ultrasonores.

.....

I) Diffusion de charge électrique à une dimension

1°) Présentation

$N = 21$ condensateurs de capacité $C = 100$ nF sont alignés parallèlement (numérotés $p = 0, 1, 2, \dots, 20, 21$) et reliés d'un côté à la masse et de l'autre côté à la capacité voisine via une résistance $R = 1,5$ k Ω .



Des fiches sont présentes sur la plaquette du montage, permettant la mesure des tensions $U_p = Q_p/C$ aux bornes de la capacité de numéro p . Entre les positions $p = 20$ et $p = 21$ est placé un interrupteur K (en série avec une résistance R).

2°) Équation de diffusion de la charge

i. Mise en équations du problème

→ À l'aide des lois de KIRCHHOFF, montrez l'équation vérifiée par les tensions du montage

$$\tau \frac{dU_p}{dt}(t) = U_{p+1}(t) + U_{p-1}(t) - 2U_p(t) \quad (\heartsuit)$$

¿? Quelle est la valeur de τ ?

ii. Passage au modèle continu

L'équation précédente (en réalité, le système de N équations précédentes) n'est pas très simple à intégrer. Une approximation satisfaisante consiste à passer d'une tension indicée par p (\Leftrightarrow modèle *discret*) à un modèle *continu* où la position du condensateur est repérée par une grandeur *continue* x (\Leftrightarrow la position du condensateur sur la plaquette du montage)

$$U_p(t) \quad \longrightarrow \quad U(x,t)$$

La description des inconnues du problème passe donc d'une fonction (indicée) d'une variable (t) à une fonction de deux variables (x, t).

Soit a la distance séparant deux condensateurs successifs. Dans ces conditions, si x_p désigne la position du condensateur numéro p ($x_p = pa$), l'équation précédente devient

$$\tau \times \frac{\partial U}{\partial t}(x_p, t) = U(x_{p+1}, t) + U(x_{p-1}, t) - 2U(x_p, t)$$

Ce qui donne, au point x

$$\tau \times \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = U(x+a, t) + U(x-a, t) - 2U(x, t)$$

→ En effectuant un développement limité à l'ordre 2, montrer que cette équation se ramène à la suivante

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{avec} \quad D = \frac{a^2}{\tau} \quad (\text{**})$$

¿? Comment s'appelle cette équation ?

II) Régime stationnaire

1°) Étude théorique

Dans ces conditions, les dérivées temporelles sont nulles.

→ En intégrant l'équation (***) dans ces conditions, exprimer la loi de variation de U en fonction de x .

→ En reprenant l'équation aux différences (***), montrez que, sans approximations

$$U_p - U_{p+1} = U_k - U_{k+1} \quad \forall (p, k) \in [0, N]^2$$

¿? Á quoi la différence précédente est-elle directement reliée ? Quelle est donc la grandeur électrique constante en régime permanent ?

→ En considérant le montage représenté au début, donnez l'expression de U_p en fonction de U_0 .

¿? La situation décrite présente-t-elle beaucoup d'intérêt ?

Le condensateur $p = 20$ est court-circuité. Cela impose $U_{20} = 0$.

→ Établir l'expression de la tension U_p en fonction de U_0 et p

$$U_p = U_0 \left(1 - \frac{p}{20} \right)$$

→ Déduisez-en l'impédance équivalente du montage.

i. Étude expérimentale

→ Alimentez le montage à l'aide d'une alimentation stabilisée $U_0 = 10$ V.

→ **Court-circuitez** C_{20} .

→ Vérifiez alors en mesurant la tension aux bornes des condensateurs que vous obtenez bien les valeurs attendues.

→ **Ne court-circuitez plus** C_{20} .

→ Mesurez à l'aide d'un voltmètre les tensions U_p pour $p \in [1, 20]$.

→ Tracez le graphe $U_p = f(p)$ et vérifiez la loi théorique.

→ Mesurez à l'aide d'un ampèremètre l'intensité débitée par le générateur.

→ Déduisez-en l'impédance du montage et comparez à la valeur théorique.

2°) Régime sinusoïdal forcé

i. Étude théorique

À l'entrée du montage va désormais être imposée une tension sinusoïdale de la forme

$$U_0(t) = U(0,t) = E_0 \cos(\omega t)$$

Le but est de déterminer $U(x,t)$.

Cette étude n'est simple que dans le cadre du modèle continu pour un milieu semi-infini (ce qui correspondrait ici à un nombre infini de cellules RC). Les paragraphes qui suivent vont permettre de préciser les conditions dans lesquelles les résultats vont être applicables au montage considéré.

Résolution de l'équation de diffusion

Cherchons une solution par la méthode de séparation des variables en posant

$$U(x,t) = f(x) \times \cos(\omega t + \varphi)$$

La résolution sera plus commode avec la notation complexe, en introduisant :

$$\underline{U}(x,t) = \underline{f}(x) \times e^{j(\omega t + \varphi)} \quad U(x,t) = \Re(\underline{U}(x,t))$$

Il s'agit alors de déterminer s'il existe une fonction $\underline{f}(x)$ qui permet de vérifier l'équation (*).

→ Montrez alors que $\underline{f}(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\underline{f}''(x) - j \frac{\omega}{D} \underline{f}(x) = 0$$

→ Déduisez-en

$$\underline{f}(x) = \underline{A}e^{rx} + \underline{B}e^{-rx} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} \times (1 + j)$$

→ La tension ne pouvant diverger pour des raisons physiques quand $x \rightarrow \infty$, montrez finalement que

$$U(x,t) = U_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

→ Enfin, dans le cadre du modèle discret *infini*, concluez que

$$U_p(t) = E_0 e^{-p\sqrt{\pi\nu\tau}} \times \cos\left(\omega t - p\sqrt{\pi\nu\tau}\right) \quad \text{où} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Fréquence minimale d'étude

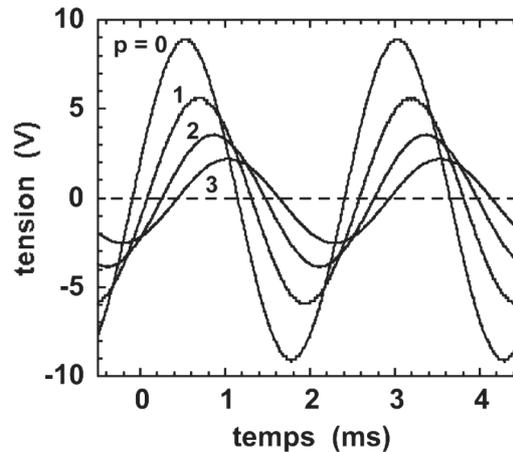
Pour pouvoir appliquer les résultats précédents au montage qui ne comporte qu'un nombre *fini* de cellules ($N = 21$), il faut que la différence entre $U_{21}(t)$ et $U_\infty(t)$ puisse être considérée comme négligeable.

→ Calculez numériquement τ à l'aide des valeurs des composants.

→ Déterminez la fréquence minimale ν_{\min} à partir de laquelle la tension $U_{21}(t)$ est toujours inférieure à $\frac{E_0}{100}$.

ii. Étude expérimentale

Afin de valider l'étude théorique précédente, vous allez mesurer à l'oscilloscope la tension $U_p(t)$ pour différentes valeurs de p . Les oscillogrammes auront l'allure suivante (ici sont superposés les graphes obtenus pour les quatre premières valeurs de p)



Étude de l'amplitude

Nous voyons sur la représentation précédente que l'amplitude A_p décroît en fonction de p . Plus précisément

$$A_p = E_0 \exp\left(-p \sqrt{\pi \nu \tau}\right)$$

Nous en déduisons donc que

$$\ln\left(\frac{A_p}{E_0}\right) = -p \sqrt{\pi \nu \tau}$$

Cela montre que le tracé de $\ln\left(\frac{A_p}{E_0}\right) = f(p)$ est une droite de pente $-\sqrt{\pi \nu \tau}$.

- En prenant $\nu_1 = 100$ Hz, relevez dans un tableau les valeurs $A_{p,100}$ de l'amplitude du signal pour $p \in [0,10]$.
 - Faites de même pour $\nu_2 = 400$ Hz.
 - Tracez les courbes $\ln\left(\frac{A_p}{E_0}\right) = f(p)$ pour les deux fréquences considérées.
 - En calculant la pente de chaque droite, déterminez les deux valeurs de τ mesurées et comparez-les à la valeur attendue.
- i? Pour quelle fréquence (la plus basse ou la plus élevée) la diffusion de charge à partir du générateur est-elle la plus efficace ?*

Étude du déphasage

Nous voyons aussi sur le graphique précédent que la tension $U_p(t)$ est en retard par rapport à $U_0(t)$. L'étude du déphasage entre U_0 et U_p permet donc aussi de mesurer τ .

- Pour les deux mêmes fréquences que précédemment, relevez le déphasage entre $U_0(t)$ et $U_p(t)$ pour $p \in [0,10]$.
- Montrez que ce déphasage varie linéairement en fonction de p .
- Tracerz les courbes du déphasage ψ en fonction de p .
- Mesurez la pente et comparez les deux valeurs ainsi déterminées de τ aux valeurs trouvées précédemment et à la valeur attendue.

3°) Réponse à un excitation périodique

- Alimentez maintenant le montage par une tension en créneaux, d'amplitude $E \approx 10$ V et de fréquence $\nu = 100$ Hz.
- Visualisez à l'oscilloscope la forme des signaux aux bornes des capacités $p = 0$ jusqu'à $p = 15$ et interprétez l'évolution quand p augmente.
- Mesurez l'amplitude du créneau et l'amplitude du signal pour $p = 10$ et vérifiez que les mesures sont en accord avec l'expression des coefficients de FOURIER d'un signal rectangulaire.

Les coefficients de FOURIER pour un signal rectangulaire de période T sont

$$f(t) = \begin{cases} -E & \text{pour } t \in \left] 0, \frac{T}{2} \right[\\ +E & \text{pour } t \in \left] \frac{T}{2}, T \right[\end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \underline{C}_n e^{j2\pi n t/T} \\ \text{avec :} \\ \underline{C}_n = \frac{2E}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \end{cases}$$

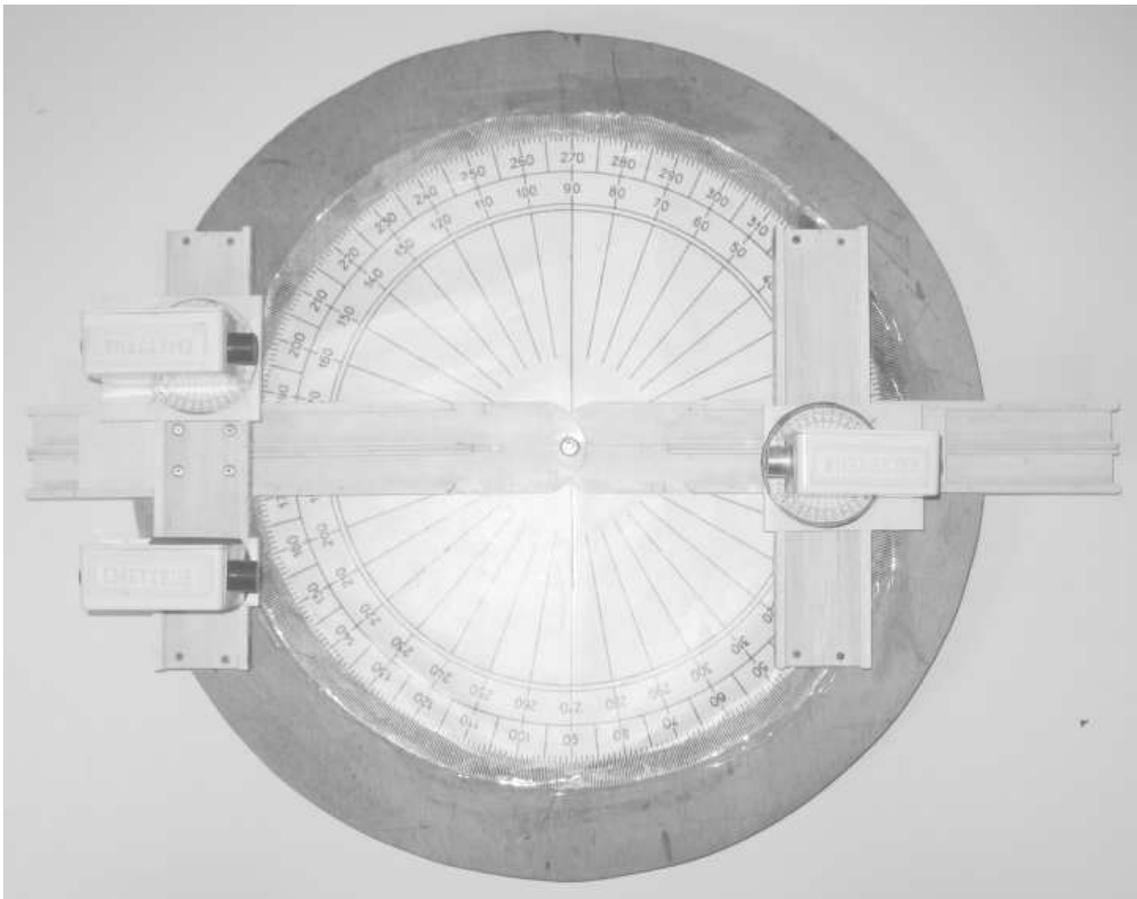
III) Ultrasons

1°) Première approche

i. Matériel

Pour étudier les ultrasons, vous disposez de deux émetteurs et d'un récepteur montés sur une plate forme. Les différentes réglettes permettent de déplacer émetteur et récepteur selon de nombreux degrés de liberté :

- autour d'un axe propre ;
- autour d'un axe passant par le centre de la plate-forme ;
- longitudinalement le long d'un rayon ;
- transversalement à un rayon.



ii. Réglages de base

→ Reliez un seul émetteur au GBF (le second pouvant être retiré du dispositif) et visualisez sur l'oscilloscope la tension délivrée par le GBF ainsi que celle à la sortie du récepteur.

L'émission se fait sur une large plage de fréquence mais la détection est optimisée autour d'une fréquence de 40 kHz.

→ Mettez émetteur et récepteur bien en face l'un de l'autre et réglez la fréquence de telle sorte que l'amplitude reçue soit maximale. Ne déréglez plus le GBF.



Il est possible que le GBF dérive en fréquence durant le TP, recherchez alors expérimentalement la fréquence occasionnant un maximum d'amplitude en réponse.

iii. Mesure de la célérité du son

¿? Peut-on mesurer directement la vitesse du son avec un tracé temporel de l'onde émise et un tracé temporel de l'onde reçue lorsque ces deux ondes sont sinusoïdales ? Si oui, comment, sinon pourquoi ?

¿? Dans le cas d'une onde sinusoïdale, de combien faut-il déplacer le récepteur pour obtenir un décalage d'une période ?

→ Décalez le récepteur de manière et repérez de combien le récepteur s'est déplacé ainsi que le nombre de périodes de décalage.

→ Déduisez-en la longueur d'onde λ et la célérité du son c .

→ Estimez l'incertitude.

iv. Loi de la réflexion

- Placez :
- le récepteur et l'émetteur aux extrémités des réglettes de la maquette circulaire sur 0° et 90°
 - la petite plaque au centre de la plaque.
- Tournez la plaque de réflexion afin d'obtenir un signal d'amplitude maximal.
- Vérifiez qu'alors l'angle d'incidence i est égal à l'angle de réflexion r .
- Faites un relevé de i et r variant d'environ 15° à 60° .

i								
r								

- Faites la régression linéaire $r = f(i)$ et vérifiez la loi de la réflexion.

2°) Aspect ondulatoire**i. Lobe d'émission**

- Mettez l'émetteur au centre de la maquette (veillez à ce que l'orifice de l'émetteur soit le plus exactement possible au centre).
- Relevez l'amplitude reçue par l'émetteur en faisant varier sa position azimutale.

θ								
A								
θ								
A								

- Comment interpréter les résultats ?

ii. Diffraction

Les ondes sonores peuvent, tout comme les ondes lumineuses, être diffractées. Pour mettre ce phénomène en évidence, on dispose d'une petite fente de taille réglable.

i? Quelle doit être la taille de la fente de manière à pouvoir observer la diffraction ?

- L'émetteur étant toujours au centre de la plaque, installez la fente diffractante par dessus et faites un nouveau relevé d'amplitude en fonction de la position azimutale du récepteur.

θ								
A								

iii. Interférences

- Placez le 2^e émetteur sur la réglette et positionnez-le à environ $d = 5$ cm du premier, les deux étant symétriques par rapport à l'axe.
- Éloignez autant que possible les émetteurs et le récepteur.
- En déplaçant *transversalement* le récepteur, repérez la position de quelques maxima et de quelques minima.

x								
U								

i ? À quelle grandeur est analogue l'éclairement que l'on calcule avec les ondes lumineuse? En déduire ce qui correspond aux franges brillantes et aux franges sombres.

i ? Dans le cas des interférences à deux ondes, l'interfrange est « $i = \frac{\lambda D}{a}$ »; quelles sont les grandeurs analogues ici à λ , D et a ?

- Mesurez l'interfrange et comparez avec le résultat théorique.
- Modifiez l'écart entre les deux sources et remesurez l'interfrange.
- Concluez.